517
Г95

517
Г95

Э. ГУРСА,

профессоръ Faculté des Sciences въ Парижѣ.

КУРСЪ

АТЕМАТИЧЕСКАГО АНАЛИЗА.

ТОМЪ I.

ПРОИЗВОДНЫЯ И ДИФФЕРЕНЦІАЛЫ.
ОПРЕДѢЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.— РАЗЛОЖЕНІЯ ВЪ РЯДЫ.
ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ ПРИЛОЖЕНІЯ.

РАЗРѢШЕННЫЙ АВТОРОМЪ ПЕРЕВОДЪ СЪ ФРАНЦУЗСКАГО

А. И. НЕКРАСОВА,

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Б. К. МЛОДЗѢЕВСКАГО,

профессора Московскаго университета.

343
Б 2
БИБЛІОТЕКА

МОСКВА.
Изданіе Торговаго Дома «В. И. Знаменскій и К°».
Большая Грузинская улица, д. Шамова.
1911.

Э. ГУРСА,

профессоръ Faculté des Sciences въ Парижѣ.

КУРСЪ
МАТЕМАТИЧЕСКАГО АНАЛИЗА.

ТОМЪ I.

ПРОИЗВОДНЫЯ И ДИФФЕРЕНЦІАЛЫ.
ОПРЕДѢЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. — РАЗЛОЖЕНІЯ ВЪ РЯДЫ.
ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ ПРИЛОЖЕНІЯ.

524041

РАЗРѢШЕННЫЙ АВТОРОМЪ ПЕРЕВОДЪ СЪ ФРАНЦУЗСКАГО

А. И. НЕКРАСОВА,

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ

Б. К. МЛОДЗѢЕВСКАГО,

профессора Московскаго университета.

Цѣна 6 руб.

МОСКВА.
Изданіе Торговаго Дома «В. И. Знаменскій и К°»
Большая Грузинская улица, д. Шамова.
1911.

Установа адукацыі
"Віцебскі дзяржаўны універсітэт
імя П.М.Машарава"
БІБЛІЯТЭКА

ПРОВЕРЕНО
1958 г.



Типографія Г. Лисснера и Д. Совко.
Воздвиженка, Крестовоздвижен. пер., д. 9.

КУРСЪ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО АНАЛИЗА.

Отъ редактора.

Настоящій переводъ перваго тома извѣстнаго руководства Goursat сдѣланъ съ разрѣшенія автора съ перваго французскаго изданія 1902 г. съ тѣми дополненіями, которыя были внесены авторомъ въ англійскій переводъ его книги, сдѣланный Hedrick'омъ, профессоромъ университета въ Миссури. Когда уже почти вся книга была напечатана, авторомъ были присланы оттиски перваго выпуска второго изданія; заключающіяся въ немъ дополненія обработаны переводчикомъ въ видѣ особаго приложенія въ концѣ тома.

Б. Млодзѣевскій.

1 іюля 1910 г.

Предисловіе автора къ первому изданію.

Этотъ трудъ представляетъ изложеніе съ незначительными измѣненіями курса, читаемаго мною на Faculté des Sciences. Въ нѣкоторыхъ мѣстахъ я нѣсколько измѣнилъ порядокъ, котораго держался въ преподаваніи, чтобы соединить въ одномъ томѣ все, касающееся функцій дѣйствительнаго перемѣннаго за исключеніемъ дифференціальныхъ уравненій. Такъ какъ дифференціальное обозначеніе не входитъ въ программу спеціальнаго математическаго класса, то оно изложено мною съ самаго начала, и я предполагаю у читателя только умѣніе находить производныя.

Такъ какъ математическій анализъ есть, по существу, ученіе о непрерывныхъ многообразіяхъ, то, казалось бы, что логически всякій курсъ анализа долженъ начинаться съ изученія ирраціональныхъ чиселъ. Однако, я считалъ понятіе объ ирраціональныхъ числахъ уже извѣстнымъ. Теорія несоизмѣримыхъ величинъ изложена въ общеизвѣстныхъ прекрасныхъ трудахъ, и притомъ такъ хорошо, что я считалъ безполезнымъ къ ней возвращаться. Что касается до другихъ понятій, лежащихъ въ основѣ анализа, каковы понятія верхняго предѣла, опредѣленнаго интеграла, двойного интеграла и проч., то я постарался ввести ихъ со всею желательною строгостью, оставляя изложеніе элементарнымъ и не стремясь къ излишней для учебника общности.

Нѣкоторые параграфы, напечатанные мелкимъ шрифтомъ, содержатъ или разобранные подробно примѣры, или дополненія; читатель безъ ущерба можетъ ихъ пропустить при первомъ чтеніи книги. Въ концѣ каждой главы приведено нѣ-

сколько упражненій. Большинство изъ нихъ было предложено на экзаменахъ и составляетъ непосредственное приложеніе методовъ, изложенныхъ въ соотвѣтствующей главѣ. Другія упражненія, отмѣченныя звѣздочкою, нѣсколько труднѣе; они большею частью заимствованы изъ оригинальныхъ мемуаровъ, на которыя я и ссылаюсь.

Э. Гурса.

27 января 1902 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

Отъ редактора V
Предисловіе автора къ первому изданію VII

ГЛАВА I.

Производныя и дифференціалы.

I. — Функціи одного перемѣннаго . . . . . 1—13

1. Предѣлы. — 2. Функціи. — 3. Непрерывность. — 4. Примѣры прерывности. — 5. Производныя. — 6. Высшія производныя. — 7. Теорема Ролля. — 8. Формула конечныхъ приращеній. — 9. Обобщеніе формулы конечныхъ приращеній.

II. — Функціи многихъ перемѣнныхъ . . . . . 13—21

10. Общія замѣчанія. — 11. Частныя производныя. — 12. Касательная плоскость къ поверхности. — 13. Переходъ отъ разностей къ производнымъ.

III. — Дифференціальное обозначеніе . . . . . 22—28

14. Дифференціалы. — 15. Полные дифференціалы. — 16. Высшіе дифференціалы сложной функціи. — 17. Дифференціалъ произведенія. — 18. Однородныя функціи. — 19. Приложенія. — Упражненія.

ГЛАВА II.

Неявныя функціи. — Функціональный опредѣлитель. — Замѣна перемѣнныхъ.

I. — Неявныя функціи . . . . . 39—56

20. Изслѣдованіе одного частнаго случая. — 21. Производныя отъ неявныхъ функцій. — 22. Приложеніе къ поверхностямъ. — 23. Высшія производныя. — 24. Частныя производныя. — 25. Общая теорема. — 26. Обращеніе функцій. — 27. Касательныя къ кривой въ пространствѣ.

II. Функціональные опредѣлители. . . . . 57—65

28. Основное свойство. — 29. Другое свойство опредѣлителя Якоби. — 30. Опредѣлитель Гессе.

Стран.

III. — Замѣна перемѣнныхъ . . . . . 65—94

31. Задача I. — 32. Приложеніе. — 33. — 34. Задача II. — 35. Преобразованія плоскихъ кривыхъ. — 36. Преобразованія прикосновенія. — 37. Гомографическія преобразованія. — 38. Задача III. — 39. Другой способъ. — 40. Задача IV. — 41. Преобразованіе Лежандра. — 42. Преобразованіе Ампера. — 43. Уравненіе потенціала въ криволинейныхъ координатахъ. — Упражненія.

ГЛАВА III.

Формула Тэлора. — Элементарныя приложенія. Maxima и minima.

I. — Формула и рядъ Тэлора. — Общія теоремы. 95—115

44. Общая формула. — 45. Приложеніе къ кривымъ. — 46. Общій методъ разложенія. — 47. Неопредѣленныя выраженія. — 48. Рядъ Тэлора. — 49. Разложеніе $\log(1+x)$. — 50. Разложеніе $(1+x)^m$. — 51. Распространеніе на функціи многихъ перемѣнныхъ. — 52.

II. — Особыя точки. — Maxima и minima . . . . . 115—139

53. Особыя точки. — 54. — 55. Maxima и minima функцій одного перемѣннаго. — 56. Функціи двухъ перемѣнныхъ. — 57. Изслѣдованіе сомнительнаго случая. — 58. — 59. Функціи трехъ перемѣнныхъ. — 60. Разстояніе точки отъ поверхности. — 61. Maxima и minima неявныхъ функцій. — 62. Другой примѣръ. — 63. Теорема Даламбера. — Упражненія.

ГЛАВА IV.

Опредѣленные интегралы.

I. — Различные методы квадратуры. . . . . 140—147

64. Квадратура параболы. — 65. Общій методъ. — 66. Примѣры. — 67. Начальныя функціи.

II. — Опредѣленные интегралы. — Геометрическія понятія, съ ними связанныя . . . . . 147—174

68. Верхніе и нижніе предѣлы. — 69. Колебаніе. — 70. Свойства непрерывныхъ функцій. — 71. Суммы S и s. — 72. Интегрируемыя функціи. — 73. Теорема Дарбу. — 74. Формула средняго значенія. — 75. Вторая формула средняго значенія. — 76. Аналитическое доказательство существованія начальныхъ функцій. — 77. Указатели. — 78. Площадь кривой. — 79. — 80. Длина дуги кривой. — 81. Направляющіе косинусы. — 82. Измѣненіе отрѣзка прямой. — 83. Теоремы Гревса и Шаля.

Стран.

III.—Замѣна перемѣнныхъ.—Интегрированіе по частямъ . . . . . 174—182

84. Замѣна перемѣнныхъ. — 85. Интегрированіе по частямъ. — 86. Формула Тэлора. — 87. Трансцендентность числа e. — 88. Полиномы Лежандра.

IV.—Распространеніе понятія объ интегралѣ.—Криволинейные интегралы . . . . . 183—201

89. Подъинтегральная функція обращается въ безконечность. — 90. Одинъ изъ предѣловъ обращается въ безконечность. — 91. — 92. Функція $\Gamma(a)$. — 93. Криволинейные интегралы.—94. Площадь замкнутой кривой.—95. Площадь кривой въ полярныхъ координатахъ.—96. Значеніе интеграла $\frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$.

V.—Функціи, представляемыя опредѣленными интегралами . . . . . 201—204

97. Дифференцированіе подъ знакомъ интеграла. — 98. Примѣры прерывности.

VI. Приближенное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ. . . . . 204—216

99. Общія основанія. — 100. Интерполированіе. — 101. Методъ Гаусса. — 102. Планиметръ Амслера. — Упражненія.

ГЛАВА V.

Неопредѣленные интегралы.

I. Интегрированіе раціональныхъ функцій . 217—235

103. Общій способъ. — 104. Методъ Эрмита. — 105. Интегралы $\int R(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})\,dx$.—106. Площадь гиперболы.—107. Спрямленіе параболы. — 108. Уникурсальныя кривыя. — 109. Интегралы отъ дифференціальныхъ биномовъ.

II. — Интегралы эллиптическіе и ультра-эллиптическіе . . . . . 236—247

110. Приведеніе интеграловъ. — 111. Случай интегрируемости въ алгебраическомъ видѣ. — 112. Эллиптическіе интегралы. — 113. Псевдо-эллиптическіе интегралы.

III. — Интегрированіе трансцендентныхъ функцій. 247—260

114. Интегрированіе раціональныхъ функцій отъ $\sin x$ и $\cos x$. — 115. Формулы приведенія. — 116. Формула Уэллиса. — 117. Интегралы $\int \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\ldots dx$. — 118. Интегралы $\int R(x)\,e^{\alpha x}\,dx$. — 119. Разные интегралы. — Упражненія.

ГЛАВА VI.

Двойные интегралы.

Стран.

I. — Двойные интегралы. — Способы вычисленія. — Формула Грина . . . . . 261—275

120. Непрерывныя функціи двухъ перемѣнныхъ. — 121. Двойные интегралы. — 122. Объемы. — 123. Вычисленіе двойного интеграла. — 124. — 125. Аналогія съ простыми интегралами. — 126. Формула Грина.

II. — Замѣна перемѣнныхъ. Площадь поверхности . . . . . 276—290

127. Предварительная формула. — 128. Замѣна перемѣнныхъ. Первый способъ. — 129. Примѣры. — 130. Замѣна перемѣнныхъ. Второй способъ. — 131. Площадь кривой поверхности. — 132. Элементъ поверхности.

III. — Расширеніе понятія двойного интеграла. — Интегралы по поверхности . . . . . 291—298

133. Интегралы, у которыхъ область интегрированія безконечна или подъинтегральная функція прерывна. — 134. Функція $B(p, q)$. — 135. Интегралы по поверхности. — 136. Формула Стокса.

IV. Аналитическія и геометрическія приложенія . . . . . 298—310

137. Вычисленіе объемовъ. — 138. Объемъ, ограниченный линейчатою поверхностью. — 139. Задача Вивіани. — 140. Вычисленіе нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ. — 141. Приближенное значеніе $\log \Gamma(n+1)$. — 142. Теорема Даламбера. — Упражненія.

ГЛАВА VII.

Кратные интегралы. — Интегрированіе полныхъ дифференціаловъ.

I. — Кратные интегралы. — Замѣна перемѣнныхъ. 311—329

143. Тройные интегралы. — 144. — 145. Замѣна перемѣнныхъ. — 146. Элементъ объема. — 147. Эллиптическія координаты. — 148. Интегралы Дирикле. — 149. Формула Остроградскаго (Грина). — 150. Кратные интегралы.

II. — Интегрированіе полныхъ дифференціаловъ. 329—344

151. Общій методъ. — 152. Изслѣдованіе интеграла $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (P\,dx + Q\,dy)$. — 153. Періоды. — 154. Общіе корни двухъ уравненій. — 154. Обобщеніе предыдущихъ результатовъ. — Упражненія.

ГЛАВА VIII.

Разложенія въ ряды.

Стран.

I. — Общія свойства рядовъ. — Признаки сходимости. . . . . 345—372

156. Опредѣленія и общія положенія. — 157. — 158. Ряды съ положительными членами. — 159. Признаки Коши и Даламбера. — 160. Примѣненіе наибольшаго изъ предѣловъ. — 161. Теорема Коши. — 162. Логариѳмическіе признаки. — 163. Признаки Раабе и Дюгамеля. — 164. Ряды абсолютно сходящіеся. — 165. Ряды условно сходящіеся, или полусходящіеся. — 166. Теорема Абеля.

II. — Ряды съ мнимыми членами. — Ряды кратные. . . . . 373—384

167. Опредѣленія. — 168. Умноженіе рядовъ. — 169. Двойные ряды. — 170. — 171. Кратные ряды. — 172. Обобщеніе теоремы Коши.

III. — Ряды съ перемѣнными членами. — Ряды равномѣрно сходящіеся. . . . . 385—399

173. Опредѣленіе равномѣрной сходимости. — 174. Интегрированіе и дифференцированіе рядовъ. — 175. Приложеніе къ дифференцированію подъ знакомъ интеграла. — 176. Примѣры. — Упражненія.

ГЛАВА IX.

Цѣлые ряды. — Тригонометрическіе ряды.

I. — Цѣлые ряды съ однимъ перемѣннымъ. . . . 400—422

177. Область сходимости. — 178. Цѣлый рядъ, какъ непрерывная функція перемѣннаго. — 179. Производныя отъ цѣлаго ряда. — 180. Распространеніе формулы Тэлора. — 181. Усиливающія функціи. — 182. Подстановка ряда въ рядъ — 183. Дѣленіе цѣлыхъ рядовъ. — 184. Разложеніе $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$.

II. — Цѣлые ряды со многими перемѣнными . . 422—427

185. Общія свойства. — 186. Усиливающія функціи.

III. — Неявныя функціи. — Аналитическія кривыя и поверхности. . . . . 428—441

187. Неявная функція одного перемѣннаго. — 188. Общая теорема. — 189. Формула Лагранжа. — 190. Обращеніе функцій. — 91. Аналитическія функціи. — 192. Плоскія кривыя. — 193. Кривыя двойной кривизны. — 194. Поверхности.

Стран.

IV. — Тригонометрическіе ряды. — Ряды иного вида. . . . . 441—458

195. Вычисленіе коэффиціентовъ. — 196. Изслѣдованіе интеграла $\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx$. — 197. Ряды Фурье. — 198. Примѣры. — 199. Разложеніе непрерывной функціи. Теорема Вейерштрасса. — 200. Непрерывная функція, не имѣющая производной. — Упражненія.

ГЛАВА X.

Плоскія кривыя.

I. — Огибающія кривыя. . . . . 459—467

201. Разысканіе огибающихъ. — 202. — 203. Огибающая прямой линіи. — 204. Огибающая окружности.

II. — Кривизна. . . . . 467—477

205. Радіусъ кривизны. — 206. Развертки. — 207. Циклоида. — 208. Цѣпная линія. — 209. Трактриса. — 210. Естественное уравненіе кривой.

III. — Прикосновеніе плоскихъ кривыхъ . . . . 478—488

211. Порядокъ прикосновенія. — 212. Аналитическій методъ. — 213. Соприкасающіяся кривыя. — Упражненія.

ГЛАВА XI.

Кривыя двойной кривизны.

I. — Соприкасающаяся плоскость . . . . . 489—496

215. Опредѣленіе и уравненіе. — 216. Стаціонарная соприкасающаяся плоскость. — 217. Стаціонарныя касательныя. — 218. Приложеніе къ нѣкоторымъ кривымъ.

II. — Огибающія поверхности. . . . . 496—506

219. Поверхности съ однимъ параметромъ. — 220. Поверхности, зависящія отъ двухъ параметровъ. — 221. Разгибающіяся поверхности. — 222. Дифференціальное уравненіе разгибающихся поверхностей. — 223. Огибающая семейства кривыхъ двойной кривизны.

III. — Кривизна и кручение кривыхъ двойной кривизны . . . . . 506—526

224. Сферическая индикатриса. — 225. Радіусъ кривизны. — 226. Главная нормаль. Центръ кривизны. — 227. Полярная прямая. Полярная поверхность. — 228. Кручение. — 229. Формулы Френе. — 230. Разложенія координатъ x, y, z по степенямъ s. — 231. Развертывающія и развертки. — 232. Винтовыя линіи. — 233. Кривыя Бертрана.

Стран.

IV. — Прикосновеніе кривыхъ двойной кривизны. Прикосновеніе кривыхъ и поверхностей . . . . . 526—538

234. Прикосновеніе кривыхъ. — 235. Соприкасающіяся кривыя. — 236. Прикосновеніе кривой съ поверхностью. — 237. Соприкасающійся шаръ. — 238. Прямыя, соприкасающіяся съ данною поверхностью. — Упражненія.

ГЛАВА XII.

Поверхности.

I. — Кривизна кривыхъ, проведенныхъ на поверхности . . . . . 539—549

239. Основная формула. Теорема Менье. — 240. Теоремы Эйлера. Индикатриса. — 241. Главные радіусы кривизны.

II. — Асимптотическія линіи. — Сопряженныя линіи . . . . . 550—559

242. Опредѣленіе и свойства асимптотическихъ линій. — 243. Дифференціальное уравненіе асимптотическихъ линій въ криволинейныхъ координатахъ. — 244. Асимптотическія линіи линейчатыхъ поверхностей. — 245. Сопряженныя линіи.

III. — Линіи кривизны . . . . . 559—573

246. Опредѣленіе и свойства. — 247. Развертка поверхности. — 248. Формулы Родрига. — 249. Уравненіе линій кривизны въ криволинейныхъ координатахъ. — 250. Теорема Іоахимсталя. — 251. Теорема Дюпена. — 252. Приложеніе къ нѣкоторымъ семействамъ поверхностей.

IV. — Семейства прямыхъ линій . . . . . 574—590

253. Линейчатыя поверхности. — 254. Геометрическое опредѣленіе параметра распредѣленія. — 255. Конгруэнціи. Фокальныя поверхности. — 256. Конгруэнціи нормалей. — 257. Теорема Малюса. — 258. Комплексы. — Упражненія.

Дополненія . . . . . 591—622

1. Ирраціональныя числа. — 2. Сѣченіе въ области дѣйствительныхъ чиселъ. — 3. Наибольшій изъ предѣловъ. — 4. Функціи. — 5. Непрерывныя функціи. — 6. Прерывныя функціи. — 7. Монотонныя функціи. — 8. Функціи съ ограниченнымъ измѣненіемъ. — 9. Обобщеніе понятія производной. — 10. Непрерывныя кривыя. — 11. Длина дуги кривой. — 12. Площадь замкнутой кривой. — 13. Теоремы существованія неявныхъ функцій.

Алфавитный указатель . . . . . 625—630

КУРСЪ
МАТЕМАТИЧЕСКАГО АНАЛИЗА.

ГЛАВА I.

Производныя и дифференціалы.

I. — ФУНКЦІИ ОДНОГО ПЕРЕМѢННАГО.

1. Предѣлы. — Когда послѣдовательныя значенія перемѣннаго x все болѣе и болѣе приближаются къ постоянному количеству a, такъ что абсолютное значеніе разности $x-a$ наконецъ дѣлается и остается меньшимъ всякаго заранѣе даннаго числа, то говорятъ, что перемѣнное x имѣетъ своимъ предѣломъ постоянное a. Это опредѣленіе даетъ намъ признакъ, по которому мы можемъ узнать, является ли a предѣломъ перемѣннаго x. Чтобы a было предѣломъ перемѣннаго x, необходимо и достаточно, чтобы, при данномъ сколь угодно маломъ положительномъ числѣ ε, наступилъ такой моментъ, начиная съ котораго абсолютное значеніе $x-a$ оставалось постоянно меньше ε при всѣхъ значеніяхъ, которыя можетъ принять перемѣнное x.

Въ геометріи и алгебрѣ мы имѣемъ много примѣровъ предѣловъ. Напримѣръ, перемѣнное количество $x=\frac{a^2-m^2}{a-m}$ имѣетъ предѣломъ $2a$, когда m стремится къ a; въ самомъ дѣлѣ, достаточно взять абсолютное значеніе $m-a$ меньшимъ ε, чтобы абсолютное значеніе $x-2a$ было также меньше ε. Точно также перемѣнное $x=a-\frac{1}{n}$ при n цѣломъ и положительномъ имѣетъ предѣломъ a, когда число n неограниченно возрастаетъ; дѣйствительно, достаточно взять n больше $\frac{1}{\varepsilon}$, чтобы $a-x$ было меньше ε. Изъ этихъ примѣровъ видно, что послѣдовательныя значенія перемѣннаго x, когда оно стремится къ своему предѣлу, могутъ составлять или непрерывную или прерывную послѣдовательность.

Вообще, очень трудно найти предѣлъ перемѣннаго количества. Слѣдующее предложеніе, которое мы принимаемъ, какъ очевидное, позволяетъ во многихъ случаяхъ утверждать, что предѣлъ существуетъ.

Всякое перемѣнное количество, которое никогда не убываетъ и которое остается меньше постояннаго количества L, стремится къ предѣлу l, меньшему или равному L.

Всякое перемѣнное количество, которое никогда не возрастаетъ и которое остается больше постояннаго количества L', стремится къ предѣлу l', большему или равному L'.

Напримѣръ, если члены знакоположительнаго ряда относительно меньше членовъ другого сходящагося ряда, также знакоположительнаго, то можно утверждать, что и первый рядъ сходящійся; въ самомъ дѣлѣ, сумма Σ_n n первыхъ членовъ перваго ряда, очевидно, возрастаетъ вмѣстѣ съ указателемъ n, и въ то же время эта сумма всегда меньше суммы S второго ряда.

2. Функціи. — Если два перемѣнныхъ количества связаны такимъ образомъ, что значеніе одного зависитъ отъ значенія другого, то говорятъ, что эти количества суть функціи одно другого. Одно изъ нихъ, измѣненія котораго мы считаемъ произвольными, называется перемѣннымъ независимымъ. Пусть будетъ x это перемѣнное, и пусть оно можетъ принимать, напримѣръ, всѣ значенія, заключающіяся между двумя данными числами a и b ($a<b$). Обозначимъ черезъ y другое перемѣнное, такое, чтобы каждому значенію x, заключенному между a и b, — равно какъ и каждому изъ предѣльныхъ значеній a, b, — соотвѣтствовало вполнѣ опредѣленное значеніе y. Въ этомъ случаѣ y называется функціею отъ x, опредѣленною въ промежуткѣ (a, b), и эта зависимость обозначается равенствомъ $y=f(x)$. Напримѣръ, можетъ быть, что значеніе y есть результатъ нѣкоторыхъ ариѳметическихъ дѣйствій, выполненныхъ надъ значеніемъ x; такъ получаются простѣйшія функціи, изучаемыя въ элементарной математикѣ: многочлены, раціональныя функціи, радикалы и проч.

Функція можетъ быть также опредѣлена графически. Возьмемъ на плоскости двѣ оси координатъ Ox и Oy. Проведемъ черезъ двѣ точки A и B этой плоскости дугу кривой ACB произвольнаго вида, такъ чтобы каждая прямая, параллельная оси Oy, встрѣчала эту дугу не болѣе, чѣмъ въ одной точкѣ;

тогда ордината точки этой кривой будетъ функціею абсциссы. Дуга ACB можетъ даже состоять изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ частей, принадлежащихъ различнымъ кривымъ, какъ-то: изъ отрѣзковъ прямой, дугъ круга и проч. Короче сказать, можно установить совершенно произвольный законъ, по которому получаются значенія перемѣннаго y изъ соотвѣтствующаго значенія перемѣннаго x. Слово функція, взятое въ наиболѣе широкомъ смыслѣ, значитъ не что иное, какъ слѣдующее: каждому значенію перемѣннаго x соотвѣтствуетъ значеніе перемѣннаго y.

3. Непрерывность. — Опредѣленіе тѣхъ функцій, къ которымъ прилагается исчисленіе безконечно малыхъ, болѣе ограничено. Пусть будетъ $y=f(x)$ функція, опредѣленная въ промежуткѣ (a, b); возьмемъ значеніе x_0, заключающееся въ этомъ промежуткѣ, и сосѣднее съ нимъ значеніе x_0+h, заключающееся въ томъ же промежуткѣ. Если при приближеніи абсолютнаго значенія h къ нулю разность $f(x_0+h)-f(x_0)$ также стремится къ нулю, то функція $f(x)$ называется непрерывною при значеніи x_0. На основаніи опредѣленія предѣла можно также сказать, что функція $f(x)$ непрерывна при $x=x_0$, если для всякаго сколь угодно малаго положительнаго числа ε можно найти такое соотвѣтствующее положительное число η, чтобы было

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$$

для всякаго значенія h, меньшаго η по абсолютному значенію*). Функція $f(x)$ называется непрерывною въ промежуткѣ (a, b), если она непрерывна при всякомъ значеніи x, заключающемся въ этомъ промежуткѣ, и если разности

$$f(a+h)-f(a), \quad f(b-h)-f(b)$$

стремятся къ нулю, когда разность h стремится къ нулю, оставаясь положительною.

Во всѣхъ курсахъ алгебры доказывается, что многочлены, раціональныя функціи, функціи показательныя, логариѳмическія, тригонометрическія и обратныя непрерывны при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго, кромѣ нѣкоторыхъ особыхъ, при которыхъ эти функціи перестаютъ быть непрерывными. Изъ опредѣленія непрерывной функціи слѣдуетъ также, что сумма или произведеніе произвольнаго числа непрерывныхъ функцій есть также функція непрерывная; то же самое относится и къ частному двухъ непрерывныхъ функцій за исключеніемъ тѣхъ зна-

*) Символъ $|a|$ обозначаетъ абсолютное значеніе числа a.

ченій перемѣннаго, которыя обращаютъ знаменатель въ нуль.

Я не буду здѣсь объяснять, почему мы принимаемъ, что функціи, опредѣляемыя физически, непрерывны, по крайней мѣрѣ вообще.

Изъ свойствъ непрерывныхъ функцій мы укажемъ здѣсь на два слѣдующихъ; они кажутся очевидными, но тѣмъ не менѣе они составляютъ настоящія теоремы, строгое доказательство которыхъ будетъ приведено далѣе*).

I. Если функція $y=f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ (a, b), и если N есть число, заключающееся между $f(a)$ и $f(b)$, то уравненіе $f(x)=N$ имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень, заключающійся между a и b.

II. Существуетъ, по крайней мѣрѣ, одно значеніе x, принадлежащее промежутку (a, b) (включая a и b), при которомъ y принимаетъ значеніе M, большее или, по крайней мѣрѣ, равное всякому другому значенію функціи въ томъ же самомъ промежуткѣ. Точно также существуетъ значеніе x, при которомъ y принимаетъ значеніе m, меньшее или, по крайней мѣрѣ, равное всякому другому значенію функціи въ томъ же самомъ промежуткѣ.

Числа M и m суть наибольшее и наименьшее значенія функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b). Понятно, что значеніе x, при которомъ $f(x)$ принимаетъ свое наибольшее значеніе M, можетъ совпадать съ однимъ изъ предѣловъ a или b; то же относится и къ значенію x, соотвѣтствующему наименьшему значенію функціи. Изъ соединенія предыдущихъ предложеній непосредственно вытекаетъ, что уравненіе $f(x)=N$ имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень, заключающійся между a и b, если N заключается между M и m.

4. Примѣры прерывности. — Функціи, которыя мы будемъ изучать, вообще, непрерывны, но онѣ могутъ не быть такими при нѣкоторыхъ исключительныхъ значеніяхъ перемѣннаго. Вотъ нѣсколько наиболѣе часто встрѣчающихся примѣровъ прерывности.

Функція $y=\frac{1}{x-a}$ непрерывна при всякомъ значеніи $x=x_0$, отличномъ отъ a. Дѣйствіе, при помощи котораго мы выводимъ

*) См. главу IV.

значеніе y изъ значенія x, не имѣетъ никакого смысла, если x принимаетъ значеніе a; но мы замѣчаемъ, что, при x очень близкомъ къ a, y очень велико по абсолютному значенію, и притомъ положительно или отрицательно смотря по тому, будетъ ли x больше или меньше a. Когда разность $x-a$ все болѣе и болѣе уменьшается, абсолютное значеніе y неопредѣленно возрастаетъ и становится больше всякаго заранѣе даннаго числа. Кратко это выражаютъ, говоря, что функція $\frac{1}{x-a}$ безконечна при $x=a$. Этотъ родъ прерывности имѣетъ въ анализѣ очень важное значеніе.

Разсмотримъ еще функцію $y=\sin\frac{1}{x}$. Когда x приближается къ нулю, $\frac{1}{x}$ неограниченно возрастаетъ, и y не стремится ни къ какому предѣлу, оставаясь при этомъ заключеннымъ между -1 и $+1$; уравненіе $\sin\frac{1}{x}=A$, гдѣ $|A|<1$, всегда имѣетъ безчисленное множество корней, заключающихся между 0 и ε, какъ бы ε ни было мало. Какое бы значеніе мы ни выбрали для y при $x=0$, наша функція не можетъ быть непрерывною при $x=0$.

Примѣръ другого родъ прерывности представляетъ сумма сходящагося ряда

$$S(x)=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots$$

При $x=0$ всѣ члены этого ряда равны нулю, и $S(0)=0$. При x отличномъ отъ нуля, мы имѣемъ убывающую геометрическую прогрессію съ знаменателемъ $\frac{1}{1+x^2}$; поэтому

$$S(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{x^2(1+x^2)}{x^2}=1+x^2.$$

Когда x стремится къ нулю, $S(x)$ имѣетъ предѣломъ единицу, между тѣмъ какъ $S(0)=0$. Такимъ образомъ, хотя функція стремится въ этомъ случаѣ къ предѣлу при приближеніи x къ нулю, но этотъ предѣлъ отличенъ отъ значенія, принимаемаго функціею при $x=0$.

5. Производныя. — Пусть будетъ $f(x)$ непрерывная функція отъ x; разсмотримъ отношеніе

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Будемъ, оставляя x постояннымъ, неограниченно уменьшать абсолютное значеніе h; числитель и знаменатель этого отношенія будутъ стремиться къ нулю; если самое отношеніе стремится при этомъ къ предѣлу, то этотъ предѣлъ называется производною отъ функціи $f(x)$. Производная обыкновенно обозначается черезъ y' или, по обозначенію Лагранжа (Lagrange), черезъ $f'(x)$.

Съ аналитическимъ понятіемъ производной тѣсно связано важное геометрическое понятіе. Пусть будетъ $f(x)$ функція, непрерывная въ промежуткѣ (a, b). Разсмотримъ на плоскости точку съ координатами (x, y). При измѣненіи x отъ a до b, эта точка описываетъ дугу кривой AMB, графически представляющую ходъ функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b). Возьмемъ на этой дугѣ двѣ сосѣднія точки M и M' съ абсциссами x и $x+h$. Угловой коэффиціентъ прямой MM' равенъ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

когда h стремится къ нулю, точка M' неопредѣленно приближается къ точкѣ M, и если функція $f(x)$ имѣетъ производную, то угловой коэффиціентъ прямой MM' стремится къ предѣлу y'. Такимъ образомъ прямая MM' стремится къ нѣкоторому предѣльному положенію MT, называемому касательною къ кривой; на основаніи предыдущаго, уравненіе этой касательной будетъ

$$Y-y=y'(X-x),$$

гдѣ X и Y — текущія координаты.

Распространимъ этотъ выводъ на кривыя двойной кривизны. Пусть будутъ

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t)$$

выраженія координатъ любой точки какой-нибудь кривой двойной кривизны въ функціи перемѣннаго параметра t. Возьмемъ на этой кривой двѣ точки M и M', соотвѣтствующія двумъ значеніямъ параметра t и $t+h$; уравненія хорды MM будутъ

$$\frac{X-f(t)}{f(t+h)-f(t)}=\frac{Y-\varphi(t)}{\varphi(t+h)-\varphi(t)}=\frac{Z-\psi(t)}{\psi(t+h)-\psi(t)}.$$

Раздѣливъ дѣлителей этихъ отношеній на h и приближая затѣмъ h къ нулю, мы найдемъ, что хорда MM' стремится къ предѣльному положенію, которое представится уравненіями

$$\frac{X-f(t)}{f'(t)}=\frac{Y-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{Z-\psi(t)}{\psi'(t)},$$

предполагая, разумѣется, что три функціи $f(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имѣютъ производныя. Такимъ образомъ опредѣленіе касательной къ кривой приводится аналитически къ вычисленію производныхъ.

Всякая функція, имѣющая производную, необходимо непрерывна, но обратное положеніе не всегда справедливо. Нетрудно привести примѣры непрерывныхъ функцій, не имѣющихъ производной при извѣстныхъ частныхъ значеніяхъ перемѣннаго. Такова функція $y=x\sin\frac{1}{x}$ при $x=0$. Если x стремится къ нулю, y также стремится къ нулю, и функція непрерывна, но отношеніе $\frac{y}{x}=\sin\frac{1}{x}$, какъ мы уже видѣли, не стремится ни къ какому предѣлу.

Пусть будетъ далѣе $y=x^{\frac{2}{3}}$; эта функція непрерывна при всякомъ значеніи x и равна нулю при $x=0$; но, если x стремится къ нулю, отношеніе $\frac{y}{x}=x^{-\frac{1}{3}}$ неопредѣленно возрастаетъ. Для краткости мы будемъ говорить, что здѣсь производная безконечна при $x=0$; кривая, изображающая ходъ функціи, касается оси y въ началѣ координатъ.

Функція $y=x\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ равна нулю при $x=0$; но отношеніе $\frac{y}{x}$ стремится къ двумъ различнымъ предѣламъ смотря по тому, приближается ли x къ нулю, оставаясь положительнымъ или оставаясь отрицательнымъ. Если x положительно и очень мало, то $e^{\frac{1}{x}}$ положительно и очень велико; отношеніе $\frac{y}{x}$ стремится къ единицѣ. Напротивъ, если x отрицательно и очень мало по абсолютному значенію, то $e^{\frac{1}{x}}$ очень близко къ нулю, и отношеніе $\frac{y}{x}$ имѣетъ предѣломъ нуль. Такимъ образомъ производная имѣетъ два различныхъ значенія въ зависимости отъ того, какимъ образомъ x приближается къ нулю; кривая, изображающая ходъ функціи, имѣетъ въ началѣ координатъ **угловую точку**.

Изъ этихъ примѣровъ видно, что легко составить функціи, не имѣющія производныхъ при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ перемѣннаго. Между тѣмъ изобрѣтатели исчисленія безконечно

малыхъ и ихъ послѣдователи никогда не сомнѣвались въ томъ, что непрерывная функція вообще имѣетъ производную. Было даже нѣсколько попытокъ доказательствъ, правда, недостаточныхъ, пока Вейерштрассъ (Weierstrass) не разрѣшилъ вопроса, давъ примѣры непрерывныхъ функцій, которыя не имѣютъ производныхъ ни при какихъ значеніяхъ перемѣннаго*). Такъ какъ эти функціи до сихъ поръ не получили никакого примѣненія, то мы ими заниматься не будемъ. Въ дальнѣйшемъ, когда мы будемъ говорить, что функція $f(x)$ имѣетъ производную въ промежуткѣ (a, b), то при отсутствіи особыхъ указаній это будетъ всегда означать, что эта функція имѣетъ единственную и конечную производную при каждомъ значеніи перемѣннаго x, заключающемся между a и b.

6. Высшія производныя. — Производная отъ $f(x)$ есть вообще сама нѣкоторая функція отъ x, $f'(x)$; если въ свою очередь $f'(x)$ имѣетъ производную, то эта новая функція называется второю производною отъ $f(x)$ и обозначается символомъ y'' или $f''(x)$. Третья производная y''' илу $f'''(x)$ опредѣляется подобнымъ же образомъ, какъ производная отъ второй производной и т. д. Вообще, n-ая производная $y^{(n)}$, или $f^{(n)}(x)$, есть производная отъ производной $(n-1)$-го порядка. Можетъ случиться, что, составляя такимъ образомъ высшія производныя, мы никогда не дойдемъ до функціи, не имѣющей производной. Въ этомъ случаѣ мы можемъ представить себѣ, что этотъ рядъ дѣйствій продолжается до безконечности, и мы получаемъ безконечный рядъ послѣдовательныхъ производныхъ отъ функціи $f(x)$. Такимъ безконечнымъ рядомъ производныхъ обладаютъ всѣ функціи, имѣющія до сихъ поръ какое-нибудь практическое значеніе.

Приведенное выше обозначеніе производной принадлежитъ Лагранжу. Чтобы представить производную n-го порядка, иногда употребляютъ также символъ Коши (Cauchy): $D_n y$ или $D_n f(x)$. Ниже мы познакомимся съ обозначеніемъ Лейбница (Leibniz).

7. Теорема Ролля. — Примѣненіе производныхъ къ изученію уравненій основывается на слѣдующемъ предложеніи, извѣстномъ подъ названіемъ теоремы Ролля (Rolle).

---

*) Докладъ, читанный въ Берлинской Академіи Наукъ 18 іюля 1872 г. Другіе примѣры можно найти въ мемуарѣ Дарбу (Darboux) о прерывныхъ функціяхъ (Annales de l'École Normale Supérieure, томъ IV, 2-я серія). Примѣръ Вейерштрасса приведенъ далѣе (глава IX).

Пусть будутъ a и b два корня уравненія $f(x)=0$. Если функція $f(x)$ непрерывна и имѣетъ производную въ промежуткѣ (a, b), то уравненіе $f'(x)=0$ имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень, заключающійся между a и b.

Въ самомъ дѣлѣ, функція $f(x)$, по предположенію, равна нулю при $x=a$ и при $x=b$. Если она постоянно равна нулю въ промежуткѣ (a, b), то и ея производная также будетъ постоянно равна нулю въ этомъ промежуткѣ, и теорема очевидна. Если же функція $f(x)$ не равна постоянно нулю, то она будетъ имѣть положительныя или отрицательныя значенія. Предположимъ, напримѣръ, что функція $f(x)$ имѣетъ положительныя значенія; тогда она непремѣнно имѣетъ наибольшее значеніе A при нѣкоторомъ значеніи $x=x_1$, заключающемся въ промежуткѣ (a, b) (§ 3; теорема II). Отношеніе

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h},$$

гдѣ $h>0$, будетъ необходимо или отрицательно, или равно нулю; поэтому предѣлъ этого отношенія, т.-е. $f'(x_1)$, не можетъ быть положительнымъ числомъ, и, слѣдовательно, $f'(x_1)\leqq 0$. Точно также, разсматривая $f'(x_1)$, какъ предѣлъ отношенія

$$\frac{f(x_1-h)-f(x_1)}{-h},$$

гдѣ $h>0$, мы увидимъ, что $f'(x_1)\geqq 0$. Сравненіе этихъ двухъ результатовъ доказываетъ, что необходимо $f'(x_1)=0$.

8. Формула конечныхъ приращеній. — Изъ теоремы Ролля легко можетъ быть выведена важная формула конечныхъ приращеній.

Пусть будетъ $f(x)$ непрерывная функція, имѣющая производную въ промежуткѣ (a, b); тогда

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c), \qquad (1)$$

гдѣ c есть число, заключающееся между a и b.

Чтобы вывести эту формулу, разсмотримъ вторую функцію $\varphi(x)$, обладающую тѣми же свойствами, какъ и первая функція, т.-е. непрерывную и имѣющую производную въ промежуткѣ (a, b). Введемъ вспомогательную функцію

$$\psi(x)=Af(x)+B\varphi(x)+C,$$

гдѣ A, B, C — постоянныя, и опредѣлимъ эти постоянныя такимъ образомъ, чтобы функція $\psi(x)$ обращалась въ нуль при

$x=a$ и при $x=b$. Необходимыя и достаточныя условія этого будутъ

$$Af(a)+B\varphi(a)+C=0, \quad Af(b)+B\varphi(b)+C=0;$$

мы удовлетворимъ этимъ условіямъ, положивъ

$$A=\varphi(a)-\varphi(b), \quad B=f(b)-f(a), \quad C=f(a)\varphi(b)-f(b)\varphi(a).$$

Опредѣленная такимъ образомъ функція $\psi(x)$ непрерывна и имѣетъ производную въ промежуткѣ (a, b). Такъ какъ при $x=a$ и при $x=b$ эта функція $\psi(x)$ обращается въ нуль, то ея производная $\psi'(x)=Af'(x)+B\varphi'(x)$ должна быть равна нулю при нѣкоторомъ значеніи c, заключающемся между a и b. Отсюда, замѣняя A и B ихъ значеніями, мы приходимъ къ соотношенію вида

$$[\varphi(b)-\varphi(a)]f'(c)=[f(b)-f(a)]\varphi'(c). \qquad (1')$$

Полагая въ этомъ соотношеніи $\varphi(x)=x$, мы получаемъ то равенство, которое требовалось доказать. Обратимъ вниманіе на то, что при этомъ доказательствѣ мы не предполагали, что производная $f'(x)$ непрерывна.

Изъ формулы конечныхъ приращеній слѣдуетъ, что, если производная $f'(x)$ равна нулю въ промежуткѣ (a, b), то функція $f(x)$ сохраняетъ въ этомъ промежуткѣ постоянное значеніе; въ самомъ дѣлѣ, приложивъ эту формулу къ двумъ значеніямъ x_1 и x_2, принадлежащимъ промежутку (a, b), мы приходимъ къ соотношенію $f(x_1)=f(x_2)$. Отсюда, далѣе, слѣдуетъ, что разность двухъ функцій, имѣющихъ одну и ту же производную, постоянна; очевидно, справедливо и обратное предложеніе. Если извѣстна функція $F(x)$, имѣющая производной данную функцію $f(x)$, то мы получимъ всѣ другія функціи, имѣющія ту же самую производную, прибавляя произвольное постоянное къ функціи $F(x)$ *).

---

*) Нельзя примѣнять эту теорему, не обращая вниманія на всѣ заключающіяся въ ней условія. Пусть, напримѣръ, $f(x)$ и $\varphi(x)$ двѣ непрерывныя функціи, имѣющія производныя $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ въ промежуткѣ (a, b). Если между этими четырьмя функціями существуетъ соотношеніе $f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)=0$, то мы выведемъ изъ формулы конечныхъ приращеній, что производная отъ функціи $\frac{f}{\varphi}$, т.-е. $\frac{f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2}$, равна нулю, и, слѣдовательно, отношеніе $\frac{f}{\varphi}$ въ промежуткѣ (a, b) постоянно. Но это заключеніе вполнѣ законно только въ томъ случаѣ, если $\varphi(x)$ не обращается въ нуль въ промежуткѣ (a, b). Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что $\varphi(x)$ вмѣстѣ съ производною $\varphi'(x)$ обращаются въ нуль при значеніи c, заключающемся между a и b. Пусть

Формула (1) допускаетъ простое геометрическое истолкованіе. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ кривую AMB, изображающую ходъ функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b); $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффиціентъ хорды AB, а $f'(c)$ есть угловой коэффиціентъ касательной въ точкѣ C, причемъ абсцисса этой точки равна c. Формула (1) показываетъ, что на дугѣ AMB существуетъ точка C, въ которой касательная параллельна хордѣ AB.

Предположимъ, что производная $f'(x)$ непрерывна; если мы будемъ приближать a и b къ общему предѣлу x_0 по какому-нибудь закону, то и число c, заключающееся между a и b, будетъ также стремиться къ x_0; формула (1) показываетъ, что отношеніе

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

имѣетъ предѣломъ $f'(x_0)$. Геометрически это значитъ слѣдующее. Разсмотримъ на кривой $y=f(x)$ точку M съ абсциссою x_0 и двѣ точки A и B съ абсциссами a и b. Отношеніе $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффиціенту хорды AB, тогда какъ $f'(x_0)$ представляетъ угловой коэффиціентъ касательной въ точкѣ M. Изъ предыдущаго видно, что когда двѣ точки A и B безпредѣльно приближаются къ точкѣ M по какому угодно закону, то сѣкущая AB всегда имѣетъ предѣломъ касательную въ точкѣ M.

Этого, вообще, не будетъ, если производная $f'(x)$ прерывна. Напримѣръ, если мы возьмемъ на кривой $y=x^{\frac{2}{3}}$ двѣ точки, безконечно близкія къ началу координатъ и лежащія по разныя стороны отъ оси Oy, то на чертежѣ ясно видно, что направленіе прямой, соединяющей эти двѣ точки, остается совершенно неопредѣленнымъ, когда обѣ эти точки приближаются къ началу координатъ.

функція $f(x)$ равна $C_1\varphi(x)$ въ промежуткѣ между a и c и равна $C_2\varphi(x)$ между c и b, гдѣ C_1 и C_2 — два различныхъ постоянныхъ количества. Ясно, что $f(x)$ непрерывна и имѣетъ производную въ промежуткѣ (a, b), и что кромѣ того

$$f'(x)\,\varphi(x)-f(x)\,\varphi'(x)=0$$

при всякомъ значеніи x, заключающемся въ этомъ промежуткѣ. Однако функція $\frac{f}{\varphi}$ равна C_1 въ промежуткѣ (a, b) и равна C_2 въ промежуткѣ (c, b). Не трудно дать этому примѣру геометрическое истолкованіе.

Уравненіе (1′) иногда называется обобщенною формулою конечныхъ приращеній. Изъ нея можно легко вывести теорему Лопиталя (L'Hopital), позволяющую находить предѣлы неопредѣленныхъ выраженій. Предположимъ, что при $x=a$ мы имѣемъ $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$. Замѣняя въ (1′) b черезъ x, получимъ

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

гдѣ x_1 заключается между a и x. Это уравненіе показываетъ, что если, при $x=a$, мы имѣемъ $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$, и если отношеніе $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ стремится къ нѣкоторому предѣлу, когда x стремится къ a, то отношеніе $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ стремится къ тому же самому предѣлу.

9. Обобщеніе формулы конечныхъ приращеній.— Существуютъ различныя обобщенія формулы конечныхъ приращеній. Слѣдующее обобщеніе этой формулы принадлежитъ Стильтьесу (Stieltjes) (Bulletin de la Société Mathématique, т. XVI, стр. 100). Разсмотримъ, для опредѣленности, три непрерывныхъ функціи $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, имѣющихъ производныя перваго и второго порядковъ, и пусть будутъ a, b, c три частныхъ значенія перемѣннаго ($a<b<c$). Опредѣлимъ число A равенствомъ:

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(c) & g(c) & h(c) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

и разсмотримъ вспомогательную функцію:

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}.$$

Эта функція равна нулю при $x=b$ и при $x=c$; слѣдовательно, ея производная должна обращаться въ нуль при значеніи ζ, заключающемся между b и c; это даетъ:

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\zeta) & g'(\zeta) & h'(\zeta) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & 2\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

Замѣнивъ въ этомъ соотношеніи b черезъ x, мы получаемъ функцію отъ x, равную нулю при $x=a$ и при $x=b$. Ея производная должна обращаться въ нуль при значеніи ξ, заключающемся между a и b; это намъ даетъ новое соотношеніе:

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f'(\zeta) & g'(\zeta) & h'(\zeta) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2\xi \\ 0 & 1 & 2\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

Замѣняя ζ черезъ x въ лѣвой части этого равенства, мы опять получаемъ функцію отъ x, которая обращается въ нуль при $x=\xi$ и

при $x=\zeta$; ея производная должна быть равна нулю при значеніи η, заключающемся между ξ и ζ, а, слѣдовательно, заключающемся и между a и c. Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующее выраженіе для A:

$$A=\frac{1}{1\cdot 2}\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) \end{vmatrix},$$

гдѣ ξ заключается между a и b, и η — между a и c.

Это доказательство не предполагаетъ непрерывности вторыхъ производныхъ $f''(x)$, $g''(x)$, $h''(x)$; если эти вторыя производныя непрерывны, и если значенія a, b, c стремятся къ одному и тому же предѣльному значенію x_0, то въ предѣлѣ:

$$\lim A=\frac{1}{1\cdot 2}\begin{vmatrix} f(x_0) & g(x_0) & h(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) & h'(x_0) \\ f''(x_0) & g''(x_0) & h''(x_0) \end{vmatrix}.$$

Для n функцій существуютъ аналогичныя формулы, которыя можно вывести такимъ же образомъ. Въ случаѣ только двухъ функцій $f(x)$ и $g(x)$ достаточно положить $g(x)=1$, чтобы получить обыкновенную формулу конечныхъ приращеній.

Аналогичное обобщеніе формулы конечныхъ приращеній принадлежитъ Шварцу (Schwarz) (Annali di Mathematica, 2-я серія, томъ X).

II. — ФУНКЦІИ МНОГИХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ.

10. Общія замѣчанія. — Перемѣнное количество ω, значеніе котораго зависитъ отъ значеній нѣсколькихъ другихъ независимыхъ другъ отъ друга перемѣнныхъ количествъ $x, y, z, \ldots, t$, называется функціею независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots, t$; эту связь обозначаютъ символомъ $\omega=f(x, y, z, \ldots, t)$. Разсмотримъ, для опредѣленности, функцію $\omega=f(x, y)$ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y; если мы примемъ x и y за декартовы координаты точки на плоскости, то всякой системѣ значеній (x, y) будетъ соотвѣтствовать точка M, и обратно. Если всякой точкѣ площади A, ограниченной однимъ или нѣсколькими контурами любого вида, соотвѣтствуетъ значеніе функціи ω, то говорятъ, что $f(x, y)$ опредѣлена въ части A плоскости.

Пусть будутъ (x_0, y_0) координаты точки M_0, взятой въ этой части плоскости. Функція $f(x, y)$ называется непрерывною при системѣ значеній x_0, y_0, если для всякаго положительнаго числа ε можно найти такое другое положительное число η, чтобы, при $|h|<\eta$, $|k|<\eta$, было

$$|f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon.$$

Этому опредѣленію непрерывности можно дать слѣдующее истолкованіе. Представимъ себѣ въ плоскости xy квадратъ

съ центромъ въ точкѣ M_0; пусть стороны его параллельны осямъ и равны 2η; точка M' съ координатами $f(x_0+h,\ y_0+k)$ будетъ расположена внутри этого квадрата, если $|h|<\eta$, $k|<\eta$. Когда мы говоримъ, что функція непрерывна при $x=x_0$, $y=y_0$, то это значитъ, что можно взять сторону этого квадрата настолько малою, чтобы разность значеній функціи въ точкѣ M_0 и въ какой-нибудь другой точкѣ квадрата была по абсолютному значенію меньше ε. Изъ этого видно, что квадратъ можно замѣнить кругомъ съ центромъ въ точкѣ $(x_0,\ y_0)$; въ самомъ дѣлѣ, если предыдущее условіе удовлетворяется для всѣхъ точекъ, расположенныхъ внутри квадрата, то оно удовлетворяется также и для всѣхъ точекъ, лежащихъ внутри вписаннаго круга. Обратно, если условіе удовлетворено для всѣхъ внутреннихъ точекъ круга, то оно будетъ также удовлетворено и для всѣхъ внутреннихъ точекъ квадрата, вписаннаго въ кругъ. Поэтому можно было бы опредѣлить непрерывность функціи еще слѣдующимъ образомъ: функція непрерывна, если возможно найти такія соотвѣтствующія положительныя числа ε и η, чтобы неравенство $\sqrt{h^2+k^2}<\eta$ имѣло слѣдствіемъ неравенство

$$|f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)|<\varepsilon.$$

Подобнымъ же образомъ опредѣляется непрерывность функцій отъ 3, 4,...,n независимыхъ перемѣнныхъ.

Очевидно, что всякая непрерывная функція двухъ перемѣнныхъ есть также непрерывная функція каждаго изъ этихъ двухъ перемѣнныхъ въ отдѣльности; но обратное положеніе не всегда справедливо*).

11. Частныя производныя.—Дадимъ въ непрерывной функціи $f(x,\ y)$ какое-нибудь постоянное значеніе одному изъ перемѣнныхъ, напримѣръ, перемѣнному y. Мы получимъ функцію только одного независимаго перемѣннаго x; обозначимъ производную

*) Разсмотримъ, напримѣръ, слѣдующую функцію $f(x,\ y)$ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ: функція $f(x,\ y)$ равна $\frac{2xy}{x^2+y^2}$, если, по крайней мѣрѣ, одно изъ значеній x или y отлично отъ нуля, и она равна нулю, если $x=y=0$. При постоянномъ y эта функція будетъ, очевидно, непрерывною функціею отъ x, и обратно. Но эта же самая функція не будетъ непрерывною функціею двухъ независимыхъ перемѣнныхъ при системѣ значеній $x=y=0$. Въ самомъ дѣлѣ, если точка $(x,\ y)$ приближается къ началу, оставаясь на прямой $y=x$, то функція $f(x,\ y)$ имѣетъ предѣломъ не 0, а 1. Функціи этого рода разсматриваются въ диссертаціи Бера (Baire).

отъ этой функціи, если только эта производная существуетъ, черезъ $f'_x(x, y)$ или ω'_x. Подобнымъ же образомъ обозначимъ черезъ ω'_y или $f'_y(x, y)$ производную отъ функціи $f(x, y)$, въ которой x разсматривается, какъ постоянное, а y — какъ независимое перемѣнное; $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ называются частными производными отъ функціи $f(x, y)$. Эти частныя производныя, въ свою очередь, являются вообще функціями перемѣнныхъ x, y; если вновь мы возьмемъ отъ нихъ частныя производныя, то получимъ четыре частныхъ производныхъ второго порядка f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2}. Подобнымъ же образомъ опредѣляются частныя производныя третьяго, четвертаго и т. д. порядковъ. Вообще, если намъ дана функція нѣкотораго числа независимыхъ перемѣнныхъ $\omega=f(x, y, z,..., t)$, то мы получимъ частную производную n-го порядка отъ этой функціи, если возьмемъ отъ нея послѣдовательно n производныхъ по любымъ изъ входящихъ въ нее независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, ..., t. Мы докажемъ, что конечный результатъ не будетъ зависѣть отъ того, въ какомъ порядкѣ мы будемъ брать эти производныя.

Докажемъ предварительно слѣдующую лемму:

Пусть будетъ $\omega=f(x, y)$ функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y; мы имѣемъ $f''_{xy}=f''_{yx}$, если только эти частныя производныя непрерывны.

Разсмотримъ выраженіе

$$U=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)+f(x, y),$$

гдѣ x, y, Δx, Δy имѣютъ опредѣленныя значенія. Мы можемъ представить выраженіе U въ двухъ различныхъ видахъ. Обозначимъ черезъ v вспомогательное перемѣнное и положимъ:

$$\varphi(v)=f(x+\Delta x, v)-f(x, v).$$

Тогда

$$U=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y).$$

Приложивъ къ функціи $\varphi(v)$ формулу конечныхъ приращеній, находимъ

$$U=\Delta y\,\varphi'_y(y+\theta\,\Delta y), \quad \text{гдѣ} \quad 0<\theta<1.$$

Замѣнимъ φ'_y ея значеніемъ:

$$U=\Delta y\,[f'_y(x+\Delta x, y+\theta\,\Delta y)-f'_y(x, y+\theta\,\Delta y)].$$

Приложимъ формулу конечныхъ приращеній къ функціи $f'_y(u, y+\theta\,\Delta y)$, принимая въ ней u за независимое перемѣнное. Мы будемъ имѣть новое выраженіе для U:

$$U=\Delta x\,\Delta y\,f''_{yx}(x+\theta'\Delta x, y+\theta\,\Delta y), \quad 0<\theta'<1.$$

Это выраженіе для U симметрично относительно x, y, Δx и Δy; поэтому, перемѣнивъ роль перемѣнныхъ x и y, мы получили бы

$$U = \Delta y\, \Delta x\, f''_{xy}(x+\theta'_1\Delta x,\ y+\theta_1\Delta y),$$

гдѣ множители θ_1, θ'_1 положительны и меньше единицы. Приравняемъ между собою эти два значенія U, раздѣливъ ихъ предварительно на $\Delta x \Delta y$,

$$f''_{xy}(x+\theta'_1\Delta x,\ y+\theta_1\Delta y) = f''_{yx}(x+\theta'\Delta x,\ y+\theta\,\Delta y).$$

По предположенію, производныя f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны; поэтому, при приближеніи Δx и Δy къ нулю, обѣ части предыдущаго равенства будутъ стремиться соотвѣтственно къ f''_{xy} и f''_{yx}, и мы получимъ то равенство, которое требовалось доказать.

Слѣдуетъ замѣтить, что это доказательство не содержитъ никакихъ предположеній относительно другихъ частныхъ производныхъ второго порядка f''_{x^2} и f''_{y^2}; оно остается справедливымъ также и въ томъ случаѣ, если $f(x, y)$ зависитъ еще отъ другихъ независимыхъ перемѣнныхъ. Число этихъ независимыхъ перемѣнныхъ можетъ быть какимъ угодно, такъ какъ при образованіи частныхъ производныхъ f''_{xy}, f''_{yx} мы должны обращаться съ этими перемѣнными, какъ съ постоянными.

Пусть будетъ теперь $\omega = f(x, y, z, \ldots, t)$ функція произвольнаго числа независимыхъ перемѣнныхъ, и пусть будетъ Ω частная производная n-го порядка отъ этой функціи. Эта производная получилась послѣ n послѣдовательныхъ дериваціи (взятій производной) по опредѣленнымъ перемѣннымъ. Выполнимъ теперь n дериваціи по тѣмъ же независимымъ перемѣннымъ, измѣнивъ только порядокъ этихъ дериваціи. Всякая такая перемѣна въ порядкѣ дериваціи, приводящихъ къ Ω, можетъ быть достигнута рядомъ перестановокъ между двумя послѣдовательными дериваціями; но мы уже доказали, что такія перестановки не вліяютъ на окончательный результатъ; слѣдовательно, не можетъ измѣниться результатъ и отъ всей разсматриваемой перемѣны *). Отсюда слѣдуетъ, что частная производная n-го порядка будетъ обозначена съ полною опредѣленностью, если будетъ указано число дериваціи относительно каждаго изъ независимыхъ перемѣнныхъ. Такимъ образомъ

---

*) Напримѣръ, чтобы доказать равенство частныхъ производныхъ

$$f'''_{xyz} = f'''_{zyx}$$

отъ функціи $f(x, y, z)$, мы составимъ рядъ равенствъ

$$f'''_{xyz} = f'''_{xzy} = f'''_{zxy} = f'''_{zyx}.$$ (*Ред.*)

Частныя производныя n-го порядка отъ функціи трехъ независимыхъ перемѣнныхъ $\omega=f(x, y, z)$ могутъ быть изображены слѣдующимъ образомъ:

$$f^{n}_{x^p y^q z^r}(x, y, z) \quad \text{или} \quad D^{n}_{x^p y^q z^r} f(x, y, z),$$

гдѣ $p+q+r=n$. Какъ то, такъ и другое обозначеніе представляетъ собою результатъ, который получится, если мы возьмемъ послѣдовательно p разъ частныя производныя относительно x, q разъ — относительно y и r разъ — относительно z, причемъ всѣ эти операціи мы можемъ выполнить въ произвольномъ порядкѣ. Функція $\omega=f(x, y, z)$ имѣетъ всего три разныхъ частныхъ производныхъ перваго порядка f'_x, f'_y, f'_z, шесть разныхъ частныхъ производныхъ второго порядка f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{xy}, f''_{yz}, f''_{xz} и т. д.

Вообще, функція отъ p независимыхъ перемѣнныхъ имѣетъ столько частныхъ производныхъ n-го порядка, сколько различныхъ членовъ существуетъ въ однородномъ многочленѣ порядка n съ p перемѣнными, т.-е., на основаніи теоріи соединеній,

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots(p-2)(p-1)}.$$

Практическія правила. — Во всѣхъ элементарныхъ курсахъ Анализа даются практическія правила для вычисленія производныхъ. Всѣ эти правила могутъ быть представлены слѣдующею таблицею, въ которой на одной и той же строкѣ помѣщена функція вмѣстѣ съ ея производной.

$y=x^{\alpha}$,	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$;
$y=a^{x}$,	$y'=a^{x}\log a$;

знакъ log обозначаетъ неперовъ логариѳмъ;

$y=\log x$,	$y'=\frac{1}{x}$;
$y=\sin x$,	$y=\cos x$;
$y=\cos x$,	$y'=-\sin x$;
$y=\arcsin x$,	$y'=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$;
$y=\operatorname{arc\,tg} x$,	$y'=\frac{1}{1+x^2}$;
$y=uv$,	$y'=u'v+uv'$;
$y=\frac{u}{v}$,	$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$;
$y=f(u)$,	$y'_x=f'(u)u'_x$;
$y=f(u, v, w)$,	$y'_x=u'_x f'_u+v'_x f'_v+w'_x f'_w$.

Установа адукацыі
Віцебскі дзяржаўны універсітэт
імя П.М.Машэрава
БІБЛІЯТЭКА

Предпослѣдняя формула даетъ производную функціи отъ функціи, а послѣдняя — производную отъ сложной функціи, причемъ въ этой послѣдней формулѣ по крайней мѣрѣ двѣ изъ производныхъ f'_u, f'_v, f'_w должны быть непрерывны. Съ помощью этихъ формулъ можно получать высшія производныя отъ всѣхъ элементарныхъ функцій, именно: многочленовъ, функцій раціональныхъ и ирраціональныхъ, показательныхъ и ло ариѳмическихъ, функцій круговыхъ и функцій обратныхъ, а также и отъ сочетаній всѣхъ перечисленныхъ функцій.

Для функцій многихъ независимыхъ перемѣнныхъ можно также вывести формулы, аналогичныя формулѣ конечныхъ приращеній. Разсмотримъ, для опредѣленности, функцію $f(x, y)$ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, и возьмемъ разность $f(x+h, y+k)-f(x, y)$; мы можемъ представить эту разность въ видѣ

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=[f(x+h, y+k)-f(x, y+k)] \\ +[f(x, y+k)-f(x, y)].$$

Примѣняя формулу конечныхъ приращеній къ каждой изъ разностей, стоящихъ въ правой части, получимъ

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=hf_x(x+\theta h, y+k)+kf_y(x, y+\theta' k),$$

гдѣ θ и θ' заключаются между нулемъ и единицею.

Эта формула остается вѣрною, будутъ ли производныя f_x и f_y непрерывны или прерывны. Если эти производныя f_x, f_y не прерывны, то можно вывести формулу, подобную предыдущей, но содержащую только одно неопредѣленное число θ. Чтобы получить эту новую формулу, разсмотримъ вспомогательную функцію $\varphi(t)=f(x+ht, y+kt)$, гдѣ x, y, h, k имѣютъ опредѣленныя значенія, а t есть вспомогательное перемѣнное. Примѣняя къ этой функціи $\varphi(t)$ формулу конечныхъ приращеній, имѣемъ

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta), \quad 0<\theta<1.$$

Но $\varphi(t)$ есть сложная функція отъ t, и ея производная $\varphi'(t)$ равна $hf_x(x+ht, y+kt)+kf_y(x+ht, y+kt)$; слѣдовательно, предыдущая формула можетъ быть представлена въ видѣ

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=hf_x(x+\theta h, y+\theta k)+kf_y(x+\theta h, y+\theta k).$$

12. Касательная плоскость къ поверхности. — Мы видѣли, что первая производная отъ функціи одного перемѣннаго даетъ касательную къ кривой; точно также частныя производныя

отъ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ входятъ въ уравненіе касательной плоскости къ поверхности. Пусть будетъ

$$z=F(x, y)$$

уравненіе поверхности S. Мы предположимъ, что функція F непрерывна и имѣетъ непрерывныя частныя производныя въ точкѣ (x_0, y_0) плоскости xy; пусть этой точкѣ соотвѣтствуетъ значеніе z_0 для z и, слѣдовательно, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности S. Разсмотримъ какую-нибудь кривую C, расположенную на поверхности S и проходящую черезъ точку M_0. Пусть будутъ

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t)$$

координаты точки этой кривой, выраженныя въ функціи перемѣннаго параметра t; $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ суть три непрерывныя функціи параметра t, принимающія при значеніи t_0 параметра t значенія x_0, y_0, z_0. Касательная къ кривой C въ точкѣ M_0 опредѣляется уравненіями (§ 5)

$$\frac{X-x_0}{f'(t)}=\frac{Y-y_0}{\varphi'(t)}=\frac{Z-z_0}{\psi'(t)}. \tag{4}$$

Такъ какъ кривая C расположена на поверхности S, то мы имѣемъ соотношеніе

$$\psi(t)=F[f(t), \varphi(t)],$$

которое должно удовлетворяться при всякомъ значеніи t. Такимъ образомъ обѣ части этого равенства должны быть тождественны между собою. Составимъ производную отъ второй части, какъ отъ сложной функціи, и положимъ $t=t_0$. Мы найдемъ

$$\psi'(t_0)=f'(t_0)F'_{x_0}+\varphi'(t_0)F'_{y_0}. \tag{5}$$

Исключивъ изъ уравненій (4) и (5) $f'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$, получимъ

$$Z-z_0=(X-x_0)F'_{x_0}+(Y-y_{x_0})F'_{y_0}. \tag{6}$$

Это уравненіе представляетъ плоскость, составляющую геометрическое мѣсто касательныхъ ко всѣмъ кривымъ, расположеннымъ на поверхности S и проходящимъ черезъ точку M_0. Эта плоскость называется касательною плоскостью къ поверхности.

13. Переходъ отъ разностей къ производнымъ. — Мы опредѣляли высшія производныя послѣдовательно, выводя производную n-го порядка изъ производныхъ $(n-1)$-го порядка. Естественно возникаетъ вопросъ, нельзя ли непосредственно опредѣлить производную n-го порядка, какъ предѣлъ нѣкотораго отношенія, не переходя постепенно отъ производныхъ порядка ниже n къ производной n-го порядка. Мы

уже рѣшили это утвердительно для f''_{xy} (§ 11), такъ какъ приведенное тамъ разсужденіе доказываетъ, что f''_{xy} есть предѣлъ дроби

$$\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y+\Delta y)+f(x,\ y)}{\Delta x\,\Delta y},$$

когда Δx и Δy оба стремятся къ нулю. Такимъ же образомъ легко показать, что f''_{x^2} есть предѣлъ отношенія

$$\frac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)-f(x+h_2)+f(x)}{h_1h_2},$$

когда h_1 и h_2 стремятся оба къ нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ

$$f_1(x)=f(x+h_1)-f(x),$$

можно представить предыдущее отношеніе въ видѣ

$$\frac{f_1(x+h_2)-f_1(x)}{h_1h_2}=\frac{f'_1(x+\theta h_2)}{h_1},\quad 0<\theta<1,$$

или, иначе,

$$\frac{f'(x+h_1+\theta h_2)-f'(x+\theta h_2)}{h_1}=f''(x+\theta'h_1+\theta h_2),\quad 0<\theta'<1.$$

Отсюда видно, что предѣлъ этого отношенія есть производная второго порядка f''_{x^2}, если только эта производная непрерывна.

Перейдемъ теперь къ общему случаю. Пусть будетъ, для опредѣленности,

$$\omega=f(x,\ y,\ z)$$

функція трехъ независимыхъ перемѣнныхъ. Положимъ

$$\Delta_x^h\omega=f(x+h,\ y,\ z)-f(x,\ y,\ z),$$
$$\Delta_y^k\omega=f(x,\ y+k,\ z)-f(x,\ y,\ z),$$
$$\Delta_z^l\omega=f(x,\ y,\ z+l)-f(x,\ y,\ z);$$

$\Delta_x^h\omega$, $\Delta_y^k\omega$, $\Delta_z^l\omega$ суть первыя разности отъ ω. Если мы будемъ разсматривать h, k, l, какъ данныя постоянныя количества, то эти три первыя разности будутъ сами функціями отъ x, y, z, отъ которыхъ можно взять въ свою очередь разности, соотвѣтствующія приращеніямъ h_1, k_1, l_1 перемѣнныхъ; такимъ образомъ получаются вторыя разности $\Delta_x^{h_1}\omega\,\Delta_x^h\omega$, $\Delta_x^{h_1}\Delta_y^k\omega$, ... Этотъ процессъ можетъ быть продолженъ до безконечности; каждая разность n-го порядка опредѣлится, какъ первая разность отъ нѣкоторой разности $(n-1)$-го порядка. Такъ какъ порядокъ каждыхъ двухъ изъ предыдущихъ операцій можетъ быть замѣненъ обратнымъ, то достаточно будетъ указать послѣдовательныя приращенія, даваемыя каждому перемѣнному. Разность n-го порядка представится символомъ слѣдующаго вида

$$\Delta^{(n)}\omega=\Delta_x^{h_1}\Delta_x^{h_2}\ldots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\ldots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\ldots\Delta_z^{l_r}f(x,\ y,\ z),$$

гдѣ $p+q+r=n$, и приращенія h_i, k_i, l_i могутъ быть равны или неравны. Эта разность можетъ быть выражена посредствомъ частной производной n-го порядка; она равна произведенію

$h_1h_2\ldots h_pk_1\ldots k_ql_1\ldots l_r$

$$\times f^{(n)}_{x^p y^q z^r}(x+\theta_1h_1+\ldots\theta_ph_p,\ y+\theta'_1k_1+\ldots+\theta'_qk_q,\ z+\theta''_1l_1+\ldots+\theta''_rl_r),$$

гдѣ всѣ θ_i заключены между нулемъ и единицею. Эта формула уже была нами выведена для первыхъ и вторыхъ разностей. Чтобы доказать, что она вѣрна при всякомъ n, допустимъ, что она вѣрна для разности $(n-1)$-го порядка, и пусть

$$\varphi(x, y, z)=\Delta_x^{h_2}\dots\ \Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\dots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\dots\Delta_z^{l_r}f;$$

мы имѣемъ, по предположенію,

$$\varphi(x, y, z)=h_2\dots h_p k_1\dots k_q l_1\dots l_r\, f^{(n-1)}_{x^{p-1}y^q z^r}(x+\theta_2 h_2+\dots+\theta_p h_p,\ y+\dots).$$

Но разсматриваемая n-ая разность равна

$$\varphi(x+h_1, y, z)-\varphi(x, y, z),$$

и достаточно приложить еще разъ формулу конечныхъ приращеній къ этой разности, чтобы получить ту формулу, которую мы хотѣли доказать.

Обратно, частная производная $f^{(n)}_{x^p y^q z^r}$ есть предѣлъ отношенія

$$\frac{\Delta_x^{h}\,\Delta_x^{h_2}\dots\Delta_x^{h_p}\Delta_y^{k_1}\dots\Delta_y^{k_q}\Delta_z^{l_1}\dots\Delta_z^{l_r}f}{h_1h_2\dots h_p.k_1.k_2\dots k_q.l_1\dots l_r},$$

когда всѣ приращенія h, k, l стремятся къ нулю.

Интересно замѣтить, что это опредѣленіе частныхъ производныхъ высшаго порядка иногда шире обычнаго опредѣленія. Разсмотримъ, напримѣръ, функцію

$$\omega=f(x, y)=\varphi(x)+\psi(y),$$

гдѣ функціи $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ не имѣютъ производныхъ. Функція ω также не имѣетъ частныхъ производныхъ перваго порядка; тѣмъ болѣе для нея не можетъ быть рѣчи о частныхъ производныхъ второго порядка. Однако, если бы мы приняли новое опредѣленіе частныхъ производныхъ, то нахожденіе f''_{xy} привелось бы къ разысканію предѣла отношенія

$$\frac{f(x+h, y+k)-f(x+h, y)-f(x, y+k)+f(x, y)}{hk},$$

равнаго

$$\frac{\varphi(x+h)+\psi(y+k)-\varphi(x+h)-\psi(y)-\varphi(x)-\psi(y+k)+\varphi(x)+\psi(y)}{hk}.$$

Числитель этого отношенія всегда равенъ нулю, поэтому предѣлъ отношенія также равенъ нулю, и мы находимъ $f''_{xy}=0$ *).

---

*) Аналогичныя замѣчанія можно сдѣлать и для функціи одного перемѣннаго. Напримѣръ, функція

$$f(x)=x^3\cos\frac{1}{x}$$

имѣетъ производную

$$f'(x)=3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x},$$

но $f'(x)$ не имѣетъ производной при $x=0$. Между тѣмъ отношеніе

$$\frac{f(2\alpha)-2f(\alpha)+f(0)}{\alpha^2},$$

или $8\alpha\cos\frac{1}{2\alpha}-2\alpha\cos\frac{1}{\alpha}$ имѣетъ предѣломъ нуль, когда α стремится къ нулю.

III. — ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ОБОЗНАЧЕНІЕ.

Дифференціальное обозначеніе, первое по времени изъ всѣхъ обозначеній, употребляемыхъ въ анализѣ, принадлежитъ Лейбницу. Въ этомъ обозначеніи нѣтъ необходимости, однако оно имѣетъ преимущество вслѣдствіе большей симметричности формулъ и большей общности; эти преимущества особенно цѣнны при изученіи функцій многихъ перемѣнныхъ. Идея этого обозначенія вытекаетъ изъ разсмотрѣнія безконечно малыхъ.

14. Дифференціалы. — Безконечно малымъ количествомъ или, просто, безконечно малымъ называется всякое перемѣнное количество, стремящееся къ нулю. Въ высшей степени существенно то условіе, чтобы это количество было перемѣннымъ; постоянное количество, какъ бы мало оно ни было, не есть безконечно малое.

Обыкновенно разсматриваютъ вмѣстѣ нѣсколько безконечно малыхъ количествъ, одновременно стремящихся къ нулю, и сравниваютъ всѣ эти количества съ однимъ изъ нихъ; послѣднее называется главнымъ безконечно малымъ. Пусть будетъ α главное безконечно малое и β — какое-нибудь другое безконечно малое количество. Если отношеніе $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится къ нулю, то говорятъ, что β безконечно мало относительно α. Если же отношеніе $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится къ предѣлу K, отличному отъ нуля, то β называется безконечно малымъ перваго порядка. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$\frac{\beta}{\alpha} = K + \varepsilon,$$

гдѣ ε — также безконечно малое. Отсюда

$$\beta = \alpha(K + \varepsilon) = \alpha K + \alpha\varepsilon,$$

и αK называется главною частью безконечно малаго β. Добавочный членъ $\alpha\varepsilon$ безконечно малъ относительно главной части. Вообще, если можно найти такую положительную степень $\alpha : \alpha^n$, чтобы отношеніе $\frac{\beta}{\alpha^n}$ стремилось къ конечному предѣлу K, отличному отъ нуля, то β называется безконечно малымъ n-го порядка. Въ этомъ случаѣ будетъ

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = K\varepsilon,$$

или

$$\beta = \alpha^n(K + \varepsilon) = \alpha^n K + \alpha^n\varepsilon;$$

$K\alpha^n$ называется и въ этомъ случаѣ **главною частью** перемѣннаго β.

Пусть будетъ $y=f(x)$ непрерывная функція, имѣющая производную $f'(x)$; дадимъ перемѣнному x приращеніе Δx и обозначимъ черезъ Δy соотвѣтствующее приращеніе y. По самому опредѣленію производной имѣемъ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon,$$

гдѣ ε стремится къ нулю одновременно съ Δx; если мы примемъ Δx за главное безконечно малое, то Δy также будетъ безконечно малымъ, главная часть котораго равна $f'(x)\Delta x$. Эту главную часть называютъ **дифференціаломъ** y и изображаютъ ее символомъ dy:

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

Если функція $f(x)$ равна x, то предыдущая формула обращается въ $dx=\Delta x$; поэтому, для большей симметричности, пишутъ

$$dy=f'(x)dx$$

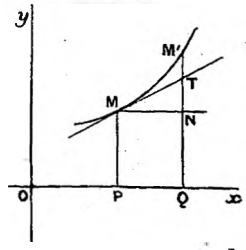
съ тѣмъ условіемъ, чтобы приращеніе dx независимаго перемѣннаго разсматривалось, какъ постоянное количество, впрочемъ, вполнѣ произвольное.

Разсмотримъ на кривой C, представляемой уравненіемъ $y=f(x)$, двѣ точки съ абсциссами x и $x+dx$. Изъ треугольника MTN имѣемъ

$$NT=MN\operatorname{tg}\widehat{TMN}=dx\,f'(x);$$

NT представляетъ дифференціалъ dy, тогда какъ Δy равно NM'. Изъ чертежа видно, что при неограниченномъ приближеніи точки M' къ точкѣ M часть $M'T$ дѣлается безконечно малою относительно NT.

Черт. 1.



Дифференціалы высшихъ порядковъ опредѣляются послѣдовательно одинъ за другимъ такъ же, какъ и высшія производныя. Такъ, дифференціалъ отъ дифференціала перваго порядка называется **дифференціаломъ второго порядка**, причемъ dx всегда разсматривается, какъ постоянное количество; дифференціалъ второго порядка обозначается черезъ d^2y

$$d^2y=d\,(dy)=[\,f''(x)\,dx\,]\,dx=f''(x)\,dx^2.$$

Точно также для дифференціала третьяго порядка напишемъ

$$d^3y=d\,(d^2y)=[f'''\,(x)\,dx^2]\,dx=f'''\,(x)\,dx^3$$

и т. д. Вообще, дифференціалъ n-го порядка, который опре-

дѣляется, какъ дифференціалъ отъ дифференціала $(n-1)$-го порядка, имѣетъ выраженіе

$$d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n.$$

Обратно, можно выразить производныя $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n)}(x), \ldots$ съ помощью дифференціаловъ, и мы получаемъ такимъ образомъ новыя обозначенія для производныхъ

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}, \ldots$$

Каждой формулѣ для вычисленія производной соотвѣтствуетъ формула для вычисленія дифференціала. Напримѣръ, мы имѣемъ

$$d(x^m) = m\, x^{m-1} dx, \qquad da^x = a^x \log a\, dx,$$

$$d \log x = \frac{dx}{x}, \qquad d \sin x = \cos x\, dx,$$

$$d \operatorname{arc\,sin} x = \frac{dx}{\pm\sqrt{1-x^2}}, \quad d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Остановимся на случаѣ функціи отъ функціи. Пусть будетъ $y = f(u)$, гдѣ u есть функція независимаго перемѣннаго x; мы имѣемъ

$$y'_x = f'(u)\, u'_x;$$

умножая обѣ части на dx, получаемъ

$$y'_x dx = f'(u)\, u'_x dx,$$

т.-е.

$$dy = f'(u)\, du.$$

Такимъ образомъ формула для dy имѣетъ такой видъ, какъ если бы u было не функціей отъ x, а независимымъ перемѣннымъ. Это одно изъ преимуществъ дифференціальнаго обозначенія. Изображая производную отъ y относительно x, мы имѣли двѣ различныхъ формулы

$$y'_x = f'(x), \quad y'_x = f'(u)\, u'_x$$

въ зависимости отъ того, дано ли y непосредственно въ функціи x, или y зависитъ отъ x при посредствѣ другой функціи u.

Напротивъ, при дифференціальномъ обозначеніи одна и та же формула примѣнима къ обоимъ случаямъ.

Если $y = f(u, v, w)$ есть сложная функція, то мы имѣемъ

$$y'_x = u'_x f'_u + v'_x f'_v + w'_x f'_w,$$

или, по умноженіи на dx,

$$dy = f'_u du + f'_v dv + f'_w dw.$$

Подобнымъ же образомъ

$$d(uv) = u\, dv + v\, du, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}$$

Тѣ же самыя правила позволятъ намъ вычислить дифференціалы высшихъ порядковъ. Пусть, напримѣръ, надо найти дифференціалы высшихъ порядковъ функціи отъ функціи $y=f(u)$; мы уже имѣли

$$dy=f'(u)\,du.$$

При вычисленіи d^2y слѣдуетъ замѣтить, что du не должно быть принимаемо за постоянное, такъ какъ u не есть независимое перемѣнное. Такимъ образомъ мы должны будемъ вычислить дифференціалъ отъ сложной функціи $f'(u)\,du$, гдѣ u и du будутъ двумя посредствующими функціями; это даетъ

$$d^2y=f''(u)\,du^2+f'(u)\,d^2u.$$

Чтобы вычислить d^3y, нужно разсматривать d^2y, какъ сложную функцію съ тремя посредствующими функціями u, du, d^2u; мы найдемъ

$$d^3y=f'''(u)\,du^3+3f''(u)\,du\,d^2u+f'(u)\,d^3u$$

и т. д. Слѣдуетъ замѣтить, что формулы, дающія дифференціалы d^2y, $d^3y,\ldots$, вслѣдствіе присутствія членовъ съ d^2u, $d^3u,\ldots$ будутъ имѣть не тотъ видъ, какой онѣ имѣли бы, если бы u было независимымъ перемѣннымъ.

Частныя производныя отъ функціи многихъ независимыхъ перемѣнныхъ обозначаются такимъ же образомъ. Такъ, частная производная n-го порядка отъ $f(x, y, z)$, изображавшаяся по Лагранжу черезъ $f^{(n)}_{x^p y^q z^r}$, по Лейбницу изобразится черезъ

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}.$$

Для функцій многихъ перемѣнныхъ это обозначеніе — чисто символическое и отнюдь не представляетъ дроби, какъ это имѣло мѣсто для функціи одного перемѣннаго. Буква ∂ для изображенія частной производной отъ функціи многихъ перемѣнныхъ введена Якоби (Jacobi). До него употребляли букву d.

15. Полные дифференціалы. — Пусть будетъ $\omega=f(x, y, z)$ функція трехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z; полнымъ дифференціаломъ $d\omega$ называется слѣдующее выраженіе

$$d\omega=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

гдѣ dx, dy, dz три произвольныхъ постоянныхъ приращенія, данныя независимымъ перемѣннымъ x, y, z. Три произведенія $\frac{\partial f}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f}{\partial y}dy$, $\frac{\partial f}{\partial z}dz$ называются частными дифференціалами.

Полный дифференціалъ второго порядка есть полный дифференціалъ отъ полнаго дифференціала перваго порядка, причемъ приращенія dx, dy, dz остаются постоянными и всегда одними и тѣми же, когда мы переходимъ отъ одного дифференціала къ слѣдующему. Такимъ образомъ

$$d^2\omega = d(d\omega) = \frac{\partial d\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial d\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial d\omega}{\partial z}dz$$

или, раскрывая,

$$\begin{aligned} d^2\omega = &\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dz\right)dx \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dz\right)dy \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right)dz = \\ = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy\,dz \end{aligned}$$

Если въ правой части мы замѣнимъ $\partial^2 f$ черезъ ∂f^2, то будемъ имѣть въ раскрытомъ видѣ квадратъ отъ $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{df}{\partial z}dz$; поэтому мы можемъ написать символическое равенство

$$d^2\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(2)},$$

причемъ должно послѣ возведенія въ квадратъ вездѣ вмѣсто ∂f^2 поставить $\partial^2 f$. Это правило общее; если мы назовемъ полнымъ дифференціаломъ n-го порядка полный дифференціалъ отъ полнаго дифференціала $(n-1)$-го порядка, то при всякомъ n мы будемъ имѣть символическое равенство

$$d^n\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)},$$

гдѣ, послѣ возведенія въ степень, ∂f^n должно быть замѣнено черезъ $\partial^n f$. Мы видѣли, что это правило вѣрно при $n=1$, $n=2$, и потому достаточно показать, что если оно будетъ вѣрно для $d^n\omega$, то оно будетъ также вѣрно и для $d^{n+1}\omega$.

Допустивъ этотъ законъ для $d^n\omega$, мы будемъ имѣть

$$d^n\omega = \Sigma A_{pqr}\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}dx^p\,dy^q\,dz^r,$$

гдѣ $p+q+r=n$. Коэффиціентъ A_{pqr} равенъ коэффиціенту при $dx^p\,dy^q\,dz^r$ въ n-ой степени трехчлена

$$(dx+dy+dz)^n,$$

т.-е.

$$A_{pqr}=\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots r}.$$

Изъ предыдущей формулы мы выведемъ

$$d^{n+1}\omega=\Sigma A_{pqr}\left[\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{p+1}\partial y^q\partial z^r}dx^{p+1}dy^qdz^r+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\partial y^{q+1}\partial z^r}dx^pdy^{q+1}dz^r\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^p\partial y^q\partial z^{r+1}}dx^pdy^qdz^{r+1}\right].$$

Замѣнивъ теперь $\partial^{n+1}f$ черезъ ∂f^{n+1}, мы можемъ написать правую часть символически въ видѣ

$$\Sigma A_{pqr}\frac{\partial f^n}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}dx^p\,dy^q\,dz^r\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial y}dz\right)$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right).$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть, при сохраненіи прежнихъ условій, символическое равенство:

$$d^{n+1}\omega=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n+1)}.$$

Примѣчаніе.— Предположимъ, что мы получили какимъ-нибудь образомъ выраженіе полнаго дифференціала $d\omega$

$$d\omega=Pdx+Qdy+Rdz, \qquad (7)$$

гдѣ P, Q, R суть функціи отъ x, y, z. Такъ какъ, по опредѣленію,

$$d\omega=\frac{\partial\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega}{\partial y}dy+\frac{\partial\omega}{\partial z}dz,$$

то отсюда мы имѣемъ соотношеніе

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-P\right)dx+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}-Q\right)dy+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}-R\right)dz=0;$$

но dx, dy, dz суть, по условію, какія угодно постоянныя. Поэтому должно быть отдѣльно

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial\omega}{\partial z}=R. \qquad (8)$$

Такимъ образомъ уравненіе (7) равносильно тремъ отдѣльнымъ соотношеніямъ (8), и даетъ намъ всѣ три частныхъ производ-

ныхъ перваго порядка. Вообще, если мы нашли какимъ-либо образомъ полный дифференціалъ n-го порядка

$$d^n\omega = \Sigma C_{pqr}\, dx^p dy^q dz^r,$$

то коэффиціенты C_{pqr} будутъ равны частнымъ производнымъ n-го порядка отъ ω, умноженнымъ на нѣкоторые опредѣленные числовые множители. Такимъ образомъ мы сразу получимъ всѣ частныя производныя одного и того же порядка. Ниже мы встрѣтимъ приложеніе этого замѣчанія.

16. Высшіе дифференціалы сложной функціи. — Пусть будетъ $\omega = F(u, v, w)$ сложная функція, гдѣ u, v, w суть функціи независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, t; напишемъ выраженія частныхъ производныхъ перваго порядка

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{dw}{dx},\\
\frac{d\omega}{dy} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{dw}{dy},\\
\frac{d\omega}{dz} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dz} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dz} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{dw}{dz},\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{dw}{dt}.
\end{aligned}$$

Умножая эти четыре уравненія соотвѣтственно на dx, dy, dz, dt и складывая, получимъ въ лѣвой части

$$\frac{d\omega}{dx}dx + \frac{d\omega}{dy}dy + \frac{d\omega}{dz}dz + \frac{d\omega}{dt}dt,$$

т.-е. $d\omega$, тогда какъ коэффиціенты при $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial w}$ будутъ соотвѣтственно равны du, dv, dw; отсюда

$$d\omega = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv + \frac{\partial F}{\partial w}dw. \qquad (9)$$

Такимъ образомъ выраженіе полнаго дифференціала перваго порядка отъ сложной функціи будетъ имѣть тотъ же видъ, какъ если бы посредствующія функціи были независимыми перемѣнными. Въ этомъ состоитъ одно изъ главныхъ преимуществъ дифференціальнаго обозначенія: соотношеніе (9) не зависитъ ни отъ числа, ни отъ выбора независимыхъ перемѣнныхъ и оно равносильно столькимъ различнымъ соотношеніямъ сколько въ него входитъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Чтобы вычислить $d^2\omega$, мы приложимъ правило, только что установленное для $d\omega$, замѣтивъ при этомъ, что въ правую

часть формулы (9) входятъ шесть посредствующихъ функцій u, v, w, du, dv, dw.

Поэтому имѣемъ:

$$\begin{aligned} d^2\omega = {} & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\,du^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial w}\,du\,dw + \frac{\partial F}{\partial u}\,d^2u \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\,dv^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial w}\,dv\,dw + \frac{\partial F}{\partial v}\,d^2v \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial w}\,du\,dw + \frac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial w}\,dv\,dw + \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}\,dw^2 + \frac{\partial F}{\partial w}\,d^2w, \end{aligned}$$

или, сдѣлавъ приведеніе и пользуясь прежнимъ символическимъ обозначеніемъ,

$$d^2\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv + \frac{\partial F}{\partial \omega}\,d\omega\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial u}\,d^2u + \frac{\partial F}{\partial v}\,d^2v + \frac{\partial F}{\partial w}\,d^2w.$$

Эта формула сложнѣе, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда u, v, w были независимыми перемѣнными, такъ какъ въ нее входятъ члены съ d^2u, d^2v, d^2w, которые исчезаютъ, если u, v, w обращаются въ независимыя перемѣнныя. Чтобы получить $d^3\omega$, нужно снова приложить то же самое правило къ $d^2\omega$, замѣтивъ, что $d^2\omega$ зависитъ отъ девяти посредствующихъ функцій u, v, w, du, dv, dw, d^2u, d^2v, d^2w и т. д. Общее выраженіе этихъ дифференціаловъ становится все болѣе и болѣе сложнымъ; $d^n\omega$ есть цѣлая функція отъ du, dv, dw, d^2u, ..., d^nu, d^nv, d^nw, и члены, содержащіе d^nu, d^nv, d^nw, равны

$$\frac{\partial F}{\partial u}\,d^nu + \frac{\partial F}{\partial v}\,d^nv + \frac{\partial F}{\partial w}\,d^nw.$$

Если въ $d^n\omega$ мы замѣнимъ u, v, w, du, dv, dw,... ихъ выраженіями черезъ независимыя перемѣнныя, то $d^n\omega$ сдѣлается цѣлымъ многочленомъ отъ dx, dy, dz,..., коэффиціенты котораго будутъ равны (см. примѣчаніе къ § 15) частнымъ производнымъ n-го порядка отъ ω, умноженнымъ на нѣкоторые числовые множители. Такимъ образомъ мы сразу получаемъ всѣ частныя производныя n-го порядка.

Положимъ, напримѣръ, что намъ нужно вычислить частныя производныя перваго и второго порядка отъ сложной функціи $\omega = f(u)$, гдѣ u есть функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ $u = \varphi(x, y)$. Если мы будемъ вычислять эти производныя отдѣльно, то сначала найдемъ двѣ частныхъ производныхъ перваго порядка

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}; \tag{10}$$

если отъ этихъ уравненій мы возьмемъ производныя по x и по y, то получимъ только три различныхъ соотношенія, которыя дадутъ производныя второго порядка

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}&=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

второе изъ соотношеній (11) получается отъ дифференцированія перваго изъ уравненій (10) по y или второго по x. При помощи полныхъ дифференціаловъ эти пять соотношеній (10) и (11) могутъ быть замѣнены только двумя

$$\left.\begin{aligned}d\omega&=\frac{\partial\omega}{\partial u}\,du,\\ d^2\omega&=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}\,du^2+\frac{\partial\omega}{\partial u}\,d^2u;\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

если замѣнить въ этихъ двухъ формулахъ du чрезъ $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$, d^2u черезъ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}\,dy^2$, то коэффиціенты при dx и dy въ первой фурмулѣ дадутъ намъ частныя производныя перваго порядка отъ ω, а коэффиціенты при dx^2, $2\,dx\,dy$, dy^2 во второй дадутъ въ свою очередь частныя производныя второго порядка отъ ω.

17. Дифференціалъ произведенія. — Формула, дающая полный дифференціалъ n-го порядка отъ сложной функціи, значительно упрощается въ нѣкоторыхъ случаяхъ, часто встрѣчающихся на практикѣ. Пусть, напримѣръ, нужно найти полный дифференціалъ n-го порядка отъ произведенія двухъ множителей $\omega=u\,.\,v$. Для первыхъ значеній n мы имѣемъ

$$d\omega=v\,du+u\,dv,\quad d^2\omega=v\,d^2u+2\,dv\,du+u\,d^2v,\ldots;$$

по самому закону образованія этихъ дифференціаловъ видно, что мы будемъ вообще имѣть

$$d^n\omega=v\,d^nu+C_1\,dv\,d^{n-1}u+C_2\,d^2v\,d^{n-2}u+\ldots+u\,d^nv,$$

гдѣ $C_1, C_2,\ldots$ цѣлыя положительныя числа. Можно было бы показать послѣдовательно, что эти коэффиціенты тождественны съ коэффиціентами разложенія $(a+b)^n$; но это можно сдѣлать болѣе изящнымъ способомъ, пользуясь слѣдующимъ пріемомъ,

примѣнимымъ ко множеству вопросовъ подобнаго рода. Замѣтимъ, что числа $C_1, C_2, \ldots, C_1, \ldots$ не зависятъ отъ свойствъ функцій u и v; поэтому достаточно опредѣлить эти числа для какого-нибудь одного частнаго вида этихъ функцій. Возьмемъ для этого $y=e^x$, $v=e^y$, гдѣ x и y — независимыя перемѣнныя; мы будемъ имѣть

$$\omega=e^{x+y}, \quad d\omega=e^{x+y}(dx+dy), \quad \ldots, \quad d^n\omega=e^{x+y}(dx+dy)^n,$$
$$du=e^x\,dx, \quad d^2u=e^x\,dx^2, \ldots$$
$$dv=e^y\,dy, \quad d^2v=e^y\,dy^2, \ldots$$

Общая формула послѣ раздѣленія на e^{x+y} обращается въ

$$(dx+dy)^n=dx^n+C_1\,dy\,dx^{n-1}C_2\,dy^2\,dx^{n-2}+\ldots+dy^n.$$

Такъ какъ dx и dy произвольны, то мы должны имѣть

$$C_1=\frac{n}{1}, \quad C_2=\frac{n(n-1)}{1.2}, \quad \ldots, \quad C_p=\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}, \ldots$$

и, слѣдовательно, общая формула имѣетъ видъ

$$d^n(uv)=v\,d^nu+\frac{n}{1}\,dv\,d^{n-1}u+\frac{n(n-1)}{1.2}\,d^2v\,d^{n-2}u+\ldots+u\,d^nv. \quad (13)$$

Эта формула приложима при всякомъ числѣ независимыхъ перемѣнныхъ; въ частномъ случаѣ, если u и v будутъ функціями только одного перемѣннаго x, то, раздѣливъ (13) на dx^n, мы получимъ выраженіе производной n-го порядка отъ произведенія двухъ множителей.

Формулы, аналогичныя (13), существуютъ и для любого числа множителей.

Ихъ можно вывести такимъ же способомъ.

Формула для $d^n\omega$ упрощается также въ томъ случаѣ, если посредствующія функціи u, v, w будутъ цѣлыми линейными функціями независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z,

$$u=ax+by+cz+f,$$
$$v=a'x+b'y+c'z+f',$$
$$w=a''x+b''y+c''z+f'',$$

гдѣ коэффиціенты $a, a', a'', b, b', \ldots$ постоянны. Мы имѣемъ

$$du=a\,dx+b\,dy+c\,dz,$$
$$dv=a'\,dx+b'\,dy+c'\,dz,$$
$$dw=a''\,dx+b''\,dy+c''\,dz,$$

и всѣ дифференціалы d^nu, d^nv, d^nw, при $n>1$, равны нулю.

Въ этомъ случаѣ формула для $d^n\omega$ будетъ такою же, какъ если бы u, v, w были независимыми перемѣнными,

$$d^n\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv + \frac{\partial F}{\partial w}\,dw\right)^{(n)}.$$

18. Однородныя функціи. — Функція $\varphi(x, y, z)$ называется однородною функціею m-ой степени, если имѣетъ мѣсто тожество

$$\varphi(tx, ty, tz) = t^m\varphi(x, y, z).$$

Примемъ на время, что перемѣнныя x, y, z имѣютъ опредѣленныя значенія, и будемъ разсматривать t, какъ единственное независимое перемѣнное; полагая

$$u = tx, \quad v = ty, \quad w = tz,$$

мы можемъ представить предыдущую формулу въ видѣ

$$\varphi(u, v, w) = t^m\varphi(x, y, z).$$

Приравняемъ между собою дифференціалы n-го порядка отъ обѣихъ частей этого равенства. Замѣчая, что u, v, w суть линейныя функціи отъ t, и что

$$du = x\,dt, \quad dv = y\,dt, \quad dw = z\,dt,$$

мы получимъ на основаніи замѣчанія въ концѣ § 17 и послѣ сокращенія на общій множитель dt^n

$$\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial u} + y\frac{\partial\varphi}{\partial v} + z\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,t^{m-n}\varphi(x, y, z).$$

Если теперь мы положимъ $t = 1$, то u, v, w обратятся въ x, y, z, и любой членъ раскрытой лѣвой части послѣдняго равенства

$$A_{pqr}\frac{\partial^n\varphi}{\partial u^p\partial v^q\partial w^r}x^py^qz^r$$

обратится въ

$$A_{pqr}\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}x^py^qz^r.$$

Такимъ образомъ мы придемъ къ символическому равенству

$$\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,\varphi(x, y, z),$$

которое, при $n = 1$, переходитъ въ извѣстную формулу

$$m\,\varphi(x, y, z) = x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Различныя обозначенія. — Мы имѣли три различныхъ обозначенія для частныхъ производныхъ различныхъ порядковъ отъ функціи многихъ перемѣнныхъ: обозначенія Лейбница,

Лагранжа и Коши. Общій недостатокъ этихъ обозначеній — ихъ сложность, особенно замѣтная при сколько-нибудь значительныхъ вычисленіяхъ. Поэтому были придуманы различныя болѣе сокращенныя обозначенія. Одно изъ наиболѣе употребительныхъ обозначеній для частныхъ производныхъ перваго и второго порядковъ отъ функціи двухъ перемѣнныхъ принадлежитъ Монжу (Monge): если z есть функція двухъ перемѣнныхъ x и y, то полагаютъ

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

тогда полные дифференціалы dz и d^2z выразятся слѣдующимъ образомъ

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$
$$d^2z=r\,dx^2+2\,s\,dx\,dy+t\,dy^2.$$

Въ настоящее время входитъ въ употребленіе также слѣдующее обозначеніе. Если z есть функція какого-нибудь числа n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то полагаютъ

$$p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}z}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

причемъ нѣкоторые изъ указателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ могутъ быть и нулями.

19. Приложенія. — Пусть будетъ $y=f(x)$ уравненіе плоской кривой C, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ координатъ. Касательная въ точкѣ $M(x, y)$ къ этой кривой будетъ имѣть уравненіе

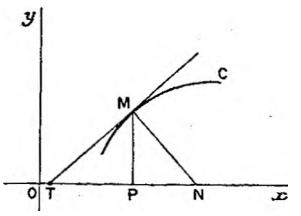
$$Y-y=y'(X-x).$$

Нормаль, т.-е. перпендикуляръ къ касательной, проведенный черезъ точку касанія, будетъ имѣть угловой коэффиціентъ $-\frac{1}{y'}$; слѣдовательно, уравненіе нормали будетъ

$$(Y-y)\,y'+(X-x)=0.$$

Пусть будетъ P основаніе ординаты, T и N точки пересѣченія оси x съ касательною и съ нормалью; длина PN называется поднормалью, PT есть подкасательная, MN — нормаль и MT — касательная.

Черт. 2.



Изъ уравненія нормали мы находимъ для абсциссы точки N значеніе $x+yy'$, что показываетъ, что поднормаль равна $\pm yy'$. Если условимся принимать за поднормаль длину PN, взятую съ ея знакомъ, т.-е. брать знакъ $+$ или $-$ смотря по тому, совпадаетъ ли направленіе отъ P къ N съ положительнымъ или съ отрицательнымъ направленіемъ оси x, то поднормаль будетъ равна yy', какъ бы ни была расположена кривая C относительно осей координатъ. Точно также подкасательная PT равна $-\frac{y}{y'}$.

Что касается длинъ MN и MT, то изъ прямоугольныхъ треугольниковъ MPN и MPT имѣемъ

$$MN=\sqrt{\overline{MP}^2+\overline{PN}^2}=y\sqrt{1+y'^2},$$
$$MT=\sqrt{\overline{MP}^2+\overline{PT}^2}=\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}.$$

Мы можемъ искать кривыя, для которыхъ между этими четырьмя длинами имѣли бы мѣсто заданныя соотношенія. Поищемъ, напримѣръ, всѣ кривыя, у которыхъ поднормаль постоянна и равна данной длинѣ a; это приводитъ къ разысканію всѣхъ функцій $y=f(x)$, удовлетворяющихъ условію $yy'=a$. Первая часть этого равенства есть производная отъ $\frac{y^2}{2}$, а вторая — отъ ax; поэтому эти двѣ функціи могутъ разниться только на постоянное, и мы получаемъ

$$y^2=2ax+C$$

уравненіе параболы, имѣющей ось главною осью. Точно также, если мы будемъ искать кривыя, у которыхъ постоянна подкасательная, то придемъ къ уравненію

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{a};$$

отсюда

$$\log y=\frac{x}{a}+\log C, \text{ или } y=Ce^{\frac{x}{a}},$$

уравненіе трансцендентной кривой, у которой ось x-овъ служитъ асимптотою. Чтобы найти кривыя съ постоянною нормалью, мы должны разсмотрѣть уравненіе $y\sqrt{1+y'^2}=a$; его можно представить въ видѣ

$$\frac{yy'}{\sqrt{a^2-y^2}}=1.$$

Лѣвая часть есть производная отъ $-\sqrt{a^2-y^2}$, и потому мы находимъ

$$-\sqrt{a^2-y^2}=x+C,$$

или

$$(x+C)^2+y^2=a^2,$$

уравненіе окружности съ радіусомъ a и съ центромъ на оси ox.

Кривыя съ постоянною касательною суть трансцендентныя кривыя, и мы ихъ изучимъ позднѣе.

Пусть будутъ далѣе $y=f(x)$, $Y=F(x)$ уравненія двухъ кривыхъ, а M и M' двѣ соотвѣтствующія точки этихъ кривыхъ, имѣющія одну и ту же абсциссу x.

Для того чтобы поднормали къ обѣимъ кривымъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ имѣли одну и ту же длину, необходимо и достаточно, чтобы

$$YY'=\pm yy',$$

откуда $Y^2=\pm y^2+C$; двойной знакъ происходитъ здѣсь оттого, что поднормали могутъ быть направлены или въ одну сторону или

въ противоположныя. Предыдущимъ соотношеніямъ можно удовлетворить, положивъ

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2), \quad Y^2=\frac{b^2x^2}{a^2},$$

или

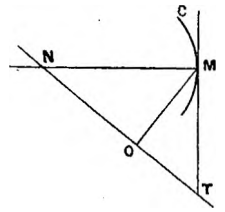
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2), \quad Y^2=\frac{b^2x^2}{a^2};$$

отсюда получается простой способъ построенія нормалей къ эллипсу и къ гиперболѣ.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Пусть будетъ $\varrho=f(\omega)$ уравненіе плоской кривой въ полярныхъ координатахъ. Проведемъ черезъ полюсъ O прямую, перпендикулярную къ радіусу вектору OM и пересѣкающуюся съ касательною MT и нормалью MN. Требуется выразить различныя линіи OT, ON, MN, MT въ функціи отъ $f(\omega)$ и $f'(\omega)$.

Черт. 3.



Каковы будутъ кривыя, для которыхъ одна изъ этихъ линій постоянна?

2. Пусть будутъ $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$ уравненія кривой двойной кривизны Γ; пусть N будетъ точка, въ которой нормальная плоскость въ точкѣ M, т.-е. плоскость, перпендикулярная къ касательной прямой въ этой точкѣ, встрѣчаетъ ось z, и P — основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M на Oz. Каковы тѣ кривыя, для которыхъ одна изъ линій PN или MN постоянна?

Отв. Эти кривыя расположены на параболоидахъ вращенія или на сферахъ.

3. Опредѣлить цѣлый многочленъ седьмой степени $f(x)$ по x, зная, что $f(x)+1$ дѣлится на $(x-1)^4$, а $f(x)-1$ на $(x+1)^4$. Обобщить вопросъ.

4. Пусть будутъ P и Q два цѣлыхъ многочлена по x, для которыхъ

$$\sqrt{1-P^2}=Q\sqrt{1-x^2}.$$

Тогда, обозначая черезъ n цѣлое число, будемъ имѣть

$$\frac{dP}{\sqrt{1-P^2}}=\frac{n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отв. Дифференцируя соотношеніе

$$1-P^2=Q^2(1-x^2), \qquad (a)$$

находимъ

$$-2PP'=Q[2Q'(1-x^2)-2Qx]; \qquad (b)$$

соотношеніе (a) показываетъ, что Q первое съ P, а (b), — что P' дѣлится на Q.

5*. Пусть будетъ $R(x)$ многочленъ четвертой степени, имѣющій простые корни, и $x=\frac{U}{V}$ раціональная функція отъ t, удовлетворяющая соотношенію

$$\sqrt{R(x)}=\frac{P(t)}{Q(t)}\sqrt{R_1(t)},$$

гдѣ $R_1(t)$ есть многочленъ четвертой степени, и $\frac{P}{Q}$ — раціональная функція. Показать, что функція $\frac{U}{V}$ удовлетворяетъ соотношенію вида

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{k\,dt}{\sqrt{R_1(t)}},$$

гдѣ k постоянное количество. [Якоби.]

Отв. Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что всѣ корни уравненія $R\left(\frac{U}{V}\right)=0$, которыя не обращаютъ въ нуль $R_1(t)$, должны обращать въ нуль выраженіе $UV'-VU'$, а, слѣдовательно, и $\frac{dx}{dt}$.

6*. Производныя n-го порядка функціи отъ функціи $y=\varphi(u)$, гдѣ u есть функція независимаго перемѣннаго x, выразится въ видѣ

$$\frac{d^ny}{dx^n}=A_1\varphi'(u)+\frac{A_2}{1.2}\varphi''(u)+\ldots+\frac{A_n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(u), \qquad (a)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}A_k=\frac{d^nu^k}{dx^n}-\frac{k}{1}u\frac{d^nu^{k-1}}{dx^n}+\frac{k(k-1)}{1.2}u^2\frac{d^nu^{k-2}}{dx^n}+\ldots\\ +(-1)^{k-1}ku^{k-1}\frac{d^nu}{dx^n}\qquad(k=1,\,2,\,\ldots,\,n).\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Замѣтимъ сначала, что выраженіе производной n-го порядка будетъ вида (a), причемъ коэффиціенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не зависятъ отъ вида функціи $\varphi(u)$. Чтобы получить эти коэффиціенты, достаточно положить послѣдовательно $\varphi(u)=u$, $\varphi(u)=u^2$, $\ldots$, $\varphi(u)=u^n$ и рѣшить полученныя уравненія относительно коэффиціентовъ $A_1, A_2, \ldots, A_n$; отсюда получаются значенія (b).

7*. Производная n-го порядка отъ $\varphi(x^2)$ имѣетъ выраженіе

$$\frac{d^n\varphi(x^2)}{dx^n}=(2x)^n\varphi^{(n)}(x^2)+n(n-1)(2x)^{n-2}\varphi^{(n-1)}(x^2)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{1.2\ldots p}(2x)^{n-2p}\varphi^{(n-p)}(x^2)+\ldots,$$

гдѣ число p измѣняется отъ нуля до наибольшаго цѣлаго числа, заключающагося въ $\frac{n}{2}$, и $\varphi^{(i)}(x^2)$ обозначаетъ производную порядка i относительно x^2.

Приложеніе къ функціямъ e^{-x^2}, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$.

8*. Если мы положимъ $x=\cos u$, то получимъ

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}}=(-1)^{m-1}\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{m}\sin mu$$

[Олиндъ Родригъ (Olinde Rodrigues).]

9. Полиномъ Лежандра (Legendre)

$$X_n=\frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2}-2x\frac{dX_n}{dx}+n(n+1)X_n=0;$$

вывести отсюда коэффиціенты этого полинома.

10. Четыре функціи

$$y_1=\sin(n \arcsin x), \quad y_3=\sin(n \arccos x),$$
$$y_2=\cos(n \arcsin x), \quad y_4=\cos(n \arccos x),$$

удовлетворяютъ дифференціальному уравненію

$$(1-x^2)\,y''-xy'+n^2\,y=0.$$

Вывести отсюда разложенія этихъ функцій въ тѣхъ случаяхъ, когда онѣ приводятся къ многочленамъ.

11*. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

[Альфенъ (Halphen).]

12. Всякая функція $z=x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, каковы бы ни были функціи φ и ψ, удовлетворяетъ соотношенію

$$r\,x^2+2\,s\,x\,y+t\,y^2=0.$$

13. Функція $z=x\,\varphi(x+y)+y\,\psi(x+y)$, каковы бы ни были функціи φ,ψ, удовлетворяетъ соотношенію

$$r-2s+t=0.$$

14. Функція $z=f[x+\varphi(y)]$, каковы бы ни были функціи f и φ, удовлетворяетъ соотношенію

$$ps=qr.$$

15. Функція $z=x^n\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+y^{-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, каковы бы ни были функціи φ и ψ, удовлетворяетъ соотношенію

$$r\,x^2+2\,s\,x\,y+t\,y^2+p\,x+q\,y=n^2\,z.$$

16. Функція

$$y=|x-a_1|\,\varphi_1(x)+|x-a_2|\,\varphi_2(x)+\ldots+|x-a_n|\,\varphi_n(x),$$

гдѣ $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, а также и производныя $\varphi'_1(x),\varphi'_2(x),\ldots,\varphi'_n(x)$ суть функціи непрерывныя, имѣетъ производную, прерывную при значеніяхъ a_1, a_2, $\ldots$, a_n.

17. Найти соотношеніе между производными перваго и второго порядковъ по x_1, x_2, x_3 отъ функціи $z=f(x_1,\,u)$, гдѣ $u=\varphi(x_2,\,x_3)$, количества x_1, x_2, x_3 суть три независимыхъ перемѣнныхъ, а $f(x_1,\,u)$ и $\varphi(x_2,\,x_3)$ — двѣ произвольныя функціи.

18. Пусть будетъ $f(x)$ какая-нибудь функція отъ x и $f'(x)$ ея производная. Положивъ $u=[f'(x)]^{-\frac{1}{2}}$, $v=f(x)[f'(x)]^{-\frac{1}{2}}$, будемъ имѣть

$$\frac{1}{u}\,\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{v}\,\frac{d^2v}{dx^2}.$$

19*. Производная n-го порядка функціи отъ функціи $u=\varphi(y)$, гдѣ $y=\Psi(x)$, имѣетъ видъ

$$D_x^n\varphi=\sum\frac{n!}{i!j!\ldots k!}D_y^p\varphi\left(\frac{\Psi'}{1}\right)^i\left(\frac{\Psi''}{1.2}\right)^j\left(\frac{\Psi'''}{1.2.3}\right)^h\cdots\left(\frac{\Psi(l)}{1.2\ldots l}\right)^k,$$

причемъ знакъ Σ долженъ быть распространенъ на всѣ рѣшенія въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненія $i+2j+3h+\ldots+lk=n$, а p равно $i+j+\ldots+k$.

[Фаа де Бруно (Faa de Bruno), Quarterly Journal of Mathematics, т. I, стр. 359.]

ГЛАВА II.

Неявныя функціи. — Функціональный опредѣлитель. — Замѣна перемѣнныхъ.

I. — НЕЯВНЫЯ ФУНКЦІИ.

20. Изслѣдованіе одного частнаго случая. — Въ анализѣ часто приходится имѣть дѣло съ функціями, которыя не даются въ видѣ явныхъ выраженій, но которыя опредѣляются нерѣшенными уравненіями. Разсмотримъ, напримѣръ, соотношеніе между тремя перемѣнными x, y, z

$$F(x, y, z)=0. \qquad (1)$$

При нѣкоторыхъ условіяхъ, которыя мы вскорѣ точно выразимъ, это уравненіе опредѣляетъ нѣкоторую функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ. Чтобы это видѣть, мы докажемъ слѣдующую теорему.

Пусть будетъ $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ система рѣшеній уравненія (1), и пусть функція F и ея частныя производныя перваго порядка непрерывны вблизи этой системы значеній. Если производная F'_z не равна нулю при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, то существуетъ одна и только одна непрерывная функція независимыхъ перемѣнныхъ x, y, удовлетворяющая уравненію (1) и принимающая значеніе z_0, когда x и y принимаютъ соотвѣтственно значенія x_0 и y_0.*)

Производная F'_z не равна нулю при значеніяхъ x_0, y_0, z_0; предположимъ, для опредѣленности, что она положительна. Съ другой стороны, такъ какъ F, F'_x, F'_y, F'_z непрерывны вблизи системы значеній x_0, y_0, z_0, то мы можемъ взять настолько малое положительное число l, чтобы четыре функціи

*) Пользуясь методомъ послѣдовательныхъ приближеній, Гурса далъ въ Bulletin de la Société Mathématique de France (1903; т. XXXI, стран. 184—192) другое доказательство этой теоремы, не содержащее никакихъ предположеній относительно производныхъ F_x и F_y и даже не требующее ихъ существованія.

(Примѣчаніе англ. пер.)

F, F'_x; F'_y, F'_z были непрерывны, пока значенія перемѣнныхъ x, y, z удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|x-x_0|\leqslant l, \quad |y=y_0|\leqslant l, \quad |z=z_0|\leqslant l, \qquad (2)$$

и чтобы для этой системы значеній x, y, z было

$$F'_z(x, y, z)>P,$$

гдѣ P — какое-нибудь положительное число. Обозначимъ точно также черезъ Q другое положительное число, большее, чѣмъ абсолютныя значенія двухъ другихъ частныхъ производныхъ F'_x и F'_y въ той же самой области.

Дадимъ теперь x, y, z значенія, удовлетворяющія неравенствамъ (2). Очевидно, можно написать

$$F(x, y, z)-F(x_0, y_0, z_0)=F(x, y, z)-F(x_0, y, z)+F(x_0, y, z) \\ -F(x_0, y_0, z)+F(x_0, y_0, z)-F(x_0, y_0, z_0).$$

Прилагая къ каждой изъ разностей формулу конечныхъ приращеній и замѣчая, что $F(x_0, y_0, z_0)=0$, получимъ

$$F(x, y, z)=(x-x_0)F'_x[x_0+\theta(x-x_0), y, z] \\ +(y-y_0)F'_y[x_0, y_0+\theta'(y-y_0), z] \\ +(z-z_0)F'_z[x_0, y_0, z_0+\theta''(z-z_0)].$$

Такимъ образомъ функція $F(x, y, z)$ будетъ имѣть видъ

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)&=A(x, y, z)(x-x_0) \\ &+B(x, y, z)(y-y_0)+C(x, y, z)(z-z_0), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

причемъ абсолютныя значенія функцій $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|A|<Q, \quad |B|<Q, \quad |C|>P,$$

при всѣхъ значеніяхъ перемѣнныхъ x, y, z, удовлетворяющихъ неравенствамъ (2). Пусть будетъ ε положительное число, меньшее l, и η другое положительное число, меньшее обоихъ чиселъ l и $\frac{P\varepsilon}{2Q}$. Предположимъ, что въ уравненіи (1) мы дали перемѣннымъ x и y опредѣленныя значенія, удовлетворяющія условіямъ

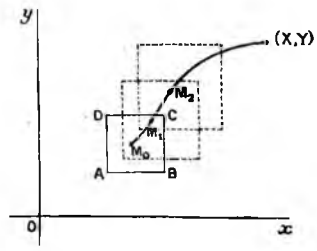
$$|x-x_0|<\eta, \quad |y-y_0|<\eta,$$

и найдемъ число корней этого уравненія относительно неизвѣстнаго z, заключающихся между $z_0-\varepsilon$ и $z_0+\varepsilon$. Замѣнимъ въ выраженіи (3) для $F(x, y, z)$ z черезъ $z_0\pm\varepsilon$; тогда сумма двухъ первыхъ членовъ будетъ по абсолютному значенію меньше $2Q\eta$, тогда какъ абсолютное значеніе послѣдняго члена больше $P\varepsilon$. По свойству числа η, знакъ всего выраженія зависитъ отъ знака послѣдняго члена. Поэтому мы имѣемъ $F(x, y, z_0-\varepsilon)<0$, $F(x, y, z_0+\varepsilon)>0$ и отсюда заключаемъ, что

уравненіе (1) имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень, заключающійся между $z_0-\varepsilon$ и $z_0+\varepsilon$. Этотъ корень будетъ притомъ единственнымъ, такъ какъ производная F'_z остается положительною при измѣненіи z отъ $z_0-\varepsilon$ до $z_0+\varepsilon$. Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что уравненіе (1) имѣетъ одинъ и только одинъ корень, который стремится къ z_0, когда x и y стремятся соотвѣтственно къ значеніямъ x_0 и y_0.

Посмотримъ, для какихъ системъ значеній перемѣнныхъ x и y корень, существованіе котораго мы доказали, будетъ вполнѣ опредѣленнымъ. Пусть будетъ h меньшее изъ двухъ чиселъ l и $\frac{Pl}{2Q}$; предыдущее разсужденіе показываетъ, что если значенія перемѣнныхъ x и y удовлетворяютъ неравенствамъ $|x-x_0|<h$, $|y-y_0|<h$, то уравненіе (1) имѣетъ одинъ единственный корень, заключенный между z_0-l и z_0+l. Пусть будетъ R квадратъ съ центромъ въ точкѣ $M_0(x_0, y_0)$ и со сторонами, параллельными осямъ координатъ; длину каждой стороны возьмемъ равною $2h$. Если точка (x, y) лежитъ внутри этой области, то уравненіе (1) даетъ вполнѣ опредѣленную функцію z двухъ перемѣнныхъ x и y, содержащуюся между z_0-l и z_0+l. По предыдущему, эта функція будетъ непрерывна въ точкѣ M_0; то же самое будетъ имѣть мѣсто и для каждой другой точки M_1 области R, потому что, на основаніи сдѣланныхъ допущеній относительно функціи F и ея производныхъ, производная $F'_z(x_1, y_1, z_1)$ въ точкѣ M_1 будетъ положительною, такъ какъ мы будемъ имѣть $|x_1-x_0|<l$, $|y_1-y_0|<l$, $|z_1-z_0|<l$. Такимъ образомъ въ точкѣ M_1 мы будемъ находиться въ тѣхъ же самыхъ условіяхъ, какъ и въ точкѣ M_0, и, слѣдовательно, разсматриваемый корень будетъ непрерывенъ при $x=x_1$, $y=y_1$.

Черт. 4.



Такъ какъ разсматриваемый нами корень опредѣленъ только внутри области R, то мы имѣемъ такимъ образомъ только одинъ элементъ неявной функціи. Чтобъ опредѣлить эту функцію внѣ области R, мы будемъ послѣдовательно поступать слѣдующимъ образомъ. Пусть будетъ L непрерывный путь, выходящій изъ точки (x_0, y_0) и кончающійся въ точкѣ (X, Y), лежащей внѣ области R. Предположимъ, что перемѣнныя x и y измѣняются одновременно такимъ образомъ, что точка съ координатами (x, y) описываетъ путь L. Если мы выйдемъ изъ

точки (x_0, y_0) со значеніемъ z_0 для неизвѣстнаго z, то мы будемъ имѣть вполнѣ опредѣленное значеніе для этого корня до тѣхъ поръ, пока не выйдемъ изъ области R. Пусть будетъ $M_1(x_1, y_1)$ точка этого пути, находящаяся внутри R, и пусть будетъ z_1 соотвѣтствующее значеніе для z; условія основной теоремы удовлетворятся при $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, и, слѣдовательно, существуетъ другая область R_1 съ центромъ въ точкѣ M_1, внутри которой будетъ вполнѣ опредѣленъ корень, обращающійся въ z_1 при $x=x_1$, $y=y_1$. У этой новой области R_1 будутъ вообще точки, лежащія внѣ R; взявъ опять на пути L другую точку M_2, расположенную внѣ R и внутри R_1, мы можемъ снова повторить то же самое построеніе и получимъ новую область R_2, внутри которой корень уравненія (1) будетъ вполнѣ опредѣленнымъ, и т. д. Этотъ процессъ мы можемъ продолжать до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ системѣ значеній для x, y, z, при которой $F'_z=0$. Я ограничусь здѣсь только этими общими указаніями; въ слѣдующихъ главахъ мы будемъ имѣть случай подробнѣе остановиться на этого рода вопросахъ.

21. Производныя отъ неявныхъ функцій. — Возвратимся къ области R и къ корню $z=\varphi(x, y)$ уравненія (1), который въ этой области будетъ непрерывною функціею двухъ перемѣнныхъ x и y. Эта функція имѣетъ частныя производныя перваго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, оставимъ y постояннымъ и дадимъ x приращеніе Δx, вслѣдствіе чего для z получимъ приращеніе Δz.

По предыдущему имѣемъ

$$F(x+\Delta x, y, z+\Delta z)-F(x, y, z)=$$
$$=\Delta x F'_x(x+\theta\Delta x, y, z+\Delta z)+\Delta z F'_z(x, y, z+\theta'\Delta z)=0.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x+\theta\Delta x, y, z+\Delta z)}{F'_z(x, y, z+\theta'\Delta z)};$$

когда Δx стремится къ нулю, Δz стремится также къ нулю, такъ какъ z есть непрерывная функція отъ x. Такимъ образомъ правая часть послѣдняго равенства стремится къ предѣлу, и z имѣетъ частную производную по x

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_x}{F'_z}.$$

Точно также мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Примѣчаніе. — Если степень уравненія $F=0$ относительно z равна m, то это уравненіе опредѣляетъ m функцій отъ перемѣнныхъ x и y. Частныя производныя $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ будутъ точно также имѣть m значеній для каждой системы значеній перемѣнныхъ x и y; тѣмъ не менѣе предыдущія формулы даютъ для этихъ частныхъ производныхъ вполнѣ опредѣленныя выраженія, если только въ правыхъ частяхъ мы замѣнимъ z значеніемъ той изъ m функцій, отъ которой мы ищемъ производную.

Напримѣръ, уравненіе

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

опредѣляетъ двѣ функціи

$$+\sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{и} \quad -\sqrt{1-x^2-y^2},$$

которыя непрерывны, если $x^2+y^2<1$. Частныя производныя отъ первой функціи будутъ

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

а частныя производныя отъ второй будутъ имѣть обратные знаки. Тѣ же самыя значенія мы получимъ, исходя изъ формулъ

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z},$$

и замѣняя въ нихъ z его двумя значеніями.

22. Приложеніе къ поверхностямъ. — Если мы будемъ разсматривать x, y, z, какъ декартовы координаты точки въ пространствѣ, то всякое уравненіе

$$F(x, y, z)=0 \tag{4}$$

будетъ представлять поверхность S. Пусть будутъ (x_0, y_0, z_0) координаты точки A этой поверхности; если функція F непрерывна вмѣстѣ со своими частными производными перваго порядка вблизи значеній x_0, y_0, z_0, и если эти частныя производныя не обращаются одновременно въ нуль для точки A, то поверхность S имѣетъ въ точкѣ A опредѣленную касательную плоскость. Положимъ, напримѣръ, что частная производная F'_z не будетъ равна нулю при $x=x_0, y=y_0, z=z_0$. Предполагая уравненіе поверхности рѣшеннымъ относительно z, мы можемъ, на основаніи общей теоремы, представить его около точки A въ видѣ

$$z=\varphi(x, y),$$

гдѣ функція $q(x, y)$ непрерывна. Уравненіе касательной плоскости въ точкѣ A будетъ

$$Z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0(Y-y_0).$$

Замѣнимъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ ихъ значеніями изъ предыдущихъ формулъ; тогда уравненіе касательной плоскости приметъ видъ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0. \qquad (5)$$

Если бы было $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0$, но $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\neq 0$, то мы приняли бы y и z за независимыя перемѣнныя, а x за ихъ функцію; въ этомъ случаѣ мы пришли бы къ тому же самому уравненію (5), что можно было предполагать заранѣе на основаніи симметріи лѣвой части. Точно такъ же можно написать уравненіе касательной въ точкѣ (x_0, y_0) къ плоской кривой, представляемой уравненіемъ $F(x, y)=0$,

$$(X-x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+(Y-y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=0.$$

Если мы имѣемъ одновременно

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0,$$

то точка A есть о с о б а я т о ч к а поверхности S; касательныя къ различнымъ кривымъ, расположеннымъ на поверхности и проходящимъ черезъ точку A, образуютъ вообще здѣсь не плоскость, а конусъ. Этотъ случай мы разсмотримъ впослѣдствіи (глава III).

При доказательствѣ основной теоремы о неявныхъ функціяхъ мы предполагали, что производная F'_z не равна нулю. Геометрически ясно видно, почему это условіе необходимо. Въ самомъ дѣлѣ, если мы имѣемъ $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0=0$ и $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\neq 0$, то касательная плоскость къ поверхности S параллельна оси z, и прямая, параллельная оси z и проходящая вблизи прямой $x=x_0$, $y=y_0$, встрѣчаетъ поверхность вообще въ двухъ точкахъ, лежащихъ около точки прикосновенія. Такимъ образомъ уравненіе (4) имѣетъ здѣсь два корня, которые оба стремятся къ z_0, когда x и y стремятся соотвѣтственно къ x_0 и y_0.

Напримѣръ, если мы пересѣчемъ сферу $x^2+y^2+z^2-1=0$ прямою $y=0$, $x=1+\varepsilon$, то мы будемъ имѣть два значенія для z, стремящихся къ нулю вмѣстѣ съ ε, — дѣйствительныхъ, если ε отрицательно, и мнимыхъ, если ε положительно.

23. Высшія производныя. — Въ формулахъ для производныхъ перваго порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

можно разсматривать правыя части, какъ сложныя функціи, въ которыхъ z служитъ посредствующею функціею. Такимъ образомъ можно было бы вычислять высшія производныя постепенно, прилагая правило дифференцированія сложныхъ функцій. При этомъ существованіе этихъ высшихъ производныхъ зависитъ отъ существованія частныхъ производныхъ различныхъ порядковъ отъ функціи $F(x, y, z)$.

Эти производныя можно получить болѣе простымъ способомъ примѣняя слѣдующее предложеніе: Если нѣсколько функцій независимаго перемѣннаго удовлетворяютъ соотношенію $F=0$, то ихъ производныя будутъ удовлетворять соотношенію, которое получится, если приравнять нулю производную, взятую отъ лѣвой части F, какъ отъ сложной функціи. Въ самомъ дѣлѣ, если функція F приводится тождественно къ нулю, когда замѣнимъ въ ней перемѣнныя, отъ которыхъ она зависитъ, функціями независимаго перемѣннаго, то будетъ тождественно равна нулю и производная отъ функціи F. Эта теорема остается вѣрною и въ томъ случаѣ, когда функціи, связанныя соотношеніемъ $F=0$, зависятъ отъ многихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Предположимъ теперь, что намъ нужно вычислить высшія производныя отъ неявной функціи y одного независимаго перемѣннаго x, опредѣленной соотношеніемъ

$$F(x, y)=0.$$

Мы находимъ послѣдовательно

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}y'+3\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}y'^2+3\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y''$$
$$+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}y'^3+3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'y''+\frac{\partial F}{\partial y}y'''=0,$$

. . . . . .

Отсюда можно постепенно опредѣлить $y', y'', y''', \ldots$

Примѣръ. — Если дана функція $y=f(x)$, то можно, обратно, разсматривать y, какъ независимое перемѣнное, а x, какъ неявную

функцію отъ y, опредѣленную уравненіемъ $y=f(x)$. Если при значеніи x_0, для котораго $y_0=f(x_0)$, производная $f'(x)$ не равна нулю, то, по основной теоремѣ, существуетъ единственная функція отъ y, удовлетворяющая соотношенію $y=f(x)$ и принимающая при $y=y_0$ значеніе x_0; эта функція носитъ названіе функціи о б р а т н о й относительно $f(x)$. Чтобы вычислить производныя различныхъ порядковъ x'_y, x''_{y^2}, x'''_{y^3}, ... отъ этой функціи, достаточно ее нѣсколько разъ продифференцировать, разсматривая y, какъ независимое перемѣнное. Это даетъ

$$\begin{aligned}
1&=f'(x)\,x'_y\\
0&=f''(x)\,(x'_y)^2+f'(x)\,x''_{y^2}\\
0&=f'''(x)\,(x'_y)^3+3\,f''(x)\,x'_y\,x''_{y^2}+f'(x)\,x'''_{y^3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;
\end{aligned}$$

откуда

$$x'_y=\frac{1}{f'(x)},\quad x''_{y^2}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},\quad x'''_{y^3}=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)\,f'''(x)}{[f'(x)]^5},\ \ldots$$

Слѣдуетъ замѣтить, что эта система формулъ не мѣняется, когда переставляютъ x'_y и $f'(x)$, x''_{y^2} и $f''(x)$, x'''_{y^3} и $f'''(x)$, ..., такъ какъ связь между двумя функціями $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$, очевидно, взаимная.

Чтобы дать приложеніе этихъ формулъ, найдемъ всѣ функціи $y=f(x)$, удовлетворяющія соотношенію

$$y'y'''-3y''^2=0.$$

Принявъ y за независимое перемѣнное, а x за функцію, мы дадимъ предыдущему уравненію видъ

$$x'''_{y^3}=0.$$

Но единственными функціями, для которыхъ производная третьяго порядка равна нулю, будутъ многочлены не выше второй степени. Поэтому мы имѣемъ для x выраженіе слѣдующаго вида:

$$x=C_1y^2+C_2y+C_3,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 — три произвольныхъ постоянныхъ. Рѣшая это уравненіе относительно y, мы заключаемъ, что всѣ функціи, удовлетворяющія выставленному условію, содержатся въ формулѣ

$$y=a\pm\sqrt{bx+c},$$

гдѣ a, b, c — три произвольныя постоянныя. Это уравненіе представляетъ параболу, главная ось которой параллельна оси x.

24. Частныя производныя. — Разсмотримъ теперь неявную функцію двухъ перемѣнныхъ, опредѣляемую уравненіемъ

$$F(x,\,y,\,z)=0. \tag{6}$$

Какъ мы уже знаемъ, частныя производныя перваго порядка опредѣлятся изъ соотношеній

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{7}$$

Чтобы получить частныя производныя второго порядка, достаточно вновь продифференцировать оба уравненія (7) относительно x и y; это дастъ только три различныхъ соотношенія,

такъ какъ производная отъ перваго уравненія по y тождественна съ производною отъ второго по x.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=0,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}&=0,\\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Такимъ же образомъ мы можемъ найти производныя третьяго и высшихъ порядковъ.

Употребленіе полныхъ дифференціаловъ позволяетъ и здѣсь опредѣлить одновременно всѣ частныя производныя одного и того же порядка. Для этого достаточно воспользоваться слѣдующею теоремою: Если нѣсколько функцій $u, v, w, \ldots$ сколькихъ угодно независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$ удовлетворяютъ соотношенію $F=0$, то полные дифференціалы удовлетворятъ соотношенію $dF=0$, которое получится, если мы возьмемъ полный дифференціалъ отъ F, принимая всѣ перемѣнныя, отъ которыхъ зависитъ F, за перемѣнныя независимыя. Чтобы доказать эту теорему, предположимъ, что мы имѣемъ уравненіе $F(u, v, w)=0$, гдѣ u, v, w суть функціи независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, t. Частныя производныя отъ u, v, w удовлетворяютъ четыремъ уравненіямъ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}&=0,\\
\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}&=0,\\
\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}&=0,\\
\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}&=0;
\end{aligned}$$

умножая ихъ соотвѣтственно на dx, dy, dz, dt и складывая, получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw=dF=0.$$

Здѣсь еще разъ видно преимущество дифференціальнаго обозначенія, такъ какъ предыдущее соотношеніе не зависитъ ни отъ выбора, ни отъ числа независимыхъ перемѣнныхъ. Чтобы имѣть соотношеніе между дифференціалами второго порядка,

достаточно приложить основную теорему къ уравненію $dF=0$, разсматривая его, какъ уравненіе между u, v, w, du, dv, dw и т. д.; при этомъ нужно только замѣнять нулями всѣ дифференціалы порядка выше перваго отъ тѣхъ перемѣнныхъ, которыя приняты за независимыя.

Приложимъ этотъ способъ къ вычисленію полныхъ дифференціаловъ различныхъ порядковъ отъ неявной функціи, опредѣленной уравненіемъ (6), причемъ примемъ x и y за независимыя перемѣнныя. Мы имѣемъ

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

два первыхъ уравненія могутъ замѣнить собою пять соотношеній (7) и (8). Изъ выраженія для dz получаются двѣ производныхъ перваго порядка, изъ выраженія для d^2z — три производныхъ второго порядка и т. д. Разсмотримъ, напримѣръ, уравненіе

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2=1;$$

дифференцируя его два раза, находимъ

$$A\,x\,dx+A'\,y\,dy+A''z\,dz=0,$$

$$A\,dx^2+A'\,dy^2+A''dz^2+A''z\,d^2z=0;$$

изъ перваго соотношенія имѣемъ

$$dz=-\frac{A\,x\,dx+A'\,y\,dy}{A''z},$$

и, внося это значеніе dz во второе, получимъ

$$d^2z=-\frac{A(Ax^2+A''z^2)\,dx^2+2AA'\,xy\,dx\,dy+A'(A'y^2+A''z^2)\,dy^2}{A''^2z^3}.$$

Такимъ образомъ, воспользовавшись обозначеніями Монжа, мы будемъ имѣть

$$p=-\frac{Ax}{A''z},\quad q=-\frac{A'y}{A''z},$$

$$r=-\frac{A(Ax^2+A''z^2)}{A''^2z^3},\quad s=-\frac{AA'xy}{A''^2z^3},\quad t=-\frac{A'(A'y^2+A''z^2)}{A''^2z^3}.$$

Изложенный методъ, очевидно, вполнѣ общій; онъ примѣнимъ, каковы бы ни были число независимыхъ перемѣнныхъ или порядокъ искомыхъ частныхъ производныхъ.

Примѣръ. — Пусть будетъ $z=f(x,y)$ функція двухъ перемѣнныхъ x и y. Примемъ въ послѣднемъ соотношеніи y и z за перемѣнныя независимыя, а x за неявную функцію этихъ двухъ перемѣнныхъ,

и найдемъ дифференціалы перваго и второго порядковъ dx и d^2x. Мы имѣемъ

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy;$$

такъ какъ мы приняли y и z за независимыя перемѣнныя, то должно положить

$$d^2y=d^2z=0;$$

потому, дифференцируя вновь послѣднее соотношеніе, находимъ

$$0=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2+\frac{\partial f}{\partial x}\,d^2x.$$

Пользуясь обозначеніями Монжа для частныхъ производныхъ перваго и второго порядковъ отъ функціи $f(x, y)$, мы можемъ представить предыдущія уравненія въ видѣ

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$
$$0=r\,dx^2+2\,s\,dx\,dy+t\,dy^2+p\,d^2x;$$

изъ перваго выводимъ

$$dx=\frac{dz-q\,dy}{p};$$

внося это выраженіе dx во второе соотношеніе, получимъ

$$d^2x=-\frac{r\,dz^2+2\,(ps-qr)\,dy\,dz+(q^2r-2\,pqs+p^2t)\,dy^2}{p^3}.$$

Частныя производныя перваго и второго порядковъ отъ x, разсматриваемаго, какъ функція перемѣнныхъ z и y, будутъ имѣть слѣдующія выраженія:

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{p},\quad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{q}{p}$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=-\frac{r}{p^3},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}=\frac{qr-ps}{p^3},\quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=\frac{2pqs-p^2t-q^2r}{p^3}.$$

Чтобы имѣть приложеніе этихъ формулъ, найдемъ всѣ функціи $f(x, y)$, удовлетворяющія уравненію $q^2r+p^2t=2pqs$. Если въ соотношеніи $z=f(x, y)$ мы примемъ x за функцію независимыхъ перемѣнныхъ y и z, то предыдущее уравненіе обратится въ $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$. Это уравненіе показываетъ, что $\frac{\partial x}{\partial y}$ не зависитъ отъ y; слѣдовательно

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\varphi(z),$$

гдѣ $\varphi(z)$ — произвольная функція отъ z. Это новое уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{\partial}{\partial y}\,[x-y\varphi(z)]=0,$$

оно выражаетъ, что $x-y\varphi(z)$ не зависитъ отъ y. Поэтому

$$x=y\varphi(z)+\psi(z),$$

гдѣ $\psi(z)$ есть другая произвольная функція отъ z. Мы получимъ всѣ искомыя функціи $z=f(x, y)$, рѣшая предыдущее уравненіе относительно z. Это уравненіе представляетъ поверхность, образованную движеніемъ прямой, остающейся параллельною плоскости xy.

25. Общая теорема. — Пусть будетъ (E) система n уравненій

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,\\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &F_n(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

между $n+p$ перемѣнными $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$. Предположимъ, что эти уравненія удовлетворяются при $x_1 = x_1^0, \ldots, x_p = x_p^0; u_1 = u_1^0, \ldots, u_n = u_n^0$, что функціи F_i непрерывны и имѣютъ непрерывныя частныя производныя перваго порядка вблизи этихъ значеній перемѣнныхъ, и, наконецъ, что опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю при

$$x_i = x_i^0, \quad u_k = u_k^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

При этихъ условіяхъ существуетъ одна и только одна система функцій $u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $\ldots$, $u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, тождественно удовлетворяющая уравненіямъ (E) и приводящаяся соотвѣтственно къ $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$ при $x_1 = x_1^0, \ldots, x_p = x_p^0$*).

Опредѣлитель Δ называется якобіевымъ**), якобіаномъ или функціональнымъ опредѣлителемъ n функцій $F_1, F_2, \ldots, F_n$ относительно перемѣнныхъ $u_1, u_2, \ldots, u_n$; его изображаютъ символомъ

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}.$$

Мы докажемъ эту теорему сначала въ частномъ случаѣ для системы двухъ уравненій съ тремя независимыми перемѣнными x, y, z и двумя неизвѣстными u и v

$$F_1(x, y, z, u, v) = 0, \qquad (9)$$
$$F_2(x, y, z, u, v) = 0. \qquad (10)$$

---

*) Гурса показалъ (см. примѣчаніе къ § 20), что можно доказать эту теорему, не дѣлая никакихъ предположеній относительно производныхъ $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ отъ F по x. *(Примѣчаніе англ. пер.).*

**) Якоби, Crelle's Journal, т. 22.

По предположенію, эти уравненія удовлетворяются при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, $u=u_0$, $v=v_0$, и опредѣлитель

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v}-\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}$$

не равенъ нулю при этой системѣ значеній пяти перемѣнныхъ x, y, z, u, v; отсюда слѣдуетъ, что, по крайней мѣрѣ, одна изъ производныхъ $\frac{\partial F_1}{\partial v}$, $\frac{\partial F_2}{\partial v}$ не равна нулю при тѣхъ же значеніяхъ перемѣнныхъ. Для опредѣленности, положимъ, что $\frac{\partial F_1}{\partial v}$ не будетъ нулемъ. По доказанной выше теоремѣ (§ 20), соотношеніе (9) опредѣлитъ функцію v перемѣнныхъ x, y, z, u,

$$v=f(x, y, z, u),$$

которая принимаетъ значеніе v_0 при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, $u=u_0$. Замѣнимъ въ уравненіи (10) v этою функціею; мы придемъ къ соотношенію между x, y, z и u

$$\Phi(x, y, z, u)=F_2[x, y, z, u, f(x, y, z, u)]=0,$$

которое удовлетворяется при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z$, $u=u_0$. Мы имѣемъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}=\frac{\partial F_2}{\partial u}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u};$$

но изъ соотношенія (9) мы выводимъ

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}=0;$$

опредѣляя отсюда значеніе $\frac{\partial f}{\partial u}$ и вставляя его въ $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, получимъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}=-\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}}{\frac{\partial F_1}{\partial v}}.$$

Мы видимъ, что эта производная не равна нулю при значеніяхъ x_0, y_0, z_0, u_0 перемѣнныхъ; поэтому соотношенію $\Phi=0$ можно удовлетворить, взявъ для u непрерывную функцію $u=\varphi(x, y, z)$, равную u_0 при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Замѣнивъ въ $f(x, y, z, u)$ перемѣнное u черезъ $\varphi(x, y, z)$, мы и для v получимъ также непрерывную функцію перемѣнныхъ x, y, z. Такимъ образомъ для системы двухъ уравненій предложеніе доказано.

Совершенно такъ же, какъ и прежде, можно доказать существованіе частныхъ производныхъ перваго порядка отъ этихъ функцій. Оставляя y и z постоянными, дадимъ перемѣнному x

приращеніе Δx, и пусть будутъ Δu и Δv соотвѣтствующія приращенія функцій u и v. Уравненія (9) и (10) можно тогда представить въ видѣ

$$\Delta x\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)=0,$$
$$\Delta x\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\eta\right)+\Delta u\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)+\Delta v\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)=0,$$

гдѣ $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \eta, \eta', \eta''$ стремятся къ нулю одновременно съ Δx, Δu, Δv. Отсюда находимъ

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=-\frac{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\varepsilon\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\eta\right)}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}+\varepsilon'\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial v}+\eta''\right)-\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}+\varepsilon''\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial u}+\eta'\right)}.$$

Когда Δx стремится къ нулю, Δu и Δv стремятся также къ нулю, а, слѣдовательно, стремятся къ нулю и $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \eta, \eta', \eta''$. Такимъ образомъ, отношеніе $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ имѣетъ предѣлъ, т.-е. функція u имѣетъ частную производную перваго порядка по x

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial v}-\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial x}}{\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v}-\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}}.$$

Такимъ же образомъ можно было бы доказать, что отношеніе $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ стремится къ конечному предѣлу $\frac{\partial v}{\partial x}$, который выразится аналогичною формулою. На практикѣ эти частныя производныя вычисляются при помощи двухъ уравненій

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Такимъ же способомъ мы получимъ частныя производныя перваго порядка относительно независимыхъ перемѣнныхъ y и z.

Чтобы доказать теперь нашу основную теорему въ общемъ случаѣ, достаточно показать, что если она вѣрна для системы $(n-1)$ уравненій, то она будетъ также вѣрна и для системы n уравненій. Такъ какъ, по допущенію, функціональный опредѣлитель не равенъ нулю при начальныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, то, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ миноровъ, соотвѣтствующій элементамъ послѣдней строки, будетъ отличенъ отъ

нуля при тѣхъ же самыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ. Предположимъ, что это будетъ имѣть мѣсто для минора, соотвѣтствующаго элементу $\frac{\partial F_n}{\partial u_n}$; этотъ миноръ можно написать въ видѣ

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots F_{n-1})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}.$$

Такъ какъ, по допущенію, теорема вѣрна для системы $(n-1)$ уравненій, то изъ $(n-1)$ первыхъ уравненій (E) мы выведемъ

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_n), \ldots, u_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_n),$$

гдѣ всѣ функціи $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ непрерывны. Замѣняя въ послѣднемъ изъ уравненій (E) $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ функціями $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, мы для опредѣленія u_n придемъ къ новому соотношенію

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, u_n) = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, u_n) = 0.$$

Все дѣло сводится къ тому, чтобы показать, что производная $\frac{\partial \Phi}{\partial u_n}$ не равна нулю при разсматриваемыхъ значеніяхъ $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0, u_n^0$. Дѣйствительно, въ такомъ случаѣ изъ послѣдняго уравненія можно будетъ вывести для u_n

$$u_n = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

гдѣ ψ есть непрерывная функція независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_p$; вставляя это значеніе u_n въ функціи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, мы найдемъ, что $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ будутъ также непрерывными функціями независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_p$, и теорема будетъ доказана. Мы имѣемъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_n} = \frac{\partial F_n}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_n} + \frac{\partial F_n}{\partial u_n}, \qquad (11)$$

причемъ производныя $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_n}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_n}$ даются $(n-1)$ соотношеніями

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_n} + \frac{\partial F_1}{\partial u_n} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} + \ldots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_n} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial u_n} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Соотношенія (11) и (12) можно разсматривать, какъ n линейныхъ уравненій между n неизвѣстными $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u_n}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}$; они дадутъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})} = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}.$$

Мы видимъ, что производная $\frac{\partial \Phi}{\partial u_n}$ отлична отъ нуля при разсматриваемыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, такъ какъ оба входящихъ въ эту формулу функціональныхъ опредѣлителя отличны отъ нуля при этихъ значеніяхъ; слѣдовательно, основная теорема доказана.

Высшія производныя отъ неявныхъ функцій, опредѣленныхъ многими уравненіями, вычисляются совершенно такъ же, какъ въ случаѣ одного уравненія. Должно и тутъ замѣтить, что въ случаѣ многихъ независимыхъ перемѣнныхъ выгоднѣе вычислять полные дифференціалы и затѣмъ получать изъ нихъ всѣ частныя производныя того же порядка. Предположимъ, напримѣръ, что мы имѣемъ двѣ функціи u и v трехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, опредѣленныя двумя уравненіями

$$F(x, y, z, u, v) = 0,$$
$$\Phi(x, y, z, u, v) = 0.$$

Полные дифференціалы перваго порядка du и dv будутъ даны уравненіями

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz + \frac{\partial \Phi}{\partial u}du + \frac{\partial \Phi}{\partial v}dv = 0.$$

Далѣе, мы найдемъ d^2u и d^2v изъ уравненій

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \ldots + \frac{\partial F}{\partial v}dv\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial u}d^2u + \frac{\partial F}{\partial v}d^2v = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial v}dv\right)^{(2)} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}d^2u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}d^2v = 0,$$

и т. д. Въ уравненіяхъ для d^nu и d^nv опредѣлитель изъ коэффиціентовъ при этихъ дифференціалахъ при всякомъ n равенъ якобіевому опредѣлителю $\frac{D(F, \Phi)}{D(u, v)}$, который, по допущенію, отличенъ отъ нуля.

26. Обращеніе функцій.— Пусть будутъ $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ n функцій отъ n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; предположимъ, что якобіанъ $\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ не равенъ тождественно нулю. Тогда n уравненій

$$\left.\begin{array}{c} u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \quad u_2 = \varphi_2(x_1 \ldots, x_n), \ldots, \\ u_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right\} \qquad (13)$$

опредѣляютъ обратно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ въ функціи $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Въ самомъ дѣлѣ, достаточно разсмотрѣть систему значеній $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, для

которой опредѣлитель Якоби не равенъ нулю; если $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$ будутъ обозначать соотвѣтствующія значенія $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то, по основной теоремѣ, существуетъ система функцій

$$x_1=\psi_1(u_1, \ldots, u_n), \quad x_2=\psi_2(u_1, \ldots, u_n), \ldots,$$
$$x_n=\psi_n(u_1, \ldots, u_n),$$

удовлетворяющихъ соотношеніямъ (13) и принимающихъ значенія $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ при $u_1=u_1^0, u_2=u_2^0, \ldots, u_n=u_n^0$. Функціи ψ называются обратными относительно функціи φ. Нахожденіе этихъ функцій называется обращеніемъ или инверсіей.

Для вычисленія производныхъ отъ обратныхъ функцій достаточно приложить основныя правила. Такъ, въ случаѣ двухъ функцій

$$u=f(x, y), \quad v=\varphi(x, y),$$

разсматривая обратно u и v, какъ независимыя перемѣнныя, а x и y, какъ ихъ функціи, мы изъ двухъ соотношеній

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$
$$dv=\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

получимъ

$$dx=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}du-\frac{\partial f}{\partial y}dv}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \quad dy=\frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}du+\frac{\partial f}{\partial x}dv}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

Отсюда имѣемъ формулы:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

27. Касательная къ кривой въ пространствѣ. — Разсмотримъ кривую C, представленную системою двухъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z)&=0, \\ F_2(x, y, z)&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Пусть будутъ x_0, y_0, z_0 координаты точки M_0 этой кривой; предположимъ, что, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ трехъ опредѣлителей Якоби

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

будетъ отличенъ отъ нуля, если замѣнимъ въ немъ x, y, z черезъ x_0, y_0, z_0. Для опредѣленности положимъ, что $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}$

не равенъ нулю для координатъ точки M_0; тогда изъ уравненій (14) можно вывести

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x),$$

гдѣ φ и ψ суть непрерывныя функціи отъ x, обращающіяся соотвѣтственно въ y_0 и z_0 при $x=x_0$. Въ этомъ случаѣ касательная къ кривой C въ точкѣ M_0 представится двумя уравненіями

$$\frac{X-x_0}{1}=\frac{Y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{Z-z_0}{\psi'(x_0)},$$

гдѣ производныя $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ опредѣлятся изъ соотношеній

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\varphi'(x)+\frac{\partial F_1}{\partial z}\psi'(x)=0,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\varphi'(x)+\frac{\partial F_2}{\partial z}\psi'(x)=0.$$

Положимъ въ нихъ $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ и замѣнимъ $\varphi'(x_0)$ и $\psi'(x_0)$ соотвѣтственно черезъ $\frac{Y-y_0}{X-x_0}$ и $\frac{Z-z_0}{X-x_0}$. Тогда уравненія касательной можно представить въ видѣ

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0,\\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0(Y-y_0)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_0(Z-z_0)=0,\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

или

$$\frac{X-x_0}{\left[\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}\right]_0}=\frac{Y-y_0}{\left[\frac{D(F_1,F_2)}{D(z,x)}\right]_0}=\frac{Z-z_0}{\left[\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}\right]_0}.$$

Легко дать геометрическое истолкованіе полученнаго результата. Уравненія (14) представляютъ соотвѣтственно двѣ поверхности S_1 и S_2, линія пересѣченія которыхъ есть кривая C; уравненія (15) представляютъ двѣ касательныя плоскости къ этимъ двумъ поверхностямъ въ точкѣ M_0, такъ что касательная къ кривой C есть прямая пересѣченія этихъ двухъ касательныхъ плоскостей.

Формулы теряютъ смыслъ, когда три выше написанныхъ опредѣлителя Якоби обращаются одновременно въ нуль для координатъ x_0, y_0, z_0. Если это имѣетъ мѣсто, то два уравненія (15) приводятся къ одному, и поверхности S_1, S_2 касаются другъ друга въ точкѣ M_0. Какъ мы увидимъ ниже, въ этомъ случаѣ линія пересѣченія этихъ двухъ поверхностей слагается вообще изъ нѣсколькихъ раздѣльныхъ вѣтвей, проходящихъ черезъ точку M_0.

II. — ФУНКЦІОНАЛЬНЫЕ ОПРЕДѢЛИТЕЛИ.

28. Основное свойство. — Какъ мы видѣли, функціональный опредѣлитель играетъ важную роль въ теоріи неявныхъ функцій. При всѣхъ доказательствахъ мы исходили изъ предположенія, что нѣкоторый опредѣлитель Якоби не равенъ тождественно нулю. Если же этотъ опредѣлитель тождественно равенъ нулю, то дѣло совершенно мѣняется, какъ это вытекаетъ изъ слѣдующей основной теоремы:

Пусть будутъ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n функцій отъ n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Чтобы между этими n функціями существовало соотношеніе $\Pi(u_1, u_2, \ldots, u_n)=0$, не содержащее перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, необходимо и достаточно, чтобы функціональный опредѣлитель $\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ былъ равенъ тождественно нулю.

Прежде всего это условіе необходимо. Въ самомъ дѣлѣ, если между n функціями $u_1, u_2, \ldots, u_n$ существуетъ соотношеніе $\Pi(u_1, u_2, \ldots, u_n)=0$, то, дифференцируя его послѣдовательно относительно каждаго изъ перемѣнныхъ x_i, мы получимъ n уравненій

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \Pi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial \Pi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n}+\frac{\partial \Pi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial \Pi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n}=0.
\end{aligned}$$

Такъ какъ одновременно не можетъ быть

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}=\frac{\partial \Pi}{\partial u_2}=\ldots=\frac{\partial \Pi}{\partial u_n}=0,$$

потому что предполагаемое соотношеніе между функціями u обратилось бы тогда въ тожество, то необходимо, чтобы опредѣлитель, образованный коэффиціентами при $\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial u_n}$ былъ равенъ нулю.

Это условіе вмѣстѣ съ тѣмъ достаточно. При доказательствѣ этого мы будемъ опираться на нѣкоторыя замѣчанія, которыя непосредственно вытекаютъ изъ основныхъ теоремъ.

1) Пусть будутъ u, v, w три такія функціи трехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, что опредѣлитель $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ не ра-

венъ тождественно нулю. Между полными дифференціалами du, dv, dw не можетъ существовать никакого соотношенія вида

$$\lambda\, du + \mu\, dv + \nu\, dw = 0,$$

гдѣ λ, μ, ν не равны одновременно нулю. Въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ въ предыдущемъ соотношеніи du, dv, dw ихъ выраженіями $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \ldots$, $\frac{\partial v}{\partial x}dx + \ldots$, $\frac{\partial w}{\partial x}dx + \ldots$ и приравнявъ нулю коэффиціенты при dx, dy, dz, мы получимъ три уравненія, которыя удовлетворятся только при $\lambda = \mu = \nu = 0$.

2) Пусть будутъ ω, u, v, w четыре такихъ функціи трехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, что $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ не равенъ нулю. Мы можемъ, обратно, x, y, z выразить въ функціи u, v, w, и, внося эти значенія въ ω, мы получимъ функцію

$$\omega = \Phi(u, v, w)$$

трехъ перемѣнныхъ u, v, w. Если какимъ-нибудь способомъ получено между полными дифференціалами $d\omega, du, dv, dw$, взятыми относительно независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, соотношеніе вида

$$d\omega = P\, du + Q\, dv + R\, dw, \qquad (16)$$

то коэффиціенты P, Q, R будутъ соотвѣтственно равны частнымъ производнымъ отъ $\Phi(u, v, w)$,

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad R = \frac{\partial \Phi}{\partial w}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по правилу дифференцированія сложной функціи (§ 16), имѣемъ

$$d\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\, dv + \frac{\partial \Phi}{\partial w}\, dw;$$

при этомъ между $d\omega, du, dv, dw$ не можетъ существовать никакого соотношенія иного вида, чѣмъ (16); въ противномъ случаѣ, исключая изъ обоихъ соотношеній $d\omega$, мы получили бы равенство вида

$$\lambda\, du + \mu\, dv + \nu\, dw = 0,$$

въ которомъ коэффиціенты λ, μ, ν не были бы всѣ нулями, что невозможно на основаніи перваго замѣчанія.

Очевидно, что всѣ эти замѣчанія могутъ быть распространены на любое число независимыхъ перемѣнныхъ.

Разсмотримъ теперь, для опредѣленности, систему четырехъ функцій отъ четырехъ независимыхъ перемѣнныхъ

$$\left.\begin{aligned} X &= F_1(x, y, z, t), \\ Y &= F_2(x, y, z, t), \\ Z &= F_3(x, y, z, t), \\ T &= F_4(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Опредѣлитель Якоби $\frac{D(F_1, F_2, F_3, F_4)}{D(x, y, z, t)}$, по предположенію, тождественно равенъ нулю.

Предположимъ сначала, что одинъ изъ миноровъ перваго порядка, напримѣръ $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$, отличенъ отъ нуля. Въ этомъ случаѣ, изъ трехъ первыхъ уравненій (17), можно вывести x, y, z въ функціи X, Y, Z, t; внося полученныя выраженія для x, y, z въ послѣднюю формулу (17), мы будемъ имѣть T въ функціи X, Y, Z, t

$$T = \Phi(X, Y, Z, t). \qquad (18)$$

Мы докажемъ, что $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, т.-е. что эта функція Φ не содержитъ перемѣннаго t. Для этого разсмотримъ опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} & dX \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} & dY \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} & dZ \\ \frac{\partial F_4}{\partial x} & \frac{\partial F_4}{\partial y} & \frac{\partial F_4}{\partial z} & dT \end{vmatrix}.$$

Если мы замѣнимъ здѣсь dX, dY, dZ, dT ихъ выраженіями

$$dX = \frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt,$$

. . . . . ,

и затѣмъ разложимъ Δ по dx, dy, dz, dt, то увидимъ, что коэффиціенты при этихъ четырехъ дифференціалахъ будутъ равны нулю. Въ самомъ дѣлѣ, три первыхъ коэффиціента будутъ опредѣлители съ двумя тождественными столбцами, а коэффиціентомъ при dt будетъ самъ функціональный опредѣлитель $\frac{D(F_1, F_2, F_3, F_4)}{D(x, y, z, t)}$. Такимъ образомъ $\Delta = 0$. Съ другой стороны, если мы разложимъ этотъ опредѣлитель по элементамъ послѣд-

няго столбца, то коэффиціентъ при dT, равный $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$, не будетъ нулемъ, по предположенію, и мы получимъ соотношеніе вида

$$dT = P\,dX + Q\,dY + R\,dZ.$$

По предыдущему, коэффиціентъ при dt во второй части равенъ $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Но эта вторая часть не содержитъ dt; такимъ образомъ мы имѣемъ $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, и соотношеніе (18) будетъ вида

$$T = \Phi(X, Y, Z),$$

что и доказываетъ нашу теорему.

Можно замѣтить, что между четырьмя функціями X, Y, Z, T не существуетъ иного соотношенія, не зависящаго отъ x, y, z, t, которое было бы отлично отъ предыдущаго соотношенія. Въ самомъ дѣлѣ, если бы такое соотношеніе существовало, то, замѣнивъ въ немъ T черезъ $\Phi(X, Y, Z)$, мы получили бы соотношеніе вида $\Pi(X, Y, Z) = 0$ и должны были бы имѣть

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)} = 0,$$

что противно положенію.

Перейдемъ теперь къ случаю, когда всѣ миноры перваго порядка якобіеваго опредѣлителя тождественно равны нулю, но, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ миноровъ второго порядка, напримѣръ $\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}$, не равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ, изъ двухъ первыхъ соотношеній (17) мы можемъ опредѣлить x и y въ функціи X, Y, z, t, и два послѣднихъ соотношенія обратятся въ

$$Z = \Phi_1(X, Y, z, t), \quad T = \Phi_2(X, Y, z, t).$$

Разсмотримъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & dX \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & dY \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & dZ \end{vmatrix}.$$

Мы можемъ показать такимъ же способомъ, какъ и прежде, что этотъ опредѣлитель равенъ нулю; разлагая его по элементамъ послѣдней строки, получимъ соотношеніе вида

$$dZ = P\,dX + Q\,dY,$$

откуда $$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}=0.$$

Точно также найдемъ

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}=0.$$

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ существуютъ два различныхъ соотношенія между четырьмя функціями X, Y, Z, T

$$Z=\Phi_1(X, Y), \quad T=\Phi_2(X, Y).$$

Между X, Y, Z, T не можетъ существовать никакого третьяго соотношенія, отличнаго отъ этихъ двухъ, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, мы вывели бы соотношеніе между X и Y и должны были бы имѣть $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$, что противно положенію.

Наконецъ, если бы всѣ миноры второго порядка якобіана $\frac{D(F_1, F_2, F_3, F_4)}{D(x, y, z, t)}$ были равны нулю, но четыре функціи X, Y, Z, T не были бы постоянными, то мы увидѣли бы подобнымъ же образомъ, что три изъ этихъ функцій суть функціи четвертой. Приведенное разсужденіе, очевидно, имѣетъ вполнѣ общій характеръ. Если опредѣлитель Якоби для n функцій $F_1, F_2, \ldots, F_n$ отъ n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равенъ нулю, равно какъ и всѣ его миноры о $(n-r+1)$ строкахъ, но, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ миноровъ о $(n-r)$ строкахъ отличенъ отъ нуля, то существуетъ равно r различныхъ соотношеній между n функціями, и r изъ этихъ функцій могутъ быть выражены черезъ $(n-r)$ остальныхъ, причемъ между этими послѣдними не существуетъ никакого отношенія, не содержащаго перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Мы предоставляемъ читателю доказать слѣдующее предложеніе, которое можетъ быть установлено подобнымъ же образомъ. Для того чтобы n функцій отъ $n+p$ независимыхъ перемѣнныхъ были связаны соотношеніемъ, не содержащимъ этихъ перемѣнныхъ, необходимо и достаточно, чтобы всѣ опредѣлители Якоби отъ этихъ n функцій относительно n любыхъ изъ независимыхъ перемѣнныхъ были тождественно равны нулю. Въ частности, для того чтобы двѣ функціи $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ были функціями одна другой, необходимо и достаточно, чтобы соотвѣтствующія частныя производныя $\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial F_2}{\partial x_i}$ были пропорціональны.

Примѣчаніе. — Входящія въ основную теорему функціи $F_1, F_2, \ldots, F_n$ могутъ зависѣть, кромѣ того, еще и отъ нѣко-

торыхъ перемѣнныхъ $y_1, y_2, \ldots, y_n$, отличныхъ отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если опредѣлитель Якоби $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ тождественно равенъ нулю, то функціи $F_1, F_2, \ldots, F_n$ связаны однимъ или нѣсколькими соотношеніями, не содержащими перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$; но остальныя перемѣнныя $y_1, y_2, \ldots, y_n$, вообще, войдутъ въ эти соотношенія.

Приложенія. — Предыдущая теорема имѣетъ весьма важное значеніе въ анализѣ. Она позволяетъ, напримѣръ, доказать основное свойство логариѳма, не пользуясь его ариѳметическимъ опредѣленіемъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ началѣ интегральнаго исчисленія будетъ доказано, что существуетъ функція, вполнѣ опредѣленная для всѣхъ положительныхъ значеній перемѣннаго, которая принимаетъ значеніе нуль при $x=1$, и производная которой равна $\frac{1}{x}$. Пусть будетъ $f(x)$ эта функція; положимъ

$$u=f(x)+f(y), \quad v=xy.$$

Мы имѣемъ

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ y & x \end{vmatrix}=0.$$

Слѣдовательно, существуетъ соотношеніе вида

$$f(x)+f(y)=\varphi(xy);$$

чтобы опредѣлить функцію φ, достаточно положить $y=1$; это даетъ $f(x)=\varphi(x)$, и такъ какъ x произвольно, то мы имѣемъ

$$f(x)+f(y)=f(xy).$$

Мы видимъ, какимъ образомъ предыдущее опредѣленіе логариѳма могло бы привести къ основнымъ свойствамъ логариѳмовъ, если бы ихъ открытіе не предшествовало изобрѣтенію интегральнаго исчисленія.

Чтобы дать другое приложеніе, возьмемъ систему n уравненій съ n неизвѣстными $u_1, u_2, \ldots, u_n$,

$$\left.\begin{aligned} F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n)&=H_1, \\ F_2(u_1, u_2, \ldots, u_n)&=H_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)&=H_n, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

гдѣ $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — постоянныя или функціи другихъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которыя могутъ также входить и въ функціи F_i. Если опредѣлитель Якоби $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$ тождественно равенъ нулю, то между n функціями F_i есть нѣкоторое число, положимъ $n-k$, различныхъ соотношеній вида

$$F_{k+1}=\Pi_1(F_1, \ldots, F_k), \ldots, F_n=\Pi_{n-k}(F_1, \ldots, F_k).$$

Чтобы уравненія (19) были совмѣстны, очевидно, необходимо, чтобы было

$$H_{k+1}=\Pi_1(H_1, \ldots, H_k), \ldots, H_n=\Pi_{n-k}(H_1, \ldots, H_k);$$

въ этомъ случаѣ n уравненій (19) приведутся къ k различнымъ уравненіямъ. Такимъ образомъ мы имѣемъ здѣсь тѣ же самые частные случаи, какъ и при рѣшеніи системы линейныхъ уравненій.

29. Другое свойство опредѣлителя Якоби. — Опредѣлитель Якоби системы n функцій съ n перемѣнными обладаетъ свойствами, алогичными свойствамъ производной отъ функціи одного перемѣннаго. Такъ, предыдущая теорема можетъ быть разсматриваема, какъ обобщеніе теоремы § 8.

Формула для производной функціи отъ функціи можетъ также быть распространена на опредѣлитель Якоби. Пусть будетъ $F_1, F_2, \ldots, F_n$ система n функцій отъ перемѣнныхъ $u_1, u_2, \ldots, u_n$; предположимъ, что $u_1, u_2, \ldots, u_n$ сами суть функціи n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Мы имѣемъ слѣдующую формулу:

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \cdot \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

доказательство которой непосредственно вытекаетъ изъ правила умноженія опредѣлителей и изъ формулы для производной отъ сложной функціи. Дѣйствительно, напишемъ оба опредѣлителя, стоящіе во второй части предыдущаго равенства,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

переставивъ строки и столбцы второго. Первый элементъ произведенія равенъ

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},$$

т.-е. равенъ $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$, и то же самое получимъ для другихъ.

30. Опредѣлитель Гессе. — Пусть будетъ $f(x, y, z)$ функція трехъ перемѣнныхъ x, y, z; функціональный опредѣлитель трехъ частныхъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ называется опредѣлителемъ Гессе (Hesse),

$$h = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Подобнымъ же образомъ составляется опредѣлитель Гессе для функціи отъ n перемѣнныхъ; роль его аналогична роли производной второго порядка отъ функціи одного независимаго перемѣннаго. Мы сейчасъ покажемъ, что этотъ опредѣлитель обладаетъ замѣчательнымъ

свойствомъ инваріантности. Предположимъ, что надъ перемѣнными x, y, z выполнена линейная подстановка

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ z &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z, \end{aligned}\right\} \qquad (19)'$$

гдѣ X, Y, Z — новыя перемѣнныя, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \gamma''$ — такія постоянныя, что опредѣлитель постановки

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

отличенъ отъ нуля. Послѣ этой постановки, функція $f(x, y, z)$ обратится въ новую функцію $F(X, Y, Z)$ отъ трехъ перемѣнныхъ X, Y, Z. Пусть будетъ $H(X, Y, Z)$ опредѣлитель Гессе для этой новой функціи; мы докажемъ, что если замѣнимъ x, y, z въ $h(x, y, z)$ ихъ выраженіями (19)', то тождественно будемъ имѣть

$$H(X, Y, Z) = \Delta^2 h(x, y, z).$$

Дѣйствительно,

$$H = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(X, Y, Z)} = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}.$$

Принявъ на время $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ за посредствующія перемѣнныя, мы можемъ еще написать

$$H = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)} \cdot \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}.$$

Но изъ соотношенія $F(X, Y, Z) = f(x, y, z)$ находимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X} &= \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha'' \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial F}{\partial Y} &= \beta \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' \frac{\partial f}{\partial y} + \beta'' \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial F}{\partial Z} &= \gamma \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma'' \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = \Delta;$$

такимъ образомъ

$$H = \Delta h \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)} = \Delta^2 h.$$

Очевидно, что эта теорема имѣетъ вполнѣ общій характеръ.

Дадимъ приложеніе этого свойства опредѣлителя Гессе. Разсмотримъ кубическую бинарную форму

$$f(x, y) = ax^3 + 3bx^2 y + 3cxy^2 + dy^3,$$

гдѣ коэффиціенты a, b, c, d суть какія-нибудь постоянныя количества. Пренебрегая числовымъ множителемъ $3 \cdot 2 = 6$, имѣемъ

$$h = \begin{vmatrix} ax + by, & bx + cy \\ bx + cy, & cx + dy \end{vmatrix} = (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2;$$

такимъ образомъ опредѣлитель Гессе есть квадратичная бинарная форма. Отбросимъ сначала тотъ частный случай, когда опредѣлитель Гессе есть точный квадратъ; въ общемъ случаѣ этотъ опредѣлитель можно разложить на произведеніе двухъ различныхъ линейныхъ множителей

$$h=(mx+ny)(px+qy).$$

Если мы выполнимъ линейную подстановку

$$mx+ny=X,\quad px+qy=Y,$$

то форма $f(x, y)$ обращается въ новую форму

$$F(X, Y)=AX^3+3BX^2Y+3CXY^2+DY^3;$$

для нея опредѣлитель Гессе

$$H(X, Y)=(AC-B^2)X^2+(AD-BC)XY+(BD-C^2)Y^2,$$

по только что доказанному свойству инваріантности, долженъ принять видъ KXY. Поэтому коэффиціенты A, B, C, D должны удовлетворять двумъ соотношеніямъ

$$B^2-AC=0,\quad BD-C^2=0.$$

Отсюда видно, что если одинъ изъ двухъ коэффиціентовъ B, C будетъ отличенъ отъ нуля, то будетъ отличенъ и другой; такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$A=\frac{B^2}{C},\quad D=\frac{C^2}{B},$$

$$F(X, Y)=\frac{1}{BC}(B^3X^3+3B^2CX^2Y+3BC^2XY^2+C^3Y^3)=\frac{(BX+CY)^3}{BC},$$

такъ что $F(X, Y)$, а, слѣдовательно, и $f(x, y)$, будетъ точнымъ кубомъ. Отбрасывая этотъ исключительный случай, мы видимъ, что $B=C=0$, и многочленъ $F(X, Y)$ приводится къ каноническому виду

$$AX^3+DY^3.$$

Такимъ образомъ, приведеніе формы $f(x, y)$ къ каноническому виду требуетъ только рѣшенія уравненія второй степени, которое мы получимъ, приравнявъ опредѣлитель Гессе нулю. Два множителя, на которые распадается опредѣлитель Гессе, и будутъ каноническими перемѣнными X, Y.

Если опредѣлитель Гессе есть точный квадратъ, то подобнымъ же образомъ мы найдемъ, что форма $f(x, y)$ можетъ быть приведена къ виду AX^3+BX^3Y; если опредѣлитель Гессе равенъ тождественно нулю, то $f(x, y)$ есть точный кубъ

$$f(x, y)=(\alpha x+\beta y)^3.$$

III. — ЗАМѢНА ПЕРЕМѢННЫХЪ.

При рѣшеніи многихъ вопросовъ анализа часто бываетъ нужно замѣнять независимыя перемѣнныя другими независимыми перемѣнными. Для этого необходимо умѣть выражать производныя, взятыя относительно старыхъ перемѣнныхъ, черезъ производныя, взятыя по новымъ независимымъ перемѣннымъ. Говоря объ обращеніи функцій, мы уже встрѣчались съ подобнаго рода задачей. Теперь мы поставимъ вопросъ шире и съ другой точки зрѣнія, и перейдемъ къ разсмотрѣнію наиболѣе часто встрѣчающихся задачъ.

31. Задача I.—Пусть будетъ y функція независимаго перемѣннаго x. Возьмемъ новое независимое перемѣнное t, связанное съ x соотношеніемъ $x=\varphi(t)$; требуется выразить производныя отъ y относительно x черезъ t и черезъ высшія производныя отъ y по t.

Пусть будетъ $y=f(x)$ разсматриваемая функція и пусть, послѣ замѣны x черезъ $\varphi(t)$, эта функція обращается въ $F(t)=f[\varphi(t)]$. По правилу дифференцированія функціи отъ функціи находимъ

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\times\varphi'(t),$$

откуда

$$y'_x=\frac{\frac{dy}{dt}}{\varphi'(t)}=\frac{y'_t}{\varphi'(t)}.$$

Полученный результатъ можно выразить слѣдующимъ образомъ: чтобы получить производную отъ y относительно x, должно взять производную отъ этой функціи по t и раздѣлить ее на производную отъ x по t.

Прилагая предыдущее правило къ полученному выше выраженію производной перваго порядка, мы найдемъ производную второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(y'_x)}{\varphi'(t)}=\frac{y''_{t^2}\varphi'(t)-y'_t\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3};$$

Прилагая снова то же самое правило, мы получимъ производную третьяго порядка

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{d}{dt}(y''_{x^2})}{\varphi'(t)},$$

или, выполняя вычисленія,

$$\frac{d^2y}{dt^3}=\frac{y'''_{t^3}[\varphi'(t)]^2-3y''_{t^2}\varphi'(t)\varphi''(t)+3y'_t[\varphi''(t)]^2-y'_t\varphi'(t)\varphi'''(t)}{[\varphi'(t)]^5}.$$

Такимъ же способомъ мы можемъ послѣдовательно получить всѣ остальныя производныя высшихъ порядковъ. Вообще, производная n-го порядка отъ y по x выразится черезъ $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, ..., $\varphi^{(n)}(t)$ и черезъ высшія производныя отъ y по t до порядка n включительно. Предыдущія формулы можно привести къ болѣе симметричному виду. Обозначимъ черезъ

dx, dy, d^2x, d^2y, ..., d^nx, d^ny дифференціалы отъ x и y, взятые по перемѣнному t, и черезъ y', y'', ..., $y^{(n)}$ производныя отъ y по x; предыдущія формулы можно тогда привести къ виду

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx}, \\ y'' &= \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}, \\ y''' &= \frac{d^3y\,dx^2 - 3d^2y\,dx\,d^2x + 3dy\,(d^2x)^2 - dy\,d^3x\,dx}{dx^5}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Независимое перемѣнное t, по которому берутся всѣ дифференціалы, стоящіе во вторыхъ частяхъ предыдущихъ формулъ, можетъ быть выбрано совершенно произвольно; мы переходимъ отъ любой производной къ слѣдующей по закону, выражаемому формулою

$$y^{(n)} = \frac{d[y^{(n-1)}]}{dx},$$

гдѣ вторая часть есть частное двухъ дифференціаловъ.

32. Приложеніе. — Данными въ предыдущемъ § формулами пользуются при изученіи плоской кривой, когда координаты точекъ этой кривой выражены чрезъ вспомогательное перемѣнное t

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t).$$

Для изученія этой кривой вблизи одной изъ ея точекъ, необходимо умѣть вычислять значенія производныхъ y', y'', y''', ..., отъ y по x для разсматриваемой точки. Но предыдущія формулы даютъ намъ эти производныя, выраженныя черезъ производныя отъ функцій $f(t)$ и $\varphi(t)$, такъ что нѣтъ необходимости находить явное выраженіе y въ функціи x, что иногда практически и невозможно. Первая формула

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$$

даетъ угловой коэффиціентъ касательной къ кривой; значеніе y'' входитъ въ важный геометрическій элементъ, р а д і у с ъ к р и в и з н ы, который выражается, какъ мы это увидимъ дальше, черезъ

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Чтобы имѣть значеніе R, когда координаты x и y даны въ функціи параметра t, нужно только замѣнить y' и y'' выведенными выше выраженіями; такимъ образомъ мы получимъ

$$R=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{|dx\,d^2y-dy\,d^2x|}.$$

Здѣсь вторая часть содержитъ только производныя перваго и второго порядка отъ x и y по t.

По поводу этого вопроса я приведу здѣсь слѣдующее интересное замѣчаніе, заимствованное мною изъ Traité de Calcul différentiel et intégral Бертрана (Bertrand) (т. I, стран. 170).

Предположимъ, что вычисляя геометрическій элементъ плоской кривой, координаты x, y точекъ которой мы предположимъ выраженными чрезъ параметръ t, мы получили выраженіе

$$F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots d^nx, d^ny),$$

гдѣ всѣ дифференціалы взяты относительно t.

Такъ какъ, по предположенію, этотъ элементъ имѣетъ геометрическій смыслъ, то его значеніе не должно зависѣть отъ выбора независимаго перемѣннаго t. Если мы примемъ $t=x$, то должно положить $dx=dt$, $d^2x=d^3x=\ldots=d^nx=0$, и предыдущее выраженіе обращается въ

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}).$$

Это тотъ результатъ, который мы получили бы, предполагая съ самаго начала, что уравненіе разсматриваемой кривой имѣетъ видъ $y=\Phi(x)$, т.-е. что оно рѣшено относительно y. Чтобы отъ этого частнаго случая снова перейти къ общему случаю, достаточно замѣнить y', y'', y''', ... ихъ значеніями, выведенными изъ формулъ (20). Выполнивъ эту подстановку въ

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}),$$

мы должны снова получить выраженіе $F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots)$, отъ котораго исходили. Если этого не будетъ, то можно утверждать, что полученный результатъ невѣренъ*). Напримѣръ, выраженіе

$$\frac{dx\,d^2y+dy\,d^2x}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

не можемъ имѣть для плоской кривой никакого геометрическаго значенія, независимаго отъ выбора перемѣннаго; въ самомъ дѣлѣ, при $x=t$ это уравненіе обращается въ $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, и замѣняя въ немъ y' и y'' ихъ значеніями, выведенными изъ формулъ (20), мы не придемъ обратно къ предыдущему дифференціальному выраженію.

*) То-есть что $F(x, y, y', y'', \ldots)$ не выражаетъ геометрическаго элемента кривой.

(Ред.)

33. Формулами (20) также часто пользуются при изученіи дифференціальныхъ уравненій. Предположимъ, напримѣръ, что мы хотимъ найти всѣ функціи y отъ одного независимаго перемѣннаго x, которыя удовлетворяютъ соотношенію

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0, \qquad (21)$$

гдѣ n — постоянное. Возьмемъ новое независимое перемѣнное t, полагая $x=\cos t$; мы имѣемъ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{-\sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin t\frac{d^2y}{dt^2}-\cos t\frac{dy}{dt}}{\sin^3 t},$$

и уравненіе (21) послѣ подстановки обращается въ

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0. \qquad (22)$$

Легко найти всѣ функціи отъ t, которыя удовлетворяютъ этому соотношенію; въ самомъ дѣлѣ, умножая его на $2\frac{dy}{dt}$, мы найдемъ

$$2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+2n^2y\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+n^2y^2\right]=0;$$

слѣдовательно, должно быть

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+n^2y^2=n^2a^2,$$

гдѣ a обозначаетъ произвольное постоянное.

Такимъ образомъ

$$\frac{dy}{dt}=n\sqrt{a^2-y^2},$$

или

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{a^2-y^2}}-n=0.$$

Первая часть есть производная отъ $\arcsin\frac{y}{a}-nt$; поэтому эта разность должна быть равна новой постоянной b, и мы имѣемъ

$$y=a\sin(nt+b);$$

это можетъ быть еще представлено въ видѣ

$$y=A\sin nt+B\cos nt.$$

Переходя къ первоначальному перемѣнному x, мы заключаемъ, что всѣ функціи отъ x, удовлетворяющія соотношенію (21), будутъ заключаться въ формулѣ

$$y = A \sin(n \arccos x) + B \cos(n \arccos x),$$

гдѣ A и B обозначаютъ два произвольныхъ постоянныхъ.

34. Задача II. — Для всякаго соотношенія между x и y формулы преобразованія $x = f(t, u)$, $y = \varphi(t, u)$ даютъ соотвѣтствующее соотношеніе между t и u. Требуется выразить производныя отъ y по x черезъ t, u и производныя отъ u по t.

Эта задача непосредственно приводится къ предыдущей. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что въ формулахъ преобразованія

$$x = f(t, u), \quad y = \varphi(t, u)$$

мы замѣнили u его значеніемъ въ функціи t; тогда эти формулы дадутъ намъ первоначальныя перемѣныя x и y въ функціи перемѣннаго t. Поэтому достаточно примѣнить здѣсь общій способъ, принявъ однако x и y за сложныя функціи отъ t, причемъ перемѣнное u должно играть роль посредствующей функціи. Такимъ образомъ мы получимъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}};$$

далѣе найдемъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt} : \frac{dx}{dt},$$

или, выполняя вычисленія,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}\right)\left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial t}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{d^2u}{dt^2}\right] - \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dt}\right)\left[\dfrac{d^2f}{dt^2} + \cdots\right]}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}\right)^3}.$$

Вообще, производная n-го порядка $y^{(n)}$ выразится чрезъ t, u и производныя $\dfrac{du}{dt}, \dfrac{d^2u}{dt^2}, \ldots, \dfrac{d^nu}{dt^n}$.

Предположимъ, напримѣръ, что мы имѣемъ уравненіе кривой въ полярныхъ координатахъ $\rho = f(\omega)$. Слѣдующія формулы даютъ прямоугольныя координаты точки (φ, ω):

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega.$$

Пусть будутъ ϱ', ϱ'', ... производныя отъ ϱ, взятыя относительно ω, разсматриваемаго, какъ независимое перемѣнное. Изъ предыдущихъ формулъ мы имѣемъ

$$\begin{aligned} dx &= \cos\omega\, d\varrho - \varrho \sin\omega\, d\omega, \\ dy &= \sin\omega\, d\varrho + \varrho\cos\omega\, d\omega, \\ d^2x &= \cos\omega\, d^2\varrho - 2\sin\omega\, d\omega\, d\varrho - \varrho\cos\omega\, d\omega^2, \\ d^2y &= \sin\omega\, d^2\varrho + 2\cos\omega\, d\omega\, d\varrho - \varrho\sin\omega\, d\omega^2, \end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$dx^2 + dy^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2$$
$$dx\, d^2y - dy\, d^2x = 2\, d\omega\, d\varrho^2 - \varrho\, d\omega\, d^2\varrho + \varrho^2\, d\omega^3.$$

Такимъ образомъ, приведенное выше выраженіе для радіуса кривизны обращается въ

$$R = \pm \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}.$$

35. Преобразованія плоскихъ кривыхъ. — Предположимъ, что по опредѣленному построенію мы установили для всякой точки плоскости m другую соотвѣтствующую точку M той же самой плоскости. Если черезъ (x, y) мы обозначимъ координаты точки m и черезъ (X, Y) — координаты точки M, то въ силу нашего преобразованія между этими четырьмя координатами будутъ существовать два соотношенія вида

$$X = f(x, y), \quad Y = \varphi(x, y).$$

Эти формулы опредѣляютъ точечное преобразованіе. Мы имѣемъ въ геометріи многочисленные примѣры такихъ преобразованій; таковы, напримѣръ, гомографическое преобразованіе, преобразованіе обратными радіусами векторами (инверсія) и пр. Если точка m описываетъ кривую c, то соотвѣтствующая точка M опишетъ другую кривую C, свойства которой можно вывести изъ свойствъ кривой c и изъ свойствъ употребленнаго преобразованія. Пусть будутъ y', y'', ... производныя отъ y по x, а Y', Y'', ... — производныя отъ Y по X. Чтобы изучать кривую C, необходимо умѣть выразить Y', Y'', ... черезъ x, y, y', y'' ... Но это именно та задача, которую мы только что разсматривали; мы имѣемъ

$$Y' = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'},$$

$$Y'' = \frac{\frac{dY'}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \ldots\right) - \ldots}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right)^3},$$

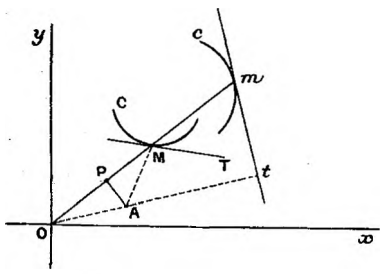
и т. д. Мы видимъ, что Y' зависитъ только отъ x, y, y'; поэтому, если мы приложимъ преобразованіе (23) къ двумъ кривымъ c, c_1, касающимся другъ друга въ точкѣ (x, y), то преобразованныя кривыя C, C_1 будутъ также касаться одна другой въ разсматриваемой точкѣ (X, Y). Это замѣчаніе позволяетъ замѣнить кривую c всякою другою касающеюся къ ней кривою, если дѣло идетъ только объ отысканіи касательной къ преобразованной кривой C.

Разсмотримъ, напримѣръ, преобразованіе, опредѣляемое формулами

$$X=\frac{h^2x}{x^2+y^2}, \qquad Y=\frac{h^2y}{x^2+y^2};$$

это преобразованіе есть не что иное, какъ преобразованіе обратными радіусами векторами или инверсія, съ полюсомъ въ началѣ координатъ*). Пусть будетъ m точка кривой c, M — соотвѣтствующая точка кривой C. Чтобы найти касательную къ этой кривой C въ точкѣ M, мы должны воспользоваться тѣмъ свойствомъ, что при преобразованіи обратными радіусами обратная фигура для прямой есть окружность, проходящая черезъ полюсъ инверсіи.

Черт. 5.



Если мы замѣнимъ кривую c касательною mt, то фигура, обратная для mt, будетъ окружность, проходящая черезъ двѣ точки M и O, центръ которой лежитъ на перпендикулярѣ Ot, опущенномъ изъ начала на mt. Касательная MT къ этой окружности перпендикулярна къ AM, и углы Mmt, mMT будутъ равны, какъ дополнительные къ углу mOT. Такимъ образомъ касательныя mt и MT будутъ антипараллельны относительно радіуса вектора**).

---

*) Преобразованіемъ обратными радіусами или инверсіей относительно даннаго круга радіуса h называется такое преобразованіе, при которомъ каждая точка переходитъ въ другую, лежащую на томъ же радіусѣ круга, причемъ разстоянія r, r_1 этихъ точекъ отъ центра круга связаны соотношеніемъ $rr_1=h^2$. Изъ этого соотношенія видно, что отрѣзокъ между этими точками дѣлится гармонически концами того діаметра круга, на которомъ онѣ лежатъ, и потому каждая изъ двухъ точекъ лежитъ на полярѣ другой точки относительно управляющаго круга. *(Ред.)*

**) Это значитъ, что mt и MT образуютъ съ радіусомъ векторомъ Om углы равные, но лежащіе по разныя стороны радіуса вектора.

36. Преобразованія прикосновенія. — Предыдущія преобразованія не будутъ самыми общими изъ тѣхъ, которыя обращаютъ двѣ касающіяся другъ друга кривыя въ двѣ другія кривыя, также касающіяся другъ друга. Предположимъ, что для всякой точки m кривой c мы находимъ другую точку M опредѣленнымъ построеніемъ, зависящимъ не только отъ положенія самой точки m, но и отъ направленія касательной къ кривой c въ этой точкѣ m. Опредѣляющія это преобразованіе формулы будутъ имѣть видъ

$$X=f(x, y, y'), \quad Y=\varphi(x, y, y'). \tag{24}$$

Угловой коэффиціентъ Y' касательной къ преобразованной кривой выразится такъ:

$$Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''}.$$

Вообще, Y' зависитъ отъ четырехъ перемѣнныхъ x, y, y', y''; поэтому, если мы приложимъ преобразованіе (24) къ двумъ кривымъ, касающимся другъ друга въ точкѣ (x, y), то соотвѣтствующія кривыя C, C_1 будутъ имѣть общую точку (X, Y), но вообще не будутъ касаться другъ друга въ этой точкѣ, если только y'' не будетъ имѣть одного и того же значенія для обѣихъ кривыхъ c, c_1. Чтобы преобразованныя кривыя C и C_1 касались другъ друга всегда, когда касаются другъ друга кривыя c и c_1, необходимо и достаточно, чтобы Y' не зависѣло отъ y'', т.-е. чтобы функціи $f(x, y, y')$ и $\varphi(x, y, y')$ удовлетворяли условію

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right).^{*)}$$

Въ этомъ случаѣ разсматриваемое преобразованіе называется преобразованіемъ прикосновенія. Ясно, что точечное преобразованіе есть частный случай преобразованій прикосновенія**).

---

*) Это условіе даетъ

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y'}}{\frac{\partial f}{\partial y'}}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\frac{\partial f}{\partial y'}y''}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''}.$$

(Ред.)

**) Лежандръ и Амперъ (Ampère) дали многочисленные примѣры этихъ преобразованій. Софусъ Ли (Sophus Lie) въ различныхъ рабо-

Разсмотримъ, напримѣръ, преобразованіе Лежандра, состоящее въ томъ, что всякой точкѣ (x, y) кривой c соотвѣтствуетъ точка M съ координатами

$$X=y', \quad Y=xy'-y;$$

изъ этихъ формулъ мы получаемъ

$$Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{xy''}{y''}=x,$$

откуда ясно видно, что это преобразованіе есть въ самомъ дѣлѣ преобразованіе прикосновенія. Мы будемъ также имѣть

$$Y''=\frac{dY'}{dX}=\frac{dx}{y''dx}=\frac{1}{y''},$$
$$Y'''=\frac{dY''}{dX}=-\frac{y'''}{y''^2}$$

и т. д. Изъ предыдущихъ формулъ находимъ

$$x=Y', \quad y=XY'-Y, \quad y'=X,$$

что указываетъ на взаимность преобразованія. Всѣ эти свойства легко объясняются, если мы замѣтимъ, что точка съ координатами $X=y'$, $Y=xy'-y$ есть полюсъ касательной въ точкѣ (x, y) къ кривой c относительно параболы $x^2-2y=0$. Вообще, если мы примемъ M за полюсъ касательной въ точкѣ m къ кривой c относительно управляющаго коническаго сѣченія Σ, то мѣсто точекъ M есть кривая C, касательная къ которой въ точкѣ M есть поляра точки m относительно Σ. Такимъ образомъ, между двумя кривыми c и C устанавливается взаимное соотвѣтствіе. Сверхъ того, если мы замѣнимъ кривую c другою кривою c_1, касающеюся c въ точкѣ m, то и взаимная кривая C_1 будетъ касаться кривой C въ точкѣ M.

Подарная кривая. — Если изъ данной точки O, взятой въ плоскости кривой c, мы опустимъ перпендикуляръ OM на касательную въ точкѣ m къ этой кривой, то мѣсто основаній этого перпендикуляра есть кривая C, которая называется кривою подарною относительно первой кривой. Легко получить вычисленіемъ координаты точки M и убѣдиться, что полученное такимъ образомъ преобра-

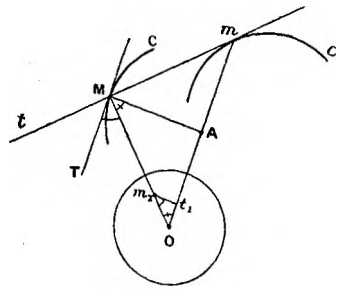
---

тахъ развилъ общую теорію. См., въ частности, Geometrie der Berührungstransformationen; см. также Якоби: Vorlesungen über Dynamik.

Теорія преобразованій прикосновенія изложена также въ книгѣ Гурса: Leçons sur les équations aux dérivées partielles (гл. XI)

зованіе есть преобразованіе прикосновенія, но проще можно придти къ этому слѣдующимъ образомъ. Разсмотримъ кругъ γ радіуса R, съ центромъ въ O, и возьмемъ на OM такую точку m_1, чтобы $Om_1 \times OM = R^2$. Точка m_1 есть полюсъ касательной mt относительно круга γ. Такимъ образомъ, преобразованіе, приводящее отъ c къ C, слагается изъ преобразованія взаимными поляpами и изъ инверсіи. Если точка m описываетъ кривую c, то точка m_1, полюсъ касательной mt, описываетъ кривую c_1, касающуюся поляры точки m относительно круга γ, то-есть прямой $m_1 t_1$, перпендикулярной къ Om. Касательная MT къ кривой C и касательная m_1t_1 къ кривой c_1 образуютъ равные углы съ радіусомъ векторомъ Om_1M; поэтому, если мы проведемъ нормаль MA, то углы AMO, AOM будутъ равны, какъ дополненія равныхъ угловъ, и точка A будетъ срединою радіуса Om. Отсюда слѣдуетъ, что мы получимъ нормаль къ подарной кривой, соединивъ точку M съ срединою Om.

Черт. 6.



37. Гомографическія преобразованія. — Всякая функція y, удовлетворяющая уравненію $y''=0$, есть линейная функція перемѣннаго x, и обратно. Но если надъ перемѣнными x и y мы выполнимъ гомографическое преобразованіе*)

$$x=\frac{aX+bY+c}{a''X+b''Y+c''},\quad y=\frac{a'X+b'Y+c'}{a''X+b''Y+c''},$$

то прямая линія измѣнится въ прямую линію; поэтому уравненіе $y''=0$ должно обратиться въ $\frac{d^2Y}{dX^2}=0$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, мы замѣтимъ, что общее гомографическое преобразованіе можетъ быть приведено къ ряду частныхъ преобразованій болѣе простого вида. Если оба коэффиціента a'', b'' не равны нулю, то мы положимъ $X_1=a''X+b''Y+c''$. Такъ какъ, кромѣ того, нельзя сразу имѣть $ab''-ba''=0$, $a'b''-b'a''=0$**), то мы положимъ вмѣстѣ съ тѣмъ $Y_1=a'X+b'Y+c'$, предполагая $a'b''-b'a''$ отличнымъ отъ нуля. Замѣнивъ X, Y ихъ значеніями въ функціи отъ X_1, Y_1, мы можемъ написать предыдущія формулы въ видѣ

$$y=\frac{Y_1}{X_1},\quad x=\frac{\alpha X_1+\beta Y_1+\gamma}{X_1}=\alpha+\beta\frac{Y_1}{X_1}+\frac{\gamma}{X_1}.$$

---

*) Гомографическимъ преобразованіемъ называется такое точечное преобразованіе, при которомъ прямыя линіи обращаются въ прямыя. Аналитически такое преобразованіе выражается дробными линейными формулами относительно X, Y съ общимъ знаменателемъ.

**) Въ такомъ случаѣ изъ обѣихъ формулъ можно было бы исключить $a''X+b''Y$, такъ что x и y не были бы независимы.

(Ред.)

Мы видимъ такимъ образомъ, что общее гомографическое преобразованіе можетъ быть представлено, какъ соединеніе цѣлаго линейнаго преобразованія общаго вида

$$x=aX+bY+c, \quad y=a'X+b'Y+c',$$

и частнаго преобразованія

$$x=\frac{1}{X}, \quad y=\frac{Y}{X}.$$

Выполнивъ эту послѣднюю подстановку, мы найдемъ

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{XY'-Y}{X^2}:\frac{-1}{X^2}=Y-XY',$$

и далѣе

$$y''=\frac{dy'}{dx}=-XY''(-X^2)=X^3Y''.$$

Если мы выполнимъ цѣлое гомографическое преобразованіе, то будемъ имѣть

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{a'+b'Y'}{a+bY'},$$
$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{(ab'-ba')Y''}{(a+bY')^3}.$$

Въ обоихъ случаяхъ уравненіе $y''=0$ обращается въ $Y''=0$.

Мы теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію функцій многихъ независимыхъ перемѣнныхъ, и, для опредѣленности, мы изложимъ наши разсужденія въ примѣненіи къ функціямъ двухъ перемѣнныхъ.

38. Задача III. — Пусть будетъ $\omega=f(x, y)$ функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y. Возьмемъ два новыхъ независимыхъ перемѣнныхъ u, v, связанныхъ съ прежними посредствомъ формулъ

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v);$$

требуется выразить частныя производныя отъ ω относительно перемѣнныхъ x и y чрезъ u, v и частныя производныя отъ ω, взятыя относительно u и v.

Пусть послѣ подстановки $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ функція $f(x, y)$ обращается въ $\omega=F(u, v)$. По правилу дифференцированія сложныхъ функцій имѣемъ

$$\frac{d\omega}{du}=\frac{d\omega}{dx}\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\omega}{dy}\frac{d\psi}{du},$$
$$\frac{d\omega}{dv}=\frac{d\omega}{dx}\frac{d\varphi}{dv}+\frac{d\omega}{dy}\frac{d\psi}{dv}.$$

Якобіанъ $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ не можетъ быть нулемъ; въ самомъ дѣлѣ, если бы было $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}=0$, то произведенная нами замѣна перемѣнныхъ не имѣла бы никакого смысла, такъ какъ функціи φ и ψ зависѣли бы тогда одна отъ другой (§ 28). Поэтому изъ предыдущихъ уравненій мы можемъ опредѣлить $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial y}$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial x}&=A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v},\\ \frac{\partial\omega}{\partial y}&=C\frac{\partial\omega}{\partial u}+D\frac{\partial\omega}{\partial v},\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

гдѣ A, B, C, D суть опредѣленныя функціи отъ u и v; эти формулы рѣшаютъ нашу задачу для производныхъ перваго порядка. Онѣ показываютъ, что для полученія производной по x отъ функціи ω, надо производную отъ ω по u умножить на A, производную отъ ω по v умножить на B и полученныя произведенія сложить. Чтобы получить частную производную по y, должно поступить такимъ же образомъ, замѣнивъ только A и B соотвѣственно черезъ C и D. Для вычисленія производныхъ второго порядка достаточно примѣнить къ производнымъ перваго порядка правила, выраженныя предыдущими формулами; такъ, мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=$$
$$=A\frac{\partial}{\partial u}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)+B\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u}+B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right),$$

или, выполняя вычисленія,

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=A\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)$$
$$+B\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial v}\right).$$

Точно также мы получимъ $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$ и послѣдующія производныя. При всѣхъ дифференцированіяхъ достаточно замѣнить операціи $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ соотвѣтственно операціями

$$A\frac{\partial}{\partial u}+B\frac{\partial}{\partial v},\quad C\frac{\partial}{\partial u}+D\frac{\partial}{\partial v};$$

такимъ образомъ все сводится къ вычисленію коэффиціентовъ A, B, C, D.

Примѣръ I. — Разсмотримъ уравненіе

$$a\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}=0, \qquad (26)$$

съ постоянными коэффиціентами a, b, c. Мы постараемся привести это уравненіе къ возможно болѣе простому виду. Замѣтимъ прежде всего, что если бы одновременно $a=c=0$, то не было бы надобности упрощать это уравненіе; поэтому мы можемъ предположить, что, напримѣръ, c не равно нулю. Введемъ два новыхъ независимыхъ перемѣнныхъ u и v,

$$u=x+\alpha y, \quad v=x+\beta y,$$

гдѣ α и β — два постоянныхъ неопредѣленныхъ коэффиціента. Мы имѣемъ

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{\partial \omega}{\partial u}+\frac{\partial \omega}{\partial v},$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial y}=\alpha\frac{\partial \omega}{\partial u}+\beta\frac{\partial \omega}{\partial v},$$

такъ что въ этомъ случаѣ $A=B=1$, $C=\alpha$, $D=\beta$. Общій способъ даетъ намъ

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\,\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}+\beta\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2},$$

и уравненіе (26) принимаетъ видъ

$$(a+2b\alpha+c\alpha^2)\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}+2[a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta]\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}+(a+2b\beta+c\beta^2)\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}=0.$$

Здѣсь нужно будетъ различить нѣсколько случаевъ.

Первый случай. — Пусть $b^2-ac>0$; принявъ за α и β оба корня уравненія

$$a+2br+r^2=0,$$

мы приведемъ наше уравненіе къ простому виду

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Такъ какъ послѣднее уравненіе можно представить въ видѣ

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)=0,$$

то отсюда видно, что $\frac{\partial \omega}{\partial u}$ должно быть функціей только одного перемѣннаго u; пусть $\frac{\partial \omega}{\partial u}=f(u)$. Обозначимъ черезъ $F'(u)$ функцію отъ u, производная которой $F'(u)$ равна $f(u)$, такъ какъ производная отъ $\omega-F'(u)$ по u равна нулю, то эта разность не зависитъ отъ u, и, слѣдовательно, $\omega=F(u)+\Phi(v)$. Обратное предложеніе очевидно. Возвращаясь къ перемѣннымъ x и y, мы заключаемъ, что всѣ функціи ω, удовлетворяющія уравненію (26), будутъ вида

$$\omega=F(x+\alpha y)+\Phi(x+\beta y),$$

гдѣ функціи F и Φ произвольны. Напримѣръ общій интегралъ уравненія

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2},$$

встрѣчающагося въ теоріи колебанія струнъ, будетъ

$$\omega=f(x+ay)+\varphi(x-ay).$$

Второй случай.—Пусть $b^2-ac=0$. Возьмемъ α равнымъ двукратному корню уравненія $a+2br+cr^2=0$, и β — отличнымъ отъ α; тогда коэффиціентъ при $\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}$ будетъ 0, такъ какъ онъ равенъ $a+b\alpha+\beta(b+c\alpha)$. Такимъ образомъ, наше уравненіе приметъ видъ $\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=0$. Мы видимъ, что ω должна быть линейною функціею отъ v, $\omega=vf(u)+\varphi(u)$, гдѣ функціи $f(u)$ и $\varphi(u)$ произвольны. Возвращаясь къ перемѣннымъ x и y, мы получимъ для ω выраженіе

$$\omega=(x+\beta y)f(x+\alpha y)+\varphi(x+\alpha y),$$

которое можно представить въ видѣ

$$\omega=[x+\alpha y+(\beta-\alpha)y](f(x+\alpha y)+\varphi(x+\alpha y),$$

или, иначе,

$$\omega=yF(x+\alpha y)+\Phi(x+\alpha y).$$

Третій случай. — Если $b^2-ac<0$, то нельзя болѣе приложить предыдущее преобразованіе, не вводя мнимыхъ перемѣнныхъ. Но можно опредѣлить α и β такимъ образомъ, чтобы

$$a+2b\alpha+c\alpha^2=a+2b\beta+c\beta^2,$$
$$a+b(\alpha+\beta)+c\alpha\beta=0;$$

это даетъ

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{c},\quad \alpha\beta=\frac{2b^2-ac}{c^2};$$

α и β будутъ дѣйствительны, такъ какъ уравненіе второй степени

$$r^2+\frac{2b}{c}r+\frac{2b^2-ac}{c^2}=0,$$

корнями котораго служатъ α и β, имѣетъ дѣйствительные корни. Разсматриваемое дифференціальное уравненіе принимаетъ тогда видъ

$$\Delta_2\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=0.$$

Это уравненіе $\Delta_2\omega=0$, извѣстное подъ именемъ уравненія Лапласа (Laplace), играетъ основную роль въ очень многихъ вопросахъ анализа и математической физики.

Примѣръ II. Найдемъ, какой видъ приметъ предыдущее уравненіе, если мы положимъ $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$. Мы имѣемъ

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varrho}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial y}\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}=-\frac{\partial\omega}{\partial x}\varrho\sin\varphi+\frac{\partial\omega}{\partial y}\varrho\cos\varphi,$$

или, рѣшая эти уравненія относительно $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial y}$,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\varrho}-\frac{\sin\varphi}{\varrho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi},$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial u}=\sin\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\varrho}+\frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\cos\varphi\,\frac{\partial\omega}{\partial\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right) - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\,\frac{\partial\omega}{\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\varrho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \cos^2\varphi\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho\,\partial\varphi} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho^2}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varrho};$$

аналогичное выраженіе мы получимъ и для $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$; складывая ихъ, имѣемъ

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial\omega}{\partial\varrho}.$$

39. Другой способъ. — Предыдущій способъ наиболѣе удобенъ въ томъ случаѣ, если функція, частныя производныя которой мы ищемъ, будетъ неизвѣстна. Но иногда выгоднѣе пользоваться слѣдующимъ пріемомъ:

Пусть будетъ $z=f(x, y)$ функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y; если мы предположимъ, что x, y и z выражены черезъ два вспомогательныхъ перемѣнныхъ u и v, то мы будемъ имѣть между полными дифференціалами dx, dy и dz соотношеніе

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

которое равносильно двумъ соотношеніямъ

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v},$$

изъ которыхъ, какъ и въ первомъ способѣ, мы выведемъ $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ въ функціи u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$. Но для вычисленія слѣдующихъ производныхъ мы будемъ поступать далѣе по тому же правилу. Такъ, чтобы вычислить $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, мы будемъ исходить изъ тожества

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dy,$$

которое равносильно двумъ соотношеніямъ

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v};$$

причемъ въ лѣвыхъ частяхъ этихъ равенствъ производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ должна быть замѣнена ея выраженіемъ черезъ u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$. Исходя изъ тожества

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy,$$

мы такимъ же образомъ получимъ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; оба полученныхъ выраженія для $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ должны быть тождественны между собою, что можетъ служить повѣркою вычисленія. Производныя высшихъ порядковъ вычисляются такимъ же способомъ.

Приложеніе къ поверхностямъ.— Предыдущіе методы примѣняются при изученіи поверхностей. Предположимъ, что координаты точки поверхности S выражены въ функціи двухъ перемѣнныхъ параметровъ u, v посредствомъ формулъ

$$x=f(u,v),\quad y=\varphi(u,v),\quad z=\psi(u,v). \qquad (27)$$

Мы получимъ уравненіе этой поверхности, исключивъ перемѣнныя u и v изъ трехъ уравненій (27); но мы можемъ поставить себѣ задачей непосредственно по самимъ уравненіямъ (27) изучать свойства поверхности S, не производя исключенія перемѣнныхъ u, v, которое практически можетъ оказаться и невозможнымъ. Замѣтимъ прежде всего, что три опредѣлителя Якоби $\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}$, $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$, $\frac{D(f,\psi)}{D(u,v)}$ не могутъ быть одновременно нулями, такъ какъ въ этомъ случаѣ исключеніе u и v привело бы къ двумъ различнымъ соотношеніямъ между x, y, z, и точка съ координатами (x,y,z) описала бы не поверхность, а кривую. Пусть, напримѣръ,

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\neq 0;$$

тогда мы можемъ предположить, что изъ первыхъ двухъ уравненій (27) мы выразили u и v въ функціи x, y и, внося ихъ значенія въ третье уравненіе (27), получили уравненіе поверхности S, $z=F(x,y)$. Чтобы изслѣдовать эту поверхность вблизи одной изъ ея точекъ, необходимо имѣть выраженія частныхъ производныхъ p, q, r, s, t, ... отъ функціи $F(x,y)$ черезъ параметры u и v. Производныя перваго порядка p, q получатся изъ соотношенія

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

которое равносильно двумъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial u}&=p\frac{\partial f}{\partial u}+q\frac{\partial\varphi}{\partial u},\\ \frac{\partial\psi}{\partial v}&=p\frac{\partial f}{\partial v}+q\frac{\partial\varphi}{\partial v},\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

позволяющимъ вычислить p и q. Найдя p и q, мы получимъ уравненіе касательной плоскости, внося ихъ выраженіе въ уравненіе

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

Это даетъ

$$(X-x)\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+(Y-y)\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+(Z-z)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=0.\qquad(29)$$

Соотношенія (28) имѣютъ простое геометрическое значеніе. Они показываютъ, что касательная плоскость проходитъ черезъ касательныя прямыя къ двумъ кривымъ, расположеннымъ на поверхности S; эти кривыя получатся, если мы, оставляя v постояннымъ, будемъ измѣнять u, или наоборотъ, оставляя постояннымъ u, будемъ измѣнять v*).

Получивъ p и q, $p=f_1(u,v)$, $q=f_2(u,v)$, мы найдемъ r, s, t изъ равенствъ

$$dp=r\,dx+s\,dy,$$
$$dq=s\,dx+t\,dy,$$

причемъ каждое изъ этихъ равенствъ дастъ два различныхъ соотношенія и т. д.

40. Задача IV. — Если

$$x=f(u,v,w),\quad y=\varphi(u,v,w),\quad z=\psi(u,v,w),\qquad(30)$$

то для всякаго соотношенія между перемѣнными x, y, z эти формулы даютъ соотвѣтствующее соотношеніе между u, v, w. Требуется выразить частныя производныя отъ z по перемѣннымъ x, y черезъ u, v, w и черезъ частныя производныя отъ w по перемѣннымъ u, v.

---

*) Къ уравненію касательной плоскости можно также придти непосредственно. Всякая кривая, расположенная на поверхности, опредѣляется соотношеніемъ между u и v: $v=\Pi(u)$, и касательная къ этой кривой представится уравненіями

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\Pi'(u)}=\frac{Y-y}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Pi'(u)}=\frac{Z-z}{\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Pi'(u)}.$$

Исключивъ отсюда $\Pi'(u)$, мы придемъ къ уравненію касательной плоскости (29).

Эта задача приводится къ задачѣ, разсмотрѣнной въ предыдущемъ параграфѣ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что въ формулахъ (30) w замѣнено функціею отъ u и v; тогда мы будемъ имѣть выраженія x, y, z черезъ два параметра u, v, и достаточно примѣнить прежній способъ (§ 39), принявъ f, φ, ψ за сложныя функціи отъ u, v, причемъ перемѣнное w разсматривается, какъ посредствующая функція отъ u, v. Напримѣръ, для вычисленія производныхъ перваго порядка p, q, мы будемъ имѣть два соотношенія

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}=p\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}=p\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

и то же самое для слѣдующихъ производныхъ.

Предыдущую задачу можно выразить геометрически слѣдующимъ образомъ. Для всякой точки пространства m съ координатами (x, y, z) можно опредѣленнымъ построеніемъ найти другую соотвѣтствующую точку M съ координатами (X, Y, Z). Если точка m описываетъ поверхность S, то точка M описываетъ поверхность Σ, всѣ свойства которой требуется вывести изъ свойствъ первой поверхности.

Формулы, опредѣляющія это преобразованіе, имѣютъ видъ

$$X=f(x, y, z),\quad Y=\varphi(x, y, z),\quad Z=\psi(x, y, z);$$

пусть будутъ

$$z=F(x, y),\quad Z=\Phi(X, Y)$$

уравненія двухъ поверхностей S, Σ.

Намъ надо выразить частныя производныя $P, Q, R, S, T, \ldots$ отъ функціи $\Phi(X, Y)$ черезъ x, y, z и черезъ частныя производныя $p, q, r, s, t, \ldots$ отъ функціи $F(x, y)$. Но это именно та задача, которую мы только что разсматривали: вся разница только въ обозначеніяхъ.

Производныя перваго порядка P и Q зависятъ только отъ x, y, z, p, q, такъ что разсматриваемое преобразованіе преобразуетъ двѣ касательныя другъ къ другу поверхности также въ двѣ касательныя. Но, какъ мы сейчасъ увидимъ на примѣрахъ, предыдущія преобразованія не будутъ самыми общими изъ тѣхъ, которыя обладаютъ указаннымъ свойствомъ.

41. Преобразованіе Лежандра. — Пусть будетъ $z=f(x, y)$ уравненіе поверхности S. Свяжемъ каждую точку $m(x, y, z)$ поверхности S съ соотвѣтствующею точкою $M(X, Y, Z)$, положивъ:

$$X=p,\quad Y=q,\quad Z=px+qy-z;$$

пусть будетъ $Z=\Phi(X,Y)$ уравненіе поверхности Σ, описанной точкою M. Если мы предположимъ, что z, p, q замѣнены черезъ $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, то мы получимъ выраженія трехъ координатъ точки M въ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y.

Обозначимъ черезъ P, Q, R, S, T частныя производныя отъ функціи $\Phi(X, Y)$ по X, Y; соотношеніе

$$dZ=P\,dX+Q\,dY$$

даетъ

$$p\,dx+q\,dy+x\,dp+y\,dq-dz=P\,dp+Q\,dq,$$

или

$$x\,dp+y\,dq=P\,dp+Q\,dq.$$

Предположимъ, что для разсматриваемой поверхности p и q будутъ независимы между собою, т.-е. что не можетъ быть тождества вида $\lambda\,dp+\mu\,dq=0$, въ которомъ бы одновременно не было $\lambda=\mu=0$. Тогда изъ предыдущаго соотношенія мы найдемъ

$$P=x,\quad Q=y.$$

Чтобы получить R, S, T, мы воспользуемся соотношеніями

$$dP=R\,dX+S\,dY,$$
$$dQ=S\,dX+T\,dY,$$

которыя, послѣ замѣны X, Y, P, Q ихъ значеніями, обращаются въ

$$dx=R(r\,dx+s\,dy)+S(s\,dx+t\,dy),$$
$$dy=S(r\,dx+s\,dy)+T(s\,dx+t\,dy).$$

Отсюда получимъ

$$Rr+Ss=1,\quad Rs+St=0,$$
$$Sr+Ts=0,\quad Ss+Tt=1,$$

и, слѣдовательно,

$$R=\frac{t}{rt-s^2},\quad S=\frac{-s}{rt-s^2},\quad T=\frac{r}{rt-s^2}.$$

Изъ предыдущихъ формулъ находимъ обратно

$$x=P,\quad y=Q,\quad z=PX+QY-Z,\quad p=X,\quad q=Y,$$
$$r=\frac{T}{RT-S^2},\quad s=\frac{-S}{RT-S^2},\quad t=\frac{R}{RT-S^2}.$$

Послѣднія формулы показываютъ, что преобразованіе Лежандра—взаимное. Кромѣ того, это—преобразованіе прикосновенія, такъ какъ X, Y, Z, P, Q зависятъ только отъ x, y, z, p, q. Эти свойства преобразованія Лежандра будутъ ясны геометрически, если мы замѣтимъ, что предыдущія формулы опредѣляютъ преобразованіе взаимными полярами относительно параболоида

$$x^2+y^2-2z=0.$$

Примѣчаніе. — Выраженія R, S, T обращаются въ безконечность, если для всѣхъ точекъ поверхности, описанной точкою m, существуетъ соотношеніе $rt-s^2=0$. Въ этомъ случаѣ точка M опишетъ не поверхность, а кривую, такъ какъ

$$\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}=\frac{D(p, q)}{D(x, y)}=rt-s^2=0,$$

и

$$\frac{D(X, Z)}{D(x, y)}=\frac{D(p, px+qy-z)}{D(x, y)}=y(rt-s^2)=0.$$

Это именно тотъ случай, который мы выше исключили изъ разсмотрѣнія.

42. Преобразованіе Ампера. — Сохраняя обозначенія предыдущаго параграфа, положимъ

$$X=x, \quad Y=q, \quad Z=qy-z.$$

Соотношеніе

$$dZ=P\,dX+Q\,dY$$

обращается въ

$$q\,dy+y\,dq-dz=P\,dx+Q\,dq,$$

или въ

$$y\,dq-p\,dx=P\,dx+Q\,dq.$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$P=-p, \quad Q=y,$$

и обратно

$$x=X, \quad y=Q, \quad z=QY-Z, \quad p=-P, \quad q=Y;$$

отсюда видно, что преобразованіе Ампера есть преобразованіе прикосновенія и кромѣ того — взаимное. Соотношеніе

$$dP=R\,dX+S\,dY$$

даетъ

$$-r\,dx-s\,dy=R\,dx+S\,(s\,dx+t\,dy),$$

т.-е.

$$R+Ss=-r, \quad St=-s,$$

откуда находимъ

$$R=\frac{s^2-rt}{t}, \quad S=-\frac{s}{t}.$$

Изъ соотношенія $dQ=S\,dX+T\,dY$ мы также найдемъ

$$T=\frac{1}{t}.$$

Какъ приложеніе этихъ формулъ, найдемъ всѣ функціи $f(x, y)$, удовлетворяющія соотношенію $rt-s^2=0$. Пусть будетъ S поверхность, представляемая уравненіемъ $z=f(x, y)$, Σ — преобразованная поверхность, и $Z=\Phi(X, Y)$—уравненіе поверхности Σ. Изъ выраженія для R имѣемъ

$$R=\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}=0;$$

слѣдовательно, Φ должно быть линейною функціею отъ X:

$$Z=X\varphi(Y)+\psi(Y),$$

гдѣ φ и ψ суть произвольныя функціи отъ Y. Изъ послѣдняго уравненія находимъ

$$P=\varphi(Y), \quad Q=X\varphi'(Y)+\psi'(Y),$$

и координаты (x, y, z) точки поверхности S выражаются обратно въ функціи двухъ перемѣнныхъ X, Y формулами

$$x=X, \quad y=X\varphi'(Y)+\psi'(Y), \quad z=Y[X\varphi'(Y)+\psi'(Y)]-X\varphi(Y)-\psi(Y).$$

Мы получимъ уравненіе этой поверхности, исключивъ X, Y, или, что то же самое, исключивъ перемѣнный параметръ α изъ двухъ уравненій.

$$\begin{aligned} z&=\alpha y-x\varphi(\alpha)-\psi(\alpha),\\ 0&=y-x\varphi'(\alpha)-\psi'(\alpha), \end{aligned}$$

изъ которыхъ первое представляетъ подвижную плоскость съ параметромъ α, а второе получается отъ дифференцированія перваго относительно этого параметра. Такимъ образомъ мы получаемъ развертывающіяся поверхности, которыя будутъ изучены дальше.

43. Уравненіе потенціала въ криволинейныхъ координатахъ. — Вычисленія, нужныя при замѣнѣ перемѣнныхъ, могутъ быть въ большинствѣ случаевъ упрощены различными искусственными пріемами. Для примѣра возьмемъ уравненіе потенціала въ криволинейныхъ ортогональныхъ координатахъ *). Пусть будутъ

$$\begin{aligned} F(x, y, z)&=\rho,\\ F_1(x, y, z)&=\rho_1,\\ F_2(x, y, z)&=\rho_2, \end{aligned}$$

уравненія трехъ семействъ поверхностей, образующихъ тройную ортогональную систему, такъ что двѣ какія-нибудь поверхности, принадлежащія къ двумъ различнымъ семействамъ, пересѣкаются всюду подъ прямымъ угломъ. Рѣшивъ эти уравненія, мы получимъ x, y, z въ функціи параметровъ ρ, ρ_1, ρ_2,

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(\rho, \rho_1, \rho_2),\\ y&=\varphi_1(\rho, \rho_1, \rho_2),\\ z&=\varphi_2(\rho, \rho_1, \rho_2); \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

ρ, ρ_1, ρ_2 образуютъ систему криволинейныхъ ортогональныхъ координатъ.

Такъ какъ поверхности трехъ предыдущихъ семействъ ортогональны, то касательныя къ линіямъ пересѣченія этихъ поверхностей, взятыхъ попарно, должны образовать трехгранный уголъ съ тремя прямыми плоскими углами; поэтому должно быть

$$\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}=0, \quad \mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}=0, \quad \mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}=0, \qquad (32)$$

причемъ знакъ S указываетъ, что должно замѣнить φ черезъ φ_1, потомъ черезъ φ_2 и взять сумму этихъ трехъ произведеній.

---

*) Ламе (Lamé), Traité des coordonnées curvilignes. См. также Бертранъ, Traité de Calcul différentiel, т. I, стр. 181.

Эти условія ортогональности могутъ быть еще представлены въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}+\frac{\partial\varrho}{\partial y}\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}+\frac{\partial\varrho}{\partial z}\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}=0, \qquad & \\ \frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}+\ldots=0, \qquad \frac{\partial\varrho_1}{\partial x}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}+\ldots=0. & \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Посмотримъ, какой видъ приметъ уравненіе потенціала

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

при перемѣнныхъ ϱ, ϱ_1, ϱ_2. Мы имѣемъ

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x},$$

далѣе

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=&\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_2}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\varrho}\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}\\ &+\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_1^2}\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_1\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}\frac{\partial^2\varrho_1}{\partial x^2}\\ &+\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_2^2}\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}\frac{\partial^2\varrho_2}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Если мы сложимъ три аналогичныхъ уравненія, то, вслѣдствіе соотношеній (33), исчезнутъ всѣ производныя вида $\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\varrho_1}$, и мы получимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=&\ \Delta_1(\varrho)\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}+\Delta_1(\varrho_1)\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_1^2}+\Delta_1(\varrho_2)\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_2^2}\\ &+\Delta_2(\varrho)\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}+\Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}, \end{aligned}$$

гдѣ Δ_1 и Δ_2 обозначаютъ дифференціальные параметры Ламе (Lamé):

$$\Delta_1(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2, \quad \Delta_2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Дифференціальные параметры перваго порядка $\Delta_1(\varrho)$, $\Delta_1(\varrho_1)$, $\Delta_1(\varrho_2)$ легко вычислить.

Изъ соотношеній (31) находимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}&=1,\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}&=0,\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}&=0; \end{aligned}$$

умножая эти три уравненія на $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho}$ и складывая, получимъ

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho}}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho}\right)^2};$$

такимъ же образомъ мы вычислимъ $\frac{\partial\varrho}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varrho}{\partial z}$ и найдемъ

$$\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho}\right)^2}.$$

Положивъ

$$H=\mathrm{S}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)^2,\quad H_1=\mathrm{S}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_1}\right)^2,\quad H_2=\mathrm{S}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_2}\right)^2,$$

причемъ знакъ S означаетъ всегда, что должно замѣнить φ черезъ φ_1, потомъ черезъ φ_2, и сложить полученныя выраженія, мы будемъ имѣть

$$\Delta_1(\varrho)=\frac{1}{H},\quad \Delta_1(\varrho_1)=\frac{1}{H_1},\quad \Delta_1(\varrho_2)=\frac{1}{H_2}.$$

Выраженія $\Delta_2(\varrho)$, $\Delta_2(\varrho_1)$, $\Delta_2(\varrho_2)$ въ функціи ϱ, ϱ_1, ϱ_2 получаются у Ламе путемъ довольно утомительныхъ вычисленій, которыя можно упростить слѣдующимъ образомъ. Въ тожествѣ (34)

$$\Delta_2(V)=\frac{1}{H}\frac{\partial^2V}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2V}{\partial\varrho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2V}{\partial\varrho_2^2}+\Delta_2(\varrho)\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}+\Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial V}{\partial\varrho_2},$$

положимъ послѣдовательно $V=x$, $V=y$, $V=z$; мы будемъ имѣть три соотношенія

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho_2^2}+\Delta_2(\varrho)\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}+\Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_1}+\Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_2}=0,$$

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varrho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varrho_2^2}+\Delta_2(\varrho)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho}+\Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}+\Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_2}=0,$$

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\varrho_1^2}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\varrho_2^2}+\Delta_2(\varrho)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho}+\Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}+\Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_2}=0,$$

которыя остается только рѣшить относительно $\Delta_2(\varrho)$, $\Delta_2(\varrho_1)$, $\Delta_2(\varrho_2)$. Напримѣръ, умножая ихъ на $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho}$ и складывая, мы получимъ

$$\Delta_2(\varrho)H+\frac{1}{H}\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{H_1}\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho_1^2}+\frac{1}{H_2}\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho_2^2}=0.$$

Кромѣ того

$$\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial\varrho},$$

и, дифференцируя первое изъ соотношеній (32) по ϱ_1, находимъ

$$\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho_1^2}=-\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho_1\partial\varrho}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_1}{\partial\varrho}.$$

Такимъ же образомъ получимъ

$$\mathrm{S}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho_2^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_2}{\partial\varrho},$$

и, слѣдовательно,

$$\Delta_2(\varrho)=-\frac{1}{2H^2}\frac{\partial H}{\partial\varrho}+\frac{1}{2HH_1}\frac{\partial H_1}{\partial\varrho}+\frac{1}{2HH_2}\frac{\partial H_2}{\partial\varrho}=$$
$$=-\frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\log\left(\frac{H}{H_1H_2}\right)\right].$$

Положивъ

$$H=\frac{1}{h^2},\quad H_1=\frac{1}{h_1^2},\quad H_2=\frac{1}{h_2^2},$$

мы можемъ представить послѣднюю формулу въ видѣ

$$\Delta_2(\varrho)=h^2\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\log\frac{h}{h_1h_2}\right).$$

Точно также найдемъ

$$\Delta_2(\varrho_1)=h_1^2\,\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\log\frac{h_1}{hh_2}\right),\quad \Delta_2(\varrho_2)=h_2^2\,\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\log\frac{h_2}{hh_1}\right).$$

Такимъ образомъ формула (34) окончательно принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=h^2&\left[\frac{\partial^2V}{\partial\varrho^2}+\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\log\frac{h}{h_1h_2}\right)\frac{\partial V}{\partial\varrho}\right]\\ +h_1^2&\left[\frac{\partial^2V}{\partial\varrho_1^2}+\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\log\frac{h_1}{hh_2}\right)\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}\right]\\ +h_2^2&\left[\frac{\partial^2V}{\partial\varrho_2^2}+\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\log\frac{h_2}{hh_1}\right)\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}\right],\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

или, короче,

$$\Delta_2V=hh_1h_2\left[\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{h}{h_1h_2}\frac{\partial V}{\partial\varrho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{h_1}{hh_2}\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{h_2}{hh_1}\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}\right)\right].$$

Примѣнимъ эту формулу къ полярнымъ координатамъ. Замѣняя ϱ_1 и ϱ_2 черезъ θ и φ, мы получимъ слѣдующія формулы преобразованія:

$$x=\varrho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\varrho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\varrho\cos\theta;$$

коэффиціенты h, h_1, h_2 примутъ значенія

$$h=1,\quad h_1=\frac{1}{\varrho},\quad h_2=\frac{1}{\varrho\sin\theta},$$

и общая формула обращается въ

$$\Delta_2V=\frac{1}{\varrho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\varrho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\right],$$

или въ

$$\Delta_2V=\frac{\partial^2V}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2V}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\varrho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\varrho^2}\frac{\partial V}{\partial\theta},$$

какъ это легко вывести и непосредственно.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Полагая $u=x^2+y^2+z^2$, $v=x+y+z$, $w=xy+yz+zx$, имѣемъ тождественно $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=0$. Найти соотношеніе между u, v, w.

Обобщить эту задачу.

2. Если

$$u_1=\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_n^2}},\quad\ldots,\quad u_n=\frac{x_n}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_n^2}};$$

то

$$\frac{D_1(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{D_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{1}{(1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2)^{1+\frac{n}{2}}}.$$

3. Если положимъ

$$\begin{aligned}x_1&=\cos\varphi_1,\\ x_2&=\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\ x_3&=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_n&=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_n,\end{aligned}$$

то будемъ имѣть

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)} = (-1)^n \sin^n \varphi_1 \sin^{n-1} \varphi_2 \sin^{n-2} \varphi_3 \ldots \sin^2 \varphi_{n-1} \sin \varphi_n.$$

4. Провѣрить непосредственнымъ вычисленіемъ, что функція $z=F(x, y)$, опредѣляемая двумя уравненіями

$$z=\alpha x+yf(\alpha)+\varphi(\alpha),$$
$$0=x+yf'(\alpha)+\varphi'(\alpha),$$

гдѣ α есть вспомогательное перемѣнное, удовлетворяетъ соотношенію $rt-s^2=0$ при произвольныхъ функціяхъ $f(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$.

5. Показать, что всякая неявная функція $z=F(x, y)$, опредѣляемая уравненіемъ вида

$$y=x\varphi(z)+\psi(z),$$

удовлетворяетъ соотношенію

$$rq^2-2pqs+tp^2=0$$

при произвольныхъ функціяхъ $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

6. Функція $z=F(x, y)$, опредѣляемая двумя уравненіями

$$z\varphi'(\alpha)=[y-\varphi(\alpha)]^2, \quad (x+\alpha)\varphi'(\alpha)=y-\varphi(\alpha),$$

гдѣ α есть вспомогательное перемѣнное, удовлетворяетъ соотношенію $pq=z$ при произвольной функціи $\varphi(\alpha)$.

7. Функція $z=F(x, y)$, опредѣляемая двумя уравненіями

$$[z-\varphi(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2), \quad [z-\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha)=\alpha x^2,$$

удовлетворяетъ соотношенію

$$pq=xy.$$

8. Ф о р м у л а Л а г р а н ж а. — Пусть будетъ y неявная функція двухъ перемѣнныхъ x и α, опредѣляемая соотношеніемъ

$$y=\alpha+x\varphi(y).$$

и $u=f(y)$—какая-нибудь функція отъ y. Мы имѣемъ вообще

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left[\varphi(y)^n \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right].$$

[Лапласъ.]

Отв. Доказательство основывается на двухъ формулахъ

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right], \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial \alpha},$$

гдѣ u есть произвольная функція отъ y, а $F(u)$ — произвольная функція отъ u; затѣмъ нужно показать, что если формула вѣрна для какого-нибудь значенія n, то она будетъ также вѣрна и для значенія $n+1$.

При $x=0$, y обращается въ α, u — въ $f(\alpha)$, и производная n-го порядка отъ u по x принимаетъ видъ

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} [\varphi(\alpha)^n f'(\alpha)].$$

9. Если $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, и функціи $f(u, v)$ $\varphi(u, v)$ удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

то будемъ имѣть тождественно

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

10. Если функція $V(x, y, z)$ удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

то ему удовлетворяетъ и функція

$$\frac{1}{r}\,V\left(k^2\frac{x}{r^2},\ k^2\frac{y}{r^2},\ k^2\frac{z}{r^2}\right),$$

гдѣ k постоянное, а $r^2=x^2+y^2+z^2$. Лордъ Кельвинъ (Lord Kelvin.)

11. Пусть будутъ $V(x, y, z)$ и $V_1(x, y, z)$ два интеграла уравненія $\Delta_2 V=0$; функція

$$U=V(x, y, z)+(x^2+y^2+z^2)\,V_1(x, y, z)$$

удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta_2\Delta_2\,U=0.$$

12. Какой видъ принимаетъ уравненіе

$$(x-x^2)\,y''+(1-3x^2)\,y'-xy=0,$$

если сдѣлать замѣну независимаго перемѣннаго $x=\sqrt{1-t^2}$?

13. Какой видъ приметъ уравненіе

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2\,z=0,$$

если сдѣлать замѣну перемѣнныхъ $x=uv$, $y=\frac{1}{v}$?

14. Пусть будетъ $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_n)$ функція $2n$ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n\ u_1, u_2, \ldots, u_n$, однородная, второй степени относительно перемѣнныхъ $u_1, u_2 \ldots, u_n$. Если положимъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}=p_1,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}=p_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_n}=p_n,$$

и примемъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ за независимыя перемѣнныя вмѣсто $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то функція φ обратится въ функцію

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Показать, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial p_k}=u_k,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x_k}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}.$$

15. Въ каждой точкѣ M поверхности S проведена нормаль NM къ этой поверхности; пусть будетъ N точка пересѣченія этой нормали съ данною плоскостью P. Отложимъ на перпендикулярѣ къ плоскости P, проведенномъ черезъ точку N, длину $Nm=NM$. Найти касательную плоскость къ поверхности, описанной точкою m.

Это преобразованіе есть преобразованіе прикосновенія. Изучить обратное преобразованіе.

16. Отложимъ на каждой нормали къ поверхности S, считая отъ ея основанія, постоянную длину l; полученныя такимъ образомъ точки образуютъ, поверхность Σ (параллельныя поверхности); найти касательную плоскость къ этой поверхности Σ.

Та же задача для плоской кривой.

17*. Даны поверхность S и точка O; соединимъ O съ какою-нибудь точкою M поверхности S. Проведемъ плоскость OMN чрезъ радіусъ OM

и нормаль MN къ поверхности S въ точкѣ M; въ точкѣ O возставимъ въ плоскости OMN перпендикуляръ къ радіусу OM и отложимъ на немъ длину $OP=OM$. Точка P опишетъ поверхность Σ, которая называется апсидальною относительно первой поверхности S. Найти касательную плоскость къ этой поверхности.

Предыдущее преобразованіе есть преобразованіе прикосновенія, и связь между поверхностями S и Σ — взаимна. Если поверхность S представляетъ эллипсоидъ, и точка O находится въ его центрѣ, то поверхность Σ есть поверхность волнъ.

18*. Дифференціальный инваріантъ Альфена (Halphen). — Дифференціальное уравненіе

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5}-45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4}+40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3=0$$

не мѣняетъ вида, если надъ x и y будетъ выполнено произвольное гомографическое преобразованіе (§ 37).

19. Въ выраженіи

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

гдѣ P, Q, R суть функція отъ x, y, z, положимъ

$$x=f(u,v,w),\quad y=\varphi(u,v,w),\quad z=\psi(u,v,w),$$

гдѣ u, v, w — новыя перемѣнныя. Тогда предыдущее выраженіе обратится въ выраженіе того же вида

$$P_1\,du+Q_1\,dv+R_1\,dw,$$

гдѣ P_1, Q_1, R_1 суть функціи отъ u, v, w. Доказать тожество

$$H_1=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}H,$$

гдѣ

$$H=P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

$$H_1=P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial w}-\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)+Q_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial u}-\frac{\partial P_1}{\partial w}\right)+R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial v}-\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right).$$

20*. Билинейный ковариантъ.— Пусть будетъ Θ_d линейная форма дифференціаловъ

$$\Theta_d=X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+\ldots+X_n\,dx_n,$$

гдѣ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — функціи n перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Разсмотримъ выраженіе

$$H=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,dx_i\,\delta x_k,$$

содержащее двѣ системы дифференціаловъ d, δ, и гдѣ

$$a_{ik}=\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}.$$

Если мы сдѣлаемъ какую-нибудь замѣну перемѣнныхъ

$$x_i=\varphi_i(y_1,y_2,\ldots,y_n),\quad (i=1,2,\ldots,n),$$

то выраженіе Θ_d обратится въ выраженіе того же вида

$$\Theta'_d=Y_1dy_1+\ldots+Y_ndy_n,$$

гдѣ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ суть функціи $y_1, y_2, \ldots, y_n$; пусть будетъ также

$$a'_{ik}=\frac{\partial Y_i}{\partial y_k}-\frac{\partial Y_k}{\partial y_i}$$

и

$$H'=\sum_i\sum_k a'_{ik}\,dy_i\,\delta y_k.$$

Послѣ замѣны въ H dx_i и δx_k черезъ

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_2}dy_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n}dy_n,$$
$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_2}\delta y_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_n}\delta y_n,$$

будемъ имѣть тождественно $H=H'$.

H называется билинейнымъ ковариантомъ выраженія θ_d.

21*. Дифференціальные параметры Бельтрами (Beltrami).— Дано выраженіе

$$E\,dx^2+2\,F\,dx\,dy+G\,dy^2,$$

гдѣ E, F, G суть функціи перемѣнныхъ x и y; если мы сдѣлаемъ замѣну перемѣнныхъ $x=f(u,v)$, $y=\varphi(u,v)$, то получимъ выраженіе того же вида

$$E_1\,du^2+2\,F_1\,du\,dv+G_1\,dv^2,$$

гдѣ E_1, F_1, G_1 суть функціи отъ u и v. Пусть будетъ $\theta(x,y)$ какая-нибудь функція перемѣнныхъ x, y, обращающаяся въ $\theta_1(u,v)$ послѣ такой замѣны перемѣнныхъ. Доказать

$$\frac{G\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2-2F\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}+E\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2}{EG-F^2}=\frac{G_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)^2-2F_1\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\frac{\partial\theta_1}{\partial v}+E_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)^2}{E_1G_1-F_1^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G\frac{\partial\theta}{\partial x}-F\frac{\partial\theta}{\partial y}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E\frac{\partial\theta}{\partial y}-F\frac{\partial\theta}{\partial x}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_1\frac{\partial\theta}{\partial u}-F_1\frac{\partial\theta_1}{\partial v}}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_1\frac{\partial\theta_1}{\partial v}-F_1\frac{\partial\theta_1}{\partial u}}{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}\right).$$

22. Шварціанъ.— Если мы положимъ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, гдѣ x есть функція отъ t, и a, b, c, d суть какія-нибудь постоянныя, то

$$\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2;$$

здѣсь $x', x'', x''', y', y'', y'''$ обозначаютъ производныя, взятыя по перемѣнному t.

23. Пусть будетъ u и v двѣ какія-нибудь функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Положимъ

$$U=\frac{au+bv+c}{a''u+b''v+c''},\qquad V=\frac{a'u+b'v+c'}{a''u+b''v+c''},$$

гдѣ $a, b, c, \ldots, c''$ — постоянныя. Полагая

$$(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x};\qquad (U,V)=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y},$$

доказать слѣдующія равенства

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}}{(u,v)}=\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial x}}{(U,V)},$$

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)}{(u,v)}=$$

$$=\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial y}+2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)}{(U,V)},$$

и аналогичныя равенства, получающіяся отъ перестановки x и y.

[Гурса и Пенлеве (Painlevé), Comptes rendus, 1887.]

ГЛАВА III.

Формула Тэлора. — Элементарныя приложенія. Maxima и minima.

I. — ФОРМУЛА и РЯДЪ ТЭЛОРА. — ОБЩІЯ ТЕОРЕМЫ.

44. Общая формула. — Изъ алгебры извѣстно, что если $f(x)$ есть цѣлый многочленъ n-ой степени, то, каковы бы ни были числа a и h, мы всегда имѣемъ

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a); \quad (1)$$

разложеніе (1) конечно, такъ какъ всѣ производныя, начиная съ $(n+1)$-ой, равны нулю. Если бы мы захотѣли приложить эту формулу не къ многочлену, а къ какой-нибудь другой функціи $f(x)$, то мы получили бы во второй части неограниченное число членовъ. Чтобы узнать, какое значеніе мы должны приписать полученному такимъ образомъ разложенію, найдемъ предварительно выраженіе разности

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)-\ldots-\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a),$$

предполагая только, что функція $f(x)$ вмѣстѣ со своими n первыми производными $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ непрерывна при измѣненіи x отъ a до $a+h$, и что $f^{(n)}(x)$ имѣетъ производную $f^{(n+1)}(x)$ въ томъ же промежуткѣ. Предполагая, что числа a и h имѣютъ опредѣленныя значенія, положимъ

$$\left.\begin{aligned} f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots \\ +\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)+\frac{h^p}{1\cdot 2\ldots n\cdot p}P, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

гдѣ p есть какое-нибудь цѣлое положительное число. Опредѣ-

ливъ число P при помощи послѣдняго равенства, разсмотримъ вспомогательную функцію

$$\varphi(x)=f(a+h)-f(x)-\frac{a+h-x}{1}f'(x)-\frac{(a+h-x)^2}{1\cdot 2}f''(x)-\ldots$$
$$-\frac{(a+h-x)^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(x)-\frac{(a+h-x)^p}{1\cdot 2\ldots n\cdot p}P.$$

Легко видѣть, что

$$\varphi(a)=0,\quad \varphi(a+h)=0,$$

причемъ первое равенство вытекаетъ изъ формулы (2), опредѣляющей число P. Изъ сдѣланныхъ относительно $f(x)$ допущеній слѣдуетъ, что $\varphi(x)$ имѣетъ производную въ промежуткѣ $(a, a+h)$; слѣдовательно, по теоремѣ Ролля, уравненіе $\varphi'(x)=0$ должно имѣть корень $a+\theta h$, заключенный съ томъ же промежуткѣ, гдѣ θ обозначаетъ положительное число, заключающееся между нулемъ и единицею. Вычисливъ $\varphi'(x)$, послѣ приведеній, найдемъ

$$\varphi'(x)=\frac{(a+h-x)^{p-1}}{1\cdot 2\ldots n}[P-(a+h-x)^{n-p+1}f^{(n+1)}(x)].$$

Первый множитель $(a+h-x)^{p-1}$ не можетъ обратиться въ нуль при значеніи x, отличномъ отъ $a+h$; поэтому необходимо, чтобы

$$P=h^{n-p+1}(1-\theta)^{n-p+1}f^{(n+1)}(a+\theta h),\quad \text{гдѣ}\quad 0<\theta<1.$$

Замѣнивъ въ формулѣ (2) P полученнымъ значеніемъ, находимъ

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)+R_n,\quad (3)$$

гдѣ

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1\cdot 2\ldots n\cdot p}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Мы будемъ называть эту формулу (3) общею формулою Тэлора (Taylor); послѣдній членъ R_n называется остаточнымъ членомъ. Этотъ остаточный членъ зависитъ отъ цѣлаго положительнаго числа p, которое мы оставили неопредѣленнымъ. Обыкновенно для этого числа p берутъ два значенія: $p=n+1$ или $p=1$. Полагая $p=n+1$, мы найдемъ выраженіе остаточнаго члена, данное Лагранжемъ,

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\ldots n(n+1)}f^{(n+1)}(a+\theta h);$$

полагая же $p=1$, получимъ

$$R_n=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n+1)}(a+\theta h);$$

этотъ видъ остаточнаго члена принадлежитъ Коши. Понятно, что число θ, вообще, не имѣетъ одного и того же значенія въ обѣихъ формулахъ остаточнаго члена. Предполагая $f^{(n+1)}(x)$ непрерывною при $x=a$, мы можемъ также написать

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}[f^{(n+1)}(a)+\varepsilon],$$

гдѣ ε безконечно мало одновременно съ h.

Разсмотримъ остаточный членъ въ формѣ, данной Лагранжемъ. Если въ общей формулѣ (3) мы будемъ послѣдовательно полагать $n=2$, $n=3$, $n=4$, ..., то будемъ получать различныя формулы, которыя при безконечно малыхъ значеніяхъ h будутъ давать значенія, все болѣе и болѣе близкія къ $f(a+h)$. Такъ, при $n=2$ мы имѣемъ

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a+\theta h);$$

эта формула показываетъ, что разность

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)$$

есть безконечно малое второго порядка. Далѣе, разность

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)$$

есть безконечно малое третьяго порядка, и, вообще,

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\ldots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

есть безконечно малое $(n+1)$-го порядка относительно h. Но чтобы имѣть точное представленіе о приближеніи, которое мы получимъ, пренебрегая членомъ R_n, необходимо имѣть верхній предѣлъ этого остаточнаго члена. Если мы обозначимъ черезъ M верхній предѣлъ абсолютнаго значенія $f^{(n+1)}(x)$ вблизи $x=a$, напримѣръ, между $a-\eta$ и $a+\eta$, то, при $|h|<\eta$, очевидно, будемъ имѣть

$$|R_n|<\frac{|h|^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}M.$$

45. Приложеніе къ кривымъ. — Выводамъ, полученнымъ въ § 44, можно дать геометрическое истолкованіе. Предположимъ, что требуется изслѣдовать кривую C, уравненіе кото-

рой есть $y=f(x)$, вблизи точки A съ абсциссою a. Разсмотримъ вмѣстѣ съ кривою C вспомогательную кривую C', представляемую уравненіемъ

$$Y=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a).$$

Прямая $x=a+h$, параллельная оси y, встрѣчаетъ обѣ кривыя C, C' въ двухъ точкахъ M, M', лежащихъ вблизи точки A; по общей формулѣ, разность ординатъ этихъ точекъ равна

$$y-Y=\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Эта разность есть безконечно малое $(n+1)$-го порядка; поэтому, ограничиваясь достаточно малымъ промежуткомъ $(a-\eta, a+\eta)$, мы видимъ, что кривая C близка къ совпаденію съ кривою C'. Давая цѣлому числу n все большія и большія значенія, мы будемъ получать кривыя C', все менѣе и менѣе отличающіяся отъ кривой C, и, слѣдовательно, будемъ имѣть все болѣе и болѣе точное представленіе о ходѣ кривой C вблизи точки A.

Возьмемъ сначала $n=1$; кривая C' совпадаетъ тогда съ касательною къ кривой C въ точкѣ A

$$Y=f(a)+(x-a)f'(a),$$

и мы получимъ для разности ординатъ точекъ M, M' кривой и касательной, соотвѣтствующихъ одной и той же абсциссѣ $a+h$, выраженіе

$$y-Y=\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a+\theta h).$$

Предположимъ, какъ это будетъ имѣть мѣсто въ общемъ случаѣ, что $f''(a)\neq 0$; въ этомъ случаѣ предыдущую разность можно представить въ видѣ

$$y-Y=\frac{h^2}{1\cdot 2}[f''(a)+\varepsilon],$$

гдѣ ε безконечно мало вмѣстѣ съ h. Такъ какъ ε стремится къ нулю одновременно съ h, то мы можемъ взять такое положительное число η, чтобы, при измѣненіи h отъ $-\eta$ до $+\eta$, было $|\varepsilon|<|f''(a)|$. При этихъ значеніяхъ h количество $f''(a)+\varepsilon$ будетъ имѣть знакъ, одинаковый со знакомъ $f''(a)$, и, слѣдовательно, $y-Y$ будетъ имѣть также знакъ $f''(a)$. Если $f''(a)>0$, то ордината y кривой больше ординаты Y касательной, каковъ бы ни былъ знакъ h; слѣдовательно, вблизи точки A кривая C расположена надъ касательною. Напротивъ, если

$f''(a)<0$, то $y<Y$, и вблизи точки прикосновенія кривая расположена подъ касательною.

Предположимъ теперь, что $f''(a)=0$, и пусть будетъ $f^{(p)}(a)$ первая производная, которая не равна нулю при $x=a$. Тогда

$$y-Y=\frac{h^p}{1\cdot 2\ldots p}[f^{(p)}(a)+\varepsilon],$$

и, по-прежнему, можно доказать, что въ достаточно маломъ промежуткѣ $(a-\eta, a+\eta)$ разность $y-Y$ имѣетъ знакъ произведенія $h^p f^{(p)}(a)$. Если p число четное, то эта разность не мѣняетъ знака при измѣненіи h отъ $-\eta$ до $+\eta$, и вблизи точки прикосновенія кривая расположена по одну сторону касательной. Если же p нечетное, то разность $y-Y$ мѣняетъ знакъ одновременно съ h, и кривая C въ точкѣ прикосновенія пересѣкаетъ касательную. Точка A есть точка перегиба; такъ будетъ, напримѣръ, если $f'''(a)\neq 0$.

Положимъ, далѣе, $n=2$. Кривая C' есть парабола

$$Y=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a),$$

ось которой параллельна оси Oy, и мы имѣемъ

$$y-Y=\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}[f'''(a)+\varepsilon].$$

Если $f'''(a)$ не равно нулю, то при безконечно малыхъ значеніяхъ h разность $y-Y$ имѣетъ знакъ $h^3f'''(a)$, и кривая C пересѣкаетъ параболу C' въ точкѣ A. Эта парабола C' называется соприкасающеюся съ кривою C; изъ всѣхъ параболъ, представляемыхъ уравненіемъ вида

$$Y=mx^2+nx+p,$$

эта парабола наиболѣе приближается къ кривой C вблизи точки A.

46. Общій методъ разложенія. — Формула (3) даетъ разложеніе безконечно малой разности $f(a+h)-f(a)$ по возрастающимъ степенямъ h. Переходя къ болѣе общему виду разложенія, примемъ x за главное безконечно малое; чтобы избѣжать неопредѣленности, мы будемъ предполагать x положительнымъ. Пусть будетъ y другое безконечно малое, связанное съ x выраженіемъ вида

$$y=A_1x^{n_1}+A_2x^{n_2}+\ldots+x^{n_p}(A_p+\varepsilon), \qquad (4)$$

причемъ $n_1, n_2, \ldots, n_p$ суть положительныя возрастающія числа, которыя могутъ быть и не цѣлыми, $A_1, A_2, \ldots, A_p$ — постоян-

ныя, отличныя отъ нуля, и ε — третье безконечно малое. Числа $n_1, A_1, n_2, A_2, \ldots$ могутъ быть опредѣлены послѣдовательно однимъ и тѣмъ же пріемомъ. Прежде всего ясно, что n_1 равно порядку малости y относительно x, а A_1 равно предѣлу отношенія $\frac{y}{x^{n_1}}$ при $x=0$. Далѣе, мы имѣемъ

$$y - A_1 x^{n_1} = u_1 = A_2 x^{n_2} + \ldots + (A_p + \varepsilon) x^{n_p};$$

изъ этого равенства слѣдуетъ, что n_2 равно порядку малости u_1, и A_2 равно предѣлу отношенія $\frac{u_1}{x^{n_2}}$. Такимъ же образомъ мы будемъ поступать и для полученія слѣдующихъ членовъ. Отсюда видно, что безконечно малое y не можетъ имѣть двухъ существенно различныхъ разложеній вида (4); если оба разложенія имѣютъ одинаковое число членовъ, то они тождественны; если одно изъ нихъ имѣетъ p членовъ, а другое $p+q$, то члены перваго разложенія входятъ во второе. Въ частности, этотъ методъ примѣнимъ къ разложенію $f(a+h)-f(a)$ по степенямъ h, причемъ нѣтъ надобности имѣть общее выраженіе высшихъ производныхъ отъ функціи $f(x)$; напротивъ, этотъ методъ даетъ удобный способъ вычислять значенія производныхъ $f'(a), f''(a), \ldots$

Примѣры. — Разсмотримъ уравненіе

$$F(x, y) = Ax^n + By + xy\Phi(x, y) + Cx^{n+1} + \ldots + Dy^2 + \ldots = 0, \quad (5)$$

гдѣ оба коэффиціента A и B отличны отъ нуля, $\Phi(x, y)$ есть цѣлый многочленъ по x и y, и опущенные члены составляютъ два многочлена $P(x)$ и $Q(y)$, дѣлящіеся соотвѣтственно на x^{n+1} и на y^2.

Если x стремится къ нулю, то уравненіе (5) имѣетъ одинъ и только одинъ корень y, который стремится къ нулю вмѣстѣ съ x (§ 20). Чтобы приложить къ этому корню формулу Тэлора, необходимо имѣть высшія производныя, которыя можно было бы найти по общимъ формуламъ, но будетъ проще, если мы непосредственно примѣнимъ къ этому корню изложеный выше методъ. Для этого замѣтимъ, что главная часть безконечно малаго корня равна $-\frac{A}{B}x^n$. Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіи (5) положимъ

$$y = x^n\left(-\frac{A}{B} + y_1\right),$$

то, выполнивъ подстановку и раздѣливъ результатъ на x^n, мы получимъ уравненіе того же вида, которое будетъ имѣть только одинъ членъ съ y_1 въ первой степени, именно By_1,

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y_1) = A_1 x^{n_1} + By_1 + xy_1\Phi(x, y_1) \\ + C_1 x^{n_1+1} + \ldots + D_1 y_1^2 + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Если x стремится къ нулю, то уравненіе (6) имѣетъ одинъ безконечно малый корень y_1, и, слѣдовательно, главная часть безконечно малаго корня уравненія (5) равна $-\frac{A}{B}x^n$. На основаніи тѣхъ же соображеній главная часть y_1 есть $-\frac{A_1}{B}x^{n_1}$, и мы можемъ положить

$$y=-\frac{A}{B}x^n+\left(-\frac{A_1}{B}+y_2\right)x^{n+n_1},$$

гдѣ y_2 есть новое безконечно малое, главную часть котораго получимъ, положивъ въ уравненіи (6)

$$y_1=x^{n_1}\left(-\frac{A_1}{B}+y_2\right).$$

Поступая такимъ же образомъ дальше, мы найдемъ для корня y выраженіе вида

$$y=\alpha x^n+\alpha_1 x^{n+n_1}+\alpha_2 x^{n+n_1+n_2}+\ldots+(\alpha_p+\varepsilon)x^{n+n_1+\ldots+n_p},$$

которое можетъ быть продолжено сколь угодно далеко. Всѣ числа $n, n_1, n_2, \ldots, n_p$ суть числа цѣлыя, какъ это и должно быть, такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ мы находимся въ условіяхъ, при которыхъ примѣнима формула (3). Въ самомъ дѣлѣ, полученное разложеніе — то же, какое дала бы формула Тэлора, если бы мы въ ней положили $a=0$, $h=x$.

Вотъ другой примѣръ, въ которомъ показатели могутъ и не быть цѣлыми числами. Пусть будетъ

$$y=\frac{Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+\ldots}{1+B_1x^{\beta_1}+C_1x^{\gamma_1}+\ldots},$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ и $\beta_1, \gamma_1, \ldots$ образуютъ два ряда положительныхъ возрастающихъ чиселъ, и коэффиціентъ A не равенъ нулю. Ясно, что главная часть y есть Ax^α, и мы имѣемъ

$$y-Ax^\alpha=\frac{Bx^\beta+Cx^\gamma+\ldots-Ax^\alpha(B_1x^{\beta_1}+C_1x^{\gamma_1}+\ldots)}{1+B_1x^{\beta_1}+C_1x^{\gamma_1}+\ldots}.$$

Это выраженіе того же вида, какъ и первое; мы получимъ его главную часть, взявъ низшій по степени членъ въ числителѣ. Очевидно, что этотъ пріемъ дастъ намъ сколько угодно членовъ разложенія.

Пусть будетъ $f(x)$ функція, имѣющая производныя до $(n+1)$-го порядка; замѣнивъ въ формулѣ (3) a черезъ x, получимъ

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}\left[f^{(n)}(x)+\varepsilon\right],$$

гдѣ ε стремится къ нулю одновременно съ h. Предположимъ съ другой

стороны, что мы получили какимъ-нибудь способомъ для $f(x+h)$ выраженіе того же вида

$$f(x+h)=f(x)+h\varphi_1(x)+h^2\varphi_2(x)+\ldots+h^n\left[\varphi_n(x)+\varepsilon'\right].$$

Оба разложенія функціи $f(x+h)$ должны быть почленно тождественны, такъ что функціи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ будутъ отличаться отъ производныхъ отъ $f(x)$ только числовыми множителями

$$\varphi_1(x)=f'(x),\ \varphi_2(x)=\frac{f''(x)}{1\cdot 2},\ \ldots,\ \varphi_n(x)=\frac{f^{(n)}(x)}{1\cdot 2\ldots n}.$$

Это замѣчаніе бываетъ полезно при вычисленіи производныхъ отъ нѣкоторыхъ функцій. Пусть, напримѣръ, требуется вычислить производную n-го порядка функціи отъ функціи

$$y=f(u),\quad \text{гдѣ}\quad u=\varphi(x).$$

Пренебрегая членами порядка выше n-го относительно h, находимъ

$$k=\varphi(x+h)-\varphi(x)=\frac{h}{1}\varphi'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(x),$$

и такимъ же образомъ, пренебрегая членами порядка выше n-го относительно k, получаемъ

$$f(u+k)-f(u)=\frac{k}{1}f'(u)+\frac{k^2}{1\cdot 2}f''(u)+\ldots+\frac{k^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(u).$$

Если во второй части послѣдняго равенства мы замѣнимъ k черезъ

$$\frac{h}{1}\varphi'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(x)$$

и расположимъ результатъ по возрастающимъ степенямъ h, то очевидно, что опущенные члены не окажутъ никакого вліянія на коэффиціенты членовъ съ $h, h^2, \ldots, h^n$. Коэффиціентъ при h^n будетъ равенъ производной n-го порядка отъ $f[\varphi(x)]$, дѣленной на произведеніе $1\cdot 2\ldots n$, что можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$D^n\left\{f[\varphi(x)]\right\}=\left[A_1f'(u)+A_2\frac{f''(u)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{A_n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(u)\right]1\cdot 2\ldots n,$$

гдѣ A_i обозначаетъ коэффиціентъ при h^n въ разложеніи

$$\left[\frac{h}{1}\varphi'(x)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(x)\right]^i.$$

Дальнѣйшія подробности относительно этого метода читатель найдетъ въ Cours d'Analyse Эрмита (Hermite) (стр. 59).

47. Неопредѣленныя выраженія. — Пусть будутъ $f(x)$ и $\varphi(x)$ двѣ функціи, обращающіяся въ нуль при одномъ и томъ же значеніи перемѣннаго $x=a$. Разысканіе предѣла, къ которому стремится отношеніе

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$$

при h, стремящемся къ нулю, есть лишь частный случай задачи о нахожденіи предѣла отношенія двухъ безконечно малыхъ*). Этотъ предѣлъ получается непосредственно, если извѣстны

*) См. также § 7.

главныя части обоихъ безконечно малыхъ; такъ будетъ, напримѣръ, въ томъ случаѣ, если формула (3) примѣнима вблизи точки a къ каждой изъ функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$. Предположимъ, что первою производною отъ $f(x)$, не обращающеюся въ нуль при $x=a$, будетъ производная p-го порядка: $f^{(p)}(a)$, и что первою производною отъ $\varphi(x)$, не обращающеюся въ нуль при $x=a$, будетъ производная q-го порядка: $\varphi^{(q)}(a)$. Приложивъ формулу (3) къ каждой изъ функцій $f(x)$, $\varphi(x)$ и раздѣливъ полученные результаты, найдемъ

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=h^{p-q}\,\frac{1\cdot 2\ldots q}{1\cdot 2\ldots p}\,\frac{f^{(p)}(a)+\varepsilon}{\varphi^{(q)}(a)+\varepsilon'},$$

гдѣ ε, ε'—два безконечно малыхъ. Изъ этой формулы очевидно, что при h, стремящемся къ нулю, разсматриваемое отношеніе неопредѣленно возрастаетъ, если q больше p, и стремится къ нулю, если q меньше p; при $q=p$ предыдущее отношеніе стремится къ конечному предѣлу $\dfrac{f^{(p)}(a)}{\varphi^{(p)}(a)}$.

Неопредѣленность такого рода встрѣчается иногда въ уравненіяхъ касательной къ кривой. Пусть будутъ

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t)$$

формулы, дающія координаты любой точки кривой C, выраженныя въ функціи параметра t. Согласно § 5, уравненія касательной къ этой кривой въ точкѣ M, соотвѣтствующей значенію t_0 параметра, будутъ

$$\frac{X-f(t_0)}{f'(t_0)}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

Эти уравненія обращаются въ тожества, если три производныхъ $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ одновременно равны нулю при $t=t_0$. Чтобы устранить это затрудненіе, возвратимся къ самому выводу уравненій касательной къ кривой. Пусть будетъ M' точка кривой C, лежащая вблизи точки M, и (t_0+h) — соотвѣтствующее ей значеніе параметра; уравненія хорды MM' будутъ

$$\frac{X-f(t_0)}{f(t_0+h)-f(t_0)}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}.$$

Для большей общности мы предположимъ, что всѣ производныя отъ функцій $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ порядка ниже p-го ($p>1$) будутъ равны нулю при $t=t_0$, но что, по крайней мѣрѣ, одна изъ производныхъ p-го порядка, напримѣръ, $f^{(p)}(t_0)$ не равна нулю. Раздѣливъ всѣ знаменатели предыдущихъ уравненій на h^p и прилагая къ нимъ общую формулу (3), мы можемъ представить эти уравненія въ видѣ

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)+\varepsilon}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi^{(p)}(t_0)+\varepsilon'}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)+\varepsilon''},$$

гдѣ ε, ε', ε''— три безконечно малыхъ. Если теперь мы будемъ приближать h къ нулю, то эти уравненія въ предѣлѣ обратятся въ

$$\frac{X-f(t_0)}{f^{(p)}(t_0)}=\frac{Y-\varphi(t_0)}{\varphi^{(p)}(t_0)}=\frac{Z-\psi(t_0)}{\psi^{(p)}(t_0)}$$

и не представятъ болѣе никакой неопредѣленности.

Тѣ точки кривой C, въ которыхъ появляется такого рода неопредѣленность, будутъ, вообще, особыми точками, въ которыхъ кривая имѣетъ нѣкоторыя особенности въ формѣ. Такъ, плоская кривая, представляемая уравненіями

$$x=t^2, \quad y=t^3,$$

проходитъ черезъ начало координатъ и имѣетъ въ этой точкѣ $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0$. Касательною въ началѣ координатъ служитъ ось x, и начало есть точка возврата перваго рода.

48. Рядъ Тэлора. — Если функція $f(x)$ имѣетъ въ промежуткѣ $(a, a+h)$ неограниченное число производныхъ, то мы можемъ взять число n, входящее въ формулу (3), сколь угодно большимъ. Если при неограниченномъ возрастаніи n остаточный членъ R_n стремится къ нулю, то мы получаемъ формулу

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)+\ldots, \quad (7)$$

выражающую, что рядъ

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)+\ldots$$

— сходящійся и имѣетъ суммою $f(a+h)$. Формула (7) и есть формула Тэлора въ тѣсномъ смыслѣ, но она законна только въ томъ случаѣ, если при неограниченномъ возрастаніи n остаточный членъ R_n стремится къ нулю, тогда какъ формула (3) предполагаетъ только существованіе производныхъ до $(n+1)$-го порядка. Замѣняя a черезъ x, мы можемъ представить формулу (7) въ видѣ

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(x)+\ldots;$$

полагая же $a=0$ и замѣняя h черезъ x, получимъ

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(0)+\ldots \quad (8)$$

Послѣдняя формула иногда называется также формулою Маклорена (Maclaurin); но должно замѣтить, что всѣ эти различныя формулы въ сущности эквивалентны. Тогда какъ формула (8) даетъ разложеніе функціи отъ x по степенямъ x, формула (7) даетъ разложеніе функціи отъ h по степенямъ h: достаточно простой замѣны обозначеній, чтобы перейти отъ одной формулы къ другой.

Есть одинъ весьма общій случай, когда можно быть увѣреннымъ, что при неограниченномъ возрастаніи n остаточный членъ R_n навѣрное стремится къ нулю; это тотъ случай, когда при

измѣненіи x въ промежуткѣ $(a,\ a+h)$ абсолютное значеніе производной любого порядка остается меньшимъ опредѣленнаго числа M. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ остаточный членъ въ формѣ, данной Лагранжемъ, имѣемъ

$$|R_n|<M\frac{|h|^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)},$$

и очевидно, что правая часть этого неравенства есть общій членъ сходящагося ряда. Такъ будетъ, напримѣръ, для функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$. Всѣ производныя отъ e^x равны e^x и, слѣдовательно, имѣютъ всѣ одинъ и тотъ же maximum въ данномъ промежуткѣ; что касается производныхъ отъ $\sin x$ и $\cos x$, то ихъ абсолютное значеніе никогда не превосходитъ единицы. Поэтому формула (7) приложима къ этимъ функціямъ при всѣхъ значеніяхъ a и h. Остановимся на формулѣ (8); если $f(x)=e^x$, то

$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad \ldots,\quad f^{(n)}(0)=1,\ldots,$$

и мы получаемъ формулу

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}+\ldots, \qquad (9)$$

примѣнимую при всѣхъ положительныхъ или отрицательныхъ значеніяхъ x. Если a есть нѣкоторое положительное число, то $a^x=e^{x\log a}$, и, слѣдовательно,

$$a^x=1+\frac{x\log a}{1}+\frac{(x\log a)^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{(x\log a)^n}{1\cdot 2\ldots n}+\ldots \qquad (10)$$

Положимъ $f(x)=\sin x$; здѣсь высшія производныя образуютъ періодическую послѣдовательность изъ четырехъ членовъ $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, и значенія этихъ производныхъ при $x=0$ также образуютъ періодическую послѣдовательность 1, 0, -1, 0. Такимъ образомъ мы имѣемъ для всякаго положительнаго или отрицательнаго значенія x

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}+\ldots, \qquad (11)$$

и точно также для $\cos x$ найдемъ

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots(-1)^n\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}+\ldots \qquad (12)$$

Возвратимся къ общему случаю. Изслѣдованіе остаточнаго члена R_n рѣдко бываетъ такимъ простымъ, какъ въ предыдущихъ примѣрахъ; но это изслѣдованіе можно облегчить, замѣтивъ, что если остаточный членъ стремится къ нулю, то рядъ

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a)$$

необходимо сходящійся. Вообще, прежде чѣмъ изслѣдовать R_n, удобнѣе убѣдиться въ сходимости ряда; если для данныхъ значеній a и h этотъ рядъ расходящійся, то продолжать дальше изслѣдованіе безполезно: можно утверждать, что, при неограниченномъ возрастаніи n, R_n къ нулю не стремится.

49. Разложеніе $\log(1+x)$. — Функція $\log(1+x)$ непрерывна и имѣетъ неограниченное число производныхъ, если только x больше -1. Ея производныя имѣютъ слѣдующія выраженія:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},$$

$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{(1+x)^n},$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{1\cdot 2\ldots n}{(1+x)^{n+1}}.$$

Изслѣдуемъ, при какихъ значеніяхъ x можно приложить къ этой функціи формулу Маклорена (3). Напишемъ сначала формулу въ ея общемъ видѣ, съ остаточнымъ членомъ,

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n.$$

Остаточный членъ R_n стремится къ нулю только въ томъ случаѣ, если рядъ

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

будетъ сходящимся; это будетъ имѣть мѣсто при значеніяхъ x, заключающихся между -1 и $+1$, включая сюда и верхній предѣлъ $+1$. Предполагая, что перемѣнное x заключается между этими предѣлами, возьмемъ остаточный членъ въ формѣ, данной Коши,

$$R_n=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1\cdot 2\ldots n}\frac{(-1)^n 1\cdot 2\ldots n}{(1+\theta x)^{n+1}}=(-1)^n\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

или

$$R_n=(-1)^n x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\frac{1}{1+\theta x}.$$

Предположимъ сначала $|x|<1$. Тогда первый множитель x^{n+1} стремится къ нулю; второй множитель $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$, какъ при положительномъ, такъ и при отрицательномъ x, меньше единицы, такъ какъ числитель меньше знаменателя; послѣдній множи-

тель остается конечнымъ, такъ какъ онъ меньше $\frac{1}{1-|x|}$. Такимъ образомъ, при неограниченномъ возрастаніи n, остаточный членъ R_n стремится къ нулю. При $x=1$ изъ предыдущаго вида остаточнаго члена нельзя вывести никакихъ заключеній, но взявъ остаточный членъ въ формѣ, данной Лагранжемъ, при $x=1$ будемъ имѣть

$$R_n=(-1)^n\frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+\theta)^{n+1}},$$

и очевидно, что, при неограниченномъ возрастаніи n, R_n стремится къ нулю. Изслѣдованіе остаточнаго члена при $x=-1$ безполезно, такъ какъ въ этомъ случаѣ рядъ, очевидно, расходящійся. Такимъ образомъ при x, заключающемся между $+1$ и -1, мы имѣемъ

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (13)$$

Формула остается примѣнимою и при $x=1$; это даетъ намъ интересное соотношеніе

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots \qquad (14)$$

Такъ какъ формула (13) примѣнима только при $x\leqq 1$, то она не позволяетъ вычислять логариѳмы цѣлыхъ чиселъ. Замѣнимъ въ этой формулѣ x черезъ $-x$; новая формула

$$\log(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots \qquad (13)'$$

пригодна для значеній x, заключающихся между -1 и $+1$; вычитая почленно (13)′ изъ (13), находимъ

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right). \qquad (15)$$

При измѣненіи x отъ 0 до 1, раціональная дробь $\frac{1+x}{1-x}$ все время возрастаетъ отъ $+1$ до $+\infty$; такимъ образомъ можно вычислить логариѳмы всѣхъ цѣлыхъ чиселъ. Но можно получить болѣе сходящійся рядъ, вычисляя разность логариѳмовъ двухъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ; для этого положимъ

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+1}{N},\quad \text{или}\quad x=\frac{1}{2N+1};$$

тогда предыдущая формула принимаетъ видъ

$$\log(N+1)-\log N=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\ldots\right],$$

и мы имѣемъ во второй части очень быстро сходящійся рядъ, если только число N достаточно велико.

Примѣчаніе.—Приложимъ къ функціи $\log(1+x)$ общую формулу (3), положивъ въ ней $a=0, h=x, n=1$; взявъ остаточный членъ въ формѣ, данной Лагранжемъ, получимъ

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}.$$

Замѣняя въ послѣдней формулѣ x черезъ $\frac{1}{n}$, найдемъ

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\theta_n}{2n^2},$$

гдѣ θ_n есть положительное число, меньшее единицы. Отсюда можно вывести нѣсколько интересныхъ слѣдствій.

1°. Такъ какъ гармоническій рядъ — расходящійся, то сумма

$$\Sigma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

возрастаетъ вмѣстѣ съ n, но разность $\Sigma_n-\log n$ стремится къ конечному предѣлу. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ эту разность въ видѣ

$$\left(1-\log\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{p}-\log\frac{p+1}{p}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)+\log\frac{n+1}{n}.$$

Но $\frac{1}{p}-\log\frac{p+1}{p}$ есть общій членъ сходящагося ряда, такъ какъ, по предыдущей формулѣ, мы имѣемъ соотношеніе

$$\frac{1}{p}-\log\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{\theta_p}{2p^2},$$

которое показываетъ, что этотъ членъ меньше общаго члена сходящагося ряда $\sum\frac{1}{p^2}$. При неограниченномъ возрастаніи n количество

$$\log\frac{n+1}{n}=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

стремится къ нулю. Такимъ образомъ разсматриваемая разность стремится къ конечному предѣлу, носящему названіе Эйлерова постояннаго. Его значеніе, съ точностью до двадцатаго десятичнаго знака, равно $C=0{,}57721566490153286060$.

2°. Разсмотримъ выраженіе

$$\Sigma=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p},$$

гдѣ n и p — два цѣлыхъ неопредѣленно возрастающихъ числа. Мы можемъ представить это выраженіе въ видѣ

$$\Sigma=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right);$$

но

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+p}=\log(n+p)+\varrho_{n+p},$$

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\log n+\varrho_n,$$

причемъ ϱ_{n+p} и ϱ_n при неопредѣленномъ возрастаніи n и p стремятся къ одному и тому же предѣлу C. Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\Sigma=\log\left(1+\frac{p}{n}\right)+\varrho_{n+p}-\varrho_n.$$

Но разность $\varrho_{n+p}-\varrho_n$ стремится къ нулю; это показываетъ, что сумма Σ имѣетъ предѣлъ только въ томъ случаѣ, если отношеніе $\frac{p}{n}$ само

имѣетъ предѣлъ. Если это отношеніе имѣетъ предѣломъ α, то сумма Σ имѣетъ предѣломъ $\log(1+\alpha)$.

Напримѣръ, положивъ $p=n$, найдемъ, что сумма

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

имѣетъ предѣломъ $\log 2$.

50. Разложеніе $(1+x)^m$. — Функція $(1+x)^m$ имѣетъ при всякомъ m вполнѣ опредѣленный смыслъ, если только $1+x$ положительно; она имѣетъ безконечную послѣдовательность производныхъ, которыя всѣ будутъ непрерывными функціями отъ x при положительномъ $1+x$, такъ какъ всѣ выраженія ихъ будутъ одинаковаго вида

$$\begin{aligned}
f'(x)&=m(1+x)^{m-1},\\
f''(x)&=m(m-1)(1+x)^{m-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(x)&=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},\\
f^{(n+1)}(x)&=m(m-1)\ldots(m-n)(1+x)^{m-n-1}.
\end{aligned}$$

Примѣняя къ этой функціи общую формулу (3), находимъ

$$\begin{aligned}
(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots\\
+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n+R_n.
\end{aligned}$$

Для того чтобы при неограниченномъ возрастаніи n остаточный членъ R_n стремился къ нулю, прежде всего необходимо, чтобы рядъ, общій членъ котораго имѣетъ выраженіе

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n,$$

былъ сходящимся.

Но въ послѣднемъ рядѣ отношеніе каждаго члена къ предыдущему равно $\frac{m-n+1}{n}x$, и, при неограниченномъ возрастаніи n, это отношеніе стремится къ $-x$. Такимъ образомъ рядъ можетъ быть сходящимся только при $|x|\leqq 1$. Разумѣется, здѣсь исключается тотъ случай, когда m есть цѣлое положительное число; мы имѣемъ тогда элементарную формулу бинома. Ограничимся тѣмъ случаемъ, когда $|x|<1$. Чтобы показать, что остаточный членъ стремится къ нулю, представимъ его въ видѣ, данномъ Коши,

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1\cdot 2\ldots n}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{m-1}.$$

Первый множитель $\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1\cdot 2\dots n}x^{n+1}$ стремится къ нулю, какъ общій членъ сходящагося ряда; множитель $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ меньше единицы; наконецъ, послѣдній множитель $(1+\theta x)^{m-1}$ меньше нѣкотораго опредѣленнаго предѣла. Въ самомъ дѣлѣ. если $m-1>0$, то мы имѣемъ

$$(1+\theta x)^{m-1}<2^{m-1};$$

если же $m-1<1$, то $(1+\theta x)^{m-1}<(1-|x|)^{m-1}$. Такимъ образомъ при всякомъ значеніи x, заключающемся между -1 и $+1$, мы имѣемъ разложеніе

$$\left.\begin{aligned}(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\dots\\ +\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\dots n}x^n+\dots\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Случай $x=\pm 1$ мы разсмотримъ ниже.

Такимъ же образомъ можно вывести еще слѣдующія формулы

$$\operatorname{arc\,sin} x = x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\dots$$
$$+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots,$$
$$\operatorname{ar\,c\,tg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots.$$

Ниже эти формулы будутъ получены болѣе прямымъ путемъ; онѣ примѣнимы при значеніяхъ x, заключающихся между -1 и $+1$.

За исключеніемъ предыдущихъ примѣровъ (и нѣкоторыхъ другихъ) во всѣхъ остальныхъ случаяхъ изслѣдованіе остаточнаго члена, вообще, представляетъ большія трудности вслѣдствіе возрастающей сложности высшихъ производныхъ. Поэтому на первый взглядъ могло бы показаться, что примѣненія формулы Тэлора къ разложенію функцій въ ряды должны быть очень ограничены. Но такой взглядъ былъ бы совершенно невѣренъ; напротивъ, въ современномъ анализѣ эти разложенія играютъ основную роль. Но чтобы оцѣнить все ихъ значеніе, нужно стать на другую точку зрѣнія и изучать свойства цѣлыхъ рядовъ на нихъ самихъ, независимо отъ ихъ происхожденія. Съ этого рода изслѣдованіями мы часто будемъ имѣть дѣло во многихъ изъ послѣдующихъ главъ.

Здѣсь мы замѣтимъ только слѣдующее. Рядъ

$$f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\dots+\frac{x^n}{1\cdot 2\dots n}f^{(n)}(0)+\dots$$

можетъ быть сходящимся и тѣмъ не менѣе не представлять той функціи $f(x)$, отъ которой онъ происходитъ. Коши далъ слѣдующій примѣръ такого ряда. Пусть будетъ $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$; тогда $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, и, вообще, n-ая производная будетъ имѣть видъ

$$f^{(n)}(x)=\frac{P}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

гдѣ P обозначаетъ многочленъ. При $x=0$ всѣ эти производныя будутъ равны нулю, такъ какъ частное отъ дѣленія $e^{-\frac{1}{x^2}}$ на любую положительную степень x стремится къ нулю вмѣстѣ съ x; въ самомъ дѣлѣ, положивъ $x=\frac{1}{z}$, получимъ

$$\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{z^m}{e^{z^2}},$$

а извѣстно, что, какъ бы велико ни было m, $\frac{e^{z^2}}{z^m}$ неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ z.

Съ другой стороны, пусть будетъ $\varphi(x)$ функція, къ которой примѣнима формула (8),

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1}\varphi'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}\varphi''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(0)+\ldots$$

Полагая $F(x)=\varphi(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}$, получимъ

$$F(0)=\varphi(0),\quad F'(0)=\varphi'(0),\quad \ldots,\quad F^{(n)}(0)=\varphi^{(n)}(0),$$

такъ что разложеніе $F(x)$ по формулѣ Маклорена было бы тождественно съ предыдущимъ разложеніемъ функціи $\varphi(x)$. Слѣдовательно, сумма полученнаго такимъ образомъ ряда представляетъ функцію, совершенно отличную отъ той, отъ которой этотъ рядъ происходитъ.

Вообще, очевидно, что если двѣ различныхъ функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ будутъ при $x=0$ равны между собою вмѣстѣ со своими производными, и если одна изъ нихъ разлагается въ рядъ Маклорена, то другая уже не можетъ разлагаться въ такой рядъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ коэффиціенты разложенія были бы для обѣихъ функцій одинаковы.

51. Распространеніе на функціи многихъ перемѣнныхъ.— Пусть будетъ $\omega=f(x, y, z)$ функція трехъ перемѣнныхъ; будемъ искать разложеніе $f(x+h, y+k, z+l)$ по степенямъ h, k, l, соединяя въ одну группу члены одной и той же степени. Коши приводитъ эту задачу къ предыдущей слѣдующимъ искус-

ственнымъ пріемомъ. Дадимъ x, y, z, h, k, l постоянныя значенія и положимъ

$$\varphi(t)=f(x+kt,\ y+ht,\ z+lt),$$

гдѣ t — вспомогательное перемѣнное.

Функція $\varphi(t)$ зависитъ только отъ одного независимаго перемѣннаго t; если мы приложимъ къ ней общую формулу Тэлора съ остаточнымъ членомъ, то найдемъ

$$\left.\begin{aligned}\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{t}{1}\varphi'(0)+\frac{t^2}{1\cdot 2}\varphi''(0)+\ldots\\ +\frac{t^n}{1\cdot 2\ldots n}\varphi^{(n)}(0)+\frac{t^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(\theta t),\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

гдѣ $\varphi(0), \varphi'(0), \ldots, \varphi^{(n)}(0)$ представляютъ значенія функціи $\varphi(t$ и ея производныхъ при $t=0$, а $\varphi^{(n+1)}(\theta t)$ — значеніе $(n+1)$-ой производной при значеніи θt, причемъ θ заключается между нулемъ и единицею. Но мы можемъ разсматривать $\varphi(t)$, какъ сложную функцію отъ t, $\varphi(t)=f(u, v, w)$, причемъ посредствующія функціи

$$u=x+ht,\quad v=y+kt,\quad w=z+lt$$

будутъ линейными функціями отъ t. По § 17 выраженіе дифференціала m-го порядка, $d^m\varphi$, будетъ такое же, какъ если бы u, v, w были независимыми перемѣнными; такимъ образомъ мы получаемъ символическое равенство

$$d^m\varphi=\left(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw\right)^{(m)}=dt^m\left(\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial v}k+\frac{\partial f}{\partial w}l\right)^{(m)},$$

или, раздѣливъ на dt^m,

$$\varphi^{(m)}(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}h+\frac{\partial f}{\partial v}k+\frac{\partial f}{\partial w}l\right)^{(m)}.$$

При $t=0$, u, v, w обращаются соотвѣтственно въ x, y, z; пользуясь прежнимъ символическимъ обозначеніемъ, мы представимъ предыдущее равенство при $t=0$ въ видѣ

$$\varphi^{(m)}(0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(m)}.$$

Точно также будемъ имѣть

$$\varphi^{(n+1)}(\theta t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n+1)},$$

причемъ въ послѣдней формулѣ послѣ разложенія x, y, z должны быть соотвѣтственно замѣнены черезъ

$$x+\theta ht,\quad y+\theta kt,\quad z+\theta lt.$$

Полагая теперь въ формулѣ (17) $t=1$, получимъ

$$\left.\begin{aligned} f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{1\cdot 2\dots n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n)} + R_n. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Остаточный членъ R_n имѣетъ выраженіе

$$R_n = \frac{1}{1\cdot 2\dots(n+1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n+1)},$$

причемъ послѣ раскрытія символа x, y, z должны быть замѣнены черезъ $x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l$.

Формула (18) вполнѣ аналогична общей формулѣ (3). Если при данныхъ значеніяхъ x, y, z, h, k, l остаточный членъ стремится къ нулю при неограниченномъ возрастаніи n, то мы будемъ имѣть разложеніе въ рядъ функціи $f(x+h, y+k, z+l)$, причемъ всѣ члены этого ряда будутъ однородными многочленами по h, k, l. Но, вообще, по выраженія для R_n очень трудно опредѣлить, когда этотъ остаточный членъ стремится къ нулю.

52. Изъ формулы (18) можно вывести такія же слѣдствія, какія въ случаѣ одного независимаго перемѣннаго мы получили изъ формулы (3). Напримѣръ, пусть будетъ $z=f(x, y)$ уравненіе поверхности S. Если вблизи точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ непрерывна вмѣстѣ со своими частными производными до нѣкотораго порядка, то по формулѣ (18) найдемъ

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}h + \frac{\partial f}{\partial y_0}k\right) + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}h + \frac{\partial f}{\partial y_0}k\right)^{(2)} + \dots + R_n.$$

Ограничиваясь въ правой части сначала двумя первыми членами, потомъ тремя и т. д., мы получимъ уравненіе плоскости, затѣмъ уравненіе параболоида и т. д.; вблизи точки (x_0, y_0) всѣ эти поверхности будутъ очень мало различаться отъ разсматриваемой поверхности S. Эта плоскость будетъ не что иное, какъ касательная плоскость; точно также, изъ всѣхъ параболоидовъ, представляемыхъ уравненіемъ вида

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

этотъ параболоидъ вблизи точки (x_0, y_0) будетъ наиболѣе приближаться къ поверхности S.

Формулою (18) пользуются также при разысканіи предѣльныхъ значеній функцій, принимающихъ неопредѣленный видъ. Пусть будутъ $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ двѣ функціи, которыя при

$x=a$, $y=b$ одновременно обращаются въ нуль, но остаются непрерывными вмѣстѣ со своими частными производными до нѣкотораго порядка вблизи этой точки $x=a$, $y=b$. Найдемъ предѣлъ, къ которому стремится частное

$$\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)},$$

когда x и y стремятся соотвѣтственно къ a и b. Предположимъ сначала, что четыре производныхъ перваго порядка $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ не равны одновременно нулю. Мы можемъ написать

$$\frac{f(a+h, y+k)}{\varphi(a+h, y+k)} = \frac{h\left(\frac{\partial f}{\partial a}+\varepsilon\right)+k\left(\frac{\partial f}{\partial b}+\varepsilon'\right)}{h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\varepsilon_1\right)+k\left(\frac{\partial \varphi}{\partial b}+\varepsilon_1'\right)},$$

причемъ ε, ε', ε_1, ε_1' стремятся къ нулю вмѣстѣ съ h и k. Если точка (x, y) стремится къ (a, b), то h и k стремятся къ нулю; предположимъ, что отношеніе $\frac{k}{h}$ стремится при этомъ къ предѣлу α, т.-е. что точка (x, y) описываетъ кривую, имѣющую въ точкѣ (a, b) опредѣленную касательную. Раздѣливъ оба члена предыдущаго отношенія на h, найдемъ, что дробь $\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$ имѣетъ предѣломъ

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial a}+\alpha\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial b}}.$$

Мы видимъ, что предѣлъ этой дроби, вообще, зависитъ отъ α, т.-е. отъ того, какимъ образомъ перемѣнныя x и y приближаются къ своимъ предѣламъ a и b. Этотъ предѣлъ не будетъ зависѣть отъ α только въ томъ случаѣ, если

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b}-\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a}=0,$$

чего, вообще, не будетъ.

Если при $x=a$, $y=b$ всѣ производныя $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ равны нулю, то взявъ въ формулѣ (18) члены второго порядка, получимъ

$$\frac{f(a+h, b+k)}{\varphi(a+h, b+k)} = \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}+\varepsilon\right)h^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}+\varepsilon'\right)hk+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}+\varepsilon''\right)k^2}{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}+\varepsilon_1\right)h^2+2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a\,\partial b}+\varepsilon'_1\right)hk+\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}+\varepsilon''_1\right)k^2},$$

гдѣ ε, ε', ε'', ε_1, ε_1', ε_1'' — безконечно малыя количества. Обозначая, по-прежнему, предѣлъ отношенія $\frac{k}{h}$ черезъ α, найдемъ, что предѣлъ разсматриваемой дроби будетъ

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}\alpha^2}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a\,\partial b}\alpha+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}\alpha^2};$$

этотъ предѣлъ, вообще, зависитъ отъ α.

II. — ОСОБЫЯ ТОЧКИ. — MAXIMA и MINIMA.

53. Особыя точки. — Если координаты (x_0, y_0) какой-нибудь точки M_0 плоской кривой C, представляемой уравненіемъ $F(x,y)=0$, не обращаютъ одновременно въ нуль обѣихъ частныхъ производныхъ $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, то, какъ мы видѣли выше (§ 22), черезъ точку M_0 проходитъ единственная вѣтвь кривой C; касательная къ этой вѣтви имѣетъ уравненіе

$$(X-x_0)\frac{\partial F}{\partial x_0}+(Y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y_0}=0,$$

гдѣ черезъ $\frac{\partial^{p+q}F}{\partial x_0^p\,\partial y_0^q}$ мы обозначаемъ, вообще, то значеніе, которое принимаетъ при $x=x_0$, $y=y_0$ производная $\frac{\partial^{p+q}F}{\partial x^p\,\partial y^q}$. Если одновременно $\frac{\partial F}{\partial x_0}=\frac{\partial F}{\partial y_0}=0$, то точка (x_0, y_0) есть особая точка кривой. Предположимъ, что три частныхъ производныхъ второго порядка отъ F не равны нулю при $x=x_0$, $y=y_0$ и что эти производныя вмѣстѣ съ производными третьяго порядка непрерывны вблизи точки (x_0, y_0). Въ этомъ случаѣ уравненіе кривой C можно представить въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} 0=F(x,y)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(y-y_0)^2\right]\\ +\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)\right]^{(3)}_{\substack{x_0+\theta(x-x_0),\\ y_0+\theta(y-y_0)}}\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

причемъ въ производныхъ третьяго порядка x и y должны быть замѣнены соотвѣтственно черезъ $x_0+\theta(x-x_0)$ и $y_0+\theta(y-y_0)$. Мы можемъ предположить, что производная $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}$ не равна нулю такъ какъ достаточно измѣнить направленіе осей координатъ,

чтобы придти къ этому случаю. Положивъ въ уравненіи (19) $y-y_0=t(x-x_0)$ и раздѣливъ результатъ на $(x-x_0)^2$, получимъ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}+2t\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}+t^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}+(x-x_0)\,P(x-x_0,\,t)=0, \qquad (20)$$

гдѣ $P(x-x_0,\,t)$ обозначаетъ функцію, которая остается конечною, когда x стремится къ x_0. Пусть будутъ t_1 и t_2 два корня уравненія

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}+2t\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}+t^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}=0.$$

Если эти корни дѣйствительны, т.-е. если

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)^2>\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2},$$

то уравненіе (20) можно также представить въ видѣ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(t-t_1)(t-t_2)+(x-x_0)\,P=0.$$

При $x=x_0$ это уравненіе имѣетъ два различныхъ корня $t=t_1$, $t=t_2$. Если x стремится къ x_0, то уравненіе имѣетъ два корня, стремящихся соотвѣтственно къ t_1 и t_2; это можно доказать, повторивъ тѣ разсужденія, которыми мы пользовались при доказательствѣ существованія неявныхъ функцій. Полагая, напримѣръ, $t=t_1+u$, мы получимъ уравненіе между x и u

$$u(t_1-t_2+u)+(x-x_0)\,Q(x,\,u)=0,$$

причемъ $Q(x,\,u)$ остается конечнымъ, когда x стремится къ x_0, а u — къ нулю. Предположимъ, для опредѣленности, что $t_1-t_2>0$, и обозначимъ черезъ M верхній предѣлъ абсолютнаго значенія $Q(x,\,u)$ и черезъ m — нижній предѣлъ количества t_1-t_2+u при измѣненіяхъ x отъ x_0-h до x_0+h и u отъ $-h$ до $+h$, гдѣ h есть положительное число, меньшее t_1-t_2. Пусть будетъ ε положительное число, меньшее h, и η — другое положительное число, удовлетворяющее неравенствамъ

$$\eta<h, \quad \eta<\frac{m}{M}\varepsilon.$$

Если въ предыдущемъ уравненіи мы дадимъ перемѣнному x такое значеніе, чтобы $|x-x_0|$ было меньше η, то результаты подстановки $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$ вмѣсто u получатся съ разными знаками; слѣдовательно, это уравненіе имѣетъ корень, стремящійся къ нулю, когда x стремится къ x_0, и, слѣдовательно, уравненіе (19) имѣетъ корнемъ выраженіе вида

$$y=y_0+(x-x_0)(t_1+\alpha),$$

причемъ α безконечно мало вмѣстѣ съ $x-x_0$. Это показываетъ, что черезъ точку (x_0, y_0) проходитъ вѣтвь кривой C, касающаяся прямой

$$y-y_0=t_1(x-x_0).$$

Такимъ же образомъ мы можемъ убѣдиться, что черезъ точку (x_0, y_0) проходитъ другая вѣтвь кривой, касающаяся прямой $y-y_0=t_2(x-x_0)$. Точка M_0 есть двойная точка, и мы получимъ уравненіе двухъ касательныхъ въ этой двойной точкѣ, приравнявъ нулю совокупность членовъ второй степени по $(x-x_0)$, $(y-y_0)$ въ уравненіи (19).

Если $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} < 0$, то точка (x_0, y_0) есть двойная уединенная точка. Внутри круга достаточно малаго радіуса съ центромъ въ точкѣ M_0 первая часть $F(x, y)$ уравненія обращается въ нуль только для самой точки M_0. Въ самомъ дѣлѣ, принявъ за координаты какой-нибудь точки (x, y), лежащей вблизи M_0, выраженія

$$x=x_0+\rho\cos\varphi, \quad y=y_0+\rho\sin\varphi,$$

получимъ

$$F(x, y)=\frac{\rho^2}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}\sin^2\varphi+\rho L\right]$$

причемъ L имѣетъ конечное значеніе, когда ρ стремится къ нулю. Пусть будетъ H верхній предѣлъ абсолютнаго значенія L, когда ρ остается меньшимъ нѣкотораго положительнаго числа r. При измѣненіи φ отъ 0 до 2π трехчленъ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}\sin^2\varphi$$

сохраняетъ постоянный знакъ, такъ какъ онъ имѣетъ мнимые корни; пусть будетъ m нижній предѣлъ его абсолютнаго значенія. Очевидно, что ни для какой точки, взятой внутри круга радіуса $\rho<\frac{m}{H}$, коэффиціентъ при ρ^2 не можетъ обратиться въ нуль; такимъ образомъ внутри этого круга уравненіе $F(x, y)=0$ не имѣетъ никакого рѣшенія, кромѣ $\rho=0$, т. е. $x=x_0$, $y=y_0$.

Если $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}=0$, то обѣ касательныя въ двойной точкѣ приходятъ въ совпаденіе, и въ общемъ случаѣ существуютъ двѣ вѣтви кривой, касающіяся одной и той же прямой и образующія точку возврата. Полный разборъ этого случая требуетъ очень тонкаго изслѣдованія, которое мы вы-

полнимъ ниже. Замѣтимъ только, что разнообразіе возможныхъ случаевъ вида кривой здѣсь гораздо шире, чѣмъ въ двухъ ранѣе изслѣдованныхъ случаяхъ, какъ это видно изъ слѣдующихъ примѣровъ.

Кривая $y^2=x^3$ имѣетъ въ началѣ координатъ точку возврата перваго вида, съ двумя вѣтвями, касающимися оси x и расположенными направо отъ Oy по обѣ стороны касательной. Кривая $y^2-2x^2y+x^4-x^5=0$ имѣетъ въ началѣ координатъ точку возврата второго вида; двѣ вѣтви кривой, касающіяся оси x, расположены здѣсь по одну сторону касательной. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе кривой можно представить въ видѣ

$$y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}},$$

и при очень маломъ x оба значенія y имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, но они дѣйствительны только въ томъ случаѣ, если x положительно. Кривая

$$x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2=0$$

состоитъ изъ двухъ вѣтвей, не имѣющихъ никакихъ особенностей; обѣ вѣтви касаются въ началѣ координатъ оси x. Въ самомъ дѣлѣ, изъ этого уравненія получимъ

$$y=\frac{3x^2\pm x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2};$$

вѣтви кривой соотвѣтствуютъ двумъ знакамъ передъ корнемъ: онѣ не имѣютъ въ началѣ координатъ никакихъ особенностей.

Можетъ также случиться, что кривая состоитъ изъ двухъ сливающихся вѣтвей, какъ, напримѣръ, кривая, представляемая уравненіемъ

$$F(x, y)=y^2-2x^2y+x^4=0;$$

при передвиженіи точки (x, y) по плоскости, лѣвая часть уравненія обращается въ нуль, не мѣняя знака.

Наконецъ точка (x_0, y_0) можетъ быть двойною уединенною точкою; такъ будетъ у кривой $y^2+x^4+y^4=0$, у которой начало координатъ есть двойная уединенная точка.

54. Точно также точка M_0 поверхности S, представляемой уравненіемъ $F(x, y, z)=0$, называется особою точкою этой поверхности, если координаты x_0, y_0, z_0 этой точки обращаютъ въ нуль три производныхъ перваго порядка

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y_0}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z_0}=0.$$

Въ этомъ случаѣ выведенное выше (§ 22) уравненіе касательной плоскости обращается въ тожество. Если въ точкѣ M_0

всѣ шесть частныхъ производныхъ второго порядка не будутъ одновременно равны нулю, то мѣсто касательныхъ ко всѣмъ кривымъ, лежащимъ на поверхности S и проходящимъ черезъ точку M_0, будетъ конусомъ второго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t)$$

уравненія кривой C, лежащей на поверхности S. Такъ какъ функціи $f(t), \varphi(t), \psi(t)$ удовлетворяютъ соотношенію $F(x,y,z)=0$, то между дифференціалами перваго и второго порядковъ существуютъ соотношенія

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^{(2)}+\frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=0.$$

При $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ первое соотношеніе обращается въ тожество, а второе принимаетъ видъ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}dx^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}dy^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z_0^2}dz^2 +2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}dx\,dy+2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0\,\partial z_0}dy\,dz+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial z_0}dx\,dz=0.$$

Мы получимъ мѣсто касательныхъ, исключивъ dx, dy, dz изъ этого уравненія и изъ уравненій касательной

$$\frac{X-x_0}{dx}=\frac{Y-y_0}{dy}=\frac{Z-z_0}{dz};$$

это даетъ уравненіе конуса (T) второго порядка

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}(X-x_0)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}(Y-y_0)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z_0^2}(Z-z_0)^2\\&+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial y_0}(X-x_0)(Y-y_0)\\&+2\frac{\partial^2 F}{\partial y_0\,\partial z_0}(Y-y_0)(Z-z_0)+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0\,\partial z_0}(X-x_0)(Z-z_0)=0.\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

Прилагая въ $F(x, y, z)$ общую формулу Тэлора и продолжая разложеніе до членовъ третьяго порядка, мы можемъ представить уравненіе поверхности S въ видѣ

$$\left.\begin{aligned}0=F(x,y,z)=&\frac{1}{1\cdot 2}\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z_0}(z-z_0)\right]^{(2)}\\&+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z_0}(z-z_0)\right]^{(3)}_{\substack{x_0+\theta(x-x_0),\\ y_0+\theta(y-y_0),\\ z_0+\theta(z-z_0)}}\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

причемъ въ производныхъ третьяго порядка x_0, y_0, z_0 должны быть замѣнены черезъ $x_0+\theta(x-x_0)$, $y_0+\theta(y-y_0)$, $z_0+\theta(z-z_0)$. Мы получимъ уравненіе конуса (T), взявъ въ уравненіи (22) только члены второй степени по $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$.

Предположимъ сначала, что уравненіе (21) представляетъ дѣйствительный конусъ. Пересѣчемъ поверхность S и конусъ (T) плоскостью P, проходящею черезъ двѣ различныхъ образующихъ G, G' этого конуса. Чтобы получить уравненіе линіи пересѣченія поверхности S съ этою плоскостью P, мы возьмемъ оси координатъ такъ, чтобы плоскость P сдѣлалась параллельною плоскости xy; тогда для полученія уравненія линіи пересѣченія достаточно положить въ уравненіи (22) $z=z_0$. Мы видимъ, что для этой кривой точка M_0 есть двойная точка съ дѣйствительными касательными, и линія пересѣченія состоитъ изъ двухъ вѣтвей кривой, касающихся соотвѣтственно двухъ образующихъ G, G'. Вблизи точки M_0 форма поверхности аналогична формѣ, которую имѣютъ вблизи вершины двѣ полости конуса второго порядка; отсюда происходитъ названіе коническої точки, которое даютъ точкѣ M_0.

Если уравненіе (21) представляетъ мнимый конусъ, то точка M_0 есть особая уединенная точка поверхности S. Принявъ эту точку за центръ, можно изъ нея описать сферу настолько малаго радіуса, что внутри этой сферы уравненіе $F(x, y, z)=0$ не будетъ имѣть никакого другого рѣшенія, кромѣ $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$,. Дѣйствительно, пусть будетъ M точка, лежащая вблизи точки M_0, ρ — разстояніе MM_0, α, β, γ — направляющіе косинусы прямой MM_0. Если мы положимъ

$$x=x_0+\rho\alpha, \quad y=y_0+\rho\beta, \quad z=z_0+\rho\gamma,$$

то $F(x, y, z)$ обратится въ

$$F(x, y, z)=\frac{\rho^2}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\alpha^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}\beta^2+\ldots+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial z_0}\alpha\gamma+\rho L\right],$$

причемъ множитель L сохраняетъ конечное значеніе, когда ρ стремится къ нулю. Такъ какъ уравненіе (21) представляетъ мнимый конусъ, то многочленъ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}\alpha^2+\ldots+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial z_0}\alpha\gamma$$

не можетъ обратиться въ нуль, когда точка α, β, γ описываетъ сферу

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Обозначимъ черезъ m нижній предѣлъ абсолютныхъ значеній этого многочлена. Пусть будетъ, съ другой стороны, H верхній

предѣлъ абсолютнаго значенія функціи L вблизи точки M_0. Если изъ точки M_0 мы опишемъ сферу радіусомъ, меньшимъ $\frac{m}{H}$, то ясно, что внутри этой сферы коэффиціентъ при ρ^2 въ выраженіи $F(x, y, z)$ не можетъ обратиться въ нуль. Такимъ образомъ уравненіе

$$F(x, y, z)=0$$

не имѣетъ другого рѣшенія, кромѣ $\rho=0$.

Если уравненіе (21) представляетъ совокупность двухъ дѣйствительныхъ и различныхъ плоскостей, то черезъ точку M_0 проходятъ двѣ полости поверхности, изъ которыхъ каждая касается одной изъ этихъ плоскостей. Нѣкоторыя поверхности имѣютъ линіи, состоящія изъ двойныхъ точекъ, въ каждой изъ которыхъ конусъ касательныхъ распадается на двѣ плоскости. Такая линія есть двойная линія поверхности, по которой пересѣкаются двѣ различныхъ полости поверхности. Напримѣръ, окружность, представляемая двумя уравненіями $z=0$, $x^2+y^2=1$, есть двойная линія поверхности

$$z^4+2z^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2-1)^2=0.$$

Если уравненіе (21) представляетъ совокупность двухъ мнимыхъ сопряженныхъ плоскостей или двойную дѣйствительную плоскость, то въ каждомъ частномъ случаѣ требуется особое изслѣдованіе для изученія вида поверхности вблизи точки M_0. Подобныя изслѣдованія встрѣчаются при изученіи наибольшихъ и наименьшихъ значеній функцій.

55. Maxima и minima функцій одного перемѣннаго. — Пусть будетъ $f(x)$ функція, непрерывная внутри промежутка (a, b), и c—точка въ этомъ промежуткѣ. Функція $f(x)$ имѣетъ maximum или minimum при $x=c$, если можно найти такое достаточно малое положительное число η, чтобы разность $f(c+h)-f(c)$, обращающаяся въ нуль при $h=0$, сохраняла постоянный знакъ при всѣхъ другихъ значеніяхъ h, заключающихся между $-\eta$ и $+\eta$. Если эта разность положительна, то значеніе функціи $f(x)$ при $x=c$ будетъ меньше, чѣмъ при всѣхъ значеніяхъ x, близкихъ къ c; слѣдовательно, $f(x)$ проходитъ при $x=c$ чрезъ minimum. Напротивъ, если разность $f(c+h)-f(c)$ отрицательна, то при $x=c$ функція имѣетъ maximum.

Если функція $f(x)$ имѣетъ производную при значеніи $x=c$, то эта производная должна быть равна нулю. Въ самомъ дѣлѣ, оба отношенія

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \quad \frac{f(c-h)-f(c)}{-h},$$

имѣющія одинъ и тотъ же предѣлъ $f'(c)$, при приближеніи h къ нулю будутъ имѣть различные знаки; поэтому ихъ общій предѣлъ $f'(c)$ долженъ быть равенъ нулю.

Обратно, пусть будетъ c корень уравненія $f'(c)=0$, заключающійся между a и b. Предположимъ, для общности, что первою производною отъ $f(x)$, не равною нулю при $x=c$, будетъ производная n-го порядка и что эта производная непрерывна вблизи значенія c. Останавливаясь на членѣ n-ой степени, мы получимъ въ этомъ случаѣ по общей формулѣ Тэлора

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(c+\theta h),$$

или

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}[f^{(n)}(c)+\varepsilon],$$

причемъ ε безконечно мало вмѣстѣ съ h. Пусть будетъ η такое положительное число, чтобы при измѣненіи x отъ $c-\eta$ до $c+\eta$ абсолютное значеніе ε было меньше $|f^{(n)}(c)|$; при этихъ значеніяхъ x, $f^{(n)}(c)+\varepsilon$ будетъ имѣть тотъ же знакъ, какъ и $f^{(n)}(c)$, и, слѣдовательно, $f(c+h)-f(c)$ будетъ имѣть знакъ $h^n f^{(n)}(c)$.

Если n число нечетное, то мы видимъ, что эта разность мѣняетъ знакъ вмѣстѣ съ h: при $x=c$ нѣтъ ни maximum'а, ни minimum'а. Если n четное, то $f(c+h)-f(c)$ какъ при положительномъ, такъ и при отрицательномъ h имѣетъ знакъ $f^{(n)}(c)$: функція имѣетъ minimum, если $f^{(n)}(c)$ положительно, и maximum, если $f^{(n)}(c)$ отрицательно. Такимъ образомъ, для того чтобы функція имѣла при $x=c$ maximum или minimum, необходимо и достаточно, чтобы $f'(c)$ было равно нулю, и чтобы первая производная, не обращающаяся въ нуль при $x=c$, была четнаго порядка.

Геометрически это значитъ, что касательная къ кривой $y=f(x)$ въ точкѣ A съ абсциссою c должна быть параллельна оси Ox, и, кромѣ того, точка A не должна быть точкою перегиба.

Примѣчанія. — При отсутствіи тѣхъ условій, которыя мы принимали въ предыдущихъ выводахъ, функція $f(x)$ можетъ имѣть maximum или minimum и при тѣхъ значеніяхъ перемѣннаго x, при которыхъ производная $f'(x)$ не равна нулю. Такъ, если при $x=c$ производная обращается въ безконечность, то достаточно, чтобы производная, переходя черезъ безконечность, мѣняла знакъ, для того чтобы функція имѣла maximum или minimum; такъ, функція $y=x^{\frac{2}{3}}$ имѣетъ minimum при $x=0$, и соотвѣтствующая кривая имѣетъ въ началѣ координатъ точку возврата, причемъ касательною въ этой точкѣ служитъ ось y.

Если, по существу вопроса, перемѣнное x можетъ принимать только значенія, заключающіяся между двумя предѣлами a и b, то можетъ случиться, что эти предѣльныя значенія будутъ давать абсолютныя maxima или minima функціи $f(x)$, хотя и не будутъ обращать въ нуль производную $f'(x)$. Предположимъ, напримѣръ, что требуется найти кратчайшее разстояніе отъ данной точки P съ координатами $(a, 0)$ до окружности C, представляемой уравненіемъ $x^2+y^2-R^2=0$. Принявъ за независимое перемѣнное абсциссу x точки M окружности C, получимъ

$$d^2=\overline{PM}^2=(x-a)^2+y^2=x^2+y^2-2ax+a^2,$$

или, на основаніи уравненія окружности,

$$d^2=R^2+a^2-2ax.$$

Примѣненіе общаго правила привело бы насъ къ разысканію корней производнаго уравненія $2a=0$, что не имѣетъ смысла. Но это кажущееся противорѣчіе можно объяснить тѣмъ, что, по существу вопроса, перемѣнное x можетъ измѣняться только между $-R$ и $+R$. Если a положительно, то d^2 имѣетъ minimum при $x=R$ и maximum при $x=-R$.

56. Функціи двухъ перемѣнныхъ. — Пусть будетъ $z=f(x, y)$ функція двухъ перемѣнныхъ x, y, непрерывная, когда точка M съ координатами (x, y) остается внутри площади Ω, ограниченной контуромъ C. Эта функція $f(x, y)$ имѣетъ maximum или minimum въ точкѣ (x_0, y_0) площади Ω, если можно найти такое достаточно малое положительное число η, чтобы разность

$$\Delta=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0),$$

обращающаяся въ нуль при $h=k=0$, сохраняла постоянный знакъ при всѣхъ другихъ значеніяхъ h и k, меньшихъ η по абсолютному значенію. Если мы дадимъ на время перемѣнному y постоянное значеніе y_0, то z сдѣлается функціею одного перемѣннаго x, и, на основаніи предыдущаго (§ 55), разность

$$f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)$$

можетъ сохранять постоянный знакъ при малыхъ значеніяхъ h только въ томъ случаѣ, если $\frac{\partial f}{\partial x}$ равно нулю при $x=x_0, y=y_0$; подобнымъ же образомъ мы докажемъ, что эти значенія должны также обращать въ нуль $\frac{\partial f}{\partial y}$. Такимъ образомъ тѣ системы зна-

ченій x, y, которыя даютъ для $f(x, y)$ maximum или minimum, должны быть разыскиваемы среди рѣшеній совмѣстныхъ уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Пусть будетъ $x=x_0, y=y_0$ одно изъ рѣшеній этихъ двухъ уравненій. Мы предположимъ, что частныя производныя второго порядка отъ $f(x, y)$ непрерывны вблизи значеній x_0, y_0 и не равны нулю при $x=x_0, y=y_0$, и что существуютъ производныя третьяго порядка. Формула Тэлора даетъ

$$\left.\begin{aligned}\Delta &= f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)\\ &=\frac{1}{1\cdot 2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\right)\\ &\quad+\frac{1}{6}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{(3)}_{\substack{x_0+\theta h\\ y_0+\theta k}}.\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

При значеніяхъ h и k, близкихъ къ нулю, знакъ правой части, очевидно, зависитъ отъ знака трехчлена

$$h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2},$$

и можно ожидать, что изслѣдованіе знака этого трехчлена будетъ здѣсь играть главную роль.

Для того чтобы при $x=x_0, y=y_0$ функція $f(x, y)$ имѣла maximum или minimum, необходимо и достаточно, чтобы разность Δ сохраняла постоянный знакъ, когда точка (x_0+h, y_0+k) остается внутри достаточно малаго квадрата съ центромъ въ точкѣ (x_0, y_0). Ясно, что разность Δ будетъ также сохранять постоянный знакъ, если точка (x_0+h, y_0+k) будетъ оставаться внутри круга съ достаточно малымъ радіусомъ и съ центромъ въ (x_0, y_0), такъ какъ можно замѣнить квадратъ вписаннымъ кругомъ, и обратно. Пусть будетъ C кругъ радіуса r съ центромъ въ точкѣ (x_0, y_0); мы получимъ всѣ точки внутри этого круга, положивъ

$$h=\rho\cos\varphi, \quad k=\rho\sin\varphi$$

и измѣняя φ отъ 0 до 2π, а ρ отъ $-r$ до $+r$. Можно было бы даже ограничиться для ρ и положительными значеніями, но для послѣдующаго выгоднѣе не вводить этого ограниченія. Сдѣлавъ въ Δ эту подстановку, найдемъ

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}\left(A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi\right)+\frac{\rho^3}{6}L,$$

причемъ

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}, \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}, \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2},$$

и L есть функція, остающаяся конечною вблизи точки (x_0, y_0), которую мы не будемъ писать въ раскрытомъ видѣ. Здѣсь должно различать нѣсколько случаевъ въ зависимости отъ знака выраженія B^2-AC.

Первый случай. — Пусть $B^2-AC>0$. Уравненіе

$$A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi=0$$

имѣетъ для $\operatorname{tg}\varphi$ два дѣйствительныхъ корня, и лѣвая часть есть разность двухъ квадратовъ, такъ что можно написать

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}\left[\alpha\,(a\cos\varphi+b\sin\varphi)^2-\beta(a'\cos\varphi+b'\sin\varphi)^2\right]+\frac{\rho^3}{6}L,$$

гдѣ

$$\alpha>0,\quad \beta>0,\quad ab'-ba'\neq 0.$$

Если мы дадимъ углу φ такое значеніе, чтобы было

$$a\cos\varphi+b\sin\varphi=0,$$

то, при безконечно малыхъ значеніяхъ ρ, Δ будетъ отрицательно; напротивъ, если мы возьмемъ для φ такой уголъ, чтобы было $a'\cos\varphi+b'\sin\varphi=0$, то, при безконечно малыхъ значеніяхъ ρ, Δ будетъ положительно. Такимъ образомъ нельзя найти такого числа r, чтобы разность Δ сохраняла постоянный знакъ при всякомъ углѣ φ, если абсолютное значеніе ρ будетъ меньше r. Функція $f(x, y)$ при $x=x_0$, $y=y_0$ не имѣетъ ни maximum'а, ни minimum'а.

Второй случай. — Пусть $B^2-AC<0$. Трехчленъ

$$A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi$$

не обращается въ нуль при измѣненіи φ отъ 0 до 2π. Пусть будетъ m нижній предѣлъ его абсолютнаго значенія; пусть будетъ также H верхній предѣлъ функціи L въ нѣкоторомъ кругѣ съ радіусомъ R и съ центромъ (x_0, y_0). Обозначимъ черезъ r положительное число, меньшее R и $\frac{3m}{H}$; внутри круга радіуса r разность Δ будетъ имѣть знакъ коэффиціента при ρ^2, т.-е. знакъ A или C. Слѣдовательно, при $x=x_0$, $y=y_0$ функція $f(x, y)$ будетъ имѣть maximum или minimum.

Такимъ образомъ, если въ точкѣ x_0, y_0 мы имѣемъ

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}>0,$$

то нѣтъ ни maximum'а, ни minimum'а. Если

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}<0,$$

то $f(x, y)$ будетъ имѣть maximum или minimum въ зависимости отъ знака производныхъ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$. Если эти производныя отрицательны, то будетъ maximum; если онѣ положительны, — то minimum.

57. Изслѣдованіе сомнительнаго случая. — Предыдущее изслѣдованіе не обнимаетъ того случая, когда $B^2 - AC = 0$. Геометрически ясно, въ чемъ состоитъ трудность задачи въ этомъ особомъ случаѣ. Пусть будетъ S поверхность, представляемая уравненіемъ $z = f(x, y)$. Если функція $f(x, y)$ имѣетъ maximum или minimum въ точкѣ (x_0, y_0), вблизи которой функція и ея производныя непрерывны, то мы должны имѣть

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что касательная плоскость къ поверхности S въ точкѣ M_0 съ координатами (x_0, y_0, z_0) должна быть параллельна плоскости xy. Для того чтобы эта точка соотвѣтствовала maximum'у или minimum'у, необходимо, кромѣ того, чтобы вблизи точки M_0 поверхность S была расположена вся по одну сторону касательной плоскости; такимъ образомъ вопросъ приводится къ изслѣдованію положенія поверхности относительно ея касательной плоскости вблизи точки прикосновенія.

Предположимъ, что мы перенесли начало координатъ въ точку прикосновенія, и что касательною плоскостью служитъ плоскость xy; тогда уравненіе поверхности приметъ видъ

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3,$$

гдѣ a, b, c — постоянныя, и $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — функціи отъ x, y, остающіяся конечными, когда x и y стремятся къ нулю. Это уравненіе въ сущности тождественно съ уравненіемъ (19), въ которомъ x_0, y_0 замѣнены нулями, а h и k — перемѣнными x и y.

Чтобы узнать, расположена ли поверхность S вблизи начала координатъ вся по одну сторону плоскости xy, необходимо изслѣдовать линію пересѣченія этой поверхности плоскостью xy. Но эта линія пересѣченія представлена уравненіемъ

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x^3 + \ldots = 0$$

и имѣетъ въ началѣ координатъ двойную точку. Если $b^2 - ac$ отрицательно, то начало есть двойная уединенная точка (§ 53); въ этомъ случаѣ уравненіе (25) не имѣетъ иного рѣшенія, кромѣ $x = y = 0$, пока точка (x, y) остается внутри круга C до-

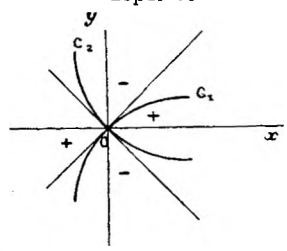
статочно малаго радіуса r съ центромъ въ началѣ координатъ. Лѣвая часть этого уравненія при перемѣщеніи точки (x, y) внутри этого круга сохраняетъ постоянный знакъ. Такимъ образомъ всѣ точки поверхности S, проектирующіяся внутри круга C, за исключеніемъ начала, расположены по одну сторону плоскости xy. Въ этомъ случаѣ $f(x, y)$ имѣетъ maximum или minimum. Часть поверхности S вблизи начала координатъ аналогична части сферы или эллипсоида.

Если $b^2-ac>0$, то линія пересѣченія поверхности S съ касательною плоскостью состоитъ изъ двухъ различныхъ вѣтвей C_1, C_2 кривой, проходящихъ черезъ начало; касательныя въ началѣ координатъ къ этимъ двумъ вѣтвямъ представятся уравненіемъ

$$ax^2+2bxy+cy^2=0.$$

Разсмотримъ подвижную точку (x, y) вблизи начала координатъ. Когда эта точка пересѣкаетъ одну изъ вѣтвей кривой C_1, C_2, то лѣвая часть уравненія (25) мѣняетъ знакъ, переходя черезъ нуль. Такимъ образомъ, если каждой области плоскости вблизи начала мы припишемъ знакъ лѣвой части уравненія (25), то будемъ имѣть распредѣленіе знаковъ, сходное съ изображеннымъ на черт. 7. Среди точекъ поверхности, проектирующихся на плоскость xy внутри круга съ центромъ въ началѣ, какъ бы ни былъ малъ радіусъ этого круга, непремѣнно, — однѣ точки будутъ находиться надъ плоскостью xy, а другія — подъ плоскостью. Относительно своей касательной плоскости поверхность расположена подобно однополостному гиперболоиду или гиперболическому параболоиду. Функція $f(x, y)$ не имѣетъ въ началѣ координатъ ни maximum'а, ни minimum'а.

Черт. 7.



Въ случаѣ $b^2-ac=0$ линія пересѣченія поверхности съ касательною плоскостью имѣетъ въ началѣ координатъ точку возврата; это тотъ случай, который мы оставили выше безъ разсмотрѣнія. Если въ этомъ случаѣ линія пересѣченія состоитъ изъ двухъ различныхъ вѣтвей, проходящихъ черезъ начало, то нѣтъ ни maximum'а, ни minimum'а, такъ какъ поверхность опять пересѣкаетъ свою касательную плоскость. Но если начало координатъ есть двойная уединенная точка, или если линія пересѣченія состоитъ изъ двухъ сливающихся вѣтвей, то $f(x, y)$ имѣетъ maximum или minimum.

58. Чтобы узнать, какой изъ двухъ случаевъ имѣетъ мѣсто, необходимо принимать въ соображеніе значенія производныхъ третьяго и четвертаго порядковъ, а иногда даже и значенія производныхъ высшихъ порядковъ. Слѣдующее изслѣдованіе, по большей части достаточное въ приложеніяхъ, относится только къ самому общему случаю. Если $b^2-ac=0$, то, продолжая разложеніе Тэлора до членовъ четвертаго порядка, мы можемъ представить уравненіе поверхности въ видѣ

$$z=f(x,y)=A(x\sin\omega-y\cos\omega)^2+\varphi_3(x,y)+\frac{1}{24}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(4)}_{\substack{\theta x\\ \theta y}}. \qquad (26)$$

Предположимъ, для опредѣленности, что $A>0$. Для того чтобы поверхность S вблизи начала кординатъ была расположена вся по одну сторону плоскости xy, необходимо, чтобы всѣ линіи пересѣченія этой поверхности съ плоскостями, проходящими черезъ Oz, были расположены вблизи начала съ одной и той же стороны плоскости xOy. Но если мы пересѣчемъ поверхность плоскостью

$$y=x\operatorname{tg}\varphi,$$

то получимъ уравненіе кривой пересѣченія, положивъ въ уравненіи (26)

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$$

(осями служатъ Oz и слѣдъ сѣкущей плоскости на xOy); это даетъ

$$z=A\rho^2(\cos\varphi\sin\omega-\cos\omega\sin\varphi)^2+K\rho^3+L\rho^4,$$

причемъ K обозначаетъ коэффиціентъ, не зависящій отъ ρ. Если $\operatorname{tg}\omega\neq\operatorname{tg}\varphi$, то, при безконечно малыхъ значеніяхъ ρ, z будетъ положительно; слѣдовательно, вблизи начала координатъ всѣ эти сѣченія будутъ расположены надъ плоскостью xy. Пересѣчемъ теперь поверхность плоскостью

$$y=x\operatorname{tg}\omega;$$

если соотвѣтствующее значеніе K не равно нулю, то разложеніе z будетъ имѣть видъ

$$z=\rho^3(K+\xi)$$

и будетъ мѣнять знакъ вмѣстѣ съ ρ. Отсюда слѣдуетъ, что линія пересѣченія поверхности съ упомянутою плоскостью имѣетъ въ началѣ координатъ точку перегиба и пересѣкаетъ плоскость xy; слѣдовательно, функція $f(x,y)$ не имѣетъ въ началѣ координатъ ни maximum'а, ни minimum'а. Это будетъ въ томъ случаѣ, если кривая пересѣченія поверхности съ ея касательною плоскостью представляетъ точку возврата перваго вида, какъ, напримѣръ, у поверхности

$$z=y^2-x^3.$$

Если для разсматриваемаго сѣченія $K=0$, то мы продолжимъ разложеніе до членовъ четвертаго порядка и получимъ для z выраженіе вида

$$z=\rho^4(K_1+\varepsilon'),$$

гдѣ K_1 есть постоянное, выраженіе котораго чрезъ производныя четвертаго порядка можетъ быть легко получено. Мы предположимъ, что K_1 не равно нулю. При безконечно малыхъ значеніяхъ ρ, z имѣетъ

знакъ K_1. Если K_1 отрицательно, то вблизи начала координатъ линія пересѣченія расположена подъ плоскостью xy; для z опять нѣтъ ни maximum'a, ни minimum'a. Это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, для поверхности $z=y^2-x^4$, линія пересѣченія которой съ плоскостью xy состоитъ изъ двухъ параболъ $y=\pm x^2$. Такимъ образомъ мы видимъ, что если не будетъ одновременно $K=0$, $K_1>0$, то продолжать вычисленія безполезно; можно утверждать, что вблизи начала координатъ поверхность пересѣкаетъ свою касательную плоскость.

Если одновременно $K=0$, $K_1>0$, то всѣ кривыя сѣченія поверхности плоскостями, проходящими черезъ Oz, будутъ вблизи начала координатъ расположены надъ плоскостью xy. Но этого еще недостаточно, чтобы можно было утверждать, что поверхность не пересѣкаетъ своей касательной плоскости, какъ это показываетъ примѣръ поверхности

$$z=(y-x^2)(y-2x^2),$$

пересѣкающей свою касательную плоскость по двумъ параболамъ, изъ которыхъ одна лежитъ внутри другой. Для того чтобы поверхность не пересѣкала своей касательной плоскости, необходимо еще слѣдующее условіе: если мы пересѣчемъ эту поверхность произвольнымъ цилиндромъ, проходящимъ черезъ Oz, съ образующими, параллельными Oz, то кривая пересѣченія должна быть расположена надъ плоскостью xy. Пусть будетъ $y=\varphi(x)$ уравненіе слѣда этого цилиндра на плоскости xy, причемъ при $x=0$ функція $\varphi(x)$ равна нулю. Функція $F(x)=f[x, \varphi(x)]$ должна имѣть minimum при $x=0$, каковъ бы ни былъ видъ функціи $\varphi(x)$. Для упрощенія вычисленій мы предположимъ, что оси координатъ выбраны такимъ образомъ, что уравненіе поверхности имѣетъ видъ

$$z=Ay^2+\varphi_3(x, y)+\ldots,$$

гдѣ A — положительно. При этой системѣ осей мы будемъ имѣть для начала координатъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_0}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}>0.$$

Производныя отъ $F(x)$ будутъ имѣть слѣдующія выраженія

$$F'(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x),$$

$$F''(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\varphi'(x)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varphi'^2(x)+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi''(x),$$

$$F'''(x)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\varphi'(x)+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\varphi'^2(x)+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\varphi'^3(x)$$
$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\varphi''(x)+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varphi'\varphi''+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi'''(x),$$

$$F^{IV}(x)=\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\,\partial y}\varphi'(x)+6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2}\varphi'^2+4\frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y^3}\varphi'^3+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\varphi'^4$$
$$+6\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\varphi''+12\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\varphi'\varphi''+6\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\varphi'^2\varphi''$$
$$+4\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\varphi'''+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4\varphi'\varphi'''+3\varphi''^2)+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi^{IV}(x).$$

При $x=y=0$ эти формулы даютъ

$$F'(0)=0, \quad F''(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi'(0)]^2.$$

Если $\varphi'(0)$ не равно нулю, то функція $F(x)$ при $x=0$ имѣетъ minimum, что можно было предвидѣть на основаніи предыдущаго изслѣдованія. Если же $\varphi'(0)=0$, то

$$F'(0)=0, \quad F''(0)=0, \quad F'''(0)=\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3},$$

$$F^{IV}(0)=\frac{\partial^4 f}{\partial x_0^4}+6\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^2\,\partial y_0}\varphi''(0)+3\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi''(0)]^2.$$

Чтобы $F(x)$ имѣла minimum, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^3}$ должно быть равно нулю, и, кромѣ того, трехчленъ второй степени по $\varphi''(0)$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_0^4}+6\frac{\partial^3 f}{\partial x_0^2\,\partial y_0}\varphi''(0)+3\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}[\varphi''(0)]^2$$

долженъ быть положительнымъ при всякомъ значеніи $\varphi''(0)$. Легко показать, что эти условія не удовлетворяются для только что разсмотрѣнной функціи $z=y^2-3x^2y+2x^4$, тогда какъ они удовлетворяются для функціи $z=y^2+x^4$. И дѣйствительно, эта послѣдняя поверхность вся расположена надъ плоскостью xy.

Я не буду продолжать этого изслѣдованія, которое для полной строгости потребовало бы очень тонкихъ соображеній, и я отсылаю читателя, желающаго подробнѣе ознакомиться съ этимъ предметомъ, къ основному мемуару Людвига Шеффера (Ludwig Scheffer), Mathematische Annalen, т. XXXV.

59. Функціи трехъ перемѣнныхъ.— Пусть будетъ $u=f(x, y, z)$ непрерывная функція трехъ перемѣнныхъ x, y, z. Эта функція $f(x, y, z)$ имѣетъ maximum или minimum при системѣ значеній x_0, y_0, z_0, если можно найти такое достаточно малое положительное число η, чтобы разность

$$\Delta=f(x_0+h, y_0+k, z_0+l)-f(x_0, y_0, z_0)$$

обращающаяся въ нуль при $h=k=l=0$, сохраняла постоянный знакъ при всѣхъ другихъ значеніяхъ h, k, l, меньшихъ η по абсолютному значенію. Если мы предположимъ, что только одно изъ трехъ перемѣнныхъ x, y, z получило приращеніе, а два другихъ перемѣнныхъ будемъ временно разсматривать, какъ постоянныя, то найдемъ, по-прежнему, что u не можетъ имѣть ни maximum'a, ни minimum'a, если одновременно не будетъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_0}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_0}=0,$$

причемъ, разумѣется, необходимо, чтобы эти производныя были непрерывны вблизи значеній x_0, y_0, z_0. Предположимъ, что мы нашли систему рѣшеній x_0, y_0, z_0 этихъ трехъ совмѣстныхъ уравненій. Пусть будетъ M_0 точка пространства съ координатами (x_0, y_0, z_0). Функція f имѣетъ maximum или minimum, если можно найти такую сферу съ центромъ въ M_0, чтобы разность $f(x, y, z)-f(x_0, y_0, z_0)$ сохраняла постоянный знакъ для

всѣхъ точекъ x, y, z внутри этой сферы, кромѣ точки M_0. Представимъ координаты какой-нибудь точки, близкой къ M_0, черезъ

$$x = x_0 + \varrho\alpha, \quad y = y_0 + \varrho\beta, \quad z = z_0 + \varrho\gamma,$$

гдѣ α, β, γ связаны соотношеніемъ $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, и замѣнимъ въ разложеніи $f(x, y, z)$ по формулѣ Тэлора разности $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ черезъ $\varrho\alpha$, $\varrho\beta$, $\varrho\gamma$. Мы получимъ

$$\Delta = \varrho^2 [\varphi(\alpha, \beta, \gamma) + \varrho L],$$

гдѣ $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ обозначаетъ квадратичную форму по α, β, γ, коэффиціенты которой суть производныя второго порядка отъ $f(x, y, z)$, и L — функцію, остающуюся конечною вблизи точки M_0. Устраняя тотъ частный случай, когда дискриминантъ квадратичной формы $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ равенъ нулю, мы можемъ представить эту форму въ видѣ суммы квадратовъ трехъ различныхъ линейныхъ функцій отъ α, β, γ, умноженныхъ на постоянные множители. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = aP^2 + a'P'^2 + a''P''^2.$$

Если коэффиціенты a, a', a'' имѣютъ одинаковые знаки, то квадратичная форма $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ остается по абсолютному значенію большею нѣкотораго minimum'а, когда точка α, β, γ описываетъ сферу

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

и, слѣдовательно, Δ сохраняетъ знакъ коэффиціентовъ a, a', a'', если ϱ меньше нѣкотораго предѣла. Такимъ образомъ функція $f(x, y, z)$ имѣетъ maximum или minimum.

Если коэффиціенты a, a', a'' не имѣютъ одинаковыхъ знаковъ, то нѣтъ ни maximum'а, ни minimum'а. Предположимъ, напримѣръ, $a > 0$, $a' < 0$; возьмемъ для α, β, γ значенія, удовлетворяющія соотношеніямъ $P' = 0$, $P'' = 0$. Эти значенія не обращаютъ въ нуль P, и, при достаточно малыхъ значеніяхъ ϱ, Δ будетъ положительно. Напротивъ, если мы возьмемъ для α, β, γ, значенія, удовлетворяющія соотношеніямъ $P = 0$, $P'' = 0$, то, при малыхъ значеніяхъ ϱ, Δ будетъ отрицательно.

Изложенный методъ изслѣдованія остается однимъ и тѣмъ же при всякомъ числѣ независимыхъ перемѣнныхъ, и главную роль въ немъ всегда играетъ изученіе нѣкоторой квадратичной формы. Можно замѣтить, что въ случаѣ функціи трехъ независимыхъ перемѣнныхъ $u = f(x, y, z)$ задача приводится къ изученію характера поверхности вблизи ея особой точки. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ поверхность Σ, представляемую уравненіемъ

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Эта поверхность, очевидно, проходитъ черезъ точку M_0 съ координатами (x_0, y_0, z_0), и, если функція $f(x, y, z)$ имѣетъ maximum или minimum, то точка M_0 есть особая точка поверхности Σ. Если конусъ касательныхъ въ M_0 — мнимый, то, какъ мы видѣли, $F(x, y, z)$ сохраняетъ постоянный знакъ внутри сферы достаточно малаго радіуса съ центромъ M_0; слѣдовательно, $f(x, y, z)$ дѣйствительно имѣетъ maximum или minimum. Но если конусъ касательныхъ — дѣйствительный или распадается на двѣ дѣйствительныхъ различныхъ плоскости, то существуетъ нѣсколько полостей поверхности, проходящихъ черезъ точку M_0, и $F(x, y, z)$ мѣняетъ знакъ, когда точка (x, y, z) при своемъ движеніи пересѣкаетъ одну изъ этихъ полостей.

60. Разстояніе точки отъ поверхности. — Пусть требуется найти наибольшія и наименьшія значенія разстоянія отъ данной точки (a, b, c) до поверхности S, представляемой уравненіемъ $F(x, y, z) = 0$. Квадратъ этого разстоянія

$$u = d^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

есть функція только двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, напримѣръ, x и y, такъ какъ мы можемъ разсматривать z, какъ функцію отъ x и y, опредѣляемую уравненіемъ $F = 0$. Если u имѣетъ maximum или minimum для точки (x, y, z) поверхности, то для координатъ этой точки должно быть

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = (x-a) + (z-c)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = (y-b) + (z-c)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Съ другой стороны, изъ уравненія $F = 0$ имѣемъ

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

и предыдущія соотношенія обращаются въ

$$\frac{x-a}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y-b}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z-c}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Эти уравненія показываютъ, что нормаль къ поверхности S въ точкѣ (x, y, z) проходитъ черезъ точку (a, b, c). Оставляя въ сторонѣ особыя точки поверхности S, мы видимъ такимъ образомъ, что искомыя точки суть основанія нормалей, опущенныхъ изъ точки (a, b, c) на поверхность S. Чтобы рѣшить, дѣйствительно ли одна изъ этихъ точекъ соотвѣтствуетъ maximum'у или minimum'у, мы примемъ эту точку за начало координатъ, а касательную плоскость въ этой точкѣ — за плоскость xy, такъ что данная точка (a, b, c) будетъ лежать на оси Oz. Тогда наша функція приметъ видъ

$$u = x^2 + y^2 + (z-c)^2,$$

гдѣ z есть функція отъ x, y, равная нулю вмѣстѣ со своими производными перваго порядка при $x = y = 0$. Обозначая черезъ r, s, t част-

ныя производныя второго порядка отъ z, мы будемъ имѣть для начала координатъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2(1-cr), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -2cs, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(1-ct),$$

и задача приводится къ изслѣдованію знака многочлена

$$\Delta(c) = c^2 s^2 - (1-cr)(1-ct) = c^2(s^2-rt) + (r+t)c - 1.$$

Вслѣдствіе тожества $(r+t)^2 + 4(s^2-rt) = 4s^2 + (r-t)^2$ корни уравненія $\Delta(c) = 0$ всегда дѣйствительны. Въ зависимости отъ знака s^2-rt намъ надо будетъ различить здѣсь нѣсколько случаевъ.

Первый случай. — Пусть $s^2-rt < 0$. Уравненіе $\Delta(c) = 0$ имѣетъ два корня c_1 и c_2 съ одинаковыми знаками, и мы можемъ написать $\Delta(c) = (s^2-rt)(c-c_1)(c-c_2)$. Отмѣтимъ на оси z двѣ точки A_1, A_2 съ координатами c_1, c_2; эти двѣ точки расположены по одну сторону отъ начала, и, предполагая r и t положительными, что всегда возможно сдѣлать, мы найдемъ, что обѣ точки лежатъ на положительной части оси Oz. Если данная точка A $(0, 0, c)$ находится внѣ отрѣзка A_1A_2, то $\Delta(c)$ отрицательно, и разстояніе OA будетъ maximum или minimum. Чтобы узнать, какой изъ двухъ случаевъ имѣетъ мѣсто, необходимо обратиться къ знаку $1-cr$. Этотъ коэффиціентъ обращается въ нуль только при значеніи $c = \frac{1}{r}$, заключающемся между c_1 и c_2, такъ какъ $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{s^2}{r^2}$. Но, при $c=0$, $1-cr$ положительно; слѣдовательно, $1-cr$ положительно, если точка A находится по одну сторону съ началомъ относительно отрѣзка A_1A_2, и разстояніе OA будетъ minimum. Напротивъ, OA будетъ maximum, если точка A расположена по другую сторону, чѣмъ начало координатъ, относительно отрѣзка A_1A_2. Если точка A находится между точками A_1 и A_2, то разстояніе не будетъ ни maximum, ни minimum. Случай, когда точка A совпадаетъ съ A_1 или съ A_2 — сомнительный и требуетъ особаго выясненія.

Второй случай. — Пусть $s^2-rt > 0$. Изъ корней c_1 и c_2 уравненія $\Delta(c) = 0$ одинъ будетъ положительнымъ, другой — отрицательнымъ, и точки A_1, A_2 будутъ расположены на оси Oz по разныя стороны отъ начала координатъ. Если точка A не лежитъ между A_1 и A_2, то $\Delta(c)$ положительно, и нѣтъ ни maximum'а, ни minimum'а. Если же точка A лежитъ между A_1 и A_2, то $\Delta(c)$ отрицательно, $1-cr$ положительно, и, слѣдовательно, разстояніе OA будетъ minimum.

Третій случай. — Пусть $s^2-rt=0$. Тогда $\Delta(c) = (r+t)(c-c_1)$. Подобно предыдущему мы найдемъ, что разстояніе OA будетъ minimum, если точка A расположена по одну сторону съ началомъ относительно точки A_1 съ координатами $(0, 0, c_1)$, и не будетъ ни maximum'а, ни minimum'а, если точка A_1 находится между точкою A и началомъ координатъ.

Точки A_1 и A_2 имѣютъ основное значеніе въ изученіи кривизны; это — главные центры кривизны поверхности S въ точкѣ O.

61. Maxima и minima неявныхъ функцій. — При изысканіи maxima или minima функцій многихъ перемѣнныхъ часто случается, что эти перемѣнныя связаны однимъ или многими соотношеніями. Пусть будетъ, напримѣръ, $w = f(x, y, z, u)$

функція четырехъ перемѣнныхъ x, y, z, u, которыя должны удовлетворять двумъ соотношеніямъ

$$f_1(x, y, z, u)=0, \quad f_2(x, y, z, u)=0.$$

Для опредѣленности, мы будемъ разсматривать x и y, какъ два независимыхъ перемѣнныхъ, а z и u, какъ функціи отъ x и y, опредѣляемыя предыдущими соотношеніями. Неоходимыя условія того, чтобы ω было maximum или minimum, будутъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

причемъ частныя производныя $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ опредѣляются изъ соотношеній

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Исключая изъ этихъ шести уравненій $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, мы приходимъ къ слѣдующимъ двумъ соотношеніямъ

$$\frac{D(f, f_1, f_2)}{D(x, z, u)}=0, \quad \frac{D(f, f_1, f_2)}{D(y, z, u)}=0. \tag{27}$$

Эти уравненія вмѣстѣ съ уравненіями $f_1=0$, $f_2=0$ опредѣляютъ значенія x, y, z, u, соотвѣтствующія maximum'у или minimum'у функціи ω. Но уравненія (27) показываютъ, что можно найти для λ и μ такія значенія, чтобы было

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial y}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial z}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial u}+\lambda\frac{\partial f_1}{\partial u}+\mu\frac{\partial f_2}{\partial u}=0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Слѣдовательно, условія (27) можно замѣнить четырьмя уравненіями (28), разсматривая λ и μ, какъ два вспомогательныхъ неизвѣстныхъ.

Доказательство общей теоремы очевидно, и мы можемъ дать слѣдующее правило: Если дана функція

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

отъ n перемѣнныхъ, связанныхъ h различными соотношеніями

$$\varphi_1=0, \quad \varphi_2=0, \quad \ldots, \quad \varphi_h=0,$$

то чтобы найти тѣ значенія $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которыя обращаютъ эту функцію въ maximum или minimum, нужно приравнять нулю частныя производныя вспомогательной функціи

$$f+\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_h\varphi_h,$$

разсматривая $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$, какъ постоянныя.

62. Другой примѣръ. — Вотъ другой примѣръ, въ которомъ не всегда для полученія minimum'а нужно приравнивать частныя производныя нулю. Найдемъ въ плоскости даннаго треугольника ABC такую точку P, для которой сумма разстояній $PA+PB+PC$ была бы наименьшею. Пусть будутъ (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) координаты вершинъ A, B, C относительно прямоугольныхъ осей. Намъ нужно найти minimum функціи

$$z=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}+\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}+\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}, \qquad (29)$$

причемъ всѣ три корня имѣютъ положительныя значенія. Уравненіе (29) представляетъ нѣкоторую поверхность S, которая, очевидно, вся находится надъ плоскостью xy, и задача приводится къ опредѣленію точекъ этой поверхности, наиболѣе близкихъ къ плоскости xy. Изъ соотношенія (29) находимъ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}+\frac{x-a_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-b_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{y-b_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}+\frac{y-b_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}}.$$

Мы видимъ, что эти производныя непрерывны всюду, кромѣ точекъ A, B, C, гдѣ онѣ дѣлаются неопредѣленными. Слѣдовательно, поверхность S имѣетъ три особыхъ точки, которыя прсектируются въ три вершины даннаго треугольника. Minimum z соотвѣтствуетъ или тѣмъ точкамъ поверхности S, въ которыхъ касательная плоскость параллельна плоскости xy, или же особымъ точкамъ. Чтобы рѣшить уравненія $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, представимъ ихъ въ видѣ

$$\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}=-\frac{x-a_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}},$$

$$\frac{y-b_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{y-b_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}=-\frac{y-b_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}};$$

возведя въ квадратъ и сложивъ, получимъ

$$1+2\,\frac{(x-a_1)(x-a_2)+(y-b_1)(y-b_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}\ \sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}=0.$$

Не трудно истолковать это условіе геометрически; если мы назовемъ черезъ α, β косинусы угловъ, образуемыхъ направленіемъ PA съ Ox и Oy,

а черезъ α', β' — косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями направленіемъ PB, то предыдущее условіе обращается въ

$$1+2(\alpha\alpha'+\beta\beta')=0,$$

или, обозначая черезъ ω уголъ APB,

$$2\cos\omega+1=0.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что отрѣзокъ AB виденъ изъ точки P подъ угломъ въ 120^0. На основаніи тѣхъ же соображеній каждый изъ угловъ BPC и CPA долженъ быть равенъ 120^0. Ясно, что точка P*) должна лежать внутри треугольника ABC, и что не можетъ существовать точки, обладающей этимъ свойствомъ, если какой-нибудь изъ угловъ треугольника ABC равенъ или больше 120^0. Если точка P существуетъ, то она — единственная и получается пересѣченіемъ двухъ окружностей, которыя легко построить. Въ этомъ случаѣ minimum можетъ дать или точка P, или одна изъ вершинъ треугольника; но легко доказать, что сумма $PA+PB+PC$ меньше суммы двухъ сторонъ треугольника. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ углы APB и APC равны каждый 120^0, то два треугольника PAC, PBA даютъ

$$AB=\sqrt{a^2+b^2+ab},\quad AC=\sqrt{a^2+c^2+ac},$$

гдѣ $PA=a$, $PB=b$, $PC=c$. Но очевидно, что

$$\sqrt{a^2+b^2+ab}>b+\frac{a}{2},\quad \sqrt{a^2+c^2+ac}>c+\frac{a}{2},$$

и, слѣдовательно,

$$AB+AC>a+b+c.$$

Такимъ образомъ minimum даетъ именно точка P.

Если треугольникъ ABC имѣетъ уголъ большій или равный 120^0, то не существуетъ точки P, изъ которой каждая изъ трехъ сторонъ треугольника была бы видна подъ угломъ 120^0, и поверхность S не имѣетъ касательной плоскости, параллельной плоскости xy. Въ этомъ случаѣ minimum'у соотвѣтствуетъ одна изъ вершинъ треугольника, очевидно,— вершина тупого угла. Это легко провѣрить геометрически.

63. Теорема Даламбера.— Пусть будетъ $F(x, y)$ многочленъ по двумъ перемѣннымъ x, y, расположенный по однороднымъ группамъ членовъ съ возрастающими степенями,

$$F(x, y)=H+\varphi_p(x, y)+\varphi_{p+1}(x, y)+\ldots+\varphi_m(x, y),$$

гдѣ H — постоянное. Если уравненіе $\varphi_p(x, y)=0$, разсматриваемое, какъ уравненіе по $\frac{y}{x}$, имѣетъ простой корень, то функція $F(x, y)$ не можетъ имѣть maximum'а или minimum'а при $x=y=0$. Въ самомъ дѣлѣ, изъ предыдущаго изслѣдованія видно, что на поверхности $z+H=F(x, y)$ можно найти такія плоскія сѣченія, находящіяся въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ ось Oz, что одни сѣченія вблизи начала координатъ будутъ расположены надъ плоскостью xy, а другія — подъ этою плоскостью. Изъ этого замѣчанія можно вывести доказательство теоремы

*) Предлагаемъ читателю сдѣлать чертежъ.

Даламбера (D'Alembert). Пусть будетъ $f(z)$ цѣлый многочленъ m-ой степени съ произвольными коэффиціентами

$$f(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_mz^m.$$

Выдѣляя мнимыя и дѣйствительныя части, мы можемъ представить его въ видѣ

$$f(x+iy)=a_0+ib_0+(a_1+ib_1)(x+iy)+\ldots+(a_m+ib_m)(x+iy)^m,$$

гдѣ $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a^m, b_m$ — дѣйствительны. Послѣднему уравненію можно дать видъ

$$f(z)=P+iQ,$$

гдѣ

$$P=a_0+a_1x-b_1y+\ldots,$$
$$Q=b_0+b_1x+a_1y+\ldots,$$

и мы имѣемъ

$$f(z)|=\sqrt{P^2+Q^2}.$$

Покажемъ прежде всего, что $|f(z)|$, а, слѣдовательно, и P^2+Q^2, не могутъ имѣть minimum'а при $x=y=0$, если только не будетъ $a_0=b_0=0$. Въ самомъ дѣлѣ, вводя полярныя координаты ϱ и φ и предполагая, для большей общности, что первый не равный нулю коэффиціентъ послѣ A_0 будетъ A_p, мы можемъ написать

$$P=a_0+(a_p\cos p\varphi-b_p\sin p\varphi)\varrho^p+\ldots,$$
$$Q=b_0+(b_p\cos p\varphi+a_p\sin p\varphi)\varrho^p+\ldots,$$
$$P^2+Q^2=a_0^2+b_0^2+2\varrho^p[(a_0a_p+b_0b_p)\cos p\varphi+(b_0a_p-a_0b_p)\sin p\varphi]+\ldots,$$

причемъ послѣдующіе члены будутъ относительно ϱ степени выше p. Но изъ уравненія

$$(a_0a_p+b_0b_p)\cos p\varphi+(b_0a_p-a_0b_p)\sin p\varphi=0$$

имѣемъ $tg\,p\varphi=K$, что опредѣляетъ p различныхъ прямыхъ, образующихъ между собою углы, равные $\frac{2\pi}{p}$. Поэтому, на основаніи выше указаннаго замѣчанія, P^2+Q^2 не можетъ имѣть minimum'а при $x=y=0$, если только не будетъ одновременно

$$a_0a_p+b_0b_p=0,\quad b_0a_p-a_0b_p=0.$$

Такъ какъ $a_p^2+b_p^2$ не равно нулю, то необходимо, чтобы $a_0=b_0=0$, т.-е. чтобы при $x=y=0$ дѣйствительная и мнимая часть многочлена $f(z)$ были отдѣльно равны нулю.

Если $|f(z)|$ будетъ имѣть minimum при $x=\alpha, y=\beta$, то мы приведемъ этотъ случай къ предыдущему, положивъ $z=\alpha+i\beta+z'$; отсюда слѣдуетъ, что $|f(z)|$ не можетъ имѣть minimum'а, если только, при $x=\alpha$, $y=\beta$, P и Q не будутъ отдѣльно равны нулю.

Модуль $f(z)$ долженъ проходить черезъ minimum по крайней мѣрѣ для одного значенія z, такъ какъ этотъ модуль неограниченно возрастаетъ при неограниченномъ возрастаніи модуля z. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$, получимъ

$$P^2+Q^2=(a_m^2+b_m^2)\varrho^{2m}+\ldots,$$

причемъ послѣдующіе члены будутъ относительно ϱ степени ниже $2m$; послѣднее равенство можно также представить въ видѣ

$$\sqrt{P^2+Q^2}=\varrho^m(\sqrt{a_m^2+b_m^2}+\varepsilon),$$

гдѣ, при неограниченномъ возрастаніи ρ, ε стремится къ нулю. Поэтому можно описать окружность настолько большого радіуса R, чтобы значеніе $\sqrt{P^2+Q^2}$ во всѣхъ точкахъ этой окружности было больше значенія той же самой функціи въ какой-нибудь точкѣ, взятой внутри окружности, напримѣръ, въ началѣ координатъ. Отсюда слѣдуетъ, что внутри этой окружности есть по крайней мѣрѣ одна точка

$$x=\alpha, y=\beta,$$

для которой $\sqrt{P^2+Q^2}$ будетъ имѣть minimum. Но, по доказанному выше, точка $x=\alpha$, $y=\beta$ есть точка пересѣченія кривыхъ $P=0$, $Q=0$, а это значитъ, что $z=\alpha+\beta i$ есть корень уравненія $f(z)=0$.

Въ этомъ примѣрѣ, какъ и въ предыдущемъ, мы принимаемъ, что функція двухъ перемѣнныхъ (x, y), непрерывная внутри замкнутой площади, дѣйствительно достигаетъ значенія minimum'а внутри или на контурѣ этой площади. Это свойство непрерывныхъ функцій представляется весьма правдоподобнымъ уже на первый взглядъ; въ послѣдующемъ оно будетъ доказано со всею строгостью (см. дальше, глава VI).

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Число θ, входящее въ формулу остаточнаго члена Лагранжа, имѣетъ при h стремящемся къ нулю предѣлъ $\frac{1}{n+2}$, если только $f^{(n+2)}(a)$ не равно нулю.

2. Пусть будетъ $F(x)$ опредѣлитель n-го порядка, всѣ элементы котораго суть функціи отъ x. Производная $F'(x)$ есть сумма n опредѣлителей, каждый изъ которыхъ получится, если мы замѣнимъ послѣдовательно всѣ элементы каждой строки ихъ производными.

Во что обратится эта теорема для производныхъ высшихъ порядковъ?

3. Найти наибольшія и наименьшія значенія разстоянія отъ точки до плоской кривой, до кривой двойной кривизны, между двумя точками двухъ кривыхъ, между двумя точками двухъ поверхностей.

4. Точки поверхности S, для которыхъ сумма квадратовъ разстояній до n данныхъ точекъ будетъ наибольшею или наименьшею, суть основанія нормалей, опущенныхъ на эту поверхность изъ центра среднихъ разстояній для этихъ n точекъ*).

5. Изъ всѣхъ четыреугольниковъ съ четырьмя данными сторонами тотъ, который имѣетъ наибольшую поверхность, можетъ быть вписанъ въ окружность.

Обобщить на n-угольникъ.

6. Найти maximum объема прямоугольнаго параллелепипеда, вписаннаго въ эллипсоидъ.

---

*) Центръ среднихъ разстояній есть точка, декартовы координаты которой равны среднимъ ариѳметическимъ одноименныхъ координатъ данныхъ точекъ.

(Ред.)

7. Найти оси центральной кривой второго порядка, разсматривая вершины, какъ точки, разстояніе отъ которыхъ до центра будетъ наибольшимъ или наименьшимъ.

8. Та же самая задача для осей центральнаго сѣченія эллипсоида.

9. Найти эллипсъ съ наименьшею площадью, проходящій черезъ три вершины треугольника, и эллипсоидъ съ наименьшимъ объемомъ, проходящій черезъ четыре вершины тетраэдра.

10. Найти точку, сумма разстояній отъ которой до двухъ данныхъ прямыхъ и до данной точки будетъ наименьшею.

[Бертранъ.]

11. Доказать слѣдующія формулы

$$\log(x+2) = 2\log(x+1) - 2\log(x-1) + \log(x-2) + 2\left[\frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5 + \dots\right]$$

[Рядъ Борда (Borda)];

$$\log(x+5) = \log(x+4) + \log(x+3) - 2\log x + \log(x-3) + \log(x-4) - \log(x-5) - 2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3 + \dots\right].$$

[Рядъ Гаро (Haro).]

ГЛАВА IV.

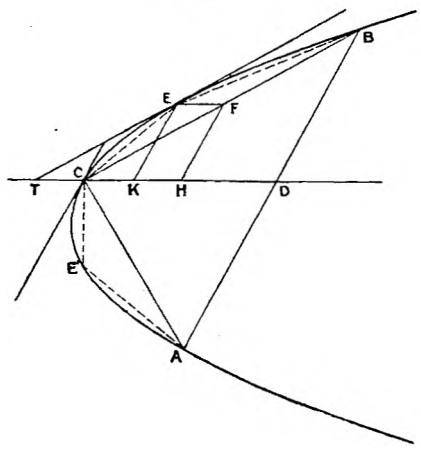
Опредѣленные интегралы.

I. — РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ КВАДРАТУРЫ.

64. Квадратура параболы. — Опредѣленіе площади плоской кривой есть одна изъ задачъ, рѣшеніе которой особенно привлекало изобрѣтательность геометровъ. Изъ примѣровъ, оставленныхъ намъ древними, особенно замѣчательна квадратура параболы, данная Архимедомъ; мы изложимъ здѣсь его методъ.

Пусть требуется опредѣлить площадь, заключающуюся между дугою параболы ACB и хордою AB. Проведемъ діаметръ CD, соединяющій средину D хорды AB съ точкою C, въ которой касательная параллельна хордѣ AB; проведемъ хорды BC и AC и возьмемъ точки E, E', въ которыхъ касательныя соотвѣтственно параллельны хордамъ BC и AC. Прежде всего сравнимъ площадь треугольника BEC съ площадью треугольника ABC. Проведемъ касательную ET, пересѣкающую CD въ точкѣ T, діаметръ EF, пересѣкающій CB въ точкѣ F, и наконецъ прямыя EK, FH, параллельныя хордѣ AB. По основному свойству параболы $TC = CK$; кромѣ того $CT = EF = KH$, и, слѣдовательно, $EF = \frac{CH}{2} = \frac{CD}{4}$. Площади треугольниковъ BCE, BDC, имѣющихъ общее основаніе BC, относятся между собою, какъ высоты, или какъ прямыя EF, CD. Слѣдовательно, площадь треугольника BCE равна

Черт. 8.



четверти площади треугольника BCD, или восьмой части площади S треугольника ABC. Площадь треугольника ACE' имѣетъ, очевидно, ту же величину. Производя тѣ же дѣйствія относительно каждой изъ хордъ BE, CE, CE', $E'A$, мы получимъ четыре новыхъ треугольника, причемъ площадь каждаго изъ нихъ будетъ равна $\frac{S}{8^2}$, и т. д.; n-ая операція приведетъ къ 2^n треугольникамъ, и площадь каждаго изъ нихъ будетъ равна $\frac{S}{8^n}$. Площадь сегмента параболы, очевидно, равна предѣлу, къ которому стремится сумма площадей всѣхъ этихъ треугольниковъ при неограниченномъ возрастаніи n, т.-е. равна суммѣ геометрической убывающей прогрессіи

$$S+\frac{S}{4}+\frac{S}{4^2}+\ldots+\frac{S}{4^n}+\ldots,$$

или $\frac{4S}{3}$. Такимъ образомъ мы видимъ, что искомая площадь равна $\frac{2}{3}$ площади параллелограмма, построеннаго на AB и CD.

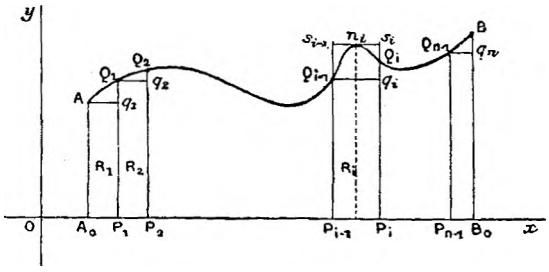
При всемъ удивленіи предъ остроуміемъ этого метода нельзя однако не замѣтить, что здѣсь успѣхъ зависитъ исключительно отъ частнаго свойства параболы, и что этотъ пріемъ совершенно не имѣетъ общности. Другіе примѣры квадратуры, данные древними, которые мы могли бы привести, только подтвердили бы это замѣчаніе; каждая новая кривая требовала новаго пріема. Но каковъ бы ни былъ этотъ пріемъ, всегда разбивали данную площадь на элементы, число которыхъ неограниченно увеличивали, и всегда нужно было искать предѣлъ суммы этихъ частичныхъ площадей. Не останавливаясь на всѣхъ этихъ частныхъ пріемахъ*), мы прямо перейдемъ къ общему методу разбіенія, который естественнымъ путемъ приведетъ насъ къ интегральному исчисленію.

65. Общій методъ. — Пусть требуется вычислить площадь S, заключающуюся между дугою кривой AMB, осью xx', не встрѣчающею этой дуги, и двумя перпендикулярами AA_0 и BB_0, опущенными на xx' изъ точекъ A и B. Мы предположимъ, кромѣ того, что никакая прямая, параллельная прямымъ AA_0, BB_0, не можетъ встрѣтить дугу AMB болѣе, чѣмъ въ одной точкѣ, какъ показано на чертежѣ 9.

*) Въ Traité Дюгамеля (Duhamel) можно найти большое число примѣровъ опредѣленія площадей, дугъ и объемовъ по способу древнихъ.

Разобьемъ отрѣзокъ A_0B_0 на нѣкоторое число равныхъ или неравныхъ частей точками $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ и проведемъ черезъ эти точки дѣленія прямыя P_1Q_1, $P_2Q_2, \ldots, P_{n-1}Q_{n-1}$, параллельныя прямой AA_0; эти прямыя встрѣтятъ дугу AB соотвѣтственно въ точкахъ $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$.

Черт. 9.



Далѣе, проведемъ черезъ A прямую, параллельную xx', которая пересѣчетъ P_1Q_1 въ точкѣ q_1, черезъ Q_1 — такую же прямую, которая пересѣчетъ P_2Q_2 въ точкѣ q_2, и т. д. Такимъ образомъ мы получимъ рядъ прямоугольниковъ $R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots, R_n$. Каждый изъ этихъ прямоугольниковъ можетъ весь находиться внутри контура ABB_0A_0, но можетъ также, какъ показываетъ чертежъ, имѣть часть и внѣ этого контура.

Обозначимъ черезъ α_i площадь прямоугольника R_i и черезъ β_i — площадь, ограниченную контуромъ $P_{i-1}P_iQ_iQ_{i-1}$. Замѣтимъ прежде всего, что если число точекъ дѣленія неограниченно возрастаетъ такимъ образомъ, что всѣ разстоянія $A_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{i-1}P_i, \ldots$ стремятся къ нулю, то каждое изъ отношеній $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\beta_i}{\alpha_i}, \ldots$ стремится къ единицѣ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, напримѣръ, отношеніе $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$; оно, очевидно, заключается между $\frac{l_i}{P_{i-1}Q_{i-1}}$ и $\frac{L_i}{P_{i-1}Q_{i-1}}$, гдѣ l_i и L_i суть наибольшія и наименьшія разстоянія точекъ дуги $Q_{i-1}Q_i$ отъ оси xx'. Ясно, что при неограниченномъ уменьшеніи разстоянія $P_{i-1}P_i$ оба эти отношенія стремятся къ единицѣ. Отсюда слѣдуетъ, что отношеніе

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n},$$

заключающееся между наибольшимъ и наименьшимъ изъ отношеній $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}$, при неограниченномъ возрастаніи числа прямоугольниковъ также имѣетъ предѣломъ единицу. Но дѣлитель этого отношенія постояненъ и равенъ искомой площади S. Слѣдовательно, если число n прямоугольниковъ неограниченно возрастаетъ, при соблюденіи указаннаго выше условія, то эта площадь S равна также предѣлу суммы $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$.

Чтобы вывести отсюда аналитическое выраженіе площади, отнесемъ кривую AB къ прямоугольной системѣ осей, и примемъ за ось Ox прямую xx'. Пусть будетъ $y=f(x)$ уравненіе кривой AB. По предположенію, $f(x)$ есть функція отъ x, непрерывная при измѣненіи x между предѣлами a и b, т.-е. между абсциссами точекъ A и B. Обозначимъ черезъ x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ абсциссы точекъ дѣленія P_1, $P_2, \ldots, P_{n-1}$; тогда основанія предыдущихъ прямоугольниковъ будутъ равны x_1-a, $x_2-x_1, \ldots, x_i-x_{i-1}, \ldots, b-x_{n-1}$, а высоты — $f(a), f(x_1), \ldots, f(x_{i-1}), \ldots, f(x_{n-1})$. Слѣдовательно, площадь S равна предѣлу, къ которому стремится сумма

$$(x_1-a)\ f(a)+(x_2-x_1)\ f(x_1)+\ldots+(b-x_{n-1})\ f(x_{n-1}), \quad (1)$$

когда число n неограниченно возрастаетъ, такъ что всѣ разности $x_1-a, x_2-x_1, \ldots$ стремятся къ нулю.

66. Примѣры. — Если мы раздѣлимъ основаніе A_0B_0 на n равныхъ частей, имѣющихъ длину h, $(b-a=nh)$, то всѣ прямоугольники будутъ имѣть одно и то же основаніе h, а высоты будутъ соотвѣтственно равны

$$f(a), \quad f(a+h), \quad f(a+2h), \quad \ldots, \quad f[a+(n-1)h].$$

Слѣдовательно, намъ нужно будетъ найти предѣлъ суммы

$$h\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f[a+(n-1)h]\}$$

при неограниченномъ возрастаніи числа n,

причемъ $$h=\frac{b-a}{n}.$$

Эта задача выполнима въ тѣхъ случаяхъ, когда мы умѣемъ находить сумму значеній функціи $f(x)$ для значеній x, образующихъ ариѳметическую прогрессію. Такъ будетъ, если $f(x)$ будетъ цѣлою степенью отъ x, или если $f(x)=\sin mx, f(x)=\cos mx$, и т. п. Возьмемъ, напримѣръ, параболу $x^2=2py$ и найдемъ площадь, заключающуюся между дугою OA параболы, осью x и прямою $x=a$, проходящею черезъ точку A. Раздѣливъ основаніе на n равныхъ частей, имѣющихъ длину, h $(nh=a)$, мы, по предыдущему, должны найти предѣлъ суммы

$$\frac{h}{2p}[h^2+4h^2+\ldots+(n-1)^2h^2]=\frac{h^2}{2p}[1+4+9+\ldots+(n-1)^2].$$

Количество, стоящее въ скобкахъ, есть сумма квадратовъ $(n-1)$ первыхъ чиселъ, равная $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$; слѣдовательно, предыдущая сумма равна

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{12pn^3}a^2.$$

При возрастаніи числа n эта сумма, очевидно, имѣетъ предѣломъ $\frac{a^3}{6p}=\frac{1}{3}a\frac{a^2}{2p}$, т.-е. треть прямоугольника, построеннаго на двухъ координатахъ точки A, что согласно съ полученнымъ выше результатомъ.

Въ другихъ случаяхъ, какъ, напримѣръ, въ слѣдующемъ примѣрѣ, данномъ Ферма (Fermat), удобнѣе взять за абсциссы точекъ дѣленія числа, идущія въ геометрической прогрессіи.

Пусть требуется найти площадь, заключающуюся между кривою $y=Ax^\mu$, осью x и прямыми $x=a$, $x=b$, $(0<a<b)$, причемъ показатель μ произволенъ. Вставимъ между a и b $(n-1)$ среднихъ геометрическихъ, такъ чтобы получилась прогрессія

$$a,\ a(1+\alpha),\quad a(1+\alpha)^2,\quad \ldots,\quad a(1+\alpha)^{n-1},\quad b,$$

причемъ число α должно удовлетворять условію $a(1+\alpha)^n=b$. Если мы примемъ эти числа за абсциссы точекъ дѣленія, то соотвѣтствующія ординаты будутъ имѣть значенія

$$Aa^\mu,\quad Aa^\mu(1+\alpha)^\mu,\quad Aa^\mu(1+\alpha)^{2\mu},\quad \ldots,$$

и площадь p-аго прямоугольника будетъ имѣть выраженіе

$$\left[a(1+\alpha)^p-a(1+\alpha)^{p-1}\right]Aa^\mu(1+\alpha)^{(p-1)\mu}=Aa^{\mu+1}\alpha(1+\alpha)^{(p-1)(\mu+1)}.$$

Сумма площадей всѣхъ этихъ прямоугольниковъ будетъ равна

$$Aa^{\mu+1}\alpha\left[1+(1+\alpha)^{\mu+1}+(1+\alpha)^{2(\mu+1)}+\ldots+(1+\alpha)^{(n-1)(\mu+1)}\right].$$

Предположимъ, что $\mu+1$ не равно нулю; тогда сумма въ скобкахъ будетъ равна $\frac{(1+\alpha)^{n(\mu+1)}-1}{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}$, и, замѣняя $a(1+\alpha)^n$ черезъ b, мы можемъ представить предыдущую сумму въ видѣ

$$A(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\frac{\alpha}{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}.$$

Если α стремится къ нулю, то частное $\frac{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}{\alpha}$ имѣетъ предѣломъ производную отъ $(1+\alpha)^{\mu+1}$ по α при $\alpha=0$, т.-е. $\mu+1$; такимъ образомъ искомая площадь будетъ равна

$$\frac{A(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})}{\mu+1}.$$

Если $\mu=-1$, то предыдущимъ способомъ вычисленіе быть выполнено не можетъ. Въ этомъ случаѣ сумма площадей вписанныхъ прямоугольниковъ будетъ равна $nA\alpha$, и нужно искать предѣлъ произведенія $n\alpha$, причемъ числа n и α связаны соотношеніемъ

$$a(1+\alpha)^n=b.$$

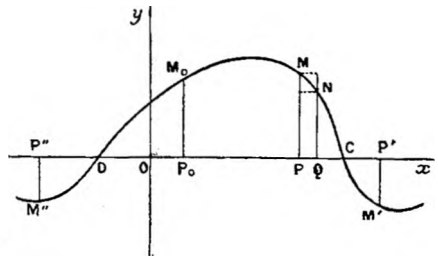
Отсюда находимъ

$$n\alpha = \log\frac{b}{a}\,\frac{\alpha}{\log(1+\alpha)} = \log\frac{b}{a}\,\frac{1}{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

гдѣ log обозначаетъ неперовъ логариѳмъ. Если α стремится къ нулю, то $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ имѣетъ предѣломъ число e, и произведеніе $n\alpha$ имѣетъ предѣломъ $\log\frac{b}{a}$. Такимъ образомъ искомая площадь будетъ равна $A\log\frac{b}{a}$.

67. Начальныя функціи. — Изобрѣтеніе интегральнаго исчисленія привело вычисленіе площадей къ нахожденію функцій, имѣющихъ своею производною данную функцію. Пусть будетъ $y=f(x)$ уравненіе кривой, отнесенной къ двумъ прямоугольнымъ осямъ, и пусть функція $f(x)$ — непрерывна. Разсмотримъ площадь, заключающуюся между этою кривою, осью x, неподвижною ординатою M_0P_0 и перемѣнною ординатою MP. Будемъ считать эту площадь функціею абсциссы x перемѣнной ординаты MP. Эта площадь A есть, очевидно, непрерывная функція отъ x, если только функція $f(x)$ сама непрерывна. Чтобы обнять всѣ возможные случаи, условимся обозначать черезъ A алгебраическую сумму площадей, ограниченныхъ данною кривою, осью x и прямыми M_0P_0, MP, приписывая каждой изъ частей, изъ которыхъ можетъ слагаться эта площадь, знакъ + для площадей, лежащихъ направо отъ M_0P_0 и надъ Ox, знакъ — для площадей, лежащихъ направо отъ M_0P_0 и подъ Ox. Площадямъ, расположеннымъ налѣво отъ M_0P_0, мы будемъ давать противоположные знаки. Такимъ образомъ, если MP занимаемъ положеніе $M'P'$, то мы будемъ брать A равнымъ разности двухъ площадей

Черт. 10.



$$M_0P_0C - M'P'C;$$

точно также, если MP находится въ $M''P''$, то мы будемъ брать $A = M''P''D - M_0P_0D$.

Покажемъ теперь, что непрерывная функція A, опредѣленная предыдущими условіями, имѣетъ своею производною функ-

цію $f(x)$. Возьмемъ, какъ показано на чертежѣ, двѣ близкія между собою ординаты MP, NQ съ абсциссами x и $x+\Delta x$. Приращеніе площади ΔA, очевидно, заключается между площадями двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе PQ, а высотами соотвѣтственно наибольшую и наименьшую изъ ординатъ дуги MN. Обозначая эти ординаты maxima и minima черезъ H и h, мы можемъ написать

$$h\Delta x < \Delta A < H\Delta x,$$

или, раздѣливъ на Δx, $h < \frac{\Delta A}{\Delta x} < H$. Такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна, то, при приближеніи Δx къ нулю, H и h имѣютъ общій предѣлъ, MP или $f(x)$; слѣдовательно, функція A имѣетъ своею производною функцію $f(x)$. Читатель легко убѣдится, что этотъ результатъ остается безъ измѣненія при всякомъ положеніи точки M.

Если намъ уже извѣстна одна изъ начальныхъ функцій отъ $f(x)$, т.-е. какая-нибудь функція $F(x)$, имѣющая своею производною функцію $f(x)$, то разность $A-F(x)$, производная которой равна нулю, равна нѣкоторому постоянному C (§ 8). Чтобы опредѣлить это постоянное C, достаточно замѣтить, что площадь A равна нулю для абсциссы $x=a$ прямой M_0P_0. Поэтому

$$A=F(x)-F(a).$$

Предыдущее разсужденіе показываетъ, что опредѣленіе площади приводится къ разысканію начальной функціи; съ другой стороны (и для насъ это второе слѣдствіе еще важнѣе), оно показываетъ, что всякая непрерывная функція $f(x)$ есть производная отъ другой функціи. Такимъ образомъ эта основная теорема доказывается здѣсь при помощи нѣсколько неопредѣленнаго геометрическаго понятія площади плоской кривой. Этимъ доказательствомъ долгое время довольствовались, но теперь оно не можетъ считаться достаточнымъ. Чтобы поставить интегральное исчисленіе на прочномъ основаніи, необходимо дать этой теоремѣ чисто аналитическое доказательство, не обращаясь къ геометрическому представленію. Предыдущее доказательно приведено здѣсь не только вслѣдствіе его историческаго интереса, но и потому, что оно даетъ намъ главный аналитическій элементъ новаго доказательства. Дѣйствительно, въ этомъ послѣднемъ главную роль будетъ играть изученіе суммъ вида (1), а также суммъ нѣсколько болѣе общаго вида. Прежде чѣмъ обратиться къ изу-

ченію этихъ суммъ, намъ необходимо сдѣлать нѣсколько замѣчаній относительно общихъ свойствъ функцій и, въ частности,— функцій непрерывныхъ *).

II. — ОПРЕДѢЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. — ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ ПОНЯТІЯ, СЪ НИМИ СВЯЗАННЫЯ.

68. Верхніе и нижніе предѣлы. — Данное множество (ensemble) чиселъ называется ограниченнымъ сверху, если можно найти такое опредѣленное число N, чтобы ни одно число, входящее въ это множество, не было больше N. Точно также множество ограничено снизу, если можно найти такое число N', чтобы ни одно число, входящее въ это множество, не было меньше N'. Такимъ образомъ множество цѣлыхъ положительныхъ чиселъ ограничено снизу, но не ограничено сверху; множество всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ, не ограничено ни съ той, ни съ другой стороны, тогда какъ множество раціональныхъ чиселъ, заключающихся между 0 и 1, ограничено съ обѣихъ сторонъ.

Пусть будетъ (E) множество, ограниченное сверху. По отношенію къ этому множеству всѣ числа могутъ быть разбиты на два класса. Мы будемъ считать число α принадлежащимъ къ первому классу, если между числами множества (E) есть числа, большія α, и будемъ относить число α ко второму классу, если ни одно изъ чиселъ множества (E) не больше α; если разсматриваемое множество ограничено сверху, то, очевидно, существуютъ числа обоихъ классовъ. Пусть будетъ A число перваго класса и B—число второго класса; очевидно, что $A<B$, и что среди чиселъ множества (E) есть числа, заключающіяся между A и B, тогда какъ нѣтъ ни одного, которое было бы больше B. Число $C=\frac{A+B}{2}$ можетъ принадлежать или къ первому или ко второму классу. Въ первомъ случаѣ мы возьмемъ вмѣсто промежутка (A, B) новый промежутокъ (C, B), а во второмъ случаѣ — промежутокъ (A, C). Новый промежутокъ (A_1, B_1) равенъ половинѣ (A, B) и обладаетъ тѣмъ же самымъ свойствомъ,

*) Изъ важнѣйшихъ работъ по вопросу о геометрическомъ значеніи опредѣленнаго интеграла слѣдуетъ указать здѣсь на мемуаръ Римана (Riemann), Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (Werke, 2-е изданіе, 1892; стран. 239. Французскій переводъ, Oeuvres de Riemann, traduites par Laugel, стран. 225), и уже упомянутый нами мемуаръ Дарбу, Sur les fonctions discontinues (Annales de l'École Normale supérieure, 2-ая серія, т. IV).

какъ и первый: между числами множества (E) есть, по крайней мѣрѣ, одно число, большее A_1, и нѣтъ ни одного, большаго B_1. Поступая съ (A_1, B_1) такъ же, какъ ранѣе съ (A, B), и продолжая этотъ процессъ неограниченно, мы составимъ безконечную послѣдовательность промежутковъ (A, B), (A_1, B_1),(A_2, B_2), . . . , изъ которыхъ каждый равенъ половинѣ предыдущаго и каждый обладаетъ относительно множества (E) тѣмъ же самымъ свойствомъ, какъ и первый промежутокъ (A, B). Въ рядѣ чиселъ $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ каждое число не меньше предыдущаго, и всѣ они меньше B; слѣдовательно, эти числа стремятся къ нѣкоторому предѣлу λ (§ 1). Съ другой стороны, въ рядѣ чиселъ $B, B_1, B_2, \ldots, B_n$ каждое не больше предыдущаго, и всѣ они больше A; слѣдовательно, эти числа стремятся къ нѣкоторому предѣлу λ'. Кромѣ того, разность $B_n - A_n = \frac{B-A}{2^n}$ при неограниченномъ возрастаніи n стремится къ нулю, а это можетъ имѣть мѣсто только при $\lambda = \lambda'$. Пусть будетъ L этотъ общій предѣлъ; это число L называется верхнимъ предѣломъ множества (E). Изъ соображеній, при помощи которыхъ мы получили L, ясно, что это число обладаетъ слѣдующими двумя свойствами:

1°. Ни одно число множества (E) не больше L.

2°. Какъ бы мало ни было положительное число ε, въ множествѣ (E) всегда есть число, большее, чѣмъ $L-\varepsilon$.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что въ данномъ множествѣ есть число, большее L; пусть оно будетъ $L+h$ $(h>0)$. Такъ какъ, при неограниченномъ возрастаніи n, B_n стремится къ L, то, начиная съ нѣкотораго достаточно большого значенія n, B_n было бы меньше $L+h$, что невозможно, такъ какъ число B_n принадлежитъ ко второму классу. Съ другой стороны, пусть будетъ ε какое-нибудь положительное число. Начиная съ достаточно большого значенія n, A_n будетъ больше $L-\varepsilon$, и, такъ какъ въ (E) находятся числа, большія A_n, то они будутъ также больше, чѣмъ $L-\varepsilon$. Ясно, что никакому другому числу, кромѣ L, предыдущія свойства принадлежать не могутъ.

Верхній предѣлъ L можетъ или принадлежать ко множеству (E) или не принадлежать къ нему. Напримѣръ, если мы возьмемъ раціональныя числа, не превосходящія числа 2, то это число 2 есть какъ разъ ихъ верхній предѣлъ и вмѣстѣ съ тѣмъ оно принадлежитъ къ этому множеству; напротивъ, ирраціональныя числа, не превосходящія 2, также имѣютъ 2 своимъ верхнимъ предѣломъ, но здѣсь этотъ предѣлъ уже не входитъ во множество. Замѣтимъ еще, что когда верхній предѣлъ L не при-

надлежитъ ко множеству (E), то всегда существуетъ безконечное множество чиселъ, принадлежащихъ къ (E), и большихъ $L-\varepsilon$, какъ бы ни было мало ε. Въ самомъ дѣлѣ, если бы ихъ было только конечное число, то верхнимъ предѣломъ было бы наибольшее изъ этихъ чиселъ, а не число L. Если множество состоитъ только изъ n различныхъ чиселъ, то верхній предѣлъ равенъ наибольшему изъ этихъ n чиселъ.

Такимъ же образомъ можно доказать, что если множество (E) ограничено снизу, то оно имѣетъ нижній предѣлъ L', обладающій слѣдующими двумя свойствами:

1°. Ни одно число множества (E) не меньше L'.

2°. Какъ бы мало ни было положительное число ε, въ множествѣ (E) всегда есть число, меньшее, чѣмъ $L'+\varepsilon$*).

69. Колебаніе. — Пусть будетъ $f(x)$ функція, вполнѣ опредѣленная въ промежуткѣ (a, b), т.-е. такая, что каждому значенію x, заключающемуся между a и b, и самимъ предѣламъ a и b соотвѣтствуетъ единственное значеніе функціи $f(x)$**). Эта функція называется конечною въ этомъ промежуткѣ, если всѣ значенія, которыя она принимаетъ, заключаются между двумя опредѣленными числами A и B. Въ такомъ случаѣ всѣ значенія функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b) составляютъ множество, ограниченное сверху и снизу. Пусть будутъ M и m верхній и нижній предѣлъ этого множества; разность $\Delta=M-m$ называется колебаніемъ функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b).

По поводу этихъ опредѣленій необходимо сдѣлать слѣдующія замѣчанія. Для того чтобы функція была конечною въ промежуткѣ (a, b), еще не достаточно, чтобы она имѣла конечное значеніе при каждомъ значеніи x. Такъ, функція $f(x)$, опредѣленная между 0 и 1 слѣдующими условіями,

$$f(0)=0; \quad f(x)=\frac{1}{x}, \quad \text{при } x>0,$$

*) Если на основаніи какого-нибудь опредѣленнаго признака всѣ числа могутъ быть раздѣлены на два класса A и B такимъ образомъ, что каждое число класса A меньше каждаго числа класса B, то верхній предѣлъ L чиселъ класса A есть въ то же время нижній предѣлъ чиселъ класса B. Прежде всего очевидно, что всѣ числа, бо́льшія L, будутъ принадлежать къ классу B; съ другой стороны, если бы существовало число $L'<L$, входящее въ классъ B, то и всякое число, большее L', принадлежало бы къ классу B. Отсюда видно, что всякое число, меньшее L, будетъ принадлежать къ классу A; всякое число, большее L, будетъ принадлежать къ классу B. Само число L можетъ принадлежать къ тому или другому классу.

**) См. § 2.

имѣетъ конечныя значенія при всѣхъ значеніяхъ x, и, тѣмъ не менѣе, она не является конечною въ томъ смыслѣ, какой мы здѣсь приписываемъ этому слову, такъ какъ достаточно положить $x<\frac{1}{A}$, чтобы имѣть $f(x)>A$. Точно также функція, конечная въ промежуткѣ (a, b), можетъ принимать значенія, какъ угодно мало отличающіяся отъ верхняго предѣла M или отъ нижняго предѣла m, но она можетъ и не принимать самихъ предѣльныхъ значеній. Напримѣръ, функція $f(x)$, опредѣленная въ промежуткѣ $(0, 1)$ условіями,

$$f(0)=0; \quad f(x)=1-x, \quad \text{при } 0<x\leqq 1,$$

имѣетъ верхнимъ предѣломъ $M=1$, но никогда не достигаетъ этого предѣла.

70. Свойства непрерывныхъ функцій. — Мы теперь подробно остановимся на свойствахъ непрерывныхъ функцій.

Теорема А. — Пусть будетъ $f(x)$ функція, непрерывная въ промежуткѣ (a,b), и пусть будетъ ε произвольное положительное число. Можно всегда разбить промежутокъ (a, b) на нѣкоторое число такихъ новыхъ промежутковъ, чтобы для двухъ произвольныхъ значеній перемѣннаго x', x'', принадлежащихъ къ одному и тому же промежутку, было всегда $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что эта теорема не вѣрна. Возьмемъ число $c=\frac{a+b}{2}$; по крайней мѣрѣ одинъ изъ двухъ промежутковъ (a, c), (c, b) будетъ обладать тѣмъ же свойствомъ, какъ и промежутокъ (a, b), т.-е. его нельзя будетъ разбить на частичные промежутки, удовлетворяющіе условію теоремы. Взявъ вмѣсто (a, b) этотъ промежутокъ и разсуждая, какъ и выше (§ 68), мы составимъ безконечную послѣдовательность промежутковъ (a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., изъ которыхъ каждый равенъ половинѣ предыдущаго и каждый обладаетъ тѣмъ же самымъ свойствомъ, какъ и начальный промежутокъ (a, b); тогда, какъ бы велико ни было n, всегда можно найти въ промежуткѣ (a_n, b_n) два такихъ числа x' и x'', чтобы $|f(x')-f(x'')|$ было больше ε. Обозначимъ черезъ λ общій предѣлъ двухъ послѣдовательностей чиселъ $a, a_1, a_2, \ldots$ и $b, b_1, b_2, \ldots$ Такъ какъ функція $f(x)$ при $x=\lambda$ непрерывна, то можно найти такое число η, чтобы было $|f(x)-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2}$, если $|x-\lambda|$ меньше η. Выберемъ затѣмъ n настолько большимъ, чтобы a_n и b_n отлича-

лись отъ λ меньше, чѣмъ на η; ясно, что промежутокъ (a_n, b_n) будетъ заключаться въ промежуткѣ $(\lambda-\eta, \lambda+\eta)$. Если x' и x'' будутъ два какихъ-нибудь значенія x въ промежуткѣ (a_n, b_n), то

$$|f(x')-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'')-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

и, слѣдовательно, $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Но выше мы предположили, что $|(fx')-f(x'')|$ было больше ε. Такимъ образомъ предположеніе, изъ котораго мы исходили, привело насъ къ противорѣчію. Слѣдовательно, теорема доказана.

Слѣдствіе I. — Пусть будетъ $a, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, b$ одинъ изъ способовъ разбіенія промежутка (a, b) на p промежутковъ, удовлетворяющихъ указаннымъ условіямъ. Въ промежуткѣ (a, x_1) мы имѣемъ $|f(x)|<|f(a)|+\varepsilon$ и, въ частности, $|f(x_1)|<|f(a)|+\varepsilon$. Точно также, въ промежуткѣ (x_1, x_2) мы будемъ имѣть $|f(x)|<|f(x_1)|+\varepsilon$ и, a fortiori, $|f(x)|<|f(a)|+2\varepsilon$; въ частности, при $x=x_2$, $|f(x_2)|<|f(a)|+2\varepsilon$, и т. д. Для послѣдняго промежутка мы получаемъ неравенство

$$|f(x)|<|f(x_{p-1})|+\varepsilon<|f(a)|+p\varepsilon.$$

Мы видимъ, что абсолютное значеніе функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b) остается всегда меньшимъ $|f(a)|+p\varepsilon$. Такимъ образомъ всякая функція, непрерывная въ промежуткѣ (a, b), будетъ конечною въ этомъ промежуткѣ.

Слѣдствіе II. — Предположимъ, что мы разбили промежутокъ (a, b) на p такихъ промежутковъ $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{p-1}, b)$, что всегда $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$ при любыхъ двухъ значеніяхъ x, принадлежащихъ къ одному и тому же промежутку. Пусть будетъ η положительное число, меньшее всѣхъ разностей x_1-a, $x_2-x_1, \ldots, b-x_{p-1}$. Возьмемъ два какихъ-нибудь числа x', x'', заключающихся между a и b, такихъ, чтобы $|x'-x''|<\eta$, и найдемъ верхнюю границу значенія $|f(x')-f(x'')|$. Если оба числа x', x'' будутъ лежать въ одномъ и томъ же промежуткѣ, то $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$. Въ противномъ случаѣ, x' и x'' будутъ принадлежать двумъ сосѣднимъ промежуткамъ, и ясно, что $|f(x')-f(x'')|<2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Слѣдовательно, если x' и x'' обозначаютъ два числа промежутка (a, b), то для вся-

каго положительнаго числа ε можно найти такое другое положительное число η, чтобы было

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

если $|x'-x''|<\eta$.

Это свойство выражается также слѣдующимъ образомъ: функція $f(x)$ есть равномѣрно непрерывная въ промежуткѣ (a, b).

Теорема B. — Функція $f(x)$, непрерывная въ промежуткѣ (a, b), принимаетъ по крайней мѣрѣ одинъ разъ всякое значеніе, заключающееся между $f(a)$ и $f(b)$, при значеніи x, заключающемся между a и b.

Разсмотримъ сначала частный случай. Предположимъ, что знаки $f(a)$ и $f(b)$ будутъ противоположны, напримѣръ, $f(a)<0$, $f(b)>0$. Мы покажемъ, что есть, по крайней мѣрѣ, одно значеніе x, заключающееся между a и b, при которомъ $f(x)=0$. Въ самомъ дѣлѣ, функція $f(x)$ отрицательна вблизи a и положительна вблизи b. Разсмотримъ множество тѣхъ значеній перемѣннаго x, заключающихся между a и b, при которыхъ функція $f(x)$ положительна; пусть будетъ λ нижній предѣлъ этого множества $(a<\lambda<b)$. По самому опредѣленію нижняго предѣла, количество $f(\lambda-h)$ будетъ отрицательно или равно нулю при всякомъ положительномъ значеніи h; отсюда слѣдуетъ, что и $f(\lambda)$, которое будетъ предѣломъ $f(\lambda-h)$, будетъ также отрицательно или равно нулю. Но, съ другой стороны, $f(\lambda)$ не можетъ быть отрицательно. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что $f(\lambda)=-m$, гдѣ m — положительное число; такъ какъ функція $f(x)$ при $x=\lambda$ непрерывна, то можно найти такое число η, чтобы было $|f(x)-f(\lambda)|<m$, если $|x-\lambda|<\eta$; такимъ образомъ $f(x)$ будетъ отрицательною при значеніяхъ x, заключающихся между λ и $\lambda+\eta$, и λ не будетъ нижнимъ предѣломъ тѣхъ значеній x, при которыхъ функція положительна. Слѣдовательно, $f(\lambda)=0$.

Пусть будетъ теперь N число, заключающееся между $f(a)$ и $f(b)$. Непрерывная функція $\varphi(x)=f(x)-N$ при $x=a$ и при $x=b$ имѣетъ значенія разныхъ знаковъ. Слѣдовательно, на основаніи только что доказаннаго, она по крайней мѣрѣ одинъ разъ обращается въ нуль въ промежуткѣ (a, b).

Теорема C. — Всякая функція, непрерывная въ промежуткѣ (a, b), достигаетъ по крайней мѣрѣ одинъ разъ своего верхняго и своего нижняго предѣла.

Такъ какъ уже было доказано, что всякая непрерывная функція остается конечною, то она имѣетъ верхній предѣлъ M

и нижній предѣлъ m. Докажемъ, напримѣръ, что $f(x)=M$ по крайней мѣрѣ при одномъ значеніи x въ промежуткѣ (a, b).

Пусть будетъ $c=\frac{a+b}{2}$; по крайней мѣрѣ въ одномъ изъ промежутковъ (a, c), (c, b) верхній предѣлъ функціи $f(x)$ будетъ равенъ M. Замѣнимъ (a, b) этимъ новымъ промежуткомъ, произведемъ съ этимъ премежуткомъ тѣ же самыя дѣйствія, и т. д. Разсуждая, какъ и прежде, мы составимъ безконечную послѣдовательность промежутковъ (a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2),..., изъ которыхъ каждый есть половина предыдущаго. Въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ верхній предѣлъ функціи $f(x)$ остается равнымъ M. Пусть будетъ λ общій предѣлъ обѣихъ послѣдовательностей $a, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и $b, b_1, \ldots, b_n, \ldots$. Докажемъ, что $f(\lambda)$ равно M. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что $f(\lambda)=M-h$, причемъ h положительно. Всегда можно найти такое положительное число η, чтобы при измѣненіи x отъ $\lambda-\eta$ до $\lambda+\eta$ значеніе функціи $f(x)$ заключалось между $f(\lambda)+\frac{h}{2}$ и $f(\lambda)-\frac{h}{2}$ и было, слѣдовательно, меньше $M-\frac{h}{2}$. Возьметъ n настолько большимъ, чтобы a_n и b_n отличались отъ ихъ предѣла λ меньше, чѣмъ на η; тогда промежутокъ (a_n, b_n) будетъ содержаться въ промежуткѣ $(\lambda-\eta, \lambda+\eta)$. Слѣдовательно, верхній предѣлъ функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a_n, b_n) не превосходитъ $M-\frac{h}{2}$ и не можетъ быть равенъ M.

Сопоставляя эту теорему съ предыдущею, мы заключаемъ, что функція, непрерывная въ промежуткѣ (a, b), проходитъ, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ черезъ всякое значеніе, заключающееся между ея верхнимъ и ея нижнимъ предѣломъ. Теорема А можетъ быть выражена также слѣдующимъ образомъ: Если дана функція, непрерывная въ промежуткѣ (a, b), то можно разбить этотъ промежутокъ на новые промежутки настолько малые, чтобы колебаніе функціи въ каждомъ изъ нихъ было меньше всякаго произвольно взятаго положительнаго числа. Въ самомъ дѣлѣ, колебаніе непрерывной функціи $f(x)$ равно разности значеній функціи $f(x)$ при двухъ частныхъ значеніяхъ перемѣннаго.

71. Суммы S и s. — Пусть будетъ $f(x)$ конечная функція, непрерывная или прерывная въ промежуткѣ (a, b), причемъ $a<b$. Предположимъ, что промежутокъ (a, b) разбитъ на нѣкоторое число частичныхъ болѣе мелкихъ промежутковъ (a, x_1),

(x_1, x_2), ..., (x_{p-1}, b), причемъ числа $x_1, x_2, \ldots x_{p-1}$ образуютъ возрастающую послѣдовательность. Обозначимъ черезъ M и m предѣлы функціи $f(x)$ въ цѣломъ промежуткѣ, черезъ M_i и m_i— ея предѣлы въ промежуткѣ (x_{i-1}, x_i) и положимъ

$$S = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_p(b - x_{p-1}),$$
$$s = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_p(b - x_{p-1}).$$

Всякому способу разбіенія (a, b) на болѣе мелкіе промежутки соотвѣтствуютъ свои суммы S и $s < S$. Всѣ суммы S, очевидно, больше $m(b-a)$, такъ какъ всѣ числа M_i больше m; слѣдовательно, эти суммы S имѣютъ нижній предѣлъ I. Точно также всѣ суммы s меньше $M(b-a)$ и, слѣдоватнльно, имѣютъ верхній предѣлъ I'. Мы докажемъ, что I' не можетъ быть больше I. Для этого, очевидно, достаточно показать, что если даны два какихъ-нибудь способа разбіенія промежутка (a, b), которымъ соотвѣтствуютъ суммы S и s, S' и s', то: $s < S'$, $s' < S$.

Предположимъ сначала, что каждый изъ промежутковъ (a, x_1), (x_1, x_2), ... новыми точками дѣленія разбитъ на болѣе мелкіе промежутки, и пусть будетъ

$$a, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, \ldots, y_{l-1}, x_2, y_{l+1}, \ldots, b$$

получившаяся новая послѣдовательность. Такое новое разбіеніе мы назовемъ послѣдующимъ относительно первоначальнаго. Обозначимъ суммы, аналогичныя S и s и относящіяся къ этому новому разбіенію промежутка (a, b), черезъ Σ и σ, и сравнимъ S и Σ, s и σ. Сравнимъ, напримѣръ, части двухъ суммъ S и Σ, относящіяся къ промежутку (a, x_1). Пусть будутъ M_1' и m_1' предѣлы функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, y_1), M_2' и m_2'— ея предѣлы въ промежуткѣ (y_1, y_2), ..., M_k' и m_k'— предѣлы въ промежуткѣ (y_{k-1}, x_1). Часть суммы Σ, происходящая отъ (a, x_1), равна

$$M_1'(y_1 - a) + M_2'(y_2 - y_1) + \ldots + M_k'(x_1 - y_{k-1}).$$

Такъ какъ числа $M_1', M_2', \ldots, M_k'$ не могутъ быть больше M_1, то ясно, что предыдущая сумма не можетъ быть больше $M_1(x_1 - a)$. Точно также часть суммы Σ, происходящая отъ промежутка (x_1, x_2), не можетъ быть больше $M_2(x_2 - x_1)$, и т. д. Складывая всѣ эти неравенства, мы находимъ $\Sigma \leqq S$, и точно также мы нашли бы, что $\sigma \geqq s$.

Разсмотримъ теперь два какихъ-нибудь способа разбіенія, которымъ соотвѣтствуютъ суммы S и s, S' и s'. Разсматривая одновременно точки дѣленія обоихъ предыдущихъ разбіеній, мы получимъ третій способъ разбіенія, который можетъ быть разсматриваемъ, какъ послѣдующій относительно каждаго изъ

двухъ первыхъ. Пусть будутъ Σ' и σ суммы, относящіяся къ этому вспомогательному разбіенію. На основаніи предыдущаго мы имѣемъ неравенства

$$\Sigma \leqq S, \quad \sigma \geqq s, \quad \Sigma \leqq S', \quad \sigma \geqq s'.$$

Такъ какъ Σ больше σ, то отсюда слѣдуетъ, что $s' < S$, $s < S'$. Такимъ образомъ всѣ суммы S будутъ больше суммъ s, и предѣлъ I не можетъ быть меньше предѣла I'; слѣдовательно, $I \geqq I'$.

72. Интегрируемыя функціи. — Функція, конечная въ промежуткѣ (a, b), называется интегрируемою въ этомъ промежуткѣ, если обѣ суммы S и s стремятся къ общему предѣлу, когда число частичныхъ промежутковъ неограниченно возрастаетъ такимъ образомъ, что каждый изъ этихъ промежутковъ стремится къ нулю.

Для того чтобы функція была интегрируемою въ промежуткѣ (a, b), необходимо и достаточно, чтобы для всякаго положительнаго числа ε можно было найти такое соотвѣтствующее положительное число η, чтобы $S-s$ было меньше ε, когда всѣ частичные промежутки будутъ меньше η.

Это условіе необходимо. Въ самомъ дѣлѣ, если S и s имѣютъ общій предѣлъ I, то можно найти настолько малое число η, чтобы $|S-I|$ и $|s-I|$ были меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, если всѣ частичные промежутки будутъ меньше η. Отсюда, a fortiori, будемъ имѣть $S-s<\varepsilon$.

Это условіе вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточное. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$S-s=S-I+I-I'+I'-s.$$

Ни одно изъ чиселъ $S-I$, $I-I'$, $I'-s$ не можетъ быть отрицательнымъ; чтобы ихъ сумма была меньше ε, необходимо, чтобы каждое изъ нихъ было меньше ε. Но $I-I'$ есть опредѣленное число, положительное или нуль, тогда какъ ε — произвольное положительное число; поэтому необходимо $I'=I$. Далѣе, для того чтобы было $S-I<\varepsilon$, $I-s<\varepsilon$, когда всѣ частичные промежутки будутъ меньше η, необходимо, чтобы суммы S и s имѣли общій предѣлъ I.

Если функція $f(x)$ удовлетворяетъ приведеннымъ условіямъ, то она называется интегрируемою въ промежуткѣ (a, b); предѣлъ I называется опредѣленнымъ интеграломъ и изображается символомъ

$$I=\int_a^b f(x)\,dx,$$

который указываетъ на его происхожденіе и читается слѣдующимъ образомъ: интегралъ отъ a до b отъ $f(x)\,dx$. По самому опредѣленію, число I всегда заключается между двумя суммами S и s, соотвѣтствующими какому-нибудь способу разбіенія; принимая за приближенное значеніе I любое число, заключающееся между S и s, мы допустимъ погрѣшность, меньшую $S-s$.

Всякая непрерывная функція интегрируема. — Въ самомъ дѣлѣ, разность $S-s$ не превосходитъ $(b-a)\,\omega$, гдѣ ω обозначаетъ верхній предѣлъ колебанія $f(x)$ въ каждомъ частичномъ промежуткѣ. Но всегда можно найти такое число η, чтобы во всякомъ промежуткѣ, меньшемъ η, колебаніе функціи $f(x)$ было меньше любого даннаго положительнаго числа (§ 70). Если мы возьмемъ η такимъ образомъ, чтобы колебаніе было меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$, то разность $S-s$ будетъ меньше ε.

Всякая функція, никогда не убывающая или никогда не возрастающая въ данномъ промежуткѣ, интегрируема въ этомъ промежуткѣ.

Функція называется никогда не убывающею въ промежуткѣ (a, b), если для каждыхъ двухъ произвольныхъ значеній x', x'' въ этомъ промежуткѣ будетъ $f(x')\geq f(x'')$, когда $x'>x''$. Такая функція можетъ сохранять и постоянное значеніе въ нѣкоторыхъ частяхъ промежутка, но если она не остается постоянною, то она непремѣнно возрастаетъ. Разобьемъ промежутокъ (a, b) на n частичныхъ промежутковъ, меньшихъ η. Мы можемъ написать

$$S=f(x_1)(x_1-a)+f(x_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(b)(b-x_{n-1}),$$
$$s=f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}).$$

Въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ, въ промежуткѣ (a, x_1) верхній предѣлъ функціи равенъ $f(x_1)$, а нижній предѣлъ равенъ $f(a)$, и т. д. для другихъ промежутковъ. Отсюда получаемъ

$$S-s=(x_1-a)[f(x_1)-f(a)]+(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]$$
$$+\ldots+(b-x_{n-1})[f(b)-f(x_{n-1})].$$

Всѣ разности, стоящія въ правой части, суть положительныя числа, и всѣ разности x_1-a, x_2-x_1, ... меньше η. Слѣдовательно,

$$S-s<\eta\,[f(x_1)-f(a)+f(x_2)-f(x_1)+\ldots+f(b)-f(x_{n-1})],$$

т.-е.

$$S-s<\eta\,[f(b)-f(a)].$$

Если мы возьмемъ

$$\eta<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)},$$

то будемъ имѣть $S-s<\varepsilon$. То же разсужденіе примѣнимо и къ функціи, никогда не возрастающей.

Обратимся къ общему случаю. Въ опредѣленіи интеграла можно замѣнить суммы S и s болѣе общимъ выраженіемъ. Пусть дано разбіеніе промежутка (a, b)

$$a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ \ldots,\ x_{n-1},\ b.$$

Пусть будутъ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$ значенія перемѣннаго x, принадлежащія соотвѣтственно каждому изъ этихъ промежутковъ, такъ что $(x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i)$ Сумма

$$\left.\begin{aligned} &f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(b-x_{n-1}) \\ &=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

очевидно, заключается между суммами S и s, такъ какъ всегда $m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i$; если функція интегрируема, то эта сумма также имѣетъ предѣломъ I. Въ частности, если мы предположимъ, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ совпадаютъ соотвѣтственно съ $a, x_1, \ldots, x_{n-1}$, то получимъ сумму (1), разсмотрѣнную выше (§ 65).

Изъ опредѣленія интеграла непосредственно вытекаетъ нѣсколько слѣдствій. Мы предполагали $a<b$. Если мы перемѣстимъ предѣлы a и b, то всѣ множители x_i-x_{i-1} измѣнятъ знаки, и самъ предѣлъ перемѣнитъ знакъ; слѣдовательно

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Изъ опредѣленія интеграла слѣдуетъ также, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Если c заключается между a и b, то это равенство очевидно; если же, напримѣръ, b заключается между a и c, то предыдущая формула также вѣрна, если только функція $f(x)$ интегрируема между a и c, такъ какъ мы можемъ написать

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Если $f(x)=A\varphi(x)+B\psi(x)$, гдѣ A и B — постоянныя, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = A\int_a^b \varphi(x)\,dx + B\int_a^b \psi(x)\,dx;$$

такое же равенство будетъ имѣть мѣсто и для суммы любого числа функцій.

Выраженіе $f(\xi_i)$ въ формулѣ (2) можно замѣнить еще болѣе общимъ выраженіемъ. Разобьемъ промежутокъ (a, b) на n частич-

ныхъ промежутковъ $(a, x_1), \ldots, (x_{i-1}, x_i), \ldots, (x_{n-1}, b)$. Для каждаго промежутка (x_{i-1}, x_i) возьмемъ какое-нибудь количество ζ_i подъ условіемъ, чтобы ζ_i стремилось къ нулю вмѣстѣ съ длиною $(x_i - x_{i-1})$ разсматриваемаго промежутка. Мы будемъ говорить, что ζ_i стремится равномѣрно къ нулю, если для всякаго положительнаго числа ε можно найти такое, не зависящее отъ i, положительное число η, чтобы при $(x_i - x_{i-1})$ меньшемъ η было $|\zeta_i| < \varepsilon$. Докажемъ, что если ζ_i равномѣрно стремится къ нулю, то сумма

$$S' = \sum_{i=1}^{n} \Big[f(x_{i-1}) + \zeta_i \Big] (x_i - x_{i-1})$$

имѣетъ предѣломъ опредѣленный интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$. Возьмемъ число η настолько малымъ, чтобы при условіи, что всѣ промежутки $(x_i - x_{i-1})$ меньше η, удовлетворялись неравенства

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon, \quad |\zeta_i| < \varepsilon,$$

и разсмотримъ разность

$$S' - \int_a^b f(x)\,dx = \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right] + \sum \zeta_i (x_i - x_{i-1}).$$

При указанныхъ условіяхъ абсолютное значеніе правой части послѣдняго равенства, очевидно, меньше $\varepsilon + \varepsilon(b-a)$, и мы имѣемъ

$$\left| S' - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon + \varepsilon(b-a).$$

Такимъ образомъ теорема доказана*).

73. Теорема Дарбу. — Пусть будетъ $f(x)$ какая-нибудь функція отъ x, конечная въ промежуткѣ (a, b). Каковъ бы ни былъ законъ разбіенія промежутка (a, b) на части, суммы S и s стремятся соотвѣтственно къ I и I', если число частичныхъ промежутковъ неограниченно возрастаетъ, такъ что каждый изъ этихъ промежутковъ стремится къ нулю.

*) Эту теорему можно легко распространить на двойные и тройные интегралы. Мы будемъ пользоваться ею много разъ (§§ 80, 95, 97, 131, 144 и др.).

Замѣтимъ, что эта теорема есть, въ сущности, приложеніе теоремы Дюгамеля, согласно которой предѣлъ суммы безконечно малыхъ количествъ остается неизмѣннымъ, если каждое изъ этихъ безконечно малыхъ мы замѣнимъ другимъ безконечно малымъ, отличающимся отъ перваго на безконечно малое высшаго порядка. (См. статью Осгуда (Osgood), Annals of Mathematics, 2-ая серія, т. IV, стран. 161—178: The Integral as the Limit of a Sum and a Theorem of Duhamel's).

Докажемъ это, напримѣръ, для суммъ S. Предположимъ, что $a<b$, и что функція $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b) положительна; послѣднему условію всегда можно удовлетворить, прибавивъ къ функціи $f(x)$ соотвѣтствующее постоянное, что равносильно увеличенію всѣхъ суммъ S на постоянное количество. Такъ какъ число I есть нижній предѣлъ суммъ S, то можно найти такой частный способъ разбіенія

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, b,$$

для котораго сумма S будетъ меньше $I+\frac{\varepsilon}{2}$, гдѣ ε есть произвольное положительное число. Разсмотримъ теперь какое-нибудь разбіеніе промежутка (a, b) на промежутки меньшіе, чѣмъ η, и найдемъ верхнюю границу соотвѣтствующей суммы S'. Возьмемъ, съ одной стороны, промежутки, не содержащіе ни одной изъ прежнихъ точекъ дѣленія $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$; примѣняя разсужденія § 71, мы видимъ, что они дадутъ въ S' часть, меньшую первоначальной суммы S, т.-е. меньшую $I+\frac{\varepsilon}{2}$. Съ другой стороны, число промежутковъ, содержащихъ какую-нибудь изъ точекъ $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, не можетъ быть больше $p-1$, и, обозначая черезъ M верхній предѣлъ $f(x)$, мы найдемъ, что эти промежутки дадутъ въ суммѣ S' часть, которая не можетъ превзойти $(p-1)M\eta$. Слѣдовательно,

$$S' < I+\frac{\varepsilon}{2}+(p-1)M\eta.$$

Такимъ образомъ достаточно взять η меньшимъ $\frac{\varepsilon}{2M(p-1)}$, чтобы сумма S была меньше $I+\varepsilon$.

Точно также можно доказать, что суммы s имѣютъ предѣломъ I'. Если $f(x)$ произвольна, то эти два предѣла I и I' различны. Для того чтобы функція была интегрируемою, необходимо и достаточно, чтобы было $I'=I$.

74. Формула средняго значенія. — Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать вездѣ, гдѣ не будетъ сдѣлано особыхъ оговорокъ, что функціи подъ знакомъ интеграла непрерывны.

Пусть будутъ $f(x)$ и $\varphi(x)$ двѣ функціи, непрерывныя въ промежуткѣ (a,b), причемъ между a и b функція $\varphi(x)$ имѣетъ постоянный знакъ; для опредѣленности мы предположимъ, что $a<b$ и $\varphi(x)>0$.

Предположимъ, что промежутокъ (a,b) разбитъ на болѣе мелкіе промежутки; пусть будутъ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots$ значенія перемѣннаго x, принадлежащія соотвѣтственно къ каждому изъ этихъ промежутковъ. Всѣ числа $f(\xi_i)$ будутъ заключаться между предѣлами M и m функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a,b)

$$m \leqq f(\xi_i) \leqq M.$$

Умножимъ всѣ эти двойныя неравенства на множителей

$$\varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

которые, по предположенію, всѣ положительны, и сложимъ. Мы

видимъ, что сумма $\Sigma f(\xi_i)\varphi(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ будетъ заключаться между суммами $m\Sigma\varphi(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ и $M\Sigma\varphi(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$.

Если число частичныхъ промежутковъ неограниченно возрастаетъ, то мы имѣемъ въ предѣлѣ

$$m\int_a^b\varphi(x)\,dx<\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx<M\int_a^b\varphi(x)\,dx.$$

Эти неравенства можно замѣнить равенствомъ

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\mu\int_a^b\varphi(x)\,dx,$$

гдѣ μ содержится между m и M. Такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна, то она принимаетъ значеніе μ при нѣкоторомъ значеніи $x=\xi$, заключающемся между a и b, и мы имѣемъ

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b\varphi(x)dx, \qquad (3)$$

гдѣ ξ заключается между a и b. Если, въ частности, мы предположимъ $\varphi(x)=1$, то интегралъ $\int_a^b dx$, по самому опредѣленію, равенъ $b-a$, и мы получимъ

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi). \qquad (4)$$

75. Вторая формула средняго значенія. — Бонне (Bonnet) далъ другую формулу средняго значенія, которую онъ вывелъ изъ слѣдующей важной леммы Абеля (Abel).

Лемма.— Пусть будетъ $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ рядъ положительныхъ убывающихъ количествъ, и $u_0, u_1, \ldots, u_p$—такое же число произвольныхъ положительныхъ или отрицательныхъ количествъ. Если всѣ суммы $s_0=u_0$, $s_1=u_0+u_1, \ldots, s_p=u_0+u_1+\ldots+u_p$ заключаются между двумя числами A и B, то сумма

$$S=\varepsilon_0u_0+\varepsilon_1u_1+\ldots+\varepsilon_pu_p$$

заключается между $A\varepsilon_0$ и $B\varepsilon_0$.

Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ написать

$$u_0=s_0,\quad u_1=s_1-s_0,\ \ldots,\ u_p=s_p-s_{p-1};$$

слѣдовательно, сумма S будетъ равна

$$s_0(\varepsilon_0-\varepsilon_1)+s_1(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\ldots+s_{p-1}(\varepsilon_{p-1}-\varepsilon_p)+s_p\varepsilon_p.$$

Такъ какъ всѣ разности $\varepsilon_0-\varepsilon_1, \varepsilon_1-\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1}-\varepsilon_p$ положительны, то мы получимъ два предѣла для S, замѣняя сначала $s_0, s_1, \ldots, s_p$ ихъ верхнимъ предѣломъ A, а потомъ ихъ нижнимъ предѣломъ B. Отсюда имѣемъ

$$S<A(\varepsilon_0-\varepsilon_1+\varepsilon_1-\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{p-1}-\varepsilon_p+\varepsilon_p)=A\varepsilon_0;$$

точно также получимъ $S>B\varepsilon_0$.

Пусть будутъ теперь $f(x)$ и $\varphi(x)$ двѣ непрерывныхъ функціи, изъ которыхъ функція $\varphi(x)$ положительна и убываетъ при возрастаніи x отъ a до b. Интегралъ $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$ есть предѣлъ суммы

$$f(a)\,\varphi(a)\,(x_1-a)+f(x_1)\,\varphi(x_1)\,(x_2-x_1)+\ldots$$

Такъ какъ числа $\varphi(a), \varphi(x_1), \ldots$ положительны и убываютъ, то по предыдущей леммѣ, отсюда слѣдуетъ, что эта сумма заключается между $A\varphi(a)$ и $B\varphi(a)$, гдѣ A и B суть наибольшая и наименьшая изъ суммъ

$$\begin{aligned}
&f(a)\,(x_1-a),\\
&f(a)\,(x_1-a)+f(x_1)\,(x_2-x_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&f(a)\,(x_1-a)+f(x_1)\,(x_2-x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\,(b-x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Переходя къ предѣлу, мы видимъ, что разсматриваемый интегралъ заключается между $A_1\,\varphi(a)$ и $B_1\,\varphi(a)$, гдѣ A_1 и B_1 обозначаютъ maximum и minimum интеграла

$$\int_a^c f(x)\,dx$$

при измѣненіи c отъ a до b. Такъ какъ этотъ интегралъ, есть, очевидно, непрерывная функція своего верхняго предѣла c, то можно написать

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx, \quad (a<\xi<b). \tag{5}$$

Если между a и b функція $\varphi(x)$ убываетъ, не оставаясь всюду положительною, то можно приложить болѣе общую формулу Вейерштрасса. Положимъ $\varphi(x)=\varphi(b)+\psi(x)$. Функція $\psi(x)$ положительна и убываетъ, и къ ней можно приложить формулу (5)

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx=[\varphi(a)-\varphi(b)]\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Отсюда имѣемъ

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,\varphi(b)\,dx+[\varphi(a)-\varphi(b)]\int_a^\xi f(x)\,dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Такія же формулы можно вывести и въ томъ случаѣ, когда $\varphi(x)$ возрастаетъ.

76. Аналитическое доказательство существованія начальныхъ функцій. — Теперь мы можемъ дать чисто аналитическое доказательство основной теоремы объ опредѣленныхъ интегралахъ (§ 67). Пусть будетъ $f(x)$ непрерывная функція. Опредѣленный интегралъ

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

гдѣ нижній предѣлъ a разсматривается, какъ постоянное, есть функція верхняго предѣла x. Покажемъ, что эта функція имѣетъ своею производною функцію $f(x)$. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt,$$

или, примѣняя формулу средняго значенія (4),

$$F(x+h)-F(x)=hf(\xi),$$

причемъ ξ заключается между x и $x+h$. Если h стремится къ нулю, то $f(\xi)$ стремится къ предѣлу $f(x)$; такимъ образомъ функція $F(x)$ имѣетъ своею производною функцію $f(x)$.

Всякая другая функція, имѣющая ту же самую производную, получается черезъ прибавленіе къ $F(x)$ произвольнаго постояннаго C (§ 8). Отсюда видно, что если функція $f(x)$ имѣетъ одну начальную функцію $F(x)$, то она имѣетъ ихъ безчисленное множество. Но между всѣми этими функціями есть одна и притомъ только одна, которая принимаетъ при $x=a$ заданное значеніе y_0; это будетъ функція

$$y_0+\int_a^x f(t)dt.$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда это не можетъ привести къ недоразумѣнію, пользуются одною и тою же буквою x, какъ для обозначенія верхняго предѣла, такъ и для обозначенія перемѣннаго интеграціи, и пишутъ $\int_a^x f(x)dx$ вмѣсто $\int_a^x f(t)dt$. Но очевидно, что опредѣленный интегралъ зависитъ только отъ своихъ предѣловъ и отъ подъинтегральной функціи; какою буквою обозначено перемѣнное интеграціи, это совершенно безразлично.

Всякая функція, имѣющая производною $f(x)$, называется *неопредѣленнымъ интеграломъ* отъ $f(x)$ и изображается символомъ

$$\int f(x)dx,$$

причемъ предѣлы не указываются. Согласно предыдущему имѣемъ

$$\int f(x)dx=\int_a^x f(x)dx+C.$$

Обратно, если мы нашли какимъ-нибудь способомъ функцію $F(x)$, имѣющую производною $f(x)$, то можно написать

$$\int_a^x f(x)dx=F(x)+C.$$

Чтобы опредѣлить постоянное C, достаточно замѣтить, что при $x=a$ лѣвая часть послѣдняго равенства равна нулю. Слѣдовательно, должно взять $C=-F(a)$; отсюда имѣемъ основную формулу

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a). \qquad (6)$$

Замѣнивъ здѣсь $f(x)$ черезъ $F'(x)$, получимъ

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(x)dx;$$

прилагая теорему о среднемъ значеніи, будемъ имѣть

$$F(x)-F(a)=(x-a)F'(\xi),$$

причемъ ξ заключается между x и a. Мы здѣсь вновь получаемъ формулу конечнаго приращенія, но этотъ выводъ менѣе общаго характера, чѣмъ первый (§ 8), такъ какъ онъ предполагаетъ непрерывность производной $F'(x)$.

Въ слѣдующей главѣ мы разсмотримъ простѣйшіе виды функцій, для которыхъ начальныя функціи могутъ быть выражены посредствомъ элементарныхъ функцій. Здѣсь мы укажемъ только на тѣ изъ нихъ, для которыхъ это непосредственно очевидно. Мы имѣемъ

$$\int A(x-a)^\alpha dx=A\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad (\alpha+1\neq 0);$$

$$\int A\frac{dx}{x-a}=A\log(x-a)+C;$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C, \quad \int\sin x\,dx=-\cos x+C;$$

$$\int e^{mx}dx=\frac{e^{mx}}{m}+C, \quad (m\neq 0);$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C; \quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\log(x+\sqrt{x^2+A})+C, \quad \int\frac{f'(x)\,dx}{f(x)}=\log f(x)+C.$$

Основная формула (6) была выведена въ предположеніи, что функція $f(x)$ непрерывна между a и b. Не обративъ вниманія на это условіе, мы можемъ придти къ парадоксальнымъ заключеніямъ. Такъ, полагая $f(x)=\frac{1}{x^2}$, изъ формулы (6) получимъ

$$\int_a^b\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

Лѣвая часть имѣетъ смыслъ только въ томъ случаѣ, если a и b имѣютъ одинаковые знаки, тогда какъ правая часть имѣетъ опредѣленное значеніе и въ томъ случаѣ, когда a и b будутъ имѣть разные знаки. Мы увидимъ, въ дальнѣйшемъ, при изученіи опредѣленныхъ интеграловъ, взятыхъ между мнимыми предѣлами, въ чемъ состоитъ объясненіе этого парадокса.

Точно также по формулѣ (6) имѣемъ

$$\int_a^b\frac{f'(x)\,dx}{f(x)}=\log\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right].$$

Если знаки количествъ $f(a)$ и $f(b)$ противоположны, то $f(x)$ обращается въ нуль между a и b, и обѣ части предыдущаго равенства не имѣютъ пока для насъ никакого смысла. Впослѣдствіи мы увидимъ, какое значеніе должно приписывать этому равенству.

Формула (6) можетъ быть также не вполнѣ опредѣленною. Такъ, полагая $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, получимъ

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} a.$$

Лѣвая часть имѣетъ вполнѣ опредѣленный смыслъ, тогда какъ правая часть имѣетъ безконечное множество значеній. Для устраненія неопредѣленности положимъ

$$F(x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Функція $F(x)$ непрерывна во всякомъ промежуткѣ и обращается въ нуль вмѣстѣ съ x. Съ другой стороны, обозначимъ черезъ $\operatorname{arc\,tg} x$ дугу, заключающуюся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Эти двѣ функціи имѣютъ одну и ту же производную и обращаются въ нуль при $x=0$; слѣдовательно, онѣ тождественны между собою, и мы можемъ написать

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} a,$$

при условіи принимать всегда для $\operatorname{arc\,tg}$ значеніе, заключающееся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Точно также можно вывести формулу

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} b - \operatorname{arc\,sin} a,$$

гдѣ корень взятъ въ его положительномъ значеніи, a и b заключаются между -1 и $+1$, и черезъ $\operatorname{arc\,sin} x$ обозначена дуга, заключающаяся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

77. Указатели. — Вообще, если начальная функція $F(x)$ имѣетъ нѣсколько значеній, то нужно выбрать одно изъ ея значеній при $x=a$, $F(a)$, и слѣдить за непрерывнымъ измѣненіемъ этого значенія при измѣненіи x въ одномъ и томъ же направленіи отъ a до b. Возьмемъ, напримѣръ, интегралъ

$$\int_a^b \frac{P'Q-PQ'}{P^2+Q^2}\,dx = \int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx,$$

гдѣ

$$f(x)=\frac{P}{Q},$$

и P, Q—двѣ функціи, непрерывныя въ промежуткѣ (a, b) и не обращающіяся одновременно въ нуль. Начальная функція есть arc tang $f(x)$. Если Q не обращается въ нуль между a и b, то $f(x)$ не обращается въ безконечность между этими предѣлами, и arc tg $f(x)$ заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Но этого, вообще, не будетъ, если уравненіе $Q=0$ имѣетъ корни въ промежуткѣ (a, b). Чтобы узнать, какимъ образомъ должно въ этомъ случаѣ измѣнить общую формулу, оставимъ, по-прежнему, обозначеніе arc tang для дуги, заключающейся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, и предположимъ сначала, что Q обращается въ нуль между a и b только одинъ разъ при $x=c$. Мы можемъ написать

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx=\int_a^{c-\varepsilon}+\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}+\int_{c+\varepsilon'}^{b},$$

гдѣ ε и ε'—два очень малыхъ положительныхъ числа. Такъ какъ функція $f(x)$ не обращается въ безконечность ни между a и $c-\varepsilon$, ни между $c+\varepsilon'$ и b, то мы можемъ написать

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}=\text{arc tang } f(c-\varepsilon)-\text{arc tang } f(a)$$
$$+\text{arc tang } f(b)-\text{arc tang } f(c+\varepsilon')+\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}.$$

Здѣсь можетъ представиться нѣсколько случаевъ. Предположимъ, для опредѣленности, что $f(x)$ обращается въ безконечность, переходя съ $+\infty$ на $-\infty$. Тогда $f(c-\varepsilon)$ будетъ положительно и очень велико, arc tang $f(c-\varepsilon)$ будетъ очень близокъ къ $\frac{\pi}{2}$, $f(c+\varepsilon')$ будетъ отрицательно и очень велико, arc tang $f(c+\varepsilon')$ будетъ очень близокъ къ $-\frac{\pi}{2}$; что касается интеграла $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}$, то его абсолютное значеніе будетъ очень мало, какъ въ этомъ можно убѣдиться, замѣняя подъ интеграломъ $f(x)$ черезъ $\frac{P}{Q}$. Переходя къ предѣлу, получимъ

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}=\pi+\text{arc tang } f(b)-\text{arc tang } f(a).$$

Точно также можно доказать, что если функція $f(x)$ переходитъ съ $-\infty$ на $+\infty$, то нужно отнять π. Въ общемъ случаѣ должно разбить промежутокъ (a, b) на такіе промежутки, чтобы въ каждомъ изъ нихъ функція $f(x)$ обращалась въ безконечность только одинъ разъ. Приложивъ къ каждому изъ этихъ промежутковъ прежніе выводы и сложивъ полученные результаты, найдемъ

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{1+f(x)}=\text{arc tang } f(b)-\text{arc tang } f(a)+(K-K')\pi,$$

гдѣ K есть число, показывающее, сколько разъ функція $f(x)$ обращается въ безконечность, переходя съ $+\infty$ на $-\infty$, а K' есть число, показывающее, сколько разъ $f(x)$ переходитъ съ $-\infty$ на $+\infty$. Это число $K-K'$ называется у к а з а т е л е м ъ функціи $f(x)$ между a и b.

Если $f(x)$ представляетъ раціональную функцію $\frac{V_1}{V}$, то можно вычислить указатель при помощи элементарныхъ дѣйствій, даже не зная корней многочлена V. Мы, очевидно, можемъ предположить, что много-

членъ V_1 взаимно простой съ многочленомъ V, и что его степень ниже степени V, такъ какъ отъ вычитанія многочлена указатель функціи не мѣняется. Выполнимъ рядъ дѣленій, при помощи которыхъ находятъ общій наибольшій дѣлитель между V и V_1, съ тою только разницею, что каждый разъ мы будемъ мѣнять знакъ у остатка. Раздѣлимъ сначала V на V_1; мы получимъ частное Q_1 и остатокъ $-V_2$. Затѣмъ раздѣлимъ V_1 на V_2; мы получимъ частное Q_2 и остатокъ $-V_3$, и т. д.; наконецъ мы придемъ къ постоянному остатку $-V_{n+1}$. Такимъ образомъ мы получимъ рядъ равенствъ

$$\begin{aligned} V &= V_1 Q_1 - V_2, \\ V_1 &= V_2 Q_2 - V_3, \\ &\dots\dots\dots, \\ V_{n-1} &= V_n Q_n - V_{n+1}. \end{aligned}$$

Рядъ многочленовъ

$$V,\ V_1,\ V_2,\ \dots,\ V_{r-1},\ V_r,\ V_{r+1},\ \dots,\ V_n,\ V_{n+1} \qquad (7)$$

обладаетъ существенными свойствами ряда Штурма (Sturm): 1° два рядомъ стоящихъ многочлена не могутъ обращаться въ нуль при одномъ и томъ же значеніи x, такъ какъ изъ этого мы послѣдовательно вывели бы, что при этомъ значеніи x должны обращаться въ нуль и всѣ другіе многочлены, и, въ частности, постоянное V_{n+1}; 2° когда одинъ изъ промежуточныхъ многочленовъ $V_1, V_2, \dots, V_n$ обращается въ нуль, то число перемѣнъ, представляемое рядомъ (7), не мѣняется, такъ какъ, если V_r равно нулю при $x=c$, то V_{r-1} и V_{r+1} будутъ имѣть при $x=c$ противоположные знаки. Изъ этого слѣдуетъ, что число перемѣнъ въ рядѣ (7) можетъ измѣниться только тогда, когда x проходитъ черезъ корень уравненія $V=0$. Если при этомъ $\frac{V_1}{V}$ переходитъ съ $+\infty$ на $-\infty$, то число перемѣнъ увеличивается на единицу; напротивъ, оно уменьшается на единицу, если $\frac{V_1}{V}$ переходитъ съ $-\infty$ на $+\infty$. Такимъ образомъ указатель функціи $f(x)$ равенъ разности между числами перемѣнъ въ рядѣ (7) при $x=b$ и $x=a$.

78. Площадь кривой. — Теперь мы можемъ дать чисто аналитическое опредѣленіе площади, ограниченной непрерывною плоскою кривою, считая извѣстнымъ только выраженіе площади прямоугольника. Для этого намъ нужно только истолковать геометрически выводы § 72. Пусть будетъ $f(x)$ функція, непрерывная въ промежуткѣ (a, b); для опредѣленности, мы предположимъ, что въ этомъ промежуткѣ $a<b$, и $f(x)>0$. Разсмотримъ, какъ и прежде (черт. 9, стр. 142), часть плоскости, ограниченную контуромъ $AMBB_0A_0A$, состоящимъ изъ отрѣзка A_0B_0 оси x, изъ прямыхъ AA_0 и BB_0, параллельныхъ Oy, съ абсциссами a и b, и изъ дуги кривой AMB, представляемой уравненіемъ $y=f(x)$. Разобьемъ отрѣзокъ A_0B_0 на части точками дѣленія $P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots$ съ абсциссами $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots$ и проведемъ черезъ эти точки прямыя, параллельныя оси y, которыя встрѣтятъ дугу AMB соотвѣтственно

въ точкахъ Q_1, Q_2, ..., Q_{i-1}, Q_i, ... Разсмотримъ часть плоскости, ограниченную контуромъ $Q_{i-1}Q_iP_iP_{i-1}Q_{i-1}$, и отмѣтимъ на дугѣ $Q_{i-1}Q_i$ самую высокую и самую низкую точки, т.-е. точки, соотвѣтствующія наибольшему значенію M_i и наименьшему значенію m_i функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (x_{i-1}, x_i) (на чертежѣ наиболѣе низкая точка совпадаетъ съ Q_{i-1}). Пусть будетъ R_i площадь прямоугольника $P_{i-1}P_is_is_{i-1}$, построеннаго на основаніи $P_{i-1}P_i$ съ высотою M_i; точно также пусть будетъ r_i площадь прямоугольника $P_{i-1}P_iq_iQ_{i-1}$, построеннаго на основаніи $P_{i-1}P_i$ съ высотою m_i. Мы имѣемъ

$$R_i = M_i(x_i - x_{i-1}), \quad r_i = m_i(x_i - x_{i-1})$$

и мы можемъ истолковать выводы § 72 слѣдующимъ образомъ: каковъ бы ни былъ способъ разбіенія отрѣзка A_0B_0, существуетъ нѣкоторое опредѣленное число I, меньшее ΣR_i и большее Σr_i, и представляющее тотъ предѣлъ, къ которому стремятся суммы ΣR_i и Σr_i, когда число промежутковъ неограниченно возрастаетъ такъ, что каждый изъ нихъ стремится къ нулю. Этотъ общій предѣлъ I обѣихъ суммъ прямоугольниковъ ΣR_i, Σr_i мы будемъ называть площадью части плоскости, ограниченной контуромъ $AMBB_0A_0A$. Такимъ образомъ искомая площадь равна опредѣленному интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$.

Это опредѣленіе вполнѣ согласно съ обычнымъ представленіемъ о площади плоской кривой. Въ самомъ дѣлѣ, несмотря на малую точность этого послѣдняго, изъ него все-таки ясно, что площадь, ограниченная контуромъ $P_{i-1}P_iQ_in_iQ_{i-1}P_{i-1}$, заключается между площадями R_i и r_i двухъ прямоугольниковъ $P_{i-1}P_is_is_{i-1}$ и $P_{i-1}P_iq_iQ_{i-1}$; слѣдовательно, вся площадь, ограниченная контуромъ $AMBB_0A_0A$, должна быть количествомъ, заключающимся между двумя суммами ΣR_i и Σr_i. Но опредѣленный интегралъ I есть единственное постоянное число, заключающееся между этими двумя суммами при всякомъ способѣ разбіенія отрѣзка A_0B_0, такъ какъ этотъ интегралъ представляетъ общій предѣлъ обѣихъ суммъ.

Площадь кривой можетъ быть опредѣлена безчисленными способами, какъ предѣлъ суммы площадей прямоугольниковъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что опредѣленный интегралъ I есть также предѣлъ суммы

$$\Sigma(x_i - x_{i-1})f(\xi_i),$$

гдѣ ξ_i есть какое-нибудь значеніе перемѣннаго x въ промежуткѣ (x_{i-1}, x_i). Но

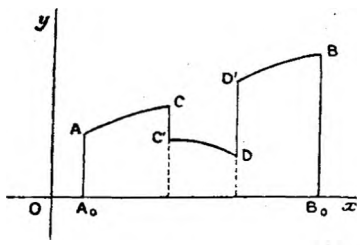
$$(x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

представляетъ площадь прямоугольника, имѣющаго основаніемъ $P_{i-1}P_i$ и высотою ординату какой-нибудь точки дуги $Q_{i-1}n_iQ_i$. Должно также замѣтить, что опредѣленный интегралъ I представляетъ площадь при всякомъ положеніи дуги AMB относительно Ox, если только мы примемъ во вниманіе то правило знаковъ, которое было установлено выше (§ 67). Такъ какъ всякій опредѣленный интегралъ представляетъ площадь, то вычисленіе интеграла называется также квадратурою.

Установивъ вполнѣ строго понятіе площади, мы можемъ пользоваться имъ при нѣкоторыхъ выводахъ, которые при этомъ становятся почти очевидными геометрически. Напримѣръ, ясно, что разсмотрѣнная въ этомъ параграфѣ площадь заключается между площадями двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе A_0B_0, а высотами соотвѣтственно наибольшую и наименьшую изъ ординатъ дуги AMB. Слѣдовательно, эта площадь равна площади прямоугольника, имѣющаго основаніемъ A_0B_0, а высотою ординату нѣкоторой точки, соотвѣтствующимъ образомъ выбранной на дугѣ AMB; очевидно, что это предложеніе есть не что иное, какъ теорема о среднемъ значеніи.

79. Вотъ еще другое важное замѣчаніе. Пусть будетъ $f(x)$ функція, конечная въ промежуткѣ (a, b), которая дѣлается слѣдующимъ образомъ прерывною при конечномъ числѣ значеній между a и b (черт. 11). Предположимъ, что функція $f(x)$ непрерывна между c и $c+k$, $(k>0)$, и что $f(c+\varepsilon)$ стремится къ предѣлу, когда ε, оставаясь положительнымъ, стремится къ нулю; мы обозначимъ этотъ предѣлъ черезъ $f(c+0)$. Предположимъ далѣе, что функція $f(x)$ непрерывна между $c-k$ и c, $(k>0)$, и что $f(c-0)$ будетъ тѣмъ предѣломъ, къ которому стремится $f(c-\varepsilon)$, когда ε, оставаясь положительнымъ, стремится къ нулю. Если предѣлы $f(c+0)$ и $f(c-0)$ различны, то $f(x)$ прерывна при $x=c$. Въ этомъ случаѣ за $f(c)$ обыкновенно берутъ значеніе $\frac{1}{2}[f(c+0)+f(c-0)]$. Если $f(x)$ имѣетъ между точками a и b нѣсколько точекъ прерывности этого рода, то графически она изобразится нѣсколькими различными

Черт. 11.



дугами AC, $C'D$, $D'B$. Пусть будутъ, напримѣръ, c и d абсциссы точекъ прерывности. Положимъ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx;$$

такое опредѣленіе можетъ быть основано на замѣчаніяхъ § 72; геометрически $\int_a^b f(x)\,dx$ представляетъ площадь, ограниченную контуромъ $ACC'DD'BB_0A_0A$.

Если мы замѣнимъ верхній предѣлъ b перемѣннымъ предѣломъ x, то опредѣленный интегралъ

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

будетъ непрерывною функціею отъ x. Въ точкѣ x, въ которой $f(x)$ непрерывна, мы будемъ имѣть $F'(x)=f(x)$. Въ точкѣ прерывности, напримѣръ, при $x=c$, мы получимъ

$$F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f(x)\,dx=hf(c+\theta h),\quad 0<\theta<1;$$

отношеніе $\dfrac{F(c+h)-F(c)}{h}$ будетъ имѣть предѣломъ или $f(c+0)$, или $f(c-0)$ въ зависимости отъ того, будетъ ли h положительно или отрицательно. Мы имѣемъ здѣсь примѣръ непрерывной функціи $F(x)$, производная которой при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣннаго имѣетъ два различныхъ значенія.

80. Длина дуги кривой. — Пусть будетъ AB дуга нѣкоторой кривой. Возьмемъ на этой дугѣ нѣсколько промежуточныхъ точекъ m_1, m_2, ..., m_{n-1} и построимъ ломаную линію $Am_1m_2\ldots m_{n-1}B$, вершинами которой будутъ служить различныя точки m_i въ той послѣдовательности, въ какой онѣ идутъ отъ A до B.

Если периметръ этой ломаной линіи стремится къ предѣлу, когда число сторонъ неограниченно возрастаетъ такъ, что длина каждой изъ нихъ стремится къ нулю, то этотъ предѣлъ называется *длиною дуги* AB.

Пусть будутъ

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t)$$

прямоугольныя координаты точекъ дуги AB, выраженныя черезъ перемѣнный параметръ t. Мы предположимъ, что при измѣненіи t отъ a до b $(a<b)$, функціи f, φ, ψ непрерывны и имѣютъ непрерывныя производныя перваго порядка, и что

точка (x, y, z) описываетъ дугу AB, перемѣщаясь постоянно въ одномъ и томъ же направленіи. Обозначимъ черезъ

$$a, t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_{n-1}, b$$

значенія t, соотвѣтствующія вершинамъ этой ломаной линіи. Сторона c_i будетъ имѣть выраженіе

$$c_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2},$$

или, прилагая къ $x_i - x_{i-1}, \ldots$ формулу конечныхъ приращеній,

$$c_i = (t_i - t_{i-1})\sqrt{[f'(\xi_i)]^2 + [\varphi'(\eta_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2},$$

гдѣ ξ_i, η_i, ζ_i содержатся между t_{i-1} и t_i. Если промежутокъ (t_{i-1}, t_i) очень малъ, то корень въ правой части равенства очень мало отличается отъ

$$\sqrt{[f'(t_{i-1})]^2 + [\varphi'(t_{i-1})]^2 + [\psi'(t_{i-1})]^2}.$$

Чтобы найти предѣлъ разности обоихъ корней, представимъ ее въ видѣ

$$\frac{[f'(\xi_i) - f'(t_{i-1})]\,[f'(\xi_i) + f'(t_{i-1})] + \ldots}{\sqrt{f'^2(\xi_i) + \varphi'^2(\eta_i) + \psi'^2(\zeta_i)} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \varphi'^2(t_{i-1}) + \psi'^2(t_{i-1})}}.$$

Но мы имѣемъ

$$|f'(\xi_i)| + |f'(t_{i-1})| < \sqrt{f'^2(\xi_i) + \ldots} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \ldots},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{f'(\xi_i) + f'(t_{i-1})}{\sqrt{f'^2(\xi_i) + \ldots} + \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \ldots}} < 1.$$

Отсюда видно, что если мы возьмемъ всѣ промежутки $t_i - t_{i-1}$ настолько малыми, чтобы въ каждомъ изъ нихъ колебанія функцій $f'(t), \varphi'(t), \psi'(t)$ были меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, то мы будемъ имѣть

$$\sqrt{f'^2(\xi_i) + \ldots} = \sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \ldots} + \varepsilon_i,$$

гдѣ

$$|\varepsilon_i| < \varepsilon.$$

Слѣдовательно, периметръ ломаной линіи равенъ

$$\Sigma(t_i - t_{i-1})\sqrt{f'^2(t_{i-1}) + \varphi'^2(t_{i-1}) + \psi'^2(t_{i-1})} + \Sigma\varepsilon_i(t_i - t_{i-1}).$$

Дополнительный членъ $\Sigma\varepsilon_i(t_i - t_{i-1})$ по абсолютному значенію меньше $\varepsilon\Sigma(t_i - t_{i-1})$, т. е. меньше $\varepsilon(b-a)$. Такъ какъ ε можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ, если всѣ промежутки будутъ взяты достаточно малыми, то отсюда слѣдуетъ, что этотъ членъ стремится къ нулю, и длина S дуги AB равна опредѣленному интегралу

$$S = \int_a^b \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}\, dt. \qquad (8)$$

Предыдущее опредѣленіе распространяется также и на тотъ случай, когда производныя f', φ', ψ' прерывны въ конечномъ числѣ точекъ дуги AB; это будетъ въ томъ случаѣ, если кривая имѣетъ угловыя точки. Нужно только разбить дугу AB на нѣсколько такихъ дугъ, чтобы для каждой изъ нихъ f', φ', ψ' были непрерывны.

Изъ формулы (8) слѣдуетъ, что длина дуги S, заключающейся между неподвижною точкою A и подвижною точкою M, соотвѣтствующею значенію t параметра, есть функція отъ t, производная которой есть

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}.$$

Возводя въ квадратъ обѣ части и умножая на dt^2, получимъ

$$dS^2=dx^2+dy^2+dz^2. \tag{9}$$

Эта формула имѣетъ мѣсто, каково бы ни было независимое перемѣнное. Ее легко запомнить въ связи съ ея геометрическимъ значеніемъ; она выражаетъ, что dS есть діагональ прямоугольнаго параллелепипеда, ребра котораго равны dx, dy, dz.

Примѣчаніе. — Прилагая формулу средняго значенія къ опредѣленному интегралу, представляющему длину дуги M_0M_1, концы которой соотвѣтствуютъ значеніямъ t_0, t_1 параметра t $(t_1>t_0)$, мы получимъ

$$s=\text{arc } M_0M_1=(t_1-t_0)\sqrt{f'^2(\theta)+\varphi'^2(\theta)+\psi'^2(\theta)},$$

гдѣ θ заключается въ промежуткѣ (t_0, t_1). Обозначая черезъ c хорду M_0M_1, мы имѣемъ также

$$c^2=[f(t_1)-f(t_0)]^2+[\varphi(t_1)-\varphi(t_0)]^2+[\psi(t_1)-\psi(t_0)]^2.$$

Прилагая формулу конечныхъ приращеній къ каждой изъ разностей $f(t_1)-f(t_0),\ldots$, мы можемъ написать

$$c=(t_1-t_0)\sqrt{f'^2(\xi)+\varphi'^2(\eta)+\psi'^2(\zeta)},$$

причемъ числа ξ, η, ζ заключаются въ промежуткѣ (t_0, t_1). Но, на основаніи предыдущаго, разность обоихъ корней будетъ меньше ε, если только колебанія функцій $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ въ промежуткѣ (t_0, t_1) будутъ меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. Такимъ образомъ

$$s-c<\varepsilon(t_1-t_0)$$

и, слѣдовательно,

$$1-\frac{c}{s}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{f'^2(\theta)+\varphi'^2(\theta)+\psi'^2(\theta)}}.$$

При неограниченномъ уменьшеніи дуги M_0M_1 разность t_1-t_0,

а вмѣстѣ съ нею и ε, стремятся къ нулю; слѣдовательно, разность $1-\frac{c}{s}$ также стремится къ нулю. Такимъ образомъ *отношеніе безконечно малой дуги къ ея хордѣ имѣетъ предѣломъ единицу*.

Примѣръ. — Пусть требуется найти дугу плоской кривой, данной уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ $\rho=f(\omega)$. Принимая ω за независимое перемѣнное, мы представимъ кривую тремя уравненіями $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, $z=0$; отсюда имѣемъ

$$ds^2=dx^2+dy^2=(\cos\omega\,d\rho-\rho\sin\omega\,d\omega)^2+(\sin\omega\,d\rho+\rho\cos\omega\,d\omega)^2,$$

или, послѣ приведенія,

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\omega^2.$$

Возьмемъ, напримѣръ, *кардіоиду*, представляемую уравненіемъ

$$\rho=R+R\cos\omega.$$

Предыдущая формула даетъ

$$ds^2=R^2d\omega^2[\sin^2\omega+(1+\cos\omega)^2]=4R^2\cos^2\frac{\omega}{2}d\omega^2;$$

при измѣненіи угла ω между 0 и π мы будемъ имѣть

$$ds=2R\cos\frac{\omega}{2}d\omega,$$

и выраженіе длины дуги будетъ

$$\left(4R\sin\frac{\omega}{2}\right)_{\omega_0}^{\omega_1},$$

гдѣ ω_0 и ω_1 — полярные углы, соотвѣтствующіе концамъ дуги. Слѣдовательно, длина всей кривой равна $8R$.

81. Направляющіе косинусы. — При изученіи свойствъ кривой часто бываетъ удобно принимать за независимое перемѣнное длину дуги этой кривой. Выберемъ на разсматриваемой кривой положительное направленіе и обозначимъ черезъ s длину дуги AM, заключающейся между неподвижною точкою A и произвольною точкою M со знакомъ + или со знакомъ — въ зависимости отъ того, будетъ ли направленіе отъ A до M положительно или отрицательно. Проведемъ въ какой-нибудь точкѣ M этой дуги касательную къ кривой въ направленіи возрастанія дугъ; пусть будутъ α, β, γ углы, образуемые направленіемъ касательной съ положительными направленіями прямоугольныхъ осей Ox, Oy, Oz. Мы имѣемъ

$$\frac{\cos\alpha}{dx}=\frac{\cos\beta}{dy}=\frac{\cos\gamma}{dz}=\pm\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\frac{\pm1}{ds}.$$

Чтобы рѣшить, какой знакъ здѣсь должно взять, предположимъ, что положительное направленіе касательной образуетъ съ Ox острый уголъ; въ этомъ случаѣ x и s одновременно возрастаютъ, и, слѣдовательно, должно взять знакъ $+$. Если же уголъ α — тупой, то $\cos\alpha$ отрицательно; здѣсь, съ возрастаніемъ s, x убываетъ, $\frac{dx}{ds}$ также отрицательно, и мы опять должны взять знакъ $+$. Слѣдовательно, во всѣхъ случаяхъ, имѣемъ

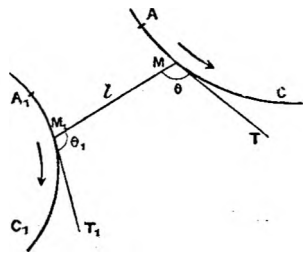
$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}, \tag{10}$$

гдѣ dx, dy, dz, ds — дифференціалы, взятые относительно произвольнаго независимаго перемѣннаго.

82. Измѣненіе отрѣзка прямой. — Пусть будетъ MM_1 прямолинейный отрѣзокъ, концы котораго описываютъ двѣ кривыя C, C_1. Возьмемъ на каждой изъ этихъ кривыхъ начальную точку и установимъ положительное направленіе.

Пусть будутъ: s — дуга AM, s_1 — дуга A_1M_1, причемъ эти обѣ дуги берутся съ ихъ знаками, l — длина MM_1, θ — уголъ прямой MM_1 съ положительнымъ направленіемъ касательной MT, θ_1 — уголъ, образуемый прямою M_1M съ положительнымъ направленіемъ касательной M_1T_1. Найдемъ соотношеніе между θ, θ_1 и дифференціалами ds, ds_1, dl.

Черт. 12.



Обозначимъ черезъ x, y, z, x_1, y_1, z_1 координаты точекъ M, M_1; черезъ α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 — углы касательныхъ MT и M_1T_1 съ осями координатъ. Мы имѣемъ

$$l^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2;$$

отсюда

$$ldl=(x-x_1)(dx-dx_1)+(y-y_1)(dy-dy_1)+(z-z_1)(dz-dz_1).$$

Пользуясь формулою (10) и соотвѣтствующею формулою для кривой C_1, мы можемъ представить послѣднее равенство въ видѣ

$$dl=\left(\frac{x-x_1}{l}\cos\alpha+\frac{y-y_1}{l}\cos\beta+\frac{z-z_1}{l}\cos\gamma\right)ds$$
$$+\left(\frac{x_1-x}{l}\cos\alpha_1+\frac{y_1-y}{l}\cos\beta_1+\frac{z_1-z}{l}\cos\gamma_1\right)ds_1.$$

Но $\frac{x-x_1}{l}$, $\frac{y-y_1}{l}$, $\frac{z-z_1}{l}$ суть направляющіе косинусы прямой MM_1; слѣдовательно, коэффиціентъ при ds есть: $-\cos\theta$.

Точно также коэффиціентъ при ds_1 есть: $-\cos\theta_1$, и мы получаемъ искомое соотношеніе

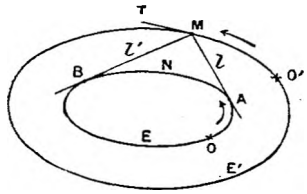
$$dl = -ds\cos\theta - ds_1\cos\theta_1, \qquad (10')$$

которымъ будемъ часто пользоваться.

83. Теоремы Гревса и Шаля. — Вотъ одно изъ приложеній формулы (10′). Пусть будутъ E, E' два софокусныхъ эллипса. Изъ точки M внѣшняго эллипса E' проведемъ касательныя MA, MB къ эллипсу E. При перемѣщеніи точки M по эллипсу E' разность $MA+MB-\text{arc}\,ANB$ остается постоянною.

Пусть будутъ s и s' дуги OA и OB, σ — дуга $O'M$, l и l' — длины AM и BM, θ — уголъ касательной MB съ положительнымъ направленіемъ касательной MT; на основаніи фокальныхъ свойствъ уголъ MA съ MT равенъ $\pi-\theta$*). Замѣчая, что AM совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ касательной въ A, и что BM противоположно положительному направленію касательной въ B, мы по формулѣ (10)′ имѣемъ

Черт. 13.



$$dl = -ds + d\sigma\cos\theta,$$
$$dl' = +ds' - d\sigma\cos\theta;$$

складывая эти равенства, получаемъ

$$d(l+l') = d(s'-s) = d\ \text{arc}\,ANB,$$

откуда слѣдуетъ справедливость предложенія.

Это — теорема англійскаго геометра Гревса (Graves). Такимъ же образомъ доказывается слѣдующая теорема, найденная Шалемъ (Chasles). Даны софокусные эллипсъ и гипербола, пересѣкающіеся въ точкѣ N; если изъ точки M, взятой на вѣтви гиперболы, проходящей черезъ точку N, проведемъ къ эллипсу касательныя MA, MB, то разность дугъ $NA-NB$ равна разности касательныхъ $MA-MB$.

III. — ЗАМѢНА ПЕРЕМѢННЫХЪ. — ИНТЕГРИРОВАНІЕ ПО ЧАСТЯМЪ.

Многіе изъ опредѣленныхъ интеграловъ, которые нельзя получить непосредственно, могутъ быть найдены при помощи двухъ общихъ пріемовъ, которые мы здѣсь изложимъ.

84. Замѣна перемѣнныхъ. — Если подстановкою $x=\varphi(t)$ въ опредѣленномъ интегралѣ $\int_a^b f(x)\,dx$ мы замѣнимъ перемѣнное x новымъ независимымъ перемѣннымъ t, то получимъ но-

*) Соединимъ точку M съ двумя фокусами. На основаніи свойствъ софокусныхъ кривыхъ второго порядка касательная MT одинаково наклонена къ обоимъ радіусамъ векторамъ; точно также эти радіусы векторы образуютъ равные углы съ касательными MA и MB. Отсюда слѣдуетъ справедливость теоремы, приведенной въ текстѣ. *(Ред.)*

вый опредѣленный интегралъ. Предположимъ, что функція $\varphi(t)$ непрерывна и имѣетъ непрерывную производную между α и β, и что, при измѣненіи t отъ α до β, $\varphi(t)$ измѣняется всегда въ одномъ и томъ же направленіи отъ $\varphi(\alpha)=a$ до $\varphi(\beta)=b$.

Разобьемъ промежутокъ (α, β) на части промежуточными значеніями $\alpha, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \beta$; пусть будутъ $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ соотвѣтствующія значенія перемѣннаго $x=\varphi(t)$. На основаніи теоремы о конечныхъ приращеніяхъ имѣемъ

$$x_i - x_{i-1} = (t_i - t_{i-1})\,\varphi'(\theta_i),$$

причемъ θ_i заключается между t_{i-1} и t_i. Пусть будетъ $\xi_i=\varphi(\theta_i)$ соотвѣтствующее значеніе перемѣннаго x, заключающееся между x_{i-1} и x_i. Сумма

$$f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(b-x_{n-1})$$

имѣетъ предѣломъ данный опредѣленный интегралъ. Но эту сумму можно также представить въ видѣ

$$f[\varphi(\theta_1)]\,\varphi'(\theta_1)(t_1-\alpha)+\ldots+f[\varphi(\theta_i)]\,\varphi'(\theta_i)(t_i-t_{i-1})+\ldots.$$

Отсюда видно, что она имѣетъ предѣломъ новый опредѣленный интегралъ $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$.

Такимъ образомъ мы получаемъ равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (11)$$

Формула (11) есть формула замѣны перемѣнныхъ въ опредѣленныхъ интегралахъ. Мы видимъ, что новый дифференціалъ подъ знакомъ интеграла получается посредствомъ замѣны въ $f(x)\,dx$ перемѣннаго x и дифференціала dx черезъ $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)\,dt$, причемъ новыми предѣлами служатъ значенія t, соотвѣтствующія прежнимъ предѣламъ. При надлежащемъ выборѣ функціи $\varphi(t)$ можетъ случиться, что новый интегралъ будетъ проще первоначальнаго, но впрочемъ для этого нельзя дать никакихъ опредѣленныхъ правилъ.

Пусть, напримѣръ, требуется вычислить опредѣленный интегралъ

$$\int_0^x \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Полагая $x=\alpha+\beta t$, находимъ

$$\int_0^x \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\int_{-\frac{\alpha}{\beta}}^{t} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\beta}\left(\operatorname{arc\,tang} t + \operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

или, возвращаясь къ перемѣнному x,

$$\frac{1}{\beta}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta} + \operatorname{arc\,tang}\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Нѣкоторыя изъ предположеній, которыя мы дѣлали при выводѣ формулы (11), не необходимы. Такъ, нѣтъ необходимости, чтобы при измѣненіи t отъ α до β функція $\varphi(t)$ измѣнялась всегда въ одномъ и томъ же направленіи. Предположимъ, напримѣръ, что при возрастаніи t отъ α до γ $(\gamma<\beta)$, функція $\varphi(t)$ возрастаетъ отъ a до c $(c>b)$, а при дальнѣйшемъ возрастаніи t отъ γ до β, $\varphi(t)$ убываетъ отъ c до b. Если функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ (a, c), то къ каждому изъ промежутковъ (a, c), (c, b) можно приложить формулу (11); это даетъ

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_\alpha^\gamma f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_c^b f(x)\,dx=\int_\gamma^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt;$$

складывая оба равенства, получимъ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Напротивъ, необходимо, чтобы $\varphi(t)$ была вполнѣ опредѣленною функціею отъ t. Если не обратить вниманія на это условіе, то можно придти къ очевидно невѣрнымъ выводамъ. Напримѣръ, если мы примѣнимъ къ интегралу $\int_{-1}^{+1} dx$ формулу (11), положивъ $x=t^{\frac{3}{2}}$, то получимъ

$$\int_{-1}^{+1} dx=\int_1^1 \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt,$$

что невозможно, такъ какъ второй интегралъ равенъ нулю. Чтобы правильно примѣнить формулу (11), необходимо разбить промежутокъ $(-1,+1)$ на два промежутка $(-1,0)$, $(0,1)$. Въ первомъ промежуткѣ мы положимъ $x=-\sqrt{t^3}$ и будемъ измѣнять t отъ 1 до 0; во второмъ промежуткѣ мы положимъ $x=\sqrt{t^3}$ и будемъ измѣнять t отъ 0 до 1. Такимъ образомъ вѣрный результатъ будетъ

$$\int_{-1}^{+1} dx=3\int_0^1\sqrt{t}\,dt=\left(2t^{\frac{3}{2}}\right)_0^1=2.$$

Примѣчаніе.— Замѣняя въ формулѣ (11) верхніе предѣлы b и β перемѣнными предѣлами x и t, получимъ

$$\int_a^x f(x)\,dx=\int_\alpha^t f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что если мы положимъ $x=\varphi(t)$, то функція $F(x)$, производная которой есть $f(x)$, обращается въ функцію $\Phi(t)$, производная которой есть $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$. Послѣдній

результатъ непосредственно слѣдуетъ изъ формулы производной функціи отъ функціи. Такимъ образомъ мы можемъ, вообще, написать

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Это — формула замѣны перемѣннаго въ неопредѣленныхъ интегралахъ.

85. Интегрированіе по частямъ. — Пусть будутъ u и v — функціи, непрерывныя вмѣстѣ со своими производными u' и v между a и b. Мы имѣемъ

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx};$$

интегрируя обѣ части этого равенства, получимъ

$$\int_a^b \frac{d(uv)}{dx}\,dx = \int_a^b u\frac{dv}{dx}\,dx + \int_a^b v\frac{du}{dx}\,dx.$$

Послѣднее равенство можно еще представить въ слѣдующемъ видѣ

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du, \qquad (12)$$

причемъ символъ $[F(x)]_a^b$ обозначаетъ, вообще, разность

$$F(b) - F(a).$$

Замѣняя предѣлъ b перемѣннымъ предѣломъ x и оставляя a постояннымъ, что равносильно переходу отъ опредѣленныхъ интеграловъ къ неопредѣленнымъ, мы точно также будемъ имѣть

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (13)$$

Такимъ образомъ вычисленіе интеграла $\int u\,dv$ приводится къ вычисленію интеграла $\int v\,du$, который можетъ быть проще первоначальнаго. Пусть, напримѣръ, требуется вычислить опредѣленный интегралъ $\int_a^b x^m \log x\,dx$, $(m+1 \neq 0)$. Полагая $u = \log x$, $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, по формулѣ (12) имѣемъ

$$\int_a^b \log x \,.\, x^m\,dx = \left[\frac{x^{m+1}\log x}{m+1}\right]_a^b - \frac{1}{m+1}\int_a^b x^m\,dx$$
$$= \left[\frac{x^{m+1}\log x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}\right]_a^b.$$

Эта формула не примѣнима, если $m+1=0$; въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$\int_a^b \log x\,\frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_a^b.$$

Формулу (12) можно обобщить. Обозначимъ черезъ $u', u'', \ldots, u^{(n+1)}$, $v', v'', \ldots, v^{(n+1)}$ послѣдовательныя производныя отъ функцій u и v. Прилагая формулу (12) къ интеграламъ $\int u\,dv^{(n)}$, $\int u'dv^{(n-1)}, \ldots$, мы придемъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = \int_a^b u\,dv^{(n)} = [uv^{(n)}]_a^b - \int_a^b u'v^{(n)}dx,$$
$$\int_a^b u'v^{(n)}dx = \int_a^b u'\,dv^{(n-1)} = [u'v^{(n-1)}]_a^b - \int_a^b u''v^{(n-2)}dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\int_a^b u^{(n)}v'\,dx = \int_a^b u^{(n)}\,dv = [u^{(n)}v]_a^b - \int_a^b u^{(n+1)}v\,dx.$$

Умноживъ эти равенства поперемѣнно на $+1$ и -1 и сложивъ, получимъ

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b uv^{(n+1)}\,dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n u^{(n)}v]_a^b \\ + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx.\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Эта формула приводитъ вычисленіе интеграла $\int uv^{(n+1)}\,dx$ къ вычисленію интеграла $\int u^{(n+1)}v\,dx$.

Въ частности, формулою (14) удобно пользоваться въ томъ случаѣ, когда подъ знакомъ интеграла стоитъ произведеніе многочлена u степени n на производную $(n+1)$-го порядка отъ извѣстной функціи v; въ этомъ случаѣ мы имѣемъ $u^{(n+1)}=0$, и правая часть будетъ свободна отъ знака интеграла.

Пусть, напримѣръ, требуется вычислить опредѣленный интегралъ

$$\int_a^b e^{\omega x} f(x)\,dx,$$

гдѣ $f(x)$ есть многочленъ n-ой степени. Положимъ $u=f(x)$, $v=\dfrac{e^{\omega x}}{\omega^{n+1}}$; выводя $e^{\omega x}$ множителемъ, найдемъ по формулѣ (14)

$$\int_a^b e^{\omega x} f(x)\,dx = \left\{e^{\omega x}\left[\frac{f(x)}{\omega} - \frac{f'(x)}{\omega^2} + \ldots + (-1)^n\frac{f^{(n)}(x)}{\omega^{n+1}}\right]\right\}_a^b. \quad (15)$$

Тѣмъ же способомъ можно вычислить опредѣленные интегралы

$$\int_a^b \cos mx\, f(x)\,dx, \quad \int_a^b \sin mx\, f(x)\,dx,$$

гдѣ $f(x)$ — многочленъ.

86. Формула Тэлора. — Замѣнимъ въ формулѣ (14) u функціею $F(x)$, непрерывною между a и b вмѣстѣ со своими производными до $(n+1)$-го порядка, и положимъ $v=(b-x)^n$. Мы имѣемъ

$$v'=-n(b-x)^{n-1}, \quad v''=n(n-1)(b-x)^{n-2}, \quad \ldots,$$
$$v^{(n)}=(-1)^n 1\,.\,2\ldots n, \quad v^{(n+1)}=0.$$

Замѣчая, что при $x=b$ функціи $v, v', v'', \ldots, v^{(n-1)}$ обращаются въ нуль, мы получимъ формулу

$$0=(-1)^n\Big[n!\,F(b)-n!\,F(a)-n!\,F'(a)(b-a)$$
$$-\frac{n!}{2}F''(a)(b-a)^2\ldots-F^{(n)}(a)(b-a)^n\Big]$$
$$+(-1)^{n+1}\int_a^b F^{(n+1)}(x)\,(b-x)^n dx.$$

Отсюда имѣемъ

$$F(b)=F(a)+\frac{b-a}{1}F'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\,.\,2}F''(a)+\ldots$$
$$+\frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)+\frac{1}{n!}\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

Такъ какъ при измѣненіи x отъ a до b множитель $(b—x)^n$ сохраняетъ постоянный знакъ, то мы можемъ примѣнить къ послѣднему интегралу формулу средняго значенія; это даетъ

$$\int_a^b F^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx=F^{(n+1)}(\xi)\int_a^b(b-x)^n dx=$$
$$=\frac{1}{n+1}(b-a)^{n+1}F^{(n+1)}(\xi),$$

гдѣ ξ заключается между a и b. Подставляя это значеніе въ предыдущее равенство, мы получимъ формулу Тэлора съ остаточнымъ членомъ Лагранжа.

87. Трансцендентность числа e. — При помощи формулы (15) можно доказать знаменитую теорему, найденную Эрмитомъ: Число e не можетъ быть корнемъ никакого алгебраическаго уравненія съ цѣлыми коэффиціентами*).

Положивъ въ формулѣ (15) $a=0$, $\omega=-1$, получимъ

$$\int_0^b e^{-x}f(x)\,dx=-[e^{-x}F(x)]_0^b,$$

гдѣ

$$F(x)=f(x)+f'(x)+\ldots+f^{(n)}(x);$$

это соотношеніе можно представить въ видѣ

$$F(b)=e^b F(0)-e^b\int_0^b f(x)e^{-x}dx. \qquad (16)$$

*) Это доказательство было предложено Давидомъ Гильбертомъ (David Hilbert), положившимъ въ основу своего вывода методъ Эрмита.

Допустимъ, что e будетъ корнемъ алгебраическаго уравненія съ цѣлыми коэффиціентами

$$c_0+c_1 e+c_2 e^2+\ldots+c_m e^m=0.$$

Полагая въ равенствѣ (16) послѣдовательно $b=0, 1, 2, \ldots, m$ и складывая получающіяся формулы, умноживъ ихъ соотвѣтственно на $c_0, c_1, \ldots, c_m$, получимъ

$$c_0 F(0)+c_1 F(1)+\ldots+c_m F(m)+\sum_{i=0}^{i=m} c_i e^i \int_0^i f(x)\, e^{-x}\, dx=0, \qquad (17)$$

гдѣ указатель i принимаетъ только цѣлыя значенія $0, 1, 2, \ldots, m$. До сихъ поръ многочленъ $f(x)$ оставался произвольнымъ; теперь мы покажемъ, что при соотвѣтствующемъ выборѣ многочлена $f(x)$ соотношеніе (17) невозможно.

Возьмемъ

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}\, x^{p-1}\,(x-1)^p(x-2)^p\ldots(x-m)^p,$$

гдѣ p есть простое число, большее m; многочленъ $f(x)$, очевидно, $(mp+p-1)$-ой степени, и всѣ коэффиціенты высшихъ производныхъ отъ этого многочлена, начиная съ p-ой производной, будутъ цѣлыми числами, кратными p, такъ какъ произведеніе всякихъ p послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится на $p!$. Кромѣ того, $f(x)$ вмѣстѣ со своими $(p-1)$ первыми производными обращается въ нуль при $x=1, 2, \ldots, m$; отсюда слѣдуетъ, что $F(1), F(2), \ldots, F(m)$ будутъ цѣлыми числами, дѣлящимися на p. Остается вычислить $F(0)$!

$$F(0)=f(0)+f'(0)+\ldots+f^{(p-1)}(0)+f^{(p)}(0)+f^{(p+1)}(0)+\ldots$$

Но $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(p-2)}(0)=0$, и, на основаніи предыдущихъ соображеній, $f^{(p)}(0), f^{(p+1)}(0), \ldots,$ будутъ цѣлыми числами, кратными p. Чтобы получить $f^{(p-1)}(0)$, достаточно умножить на $(p-1)!$ коэффиціентъ при x^{p-1} въ $f(x)$. Это даетъ $\pm(1.2\ldots m)^p$. Такимъ образомъ сумма

$$c_0 F(0)+c_1 F(1)+\ldots+c_m F(m)$$

равна цѣлому числу, дѣлящемуся на p, сложенному съ количествомъ

$$\pm c_0 (1.2\ldots m)^p.$$

Если мы возьмемъ для p простое число, бо́льшее m и c_0, то это послѣднее количество не можетъ дѣлиться на p, и первая часть суммы (17) будетъ цѣлымъ числомъ, о т л и ч н ы м ъ о т ъ н у л я.

Мы покажемъ теперь, что взявъ для p достаточно большое простое число, можно сдѣлать сумму

$$\sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x)\, e^{-x}\, dx$$

меньшею всякаго даннаго количества. При измѣненіи x отъ 0 до i каждый множитель въ многочленѣ $f(x)$ будетъ меньше m; слѣдовательно

$$|f(x)|<\frac{1}{(p-1)!}\, m^{mp+p-1},$$

$$\left|\int_0^i f(x)\, e^{-x}\, dx\right|<\frac{1}{(p-1)!}\, m^{mp+p-1}\int_0^i e^{-x}\, dx<\frac{1}{(p-1)!}\, m^{mp+p-1}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_i c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x}\, dx\right|<M\,\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\, e^m=\varphi(p),$$

гдѣ M есть верхній предѣлъ суммы $|c_0|+|c_1|+\ldots+|c_m|$. При неограниченномъ возрастаніи p функція $\varphi(p)$ стремится къ нулю, какъ общій членъ сходящагося ряда, въ которомъ отношеніе любого члена къ предыдущему стремится къ нулю. Такимъ образомъ можно найти настолько большое простое число p, что равенство (17) будетъ невозможно; это доказываетъ теорему Эрмита.

88. Полиномы Лежандра. — Найдемъ многочленъ n-ой степени $P_n(x)$ подъ условіемъ, чтобы интегралъ

$$\int_a^b QP_n\,dx,$$

гдѣ Q — многочленъ степени ниже n-ой, былъ равенъ нулю при любомъ видѣ многочлена Q. Мы можемъ разсматривать P_n, какъ n-ую производную отъ нѣкотораго многочлена R степени $2n$; этотъ многочленъ R не вполнѣ опредѣляется этимъ условіемъ, такъ какъ, не измѣняя его n-ой производной, мы можемъ прибавить къ нему произвольный многочленъ $(n-1)$-ой степени. Поэтому мы всегда можемъ положить $P_n=\frac{d^nR}{dx^n}$, и притомъ выбрать многочленъ R подъ тѣмъ условіемъ, чтобы онъ вмѣстѣ со своими $(n-1)$ первыми производными обращался въ нуль при $x=a$. Формула интегрированія по частямъ даетъ

$$\int_a^b Q\frac{d^nR}{dx^n}\,dx=\left\{Q\frac{d^{n-1}R}{dx^{n-1}}-Q'\frac{d^{n-2}R}{dx^{n-2}}+\ldots\pm R\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}\right\}_a^b.$$

Но, по предположенію,

$$R(a)=0,\quad R'(a)=0,\quad \ldots,\quad R^{(n-1)}(a)=0,$$

и, чтобы предыдущій интегралъ былъ равенъ нулю, необходимо еще

$$Q(b)\,R^{(n-1)}(b)-Q'(b)\,R^{(n-2)}(b)+\ldots\pm Q^{(n-1)}(b)\,R(b)=0.$$

Такъ какъ многочленъ Q $(n-1)$-ой степени — произвольный, то количества $Q(b)$, $Q'(b)$, $\ldots$, $Q^{(n-1)}(b)$ также произвольны, и поэтому должно быть

$$R(b)=0,\quad R'(b)=0,\quad \ldots,\quad R^{(n-1)}(b)=0.$$

Отсюда видно, что многочленъ $R(x)$ можетъ отличаться отъ произведенія $(x-a)^n(x-b)^n$ только постояннымъ множителемъ, и искомый многочленъ P_n будетъ имѣть видъ

$$P_n=C\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n(x-b)^n\right].$$

Если предѣлы a и b будутъ равны -1 и $+1$, то многочлены P_n называются полиномами Лежандра. Выбирая постоянное C согласно съ Лежандромъ, мы положимъ

$$X_n=\frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{d^n}{dx^n}\,[(x^2-1)^n]. \qquad (18)$$

Если кромѣ того примемъ $X_0=1$, то получимъ

$$X_0=1,\quad X_1=x,\quad X_2=\frac{3x^2-1}{2},\quad X_3=\frac{5x^3-3x}{2},\ldots.$$

X_n есть многочленъ n-ой степени, въ которомъ всѣ показатели при x будутъ одинаковой четности съ показателемъ n. Изъ формулы

Лейбница для n-ой производной отъ произведенія двухъ множителей непосредственно слѣдуетъ, что

$$X_n(1)=1, \quad X_n(-1)=(-1)^n. \tag{19}$$

Если $\varphi(x)$ есть какой-нибудь многочленъ степени ниже n-ой, то на основаніи выше доказаннаго общаго свойства полиномовъ Лежандра имѣемъ

$$\int_{-1}^{+1} X_n \varphi(x)\, dx=0; \tag{20}$$

въ частности, если m и n два неравныхъ цѣлыхъ числа, то всегда

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n\, dx=0. \tag{21}$$

При помощи послѣдней формулы можно очень просто найти рекуррентное соотношеніе, связывающее три послѣдовательныхъ многочлена X_n. Прежде всего замѣтимъ, что всякій многочленъ n-ой степени можетъ быть представленъ черезъ $X_0, X_1, \ldots, X_n$ въ видѣ линейной функціи съ постоянными коэффиціентами. Слѣдовательно, мы можемъ положить

$$xX_n=C_0 X_{n+1}+C_1 X_n+C_2 X_{n-1}+C_3 X_{n-2}+\ldots,$$

гдѣ $C_0, C_1, C_2, \ldots$ — постоянные коэффиціенты. Чтобы опредѣлить, напримѣръ, C_3, умножимъ обѣ части этого равенства на X_{n-2} и проинтегрируемъ между предѣлами -1 и $+1$; при этомъ на основаніи формулъ (20) и (21) останется только

$$C_3\int_{-1}^{+1} X_{n-2}^2\, dx=0,$$

и, слѣдовательно, $C_3=0$. Такимъ же образомъ мы докажемъ, что $C_4=0$, $C_5=0, \ldots$ Коэффиціентъ C_1 также равенъ нулю, такъ какъ произведеніе xX_n не содержитъ члена съ x^n. Наконецъ, для опредѣленія C_0 и C_2 приравняемъ сначала коэффиціенты при x^{n+1}, а потомъ приравняемъ обѣ части равенства при $x=1$. Такимъ образомъ мы получимъ рекуррентное соотношеніе

$$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)xX_n+nX_{n-1}=0; \tag{22}$$

это соотношеніе позволяетъ очень просто находить послѣдовательно многочлены X_n.

Сотношеніе (22) показываетъ, что рядъ полиномовъ

$$X_0, \quad X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_n$$

обладаетъ свойствами ряда Штурма: при непрерывномъ измѣненіи x отъ -1 до $+1$ число перемѣнъ, представляемыхъ этимъ рядомъ, можетъ измѣняться только при переходѣ x черезъ одинъ изъ корней уравненія $X_n=0$. Но формулы (19) показываютъ, что рядъ (23) представляетъ n перемѣнъ при $x=-1$ и не представляетъ ни одной перемѣны при $x=+1$. Слѣдовательно, уравненіе $X_n=0$ имѣетъ n дѣйствительныхъ корней, заключающихся между -1 и $+1$; это предложеніе можно также очень легко вывести изъ теоремы Ролля.

IV.—РАСПРОСТРАНЕНІЯ ПОНЯТІЯ ОБЪ ИНТЕГРАЛѢ.— КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ*).

89. Подъинтегральная функція обращается въ безконечность. — До сихъ поръ мы предполагали, что подъинтегральная функція остается конечною между предѣлами интеграціи. Но въ нѣкоторыхъ случаяхъ опредѣленіе интеграла можетъ быть распространено и на такія функціи, которыя между предѣлами интеграціи обращаются въ безконечность. Разсмотримъ сначала слѣдующій частный случай: функція $f(x)$ непрерывна при всѣхъ значеніяхъ, заключающихся между a и b, а также и при $x=b$, но она обращается въ безконечность при $x=a$. Для опредѣленности предположимъ $a<b$. Какъ бы ни было мало ε, интегралъ отъ функціи $f(x)$, взятый между предѣлами $a+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$), всегда имѣетъ конечное значеніе. Если при приближеніи ε къ нулю этотъ интегралъ стремится къ предѣлу, то принято изображать этотъ предѣлъ, какъ это и естественно, черезъ

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если для $f(x)$ извѣстна какая-нибудь начальная функція $F(x)$, то

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = F(b) - F(a+\varepsilon),$$

и достаточно изслѣдовать, стремится ли $F(a+\varepsilon)$ къ какому-нибудь предѣлу при приближеніи ε къ нулю. Напримѣръ, мы имѣемъ

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{M\,dx}{(x-a)^\mu} = -\frac{M}{\mu-1}\left[\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}\right], \quad \mu \neq 1.$$

Если $\mu>1$, то при приближеніи ε къ нулю членъ $\frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}}$ неограниченно возрастаетъ; напротивъ, при $\mu<1$, можно написать $\frac{1}{\varepsilon^{\mu-1}} = \varepsilon^{1-\mu}$, и мы видимъ, что этотъ членъ стремится къ нулю вмѣстѣ съ ε. Слѣдовательно, въ послѣднемъ случаѣ опредѣленный интегралъ стремится къ предѣлу

$$\int_a^b \frac{M\,dx}{(x-a)^\mu} = \frac{M(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

Если $\mu=1$, то

$$\int_{a+\varepsilon}^b \frac{M\,dx}{x-a} = M\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right),$$

*) Вторая половина главы IV можетъ быть прочитана послѣ главы V.

и правая часть возрастаетъ неограниченно при приближеніи ε къ нулю. Такимъ образомъ, чтобы предыдущій опредѣленный интегралъ имѣлъ предѣлъ, необходимо и достаточно, чтобы μ было меньше единицы.

Кривая, представляемая уравненіемъ

$$y=\frac{M}{(x-a)^{\mu}},$$

имѣетъ при положительномъ μ асимптотою прямую $x=a$. Тѣмъ не менѣе, если $\mu<1$, то площадь, заключающаяся между осью x, неподвижною ординатою $x=b$, кривою и ея асимптотою, имѣетъ конечное значеніе.

Если начальная функція отъ $f(x)$ неизвѣстна, то пользуются сравненіемъ съ уже извѣстными интегралами. Всего чаще пользуются сравненіемъ съ предыдущимъ интеграломъ, что даетъ нѣсколько правилъ, достаточныхъ для большинства случаевъ. Замѣтимъ прежде всего, что верхній предѣлъ b здѣсь не имѣетъ значенія, такъ какъ все зависитъ отъ того, какимъ образомъ функція $f(x)$ дѣлается безконечною при $x=a$; поэтому мы можемъ замѣнить b любымъ числомъ, заключающимся между a и b т.-е. написать $\int_{a+\varepsilon}^{b}=\int_{a+\varepsilon}^{c}+\int_{c}^{b}$. Въ частности, если число корней функціи $f(x)$ вблизи $x=a$ конечно, то можно предположить, что $f(x)$ сохраняетъ всюду между a и c постоянный знакъ.

Докажемъ прежде всего слѣдующую лемму: Пусть будетъ $\varphi(x)$ функція, положительная въ промежуткѣ (a, b) и такая, что интегралъ $\int_{a+\varepsilon}^{b}\varphi(x)\,dx$ имѣетъ предѣлъ при $\varepsilon=0$. Если всюду въ этомъ промежуткѣ $|f(x)|<\varphi(x)$, то опредѣленный интегралъ $\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx$ также имѣетъ предѣлъ.

Если функція $f(x)$ положительна, то доказательство весьма просто. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $f(x)$ меньше функціи $\varphi(x)$, то

$$\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx<\int_{a+\varepsilon}^{b}\varphi(x)\,dx;$$

кромѣ того, при уменьшеніи ε, интегралъ $\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx$ возрастаетъ, такъ какъ всѣ его элементы положительны; но предыдущее неравенство показываетъ, что интегралъ $\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx$ постоянно меньше предѣла второго интеграла; слѣдовательно, онъ самъ имѣетъ предѣлъ. Если функція $f(x)$ между a и b отрицательна,

то нужно только перемѣнить знакъ у всѣхъ элементовъ интеграла. Наконецъ, если функція $f(x)$ имѣетъ вблизи $x=a$ безконечное множество корней, то мы можемъ написать

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx=\int_{a+\varepsilon}^{b}[f(x)+|f(x)|]\,dx-\int_{a+\varepsilon}^{b}|f(x)|\,dx.$$

Второй интегралъ правой части имѣетъ предѣлъ, такъ какъ $|f(x)|<\varphi(x)$. Съ другой стороны, между a и b функція $f(x)+|f(x)|$ положительна или равна нулю и не можетъ быть больше $2\varphi(x)$; поэтому интегралъ

$$\int_{a+\varepsilon}^{b}[f(x)+|f(x)|]\,dx$$

также имѣетъ предѣлъ. Отсюда видно, что если функція $f(x)$ при $x=a$ не стремится ни къ какому предѣлу, но по абсолютному значенію остается меньшею опредѣленнаго числа, то интегралъ имѣетъ предѣлъ. Напримѣръ, интегралъ $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}dx$ имѣетъ опредѣленное значеніе.

Правило.— Предположимъ, что функція $f(x)$ можетъ быть представлена въ видѣ

$$f(x)=\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}},$$

гдѣ функція $\psi(x)$ остается конечною, когда x стремится къ a. Если $\mu<1$, и если функція $\psi(x)$ по абсолютному значенію остается меньшею опредѣленнаго числа M, то интегралъ имѣетъ предѣлъ. Если же $\mu\geqq 1$, и если абсолютное значеніе функціи $\psi(x)$ больше нѣкотораго положительнаго числа m, то интегралъ предѣла не имѣетъ.

Первая часть предложенія очевидна. Въ самомъ дѣлѣ, абсолютное значеніе функціи $f(x)$ будетъ меньше функціи $\frac{M}{(x-a)^{\mu}}$; но интегралъ отъ этой послѣдней функціи имѣетъ предѣлъ, такъ какъ по предположенію $\mu<1$.

Чтобы доказать вторую часть, замѣтимъ прежде всего, что такъ какъ функція $\psi(x)$ по абсолютному значенію остается большею положительнаго числа m, то она сохраняетъ вблизи $x=a$ постоянный знакъ. Предположимъ, что между a и b $\psi(x)>0$; мы можемъ написать

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx>\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{m\,dx}{(x-a)^{\mu}},$$

и правая часть при уменьшеніи ε неограниченно возрастаетъ.

Эти правила достаточны во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда можно найти такой показатель μ, чтобы произведеніе $(x-a)^{\mu}f(x)$ при $x=a$ имѣло предѣлъ K, отличный отъ нуля. Если μ меньше единицы, то можно взять верхній предѣлъ b настолько близкимъ къ a, чтобы въ промежуткѣ (a, b) было

$$|f(x)|<\frac{L}{(x-a)^{\mu}},$$

гдѣ L — какое-нибудь положительное число, большее $|K|$. Слѣдовательно, интегралъ имѣетъ предѣлъ. Напротивъ, если $\mu \geqq 1$, то можно взять b настолько близкимъ къ a, чтобы въ промежуткѣ (a, b) было

$$|f(x)|>\frac{l}{(x-a)^{\mu}},$$

гдѣ l — положительное число, меньшее $|K|$. Кромѣ того, такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна, то она сохраняетъ постоянный знакъ; слѣдовательно, интегралъ $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ неограниченно возрастаетъ по абсолютному значенію.

Примѣры. — Пусть будетъ $f(x)=\frac{P}{Q}$ раціональная функція; если a есть m-кратный корень знаменателя, то произведеніе $(x-a)^m f(x)$ стремится при $x=a$ къ предѣлу, отличному отъ нуля. Такъ какъ m не менѣе единицы, то мы видимъ, что при приближеніи ε къ нулю интегралъ $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ неограниченно возрастаетъ.

Съ другой стороны, положимъ

$$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ P и R — два многочлена, и многочленъ $R(x)$ не имѣетъ кратныхъ корней. Если a есть корень многочлена $R(x)$, то произведеніе $(x-a)^{\frac{1}{2}}f(x)$ имѣетъ предѣлъ при $x=a$; слѣдовательно, интегралъ также имѣетъ предѣлъ. Такъ, напримѣръ, интегралъ

$$\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

имѣетъ при $\varepsilon=0$ предѣлъ $\frac{\pi}{2}$.

Разсмотримъ еще интегралъ $\int_{\varepsilon}^{1}\log x\,dx$. Произведеніе $x^{\frac{1}{2}}\log x$ имѣетъ предѣломъ нуль; слѣдовательно, начиная съ достаточно малаго значенія перемѣннаго x, мы имѣемъ $\log x<Mx^{-\frac{1}{2}}$

гдѣ M — произвольно выбранное положительное число. Слѣдовательно, данный интегралъ имѣетъ предѣлъ.

Все, что здѣсь было сказано относительно нижняго предѣла a, можетъ быть безъ измѣненія отнесено и къ верхнему предѣлу b. Если $f(x)$ при $x=b$ обращается въ безконечность, то мы опредѣлимъ интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$, какъ предѣлъ интеграла $\int_a^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx$ при $\varepsilon'=0$. Если $f(x)$ обращается въ безконечность при обоихъ предѣлахъ a, b, то мы опредѣлимъ интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$, какъ предѣлъ интеграла $\int_{a+\varepsilon'}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx$, когда ε и ε' независимо одно отъ другого стремятся къ нулю. Пусть будетъ c какое-нибудь число, содержащееся между a и b; мы можемъ написать

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx=\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

и каждый изъ интеграловъ, стоящихъ въ правой части, долженъ имѣть предѣлъ. Наконецъ, если $f(x)$ обращается въ безконечность при значеніи c, заключающемся между a и b, то мы опредѣлимъ интегралъ $\int_a^b f(x)\,dx$, какъ сумму предѣловъ интеграловъ $\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx$ и $\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$; такимъ же образомъ мы поступимъ, если $f(x)$ имѣетъ между a и b нѣсколько точекъ прерывности.

Должно замѣтить, что основная формула (6) (§ 76), выведенная въ предположеніи, что между a и b функція $f(x)$ непрерывна, остается вѣрною и въ томъ случаѣ, когда $f(x)$ между этими предѣлами обращается въ безконечность, если только начальная функція $F(x)$ остается при этомъ непрерывною.

Предположимъ, напримѣръ, что функція $f(x)$ обращается въ безконечность при значеніи c, заключающемся между a и b. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon'=0}\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon=0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Если начальная функція отъ $f(x)$ есть $F(x)$, то мы можемъ представить послѣднее равенство въ видѣ

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon'=0} F(c-\varepsilon')-F(a)+F(b)-\lim_{\varepsilon=0} F(c+\varepsilon).$$

Такъ какъ мы предположили, что функція $F(x)$ непрерывна при $x=c$, то $F(c+\varepsilon)$ и $F(c-\varepsilon')$ будутъ имѣть одинъ и тотъ же предѣлъ, и, слѣдовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Напримѣръ,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = (3x^{\frac{1}{3}})_{-1}^{+1} = 6.$$

Если между a и b начальная функція $F(x)$ сама обращается въ безконечность, то формула (6) болѣе не примѣнима, такъ какъ въ предыдущемъ нѣтъ указаній на то, какой смыслъ можетъ имѣть въ этомъ случаѣ интегралъ.

Разсматривая эти обобщенные интегралы, какъ предѣлы обыкновенныхъ интеграловъ, мы можемъ точно такъ же распространить на нихъ формулы замѣны перемѣннаго и интегрированія по частямъ.

90. Одинъ изъ предѣловъ обращается въ безконечность.— Пусть будетъ $f(x)$ функція отъ x, непрерывная при всѣхъ значеніяхъ x, большихъ числа a. Интегралъ $\int_a^l f(x)dx$, гдѣ $l>a$, имѣетъ конечное значеніе, какъ бы l ни было велико; если при неограниченномъ возрастаніи l этотъ интегралъ стремится къ предѣлу, то этотъ предѣлъ изображается черезъ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Если начальная функція отъ $f(x)$ извѣстна, то легко узнать, имѣетъ ли данный интегралъ предѣлъ. Такъ

$$\int_0^l \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} l;$$

при неограниченномъ возрастаніи l правая часть имѣетъ предѣлъ $\frac{\pi}{2}$, и мы можемъ написать

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Точно также, предполагая a положительнымъ и $\mu-1$ отличнымъ отъ нуля, имѣемъ

$$\int_a^l \frac{k\,dx}{x^\mu} = \frac{k}{1-\mu}\left(\frac{1}{l^{\mu-1}} - \frac{1}{a^{\mu-1}}\right);$$

если μ больше единицы, то при неограниченномъ возрастаніи l правая часть стремится къ предѣлу, и мы можемъ написать

$$\int_a^{+\infty} \frac{k\,dx}{x^\mu} = \frac{k}{(\mu-1)a^{\mu-1}}.$$

Напротивъ, если μ меньше единицы, то интегралъ неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ l. То же самое будетъ и въ томъ случаѣ, если $\mu = 1$, такъ какъ интегралъ выражается посредствомъ логариѳма.

Если начальная функція отъ функціи $f(x)$ неизвѣстна, то опять прибѣгаютъ къ сравненію; при этомъ для нижняго предѣла a можно взять сколько угодно большое число. Мы будемъ опираться на слѣдующую лемму.

Пусть будетъ $\varphi(x)$ функція, положительная при $x > a$ и такая, что интегралъ $\int_a^l \varphi(x)\,dx$ имѣетъ предѣлъ при неограниченномъ возрастаніи l; если при всѣхъ значеніяхъ x, большихъ a, имѣетъ мѣсто неравенство $|f(x)| \leqq \varphi(x)$, то интегралъ $\int_a^l f(x)\,dx$ также имѣетъ предѣлъ.

Доказательство этой леммы совершенно такое же, какъ и предыдущей леммы. Если функція $f(x)$ можетъ быть представлена въ видѣ

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{x^\mu},$$

причемъ $\psi(x)$ остается конечною при безконечномъ x, то мы имѣемъ слѣдующія теоремы, которыя мы приведемъ безъ доказательства.

Если абсолютное значеніе функціи $\psi(x)$ меньше опредѣленнаго числа M, и μ больше единицы, то интегралъ имѣетъ предѣлъ.

Если абсолютное значеніе функціи $\psi(x)$ больше положительнаго числа m, и μ меньше или равно единицѣ, то интегралъ не имѣетъ предѣла.

Напримѣръ, интегралъ $\int_0^l \frac{\cos a x}{1+x^2}\,dx$ имѣетъ предѣлъ, такъ какъ можно написать

$$\frac{\cos a x}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos a x}{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

и функція, на которую умножается $\frac{1}{x^2}$, по абсолютному значенію меньше единицы.

Предыдущее правило достаточно во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда можно найти такое положительное число μ, чтобы произведеніе $x^\mu f(x)$ при безконечномъ x стремилось къ предѣлу, отличному отъ нуля. Интегралъ имѣетъ предѣлъ, если μ

больше единицы, и не имѣетъ предѣла, если μ меньше или равно единицѣ.

Напримѣръ, для того чтобы при неограниченномъ возрастаніи верхняго предѣла интегралъ отъ раціональной дроби имѣлъ предѣлъ, необходимо и достаточно, чтобы степень знаменателя была больше степени числителя по крайней мѣрѣ на двѣ единицы. Положимъ

$$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}$$

гдѣ P и Q — многочлены p-ой и r-ой степени; при безконечномъ x произведеніе $x^{\frac{r}{2}-p}f(x)$ имѣетъ предѣлъ, отличный отъ нуля. Чтобы интегралъ имѣлъ предѣлъ, необходимо и достаточно, чтобы $p<\frac{r}{2}-1$.

91. Предыдущія правила не всегда достаточны для рѣшенія вопроса, имѣетъ ли интегралъ предѣлъ, или онъ предѣла не имѣетъ. Возьмемъ, напримѣръ, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; произведеніе $x^{\mu}f(x)$ при $\mu<1$ имѣетъ предѣломъ нуль; при $\mu>1$ оно можетъ принимать значенія, большія всякаго даннаго числа. Наконецъ, при $\mu=1$ оно колеблется между $+1$ и -1. Такимъ образомъ здѣсь не приложимо ни одно изъ приведенныхъ выше правилъ; тѣмъ не менѣе интегралъ имѣетъ предѣлъ. Разсмотримъ интегралъ болѣе общаго вида

$$A=\int_0^l e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx,\quad (\alpha\geqq 0).$$

Подъинтегральная функція мѣняетъ знакъ при $x=k\pi$. Такимъ образомъ мы приходимъ къ разсмотрѣнію знакоперемѣннаго ряда

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^n a_n+\ldots, \qquad (24)$$

гдѣ

$$a_0=\int_0^{\pi}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx,\quad a_1=-\int_{\pi}^{2\pi}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx,\ldots,$$

$$a_n=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right|.$$

Замѣняя x черезъ $y+n\pi$, мы можемъ представить общій членъ a_n въ видѣ

$$a_n=\int_0^{\pi}e^{-\alpha y-n\alpha\pi}\frac{\sin y}{y+n\pi}dy.$$

Очевидно, что подъинтегральная функція убываетъ съ возрастаніемъ n, и, слѣдовательно, $a_{n+1}<a_n$; кромѣ того, общій членъ меньше интеграла $\int_0^{\pi}\frac{dy}{n\pi}$, т.-е. меньше $\frac{1}{n}$. Слѣдовательно, предыдущій рядъ — сходящійся, такъ какъ его члены убываютъ по абсолютному значенію, и общій членъ стремится къ нулю. Если верхній предѣлъ l интеграла A заключается между $n\pi$ и $(n+1)\pi$, то мы можемъ написать

$$\int_0^{l} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx=S_n\pm\theta a_n,\quad 0<\theta<1,$$

гдѣ S_n есть сумма n первыхъ членовъ ряда (24). При неограниченномъ возрастаніи l, n также неограниченно возрастаетъ, a_n стремится къ нулю, и интегралъ имѣетъ предѣломъ сумму S ряда (24).

Точно такъ же можно доказать, что интегралы

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx,$$

встрѣчающіеся въ теоріи диффракціи, имѣютъ конечное значеніе. Напримѣръ, кривая $y=\sin x^2$ имѣетъ волнообразную форму синусоиды, но волны идутъ все болѣе и болѣе сжимаясь, такъ какъ при неограниченномъ возрастаніи n разность $\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}$ двухъ послѣдовательныхъ корней уравненія $\sin x^2=0$ стремится къ нулю.

Примѣчаніе. — По поводу послѣдняго примѣра можно сдѣлать слѣдующее интересное замѣчаніе. При неограниченномъ возрастаніи x, $\sin x^2$ колеблется между -1 и $+1$; такимъ образомъ интегралъ можетъ имѣть предѣлъ даже и въ томъ случаѣ, когда подъинтегральная функція не стремится къ нулю, иными словами, когда кривая $y=f(x)$ не имѣетъ своею асимптотою оси x. Вотъ еще другой примѣръ, въ которомъ, кромѣ того, функція $f(x)$ сохраняетъ постоянный знакъ. Положимъ

$$f(x)=\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}.$$

При положительномъ x эта функція постоянно положительна; она не стремится къ нулю, такъ какъ $f(k\pi)=k\pi$. Чтобы показать, что этотъ интегралъ имѣетъ предѣлъ, разсмотримъ, какъ и выше, рядъ

$$a_0+a_1+\ldots+a_n+\ldots,$$

гдѣ

$$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2 x}.$$

При измѣненіи x отъ $n\pi$ до $(n+1)\pi$ мы имѣемъ $x^6>n^6\pi^6$, и потому

$$a_n<(n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+n^6\pi^6\sin^2 x}.$$

Послѣдній интегралъ имѣетъ начальною функціею выраженіе

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}\operatorname{arc\,tang}(\sqrt{1+n^6\pi^6}\operatorname{tang}x).$$

При измѣненіи x отъ $n\pi$ до $(n+1)\pi$, $\operatorname{tang}x$ обращается въ безконечность одинъ разъ, переходя съ $+\infty$ на $-\infty$; слѣдовательно, интегралъ равенъ $\frac{\pi}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}$ (§ 77), и мы имѣемъ

$$a_n<\frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{1+n^6\pi^6}}<\frac{(n+1)}{n^3\pi}.$$

Такъ какъ рядъ Σa_n — сходящійся, то интегралъ $\int_0^l f(x)\,dx$ имѣетъ предѣлъ.

Очевидно однако, что если функція $f(x)$ имѣетъ при безконечно большомъ значеніи x предѣлъ h, о т л и ч н ы й о т ъ н у л я, то интегралъ не можетъ имѣть предѣла, такъ какъ, начиная съ достаточно большого значенія x, функція $f(x)$ по абсолютному значенію будетъ больше $\left|\frac{h}{2}\right|$ и будетъ имѣть постоянный знакъ.

Предыдущія разсужденія имѣютъ много сходства съ разсужденіями, встрѣчающимися въ теоріи рядовъ. Тѣсная связь, существующая между этими двумя вопросами, была выяснена одною теоремою Коши, которая будетъ изложена ниже (гл. VIII); тамъ мы познакомимся еще съ другими признаками, позволяющими рѣшать вопросъ о предѣлѣ интеграла и въ случаяхъ болѣе общихъ, нежели разсмотрѣнные выше.

92. Функція $\Gamma(a)$. — Опредѣленный интегралъ

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}\,dx \qquad (25)$$

имѣетъ опредѣленное значеніе, если a положительно.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ два интеграла

$$\int_\varepsilon^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx,\quad \int_1^l x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

гдѣ ε — очень малое положительное число, а l — очень большое положительное число. Второй интегралъ всегда имѣетъ предѣлъ, такъ какъ при достаточно большихъ значеніяхъ x мы имѣемъ $e^x>x^{a+1}$, откуда $x^{a-1}e^{-x}<\frac{1}{x^2}$. Что касается перваго интеграла, то при приближеніи x къ нулю произведеніе $x^{1-a}f(x)$ имѣетъ предѣломъ единицу. Чтобы интегралъ имѣлъ предѣлъ, необходимо и достаточно, чтобы $1-a$ было меньше единицы, т. е. чтобы a было положительно. Предположимъ, что это условіе выполнено; сумма обоихъ предѣловъ есть функція $\Gamma(a)$, называемая также Э й л е р о в ы м ъ и н т е г р а л о м ъ в т о р о г о р о д а. Эта функція обращается въ безконечность, если a стремится къ нулю; она имѣетъ положительное значеніе при всякомъ положительномъ значеніи a и безконечно возрастаетъ вмѣстѣ съ a. Она имѣетъ minimum при $a=1{,}4616321\ldots$, и ея соотвѣтствующее значеніе будетъ $0{,}8856032\ldots$

Проинтегрируемъ по частямъ формулу (25), предполагая $a>1$; разсматривая $e^{-x}dx$, какъ дифференціалъ отъ $-e^{-x}$, получимъ

$$\Gamma(a)=-[x^{a-1}e^{-x}]_0^{+\infty}+(a-1)\int_0^{+\infty}x^{a-2}e^{-x}\,dx.$$

Но на предѣлахъ $+\infty$ и 0 произведеніе $x^{a-1}e^{-x}$ равно нулю, такъ какъ $a>1$; поэтому

$$\Gamma(a)=(a-1)\,\Gamma(a-1). \tag{26}$$

Примѣняя эту формулу нѣсколько разъ, мы можемъ привести вычисленіе функціи $\Gamma(a)$ къ случаю, когда аргументъ a заключается между 0 и 1. Если a есть цѣлое число, то изъ формулы (26) легко вывести значеніе $\Gamma(a)$. Мы имѣемъ

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=-[e^{-x}]_0^{+\infty}=1;$$

полагая затѣмъ въ формулѣ (26) послѣдовательно $a=2, 3, \ldots, n, \ldots$, получимъ

$$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(3)=2\Gamma(2)=1.2,$$

и вообще, при n цѣломъ положительномъ,

$$\Gamma(n)=1.2.3\ldots(n-1)=(n-1)!. \tag{27}$$

93. Криволинейные интегралы. — Пусть будетъ AB непрерывная дуга плоской кривой, и $P(x, y)$ — функція перемѣнныхъ x, y, непрерывная вдоль AB (здѣсь x, y обозначаютъ координаты точки дуги AB относительно двухъ осей, лежащихъ въ ея плоскости). Разобьемъ дугу AB на части точками дѣленія $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots$ съ координатами (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_i, y_i), \ldots$ и на каждой изъ дугъ $m_{i-1}m_i$ возьмемъ кромѣ того по произвольной точкѣ n_i съ координатами (ξ_i, η_i). Разсмотримъ сумму

$$\left.\begin{aligned} &P(\xi_i, \eta_i)\,(x_1-a)+P(\xi_2, \eta_2)\,(x_2-x_1)+\ldots \\ &\quad +P(\xi_i, \eta_i)\,(x_i-x_{i-1})+\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

распространенную на всѣ частичные промежутки. Если число точекъ дѣленія неограниченно возрастаетъ такъ, что каждая изъ разностей x_i-x_{i-1} стремится къ нулю, то предыдущая сумма стремится къ нѣкоторому предѣлу, который называется криволинейнымъ интеграломъ отъ $P(x,y)$, распространеннымъ на дугу AB; этотъ интегралъ изображается символомъ

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx.$$

Чтобы доказать существованіе этого предѣла, предположимъ сначала, что любая прямая, параллельная Oy, можетъ встрѣтить дугу AB не болѣе, чѣмъ въ одной точкѣ. Пусть будутъ a и b абсциссы точекъ A и B, и $y=\varphi(x)$— уравненіе кривой AB; $\varphi(x)$ есть непрерывная функція отъ x въ промежуткѣ (a, b). Если въ $P(x, y)$ мы замѣнимъ y черезъ $\varphi(x)$, то полученный результатъ также будетъ непрерывною функціею $\Phi(x)=P[x, \varphi(x)]$, и мы будемъ имѣть

$$P(\xi_i, \eta_i)=P[\xi_i, \varphi(\xi_i)]=\Phi(\xi_i).$$

Такимъ образомъ предыдущая сумма можетъ быть представлена въ видѣ

$$\Phi(\xi_1)(x_1-a)+\Phi(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+\Phi(\xi_i)(x_i-x_{i-1})+\ldots;$$

слѣдовательно, она имѣетъ предѣломъ обыкновенный опредѣленный интегралъ

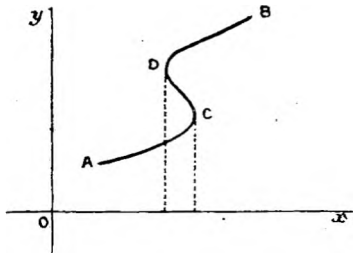
$$\int_a^b \Phi(x)\,dx = \int_a^b P[x, \varphi(x)]\,dx;$$

такимъ образомъ

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx = \int_a^b P[x, \varphi(x)]\,dx.$$

Если прямыя, параллельныя Oy, могутъ встрѣчать дугу AB болѣе, чѣмъ въ одной точкѣ, то мы раздѣлимъ эту дугу на нѣсколько такихъ частей, изъ которыхъ каждая можетъ пересѣкаться съ прямою, параллельною Oy, только въ одной точкѣ. Пусть, напримѣръ, дана дуга кривой $ACDB$ (черт. 14); пусть будутъ C и D точки, для которыхъ абсцисса имѣетъ наибольшее или наименьшее значеніе. Каждая изъ дугъ AC, CD, DB удовлетворяетъ предыдущему условію, и мы можемъ написать

Черт. 14.



$$\int_{ACDB} P(x,y)\,dx = \int_{AC} P(x,y)\,dx + \int_{CD} P(x,y)\,dx + \int_{DB} P(x,y)\,dx.$$

При этомъ должно замѣтить, что при вычисленіи трехъ интеграловъ въ правой части нужно будетъ въ $P(x,y)$ замѣнить y тремя различными функціями отъ перемѣннаго x. Криволинейные интегралы $\int_{AB} Q(x,y)\,dy$ опредѣляются такимъ же образомъ. Замѣтимъ также, что дуга AB можетъ состоять изъ частей совершенно различныхъ кривыхъ, напримѣръ, изъ прямыхъ, дугъ круга и проч.

Изъ предыдущаго видно, что криволинейные интегралы непосредственно приводятся къ обыкновеннымъ опредѣленнымъ интеграламъ, но введеніе ихъ оправдывается ихъ полезностью.

Въ приложеніяхъ весьма часто случается, что координаты точки дуги AB выражаются въ функціи перемѣннаго параметра

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

причемъ $\varphi(t)$, $\psi(t)$ вмѣстѣ со своими производными $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$

суть непрерывныя функціи отъ t. Мы будемъ предполагать, что при измѣненіи t отъ α до β точка (x, y), описывая дугу AB, перемѣщается все время въ одномъ и томъ же направленіи. Разобьемъ промежутокъ (α, β) на болѣе мелкіе промежутки; пусть будутъ t_{i-1}, t_i два послѣдовательныхъ значенія t, которымъ соотвѣтствуютъ на дугѣ AB двѣ точки m_{i-1}, m_i съ координатами (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i). Мы имѣемъ

$$x_i - x_{i-1} = \varphi'(\theta_i)\,(t_i - t_{i-1}),$$

причемъ θ_i заключается между t_{i-1} и t_i. Этому значенію θ_i соотвѣтствуетъ на дугѣ $m_{i-1}\,m_i$ нѣкоторая точка (ξ_i, η_i). Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$\Sigma P(\xi_i, \eta_i)\,(x_i - x_{i-1}) = \Sigma P\,[\varphi(\theta_i), \psi(\theta_i)]\,\varphi'(\theta_i)\,(t_i - t_{i-1}),$$

или, переходя къ предѣлу,

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Такимъ же образомъ мы получимъ аналогичную формулу для $\int Q\,dy$ и, складывая объ формулы, найдемъ

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P\varphi'(t) + Q\psi'(t)]\,dt. \qquad (29)$$

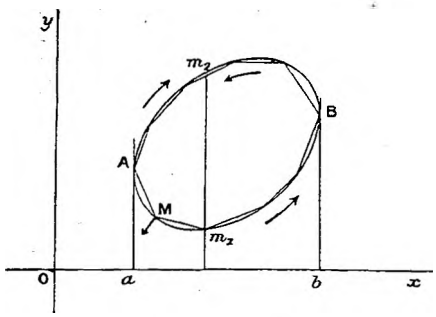
Это — формула замѣны перемѣннаго въ криволинейномъ интегралѣ. Понятно, что если дуга AB состоитъ изъ частей различныхъ кривыхъ, то функціи $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ не будутъ вдоль AB всюду выражаться одинаковымъ образомъ, и мы должны будемъ прилагать формулу (29) отдѣльно къ каждой изъ частей дуги AB.

94. Площадь замкнутой кривой. — Выше мы дали опредѣленіе площади части плоскости, ограниченной дугою кривой AMB, прямою, не пересѣкающею этой дуги, и двумя перпендикулярами AA_0, BB_0, опущенными изъ точекъ A и B на эту прямую (§§ 65, 78, черт. 9). Разсмотримъ теперь замкнутую непрерывную кривую произвольнаго вида. Подъ непрерывною кривою мы понимаемъ геометрическое мѣсто, описанное точкою M, координаты которой суть непрерывныя функціи $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ параметра t, принимающія вновь прежнія значенія послѣ перехода параметра t отъ значенія t_0 къ значенію T. Замѣтимъ, что эти функціи $f(t)$ и $\varphi(t)$ могутъ имѣть въ разныхъ частяхъ промежутка (t_0, T) совершенно различныя выраженія; это

будетъ въ томъ случаѣ, когда замкнутый контуръ C состоитъ изъ дугъ различныхъ кривыхъ. Разсмотримъ на кривой C нѣкоторое число точекъ $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_{n-1}, M_0$, соотвѣтствующихъ значеніямъ $t_0, t_1, t_2, \ldots t_{i-1}, t_i, \ldots, t_{n-1}, T$ параметра t, возрастающимъ отъ t_0 до T. Соединивъ эти точки въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ слѣдуютъ одна за другою на кривой C, мы получимъ многоугольникъ, вписанный въ эту кривую. Площадью замкнутой кривой C называется предѣлъ, къ которому стремится площадь этого многоугольника, когда число сторонъ его неограниченно возрастаетъ такъ, что каждая изъ сторонъ стремится къ нулю*). Это опредѣленіе вполнѣ согласуется съ опредѣленіемъ, принятымъ нами въ указанномъ выше частномъ случаѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы разобьемъ многоугольникъ $A_0AQ_1Q_2\ldots BB_0A_0$ прямыми, параллельными прямой AA_0, на трапеціи, то площадь каждой изъ этихъ трапецій будетъ равна $(x_i-x_{i-1})\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\right]$, или $(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)$, гдѣ ξ_i заключается между x_{i-1} и x_i. Слѣдовательно, площадь многоугольника будетъ имѣть предѣломъ опредѣленный интегралъ $\int f(x)\,dx$.

Разсмотримъ теперь замкнутую кривую C, которую прямая, параллельная нѣкоторому опредѣленному направленію, можетъ встрѣтить не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ. Примемъ за ось y прямую, параллельную этому направленію, а за ось x — перпендикулярную прямую, такъ чтобы кривая C была расположена въ углѣ xOy (черт. 15). Точки контура C будутъ проектироваться на Ox въ точкахъ отрѣзка ab, и всякая прямая, проведенная черезъ любую точку отрѣзка ab параллельно Oy, встрѣтитъ контуръ C только въ двухъ точкахъ m_1 и m_2. Пусть будутъ $y_1=\psi_1(x)$ и $y_2=\psi_2(x)$ уравненія дугъ Am_1B и Am_2B. Предположимъ, для большей ясности, что точки A и B контура C, проектирующіяся въ a и b, будутъ вершинами многоугольника. Площадь многоугольника, вписаннаго въ контуръ C, равна разности пло-

Черт. 15.



*) При этомъ, конечно, предполагается, что разсматриваемая кривая не имѣетъ двойныхъ точекъ, и что стороны вписаннаго многоугольника настолько малы, что периметръ этого многоугольника также не имѣетъ двойныхъ точекъ.

щадей многоугольниковъ, ограниченныхъ прямыми Aa, ab, bB и ломаными линіями, вписанными въ дуги Am_2B и Am_1B. Отсюда, переходя къ предѣлу, заключаемъ, что площадь кривой C равна разности площадей, ограниченныхъ контурами Am_2BbaA и Am_1BbaA, т.-е. разности интегралovъ

$$\int_a^b \psi_2(x)\,dx - \int_a^b \psi_1(x)\,dx.$$

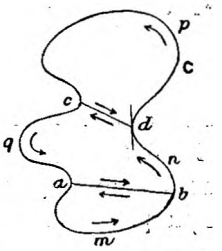
Эти два интеграла представляютъ криволинейный интегралъ $\int y\,dx$, взятый вдоль Am_2B и вдоль Am_1B. Если мы условимся считать, что плоскій контуръ C описывается въ прямомъ направленіи, когда наблюдатель, находящійся на плоскости контура и обходящій этотъ контуръ C, имѣетъ ограниченную контуромъ площадь по лѣвую сторону (причемъ оси имѣютъ обычное расположеніе, какъ на чертежѣ 15), то мы можемъ выразить полученный результатъ слѣдующимъ образомъ: площадь Ω, ограниченная замкнутымъ контуромъ C, равна

$$\Omega = -\int_{(C)} y\,dx, \qquad (30)$$

причемъ криволинейный интегралъ взятъ вдоль контура C въ прямомъ направленіи. Такъ какъ послѣдній интегралъ не мѣняется отъ перемѣщенія начала координатъ, то эта формула остается вѣрною при всякомъ положеніи контура C относительно осей координатъ.

Разсмотримъ теперь контуръ C произвольной формы. Мы предположимъ, что проведя рядъ прямыхъ, соединяющихъ двѣ точки контура C, можно получить такіе частные контуры, что прямыя, параллельныя Oy, будутъ пересѣкать каждый изъ нихъ только въ двухъ точкахъ. Такова область, ограниченная контуромъ C на черт. 16; при помощи поперечныхъ прямыхъ ее можно разбить на три части, ограниченныя контурами $amba$, $abndcqa$, $cdpc$. Къ каждой изъ нихъ можно приложить предыдущую формулу; если мы сложимъ получающіеся результаты, то криволинейные интегралы, взятые дважды по вспомогательнымъ прямымъ ab и cd, уничтожатся, и мы найдемъ, что и въ этомъ случаѣ площадь, ограниченная контуромъ C, равна криволинейному интегралу $-\int y\,dx$, взятому вдоль C въ прямомъ направленіи.

Черт. 16.



Такимъ же образомъ мы докажемъ, что площадь Ω равна

$$\Omega=\int_{(\sigma)} x\,dy, \tag{31}$$

и, соединяя обѣ формулы, получимъ

$$\Omega=\frac{1}{2}\int_{(\sigma)} x\,dy-y\,dx, \tag{32}$$

причемъ интегралы берутся всегда въ прямомъ направленіи.

Напримѣръ, площадь эллипса, представляемаго уравненіями

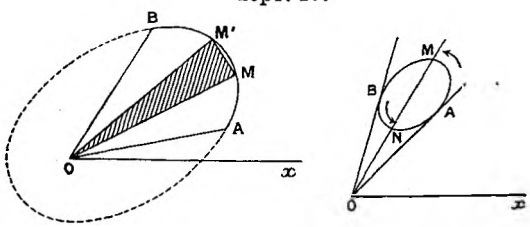
$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,$$

имѣетъ выраженіе

$$\Omega=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=\pi ab.$$

95. Площадь кривой въ полярныхъ координатахъ. — Найдемъ площадь, ограниченную контуромъ $OAMBO$ (черт. 17), образованнымъ прямыми OA, OB и дугою AMB, которая пересѣкается со всякою полупрямою, проведенною изъ O, не болѣе, чѣмъ въ одной точкѣ. Примемъ точку O за полюсъ, прямую Ox — за полярную ось; пусть будетъ $\rho=f(\omega)$ уравненіе дуги AMB.

Черт. 17.



Впишемъ въ дугу AMB ломаную линію и обозначимъ черезъ M, M' двѣ сосѣднихъ вершины. Искомая площадь есть предѣлъ суммы площадей треугольниковъ OMM'. Площадь треугольника OMM' равна

$$\frac{1}{2}\rho(\rho+\Delta\rho)\sin\Delta\omega=\Delta\omega\left(\frac{\rho^2}{2}+\varepsilon\right),$$

гдѣ ε безконечно мало вмѣстѣ съ $\Delta\omega$. Ясно, что если всѣ углы $\Delta\omega$ будутъ достаточно малы, то во всѣхъ треугольникахъ количества ε будутъ меньше всякаго даннаго числа η. Поэтому, при разысканіи предѣла, можно пренебречь количествомъ $\varepsilon\Delta\omega$, и искомая площадь будетъ равна предѣлу суммы $\sum\frac{\rho^2}{2}\Delta\omega$, т.-е. равна опредѣленному интегралу

$$\frac{1}{2}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\rho^2\,d\omega,$$

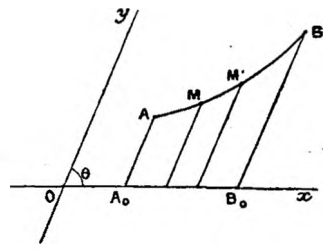
гдѣ ω_1 и ω_2 — углы, образуемые съ Ox прямыми OA и OB.

Площадь, ограниченная контуромъ произвольнаго вида, есть сумма или разность нѣкотораго числа площадей, ограниченныхъ такимъ же образомъ, какъ предыдущая площадь. Если, напримѣръ, требуется вычислить площадь замкнутаго контура, окружающаго точку O, причемъ прямая, проходящая черезъ O, встрѣчаетъ этотъ контуръ только въ двухъ точкахъ, то достаточно измѣнять ω отъ о до 2π. Площадь замкнутаго выпуклаго контура, не содержащаго внутри себя точку O (черт. 17), равна разности площадей двухъ секторовъ $OAMBO$, $OANBO$, которые вычисляются такъ, какъ это было показано выше. Во всѣхъ случаяхъ площадь представляется криволинейнымъ интеграломъ $\frac{1}{2}\int \rho^2 d\omega$, взятымъ вдоль контура C въ прямомъ направленіи. Эта формула въ сущности не отличается отъ предыдущей; дѣйствительно, переходя отъ прямоугольныхъ координатъ къ полярнымъ, будемъ имѣть

$$x=\rho\cos\omega, \quad y=\rho\sin\omega,$$
$$dx=\cos\omega\, d\rho-\rho\sin\omega\, d\omega, \quad dy=\sin\omega\, d\rho+\rho\cos\omega\, d\omega,$$
$$x\,dy-y\,dx=\rho^2\, d\omega.$$

Разсмотримъ кривую AMB, представляемую въ косоугольныхъ координатахъ уравненіемъ $y=f(x)$. Чтобы вычислить площадь, ограниченную дугою AMB, осью x и прямыми AA_0, BB_0, параллельными Oy, впишемъ въ AMB ломаную линію и разобьемъ площадь многоугольника на трапеціи прямыми, параллельными Oy. Площадь одной изъ этихъ трапецій равна

Черт. 18.



$$\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i-x_{i-1})\sin\theta;$$

это выраженіе можно еще представить въ видѣ $(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)\sin\theta$, причемъ ξ_i заключается въ промежуткѣ (x_{i-1}, x_i). Слѣдовательно, искомая площадь равна опредѣленному интегралу

$$\sin\theta\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

гдѣ X и x_0—абсциссы точекъ B и A.

Такъ же, какъ и прежде, мы докажемъ, что площадь, ограниченная произвольнымъ замкнутымъ контуромъ C, имѣетъ выраженіе

$$\frac{\sin\theta}{2}\int_{(C)} x\,dy-y\,dx.$$

Примѣчаніе. — Проведемъ въ какой-нибудь точкѣ M данной замкнутой кривой C внѣшнюю нормаль; пусть будутъ α, β углы, образуемые этою нормалью съ осями Ox, Oy, причемъ эти углы считаются отъ о до π. Вдоль дуги Am_1B уголъ β — тупой, и мы имѣемъ $dx = -ds\cos\beta$; поэтому

$$\int_{(Am_1B)} y\,dx = -\int y\cos\beta\,ds.$$

Вдоль Bm_2A уголъ β — острый; въ криволинейномъ интегралѣ, вдоль Bm_2A, dx отрицательно, и если мы условимся считать ds всегда положительнымъ, то получимъ $dx = -ds\cos\beta$. Слѣдовательно, площадь замкнутой кривой представится интеграломъ

$$\int y\cos\beta\,ds,$$

причемъ ds существенно положительно, и уголъ β опредѣляется, какъ было указано. Какъ и выше (§ 94), эта формула можетъ быть распространена на контуръ произвольной формы. Точно также мы могли бы убѣдиться, что та же площадь равна интегралу

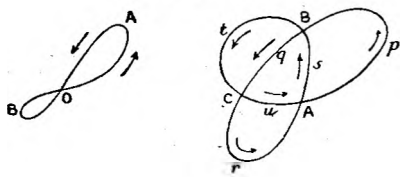
$$\int x\cos\alpha\,ds.$$

Въ отличіе отъ формулъ (30) и (31) эти выраженія сохраняютъ свой знакъ при всякомъ относительномъ положеніи осей координатъ.

96. Значеніе интеграла $\frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$. — Естественно спросить, что представляетъ интегралъ $\int x\,dy - y\,dx$, взятый вдоль кривой произвольной формы, замкнутой или незамкнутой.

Разсмотримъ, напримѣръ, двѣ замкнутыя кривыя $OAOBO$, $ApBqCrAsBtCuA$, имѣющія соотвѣтственно одну и три двойныхъ точки.

Черт. 19.



Ясно, что каждую изъ этихъ кривыхъ мы можемъ замѣнить соединеніемъ двухъ замкнутыхъ кривыхъ безъ двойныхъ точекъ. Такъ, замкнутый контуръ $OAOBO$ равносиленъ послѣдовательности двухъ контуровъ OAO, OBO. Интегралъ, взятый вдоль цѣлаго контура, равенъ площади петли OAO безъ площади петли OBO. Точно также второй контуръ можно замѣнить двумя замкнутыми кривыми $ApBqCrA$ и $AsBtCuA$. Слѣдовательно, интегралъ равенъ суммѣ площадей петель $ApBsA$, $BtCqB$, $ArCuA$, сложенной съ удвоенною площадью петли $AsBqCuA$. Это разсужденіе имѣетъ вполнѣ общій характеръ. Замкнутый контуръ съ любымъ числомъ двойныхъ точекъ опредѣляетъ нѣкоторое число частныхъ площадей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, вполнѣ имъ ограниченныхъ. Интегралъ, взятый вдоль всего контура, равенъ суммѣ вида

$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \ldots + m_p\sigma_p,$$

гдѣ m_1, m_2, ..., m_p — цѣлыя числа, положительныя или отрицательныя, опредѣляемыя по слѣдующему правилу: Пусть даны двѣ смежныя площади σ, σ', раздѣленныя дугою ab контура C. Вообразимъ наблюдателя, находящагося на плоскости и описывающаго контуръ въ направленіи, указанномъ стрѣлками; коэффиціентъ площади, лежащей налѣво отъ наблюдателя, на единицу больше коэффиціента площади, лежащей направо. Неограниченной площади, лежащей внѣ контура, приписываютъ коэффиціентъ 0, и затѣмъ находятъ послѣдовательно всѣ остальные коэффиціенты.

Если данная кривая AB — незамкнутая, то мы преобразуемъ ее въ замкнутую кривую, соединяя съ началомъ концы A и B, и затѣмъ примѣнимъ къ этому контуру предыдущее правило, такъ какъ интегралъ $\int x\,dy - y\,dx$, взятый вдоль лучей OA и OB, очевидно, равенъ нулю.

V. — ФУНКЦІИ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫЯ ОПРЕДѢЛЕННЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ.

97. Дифференцированіе подъ знакомъ интеграла. — Весьма часто приходится разсматривать опредѣленные интегралы, въ которыхъ подъинтегральная функція зависитъ не только отъ перемѣннаго интеграціи, но также отъ одного или нѣсколькихъ другихъ перемѣнныхъ, разсматриваемыхъ, какъ параметры. Пусть будетъ $f(x, \alpha)$ функція двухъ перемѣнныхъ x и α, непрерывная при измѣненіи x отъ x_0 до X и при измѣненіи α между нѣкоторыми предѣлами α_0, α_1. Предположимъ, что α имѣетъ нѣкоторое опредѣленное значеніе, заключающееся между α_0 и α_1, и что предѣлы x_0, X не зависятъ отъ α; тогда опредѣленный интегралъ

$$F(\alpha) = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\,dx$$

есть функція перемѣннаго α. Разсмотримъ свойства этой функціи.

Мы имѣемъ

$$F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha) = \int_{x_0}^{X} [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\,dx. \qquad (33)$$

Такъ какъ функція $f(x, \alpha)$ непрерывна, то можно взять $\Delta\alpha$ настолько малымъ, чтобы абсолютное значеніе разности, стоящей подъ знакомъ интеграла, было меньше заранѣе даннаго положительнаго числа ε. Поэтому приращеніе $\Delta F(\alpha)$ будетъ по абсолютному значенію меньше $\varepsilon\,|X - x_0|$; отсюда слѣдуетъ, что функція $F(\alpha)$ непрерывна.

Если $f(x, \alpha)$ имѣетъ производную по перемѣнному α, то

$$f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha) = \Delta\alpha\,[f'_\alpha(x, \alpha) + \varepsilon],$$

причемъ ε стремится къ нулю одновременно съ $\Delta\alpha$. Поэтому, раздѣливъ обѣ части (13) на $\Delta\alpha$, мы можемъ написать

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+\int_{x_0}^{X}\varepsilon\,dx.$$

Обозначимъ черезъ η верхній предѣлъ абсолютныхъ значеній ε; тогда послѣдній интегралъ будетъ по абсолютному значенію меньше $\eta\,|X-x_0|$, и, переходя къ предѣлу, получимъ

$$\frac{dF}{d\alpha}=\int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx. \tag{34}$$

Чтобы это заключеніе было совершенно строго, необходимо, чтобы $\Delta\alpha$ могло быть взято настолько малымъ, чтобы число ε было менѣе любого заданнаго числа η при всѣхъ значеніяхъ x, заключающихся между предѣлами x_0 и X. Это навѣрное будетъ въ томъ случаѣ, если производная $f'_\alpha(x,\alpha)$ сама непрерывна. Въ самомъ дѣлѣ, формула конечныхъ приращеній даетъ

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)=\Delta\alpha\, f'_\alpha(x,\alpha+\theta\,\Delta\alpha),\quad 0<\theta<1,$$

и, слѣдовательно,

$$\varepsilon=f'_\alpha(x,\alpha+\theta\,\Delta\alpha)-f'_\alpha(x,\alpha).$$

Если функція f'_α непрерывна, то, каковы бы ни были x и α, разность ε будетъ меньше η, если только $|\Delta\alpha|$ будетъ меньше достаточно малаго положительнаго числа h (см. дальше гл. VI, § 120).

Предположимъ теперь, что предѣлы X и x_0 будутъ также зависѣть отъ α. Обозначая черезъ ΔX и Δx_0 приращенія, соотвѣтствующія приращенію $\Delta\alpha$, мы будемъ имѣть

$$F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)=\int_{x_0}^{X}[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx+\int_{X}^{X+\Delta X} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx.$$

Прилагая къ двумъ послѣднимъ интеграламъ формулу средняго значенія и раздѣливъ результатъ на $\Delta\alpha$, получимъ

$$\frac{F(\alpha+\Delta\alpha)-F(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_{x_0}^{X}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx+\frac{\Delta X}{\Delta\alpha}f(X+\theta\,\Delta X,\alpha+\Delta\alpha)-\frac{\Delta x_0}{\Delta\alpha}f(x_0+\theta'\Delta x_0,\alpha+\Delta\alpha).$$

При приближеніи $\Delta\alpha$ къ нулю первый интегралъ имѣетъ найденный выше предѣлъ, и, переходя къ предѣлу, получимъ

$$\frac{dF}{d\alpha}=\int_{x_0}^{X} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+\frac{dX}{d\alpha}f(X,\alpha)-\frac{dx_0}{d\alpha}f(x_0,\alpha). \tag{35}$$

Это — общая формула дифференцированія подъ знакомъ интеграла.

Такъ какъ всякій криволинейный интегралъ можно привести къ суммѣ обыкновенныхъ опредѣленныхъ интеграловъ, то формула дифференцированія подъ знакомъ интеграла распространяется и на эти интегралы. Напримѣръ, пусть будетъ

$$F(\alpha)=\int_{AB} P(x, y, \alpha)\,dx+Q(x, y, \alpha)\,dy$$

криволинейный интегралъ, взятый вдоль дуги AB, не зависящей отъ α; мы имѣемъ

$$F'(\alpha)=\int_{AB} P'_\alpha(x, y, \alpha)\,dx+Q'_\alpha(x, y, \alpha)\,dy,$$

причемъ при всякомъ α интегралъ берется вдоль одной и той же кривой.

Необходимо обратить вниманіе на то, что предыдущія разсужденія существенно предполагаютъ, что предѣлы интеграціи конечны, и что подъинтегральная функція не обращается между этими предѣлами въ безконечность. Впослѣдствіи мы разсмотримъ случаи, когда эти условія не выполняются (гл. VIII).

Формулою (35) часто пользуются, чтобы получать значенія нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ, приводя ихъ къ другимъ болѣе простымъ интеграламъ. Напримѣръ, при a положительномъ мы имѣемъ

$$\int_0^x \frac{dx}{x^2+a}=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{a}}.$$

Прилагая $(n-1)$ разъ формулу (34), получимъ

$$(-1)^{n-1}\,1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^n}=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{a}}\right).$$

98. Примѣры прерывности. — Если указанныя выше условія выполнены не всюду между предѣлами интеграціи, то можетъ случиться, что опредѣленный интегралъ будетъ прерывною функціею параметра. Разсмотримъ, напримѣръ, опредѣленный интегралъ

$$F(\alpha)=\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

Этотъ интегралъ имѣетъ конечное значеніе, такъ какъ корни знаменателя — мнимые, кромѣ того случая, когда $\alpha=k\pi$; но ясно, что въ этомъ случаѣ мы имѣемъ $F(\alpha)=0$. Поэтому предположимъ $\sin\alpha\neq 0$; полагая

$$x=\cos\alpha+t\sin\alpha$$

и взявъ сначала неопредѣленный интегралъ, получимъ

$$\int\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\int\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arc\,tang} t.$$

Слѣдовательно, опредѣленный интегралъ $F(\alpha)$ равенъ

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right),$$

причемъ дуги считаются отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Но

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\times\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-1,$$

и, слѣдовательно, разность дугъ равна $\pm\frac{\pi}{2}$. Чтобы рѣшить, какой знакъ долженъ быть здѣсь взятъ, замѣтимъ, что всѣ элементы интеграла имѣютъ знакъ $\sin\alpha$. Такимъ образомъ $F(\alpha)=\pm\frac{\pi}{2}$ въ зависимости отъ того, будетъ ли $\sin\alpha$ положительно или отрицательно; слѣдовательно, функція $F(\alpha)$ прерывна при всѣхъ значеніяхъ $\alpha=k\pi$. Этотъ результатъ нисколько не противорѣчитъ разсужденіямъ, приведеннымъ въ началѣ этого параграфа. Въ самомъ дѣлѣ, при измѣненіи x отъ -1 до $+1$ и при измѣненіи α, напримѣръ, отъ $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$, функція подъ знакомъ интеграла дѣлается неопредѣленною при значеніяхъ $\alpha=0$, $x=-1$ и $\alpha=0$, $x=+1$, которыя входятъ въ область $(-1, +1; -\varepsilon, +\varepsilon)$ перемѣнныхъ x, α, какъ бы ε ни было мало.

Не трудно было бы привести еще много другихъ примѣровъ. Возьмемъ, напримѣръ, интегралъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{x}dx.$$

Сдѣлавъ замѣну перемѣннаго $mx=y$, получимъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\pm\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy,$$

причемъ знакъ $\pm$ зависитъ отъ знака m. Въ самомъ дѣлѣ, предѣлы новаго интеграла одинаковы съ предѣлами перваго, если m положительно, и должны быть перемѣщены, если m отрицательно. Мы видѣли (§ 91), что второй интегралъ есть положительное количество N; слѣдовательно, искомый интегралъ равенъ $\pm N$ въ зависимости отъ знака m.

VI. — ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНІЕ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

99. Общія основанія. — Если начальная функція отъ функціи $f(x)$ неизвѣстна, то прибѣгаютъ къ методамъ, дающимъ приближенное значеніе опредѣленнаго интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Теорема о среднемъ значеніи даетъ два предѣла, между которыми заключается этотъ интегралъ; аналогичнымъ пріемомъ можно найти безчисленное множество другихъ предѣловъ. Предположимъ, что при измѣненіи x отъ a до b $(a<b)$ мы всегда имѣемъ $\varphi(x)<f(x)<\psi(x)$; очевидно, что мы будемъ также имѣть

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx<\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b\psi(x)\,dx.$$

Если за функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ мы примемъ производныя отъ двухъ извѣстныхъ функцій, то этимъ способомъ мы получимъ два предѣла, между которыми заключается значеніе разсматриваемаго интеграла. Возьмемъ, напримѣръ, интегралъ

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Мы имѣемъ $\sqrt{1-x^4}=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}$. При измѣненіи x отъ 0 до 1, $\sqrt{1+x^2}$ содержится между 1 и $\sqrt{2}$; слѣдовательно, искомый интегралъ заключается между двумя интегралами

$$\int_0^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

т.-е. между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Но можно найти два болѣе тѣсныхъ предѣла, замѣтивъ, что $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ больше $1-\frac{x^2}{2}$, какъ это видно изъ разложенія $(1+u)^{-\frac{1}{2}}$ по формулѣ Тэлора, ограниченной двумя первыми членами. Такимъ образомъ интегралъ I будетъ больше

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

послѣдній интегралъ равенъ $\frac{\pi}{4}$ (см. § 105), и, слѣдовательно, I заключается между $\frac{3\pi}{8}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Ясно, что такимъ образомъ получаются только общія указанія относительно точнаго значенія интеграла. Чтобы имѣть болѣе близкія значенія, должно разбить промежутокъ (a, b) на болѣе мелкіе промежутки и приложить къ каждому изъ нихъ формулу средняго значенія. Предположимъ, напримѣръ, что $f(x)$ отъ a до b постоянно возрастаетъ. Разобьемъ промежутокъ (a, b) на n равныхъ промежутковъ $(b-a=nh)$. По самому опредѣленію интеграла, $\int_a^b f(x)\,dx$ заключается между двумя суммами

$$s=h\{f(a)+f(a+h)+\ldots+f[a+(n-1)h]\},$$
$$S=h\{f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)\}.$$

Если мы возьмемъ для значенія интеграла полусумму $\frac{S+s}{2}$, то допущенная погрѣшность будетъ, очевидно, меньше $S-s=\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$. Значеніе $\frac{S+s}{2}$ можно представить въ видѣ

$$h\left\{\frac{f(a)+f(a+h)}{2}+\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}+\ldots+\frac{f[(a+(n-1)h]+f(a+nh)}{2}\right\};$$

Такъ какъ $\frac{h}{2}\{f(a+ih)+f[a+(i+1)h]\}$ представляетъ площадь трапеціи, имѣющей высоту h, а основанія $f(a+ih)$ и $f[a+(i+1)h]$, то мы видимъ, что методъ равносиленъ замѣнѣ площади кривой $y=f(x)$, заключающейся между двумя сосѣдними ординатами, площадью прямолинейной трапеціи, имѣющей основаніями эти двѣ ординаты. Этотъ способъ удобенъ, когда не требуется большой точности.

Возьмемъ, напримѣръ, интегралъ $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$. Полагая $n=4$, мы получимъ для приближеннаго значенія интеграла

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{16}{17}+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{1}{4}\right)=0{,}78279\ldots,$$

и погрѣшность будетъ меньше $\frac{1}{16}=0{,}0625$. Отсюда мы можемъ получить приближенное значеніе $\pi=3{,}1311\ldots$, точное до перваго десятичнаго знака.

Если при возрастаніи x отъ a до b функція $f(x)$ не измѣняется въ одномъ и томъ же направленіи, то мы разобьемъ этотъ промежутокъ на нѣсколько другихъ, для которыхъ это условіе удовлетворяется.

100. Интерполированіе. — Разсмотримъ другой методъ вычисленія интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Проведемъ черезъ $(n+1)$ точекъ $B_0, B_1, \ldots, B_n$, взятыхъ на кривой $y=f(x)$ между двумя точками съ абсциссами a и b, параболическую кривую n-го порядка

$$y=\varphi(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

и примемъ за приближенное значеніе искомаго интеграла значеніе опредѣленнаго интеграла $\int_a^b\varphi(x)\,dx$, которое легко вычислить.

Пусть будутъ $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ координаты $(n+1)$ точекъ $B_0, B_1, \ldots, B_n$. По формулѣ интерполированія Лагранжа получимъ для многочлена $\varphi(x)$ выраженіе

$$\varphi(x) = y_0 X_0 + y_1 X_1 + \ldots + y_i X_i + \ldots + y_n X_n,$$

гдѣ коэффиціентъ X_i при y_i

$$X_i = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

есть многочленъ n-ой степени по x, обращающійся въ нуль при данныхъ значеніяхъ $x_0, x_1, \ldots, x_n$, кромѣ $x=x_i$, и равный единицѣ при $x=x_i$. Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=n} y_i \int_a^b X_i\,dx.$$

Числа x_i имѣютъ видъ

$$x_0 = a+\theta_0(b-a), \quad x_1 = a+\theta_1(b-a), \quad \ldots, \quad x_n = a+\theta_n(b-a),$$

гдѣ $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ суть числа, возрастающія отъ 0 до 1. Сдѣлавъ замѣну перемѣннаго $x=a+(b-a)t$, мы получимъ для приближеннаго значенія интеграла выраженіе

$$(b-a)(K_0 y_0 + K_1 y_1 + \ldots + K_n y_n), \tag{36}$$

гдѣ

$$K_i = \int_0^1 \frac{(t-\theta_0)\ldots(t-\theta_{i-1})(t-\theta_{i+1})\ldots(t-\theta_n)}{(\theta_i-\theta_0)\ldots(\theta_i-\theta_{i-1})(\theta_i-\theta_{i+1})\ldots(\theta_i-\theta_n)}\,dt.$$

Если при всякомъ видѣ функціи $f(x)$ мы будемъ разбивать промежутокъ (a, b) на болѣе мелкіе промежутки, находящіеся всегда въ одномъ и томъ же отношеніи, то числа $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$, а, слѣдовательно, и коэффиціенты K_i не будутъ зависѣть отъ вида функціи $f(x)$. Послѣ того какъ коэффиціенты K_i будутъ вычислены разъ навсегда, намъ останется только замѣнять $y_0, y_1, \ldots, y_n$ въ формулѣ (36) ихъ значеніями.

Если кривая $y=f(x)$, площадь которой требуется опредѣлить, дана графически, то всего удобнѣе разбивать промежутокъ (a, b) на равныя части, и тогда нужно будетъ только измѣрить на этой кривой равноотстоящія ординаты. Если мы разбиваемъ на двѣ части, то должно положить $\theta_0=0$, $\theta_1=\frac{1}{2}$, $\theta_2=1$; это даетъ для приближеннаго значенія интеграла

$$I = \frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2).$$

Подобнымъ же образомъ при $n=3$ имѣемъ

$$I=\frac{b-a}{8}(y_0+3y_1+3y_2+y_3),$$

и при $n=4$

$$I=\frac{b-a}{90}(7y_0+32y_1+12y_2+32y_3+7y_4).$$

Предыдущій методъ принадлежитъ Котсу (Cotes). Методъ Симпсона (Simpson) нѣсколько иной. Предположимъ, что промежутокъ (a, b) разбитъ на $2n$ равныхъ частей; пусть будутъ $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ соотвѣтствующія ординаты въ точкахъ дѣленія. Прилагая первую формулу Котса къ площади, заключающейся между двумя ординатами съ послѣдовательными четными указателями, каковы y_0 и y_2, y_2 и y_4, и т. д., ..., мы имѣемъ для искомой площади выраженіе

$$I=\frac{b-a}{6n}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})];$$

сдѣлавъ приведенія, получимъ формулу Симпсона

$$I=\frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})].$$

101. Методъ Гаусса. — Въ методѣ Гаусса (Gauss) для количествъ θ_i берутся другія значенія; они получаются изъ слѣдующихъ соображеній.

Допустимъ, что можно найти такіе многочлены все болѣе и болѣе высокихъ степеней, которые въ промежуткѣ (a, b) все менѣе и менѣе различались бы отъ функціи $f(x)$, которую требуется интегрировать. Положимъ, напримѣръ,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2n-1}x^{2n-1}+R_{2n}(x),$$

причемъ при всѣхъ значеніяхъ x, заключающихся между a и b, остатокъ $R_{2n}(x)$ меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа ε_n*). Вообще, мы не знаемъ коэффиціентовъ a_i, но, какъ увидимъ ниже, эти коэффиціенты не войдутъ въ вычисленія. Пусть будутъ $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ значенія перемѣннаго x, заключающіяся между a и b, и пусть будетъ $\varphi(x)$ многочленъ $(n-1)$-ой степени, принимающій при значеніяхъ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ тѣ же значенія, какъ и функція $f(x)$. Формула интерполированія Ла-

*) На основаніи теоремы Вейерштрасса, это есть общее свойство функцій, непрерывныхъ въ промежуткѣ (a, b) (См. дальше, гл. IX, § 199).

ранжа показываетъ, что этотъ многочленъ можно представить въ видѣ

$$\varphi(x)=\sum_{m=0}^{2n-1}\alpha_m\varphi_m(x)+R_{2n}(x_0)\,\Psi_0(x)+\ldots+R_{2n}(x_{n-1})\,\Psi_{n-1}(x),$$

гдѣ φ_m и Ψ_k многочлены не выше $(n-1)$-ой степени. Очевидно, что многочленъ φ_m зависитъ только отъ выбранныхъ значеній $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Съ другой стороны, многочленъ $\varphi_m(x)$ долженъ принимать при $x=x_0$, $x=x_1, \ldots$, $x=x_{n-1}$ тѣ же значенія, какъ и x^m. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что всѣ коэффиціенты α_i, кромѣ α_m, равны нулю, равно какъ и многочленъ $R_{2n}(x)$; тогда $f(x)$ обратится въ $\alpha_m x^m$, и $\varphi(x)$ въ $\alpha_m\varphi_m(x)$. Отсюда слѣдуетъ, что разность $x^m-\varphi_m(x)$ должна дѣлиться на произведеніе

$$P_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}),$$

и при $m\geqq n$ мы должны имѣть $x^m-\varphi_m(x)=P_nQ_{m-n}(x)$, гдѣ $Q_{m-n}(x)$ есть многочленъ $(m-n)$-ой степени; если же $m\leqq n-1$, то должно быть $x^m-\varphi_m(x)=0$. Поэтому, погрѣшность отъ замѣны интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралomъ $\int_a^b\varphi(x)\,dx$ будетъ равна

$$\sum_{m=0}^{2n-1}\alpha_m\int_a^b[x^m-\varphi_m(x)]\,dx+\int_a^b R_{2n}(x)\,dx-\sum_{i=0}^{n-1}R_{2n}(x_i)\int_a^b\Psi_i(x)\,dx. \qquad (37)$$

Члены, зависящіе отъ коэффиціентовъ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, тождественно равны нулю, и мы видимъ, что погрѣшность зависитъ исключительно отъ коэффиціентовъ $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n-1}$ и отъ остатка $R_{2n}(x)$. Вообще, этотъ остатокъ R_{2n} очень малъ сравнительно съ коэффиціентами α_n, $\alpha_{n+1}, \ldots$, α_{2n-1}; поэтому можно надѣяться получить большую точность, если можно будетъ взять $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ такимъ образомъ, чтобы члены, зависящіе отъ $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n-1}$, были также равны нулю. Для этого необходимо и достаточно, чтобы n интегралovъ

$$\int_a^b P_nQ_0\,dx,\quad \int_a^b P_nQ_1\,dx,\ldots,\quad \int_a^b P_nQ_{n-1}\,dx,$$

гдѣ Q_i — многочленъ i-ой степени, были равны нулю. Выше мы видѣли (§ 88), что этимъ условіямъ мы можемъ удовлетворить, взявъ

$$P_n=\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n];$$

такимъ образомъ нужно только за $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ взять n корней уравненія $P_n=0$, которые, дѣйствительно, всѣ заключаются между a и b.

Если $a=-1, b=+1$, то $x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}$ будутъ корнями многочлена Лежандра $X_n=0$; всѣ остальные случаи могутъ быть приведены къ этому случаю подстановкою $x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t$. Въ Traité de Calcul intégral Бертрана (стр. 342) даны значенія этихъ корней, а также и коэффиціенты K_i формулы (36), до $n=5$ съ 7 и 8 десятичными знаками.

Погрѣшность въ методѣ Гаусса равна

$$\int_a^b R_{2n}(x)\,dx-\sum_{i=0}^{n-1} R_{2n}(x_i)\int_a^b \Psi_i(x)\,dx,$$

причемъ функціи $\Psi_i(x)$ не зависятъ отъ функціи, интегралъ которой ищется. Чтобы имѣть предѣлъ погрѣшности, достаточно знать предѣлъ $R_{2n}(x)$, т.-е. знать, съ какимъ приближеніемъ въ промежуткѣ (a, b) функція $f(x)$ можетъ быть представлена многочленомъ $(2n-1)$-ой степени, причемъ нѣтъ надобности знать самый многочленъ.

Чтобы найти числовое значеніе опредѣленнаго интеграла, можно также разложить функцію $f(x)$ въ рядъ и затѣмъ интегрировать этотъ рядъ почленно. Впослѣдствіи мы увидимъ (гл. VIII), при какихъ условіяхъ этотъ пріемъ допустимъ и какое приближеніе онъ даетъ.

102. Планиметръ Амелера. — Существуетъ много приборовъ, придуманныхъ для измѣренія площадей плоскихъ кривыхъ*). Наиболѣе остроумный изъ нихъ — это планиметръ Амслера (Amsler); его теорія представляетъ интересное приложеніе свойствъ криволинейныхъ интеграловъ.

Разсмотримъ прямолинейный стержень, могущій двигаться въ нѣкоторой плоскости; пусть будутъ $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ площади замкнутыхъ кривыхъ, описываемыя двумя точками A_1, A_2 этого стержня, когда, совершивъ замкнутый путь, онъ приходитъ въ свое начальное положеніе. Пусть будутъ (x_1, y_1), (x_2, y_2) прямоугольныя координаты точекъ A_1, A_2, l — разстояніе между этими двумя точками, и θ — уголъ, образуемый направленіемъ A_1A_2 съ осью Ox. Чтобы представить движеніе стержня, нужно предположить, что x_1, y_1, θ суть періодическія функціи нѣкотораго независимаго перемѣннаго t, принимающія прежнія значенія, когда t измѣняется на T. Мы имѣемъ $x_2=x_1+l\cos\theta$, $y_2=y_1+l\sin\theta$, и, слѣдовательно,

$$x_2\,dy_2-y_2\,dx_2=x_1\,dy_1-y_1\,dx_1+l^2\,d\theta$$
$$+l(\cos\theta\,dy_1-\sin\theta\,dx_1+x_1\cos\theta\,d\theta+y_1\sin\theta\,d\theta).$$

*) Описаніе этихъ приборовъ можно найти въ сочиненіи Абданкъ-Абакановичъ (Abdank-Abakanowicz): Les intégraphes, la courbe intégral et ses applications (1886).

Обозначая черезъ $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ площади кривыхъ, описанныхъ точками A_1, A_2, и соблюдая при вычисленіи этихъ площадей указанныя выше (§ 96) условія, имѣемъ

$$\mathfrak{A}_1=\frac{1}{2}\int x_1\,dy_1-y_1\,dx_1,\quad \mathfrak{A}_2=\frac{1}{2}\int x_2\,dy_2-y_2\,dx_2;$$

слѣдовательно, интегрируя обѣ части предыдущаго равенства, получимъ

$$\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_1+\frac{l^2}{2}\int d\theta+\frac{l}{2}\left[\int(\cos\theta\,dy_1-\sin\theta\,dx_1)+\int(x_1\cos\theta+y_1\sin\theta)\,d\theta\right],$$

гдѣ всѣ интегралы взяты между предѣлами, соотвѣтствующими предѣламъ t_0 и t_0+T для перемѣннаго t. Ясно, что $\int d\theta=2K\pi$, гдѣ K есть цѣлое число, зависящее отъ того, какъ движется прямая. Съ другой стороны, интегрируя по частямъ, имѣемъ

$$\int x_1\cos\theta\,d\theta=\quad x_1\sin\theta-\int\sin\theta\,dx_1,$$

$$\int y_1\sin\theta\,d\theta=-y_1\cos\theta+\int\cos\theta\,dy_1.$$

Но, при возрастаніи t отъ t_0 до t_0+T, $x_1\sin\theta$ и $y_1\cos\theta$ принимаютъ прежнія значенія, и потому мы можемъ написать

$$\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_1+K\pi\,l^2+l\int(\cos\theta\,dy_1-\sin\theta\,dx_1).$$

Пусть будетъ s длина дуги кривой, описываемой точкою A_1, отсчитываемая отъ какой-нибудь начальной точки въ опредѣленномъ направленіи; обозначимъ черезъ α уголъ, образуемый съ Ox положительнымъ направленіемъ касательной въ концѣ дуги; тогда

$$\cos\theta\,dy_1-\sin\theta\,dx_1=(\sin\alpha\cos\theta-\sin\theta\cos\alpha)\,ds=\sin V\,ds,$$

гдѣ V — уголъ между положительнымъ направленіемъ стержня и направленіемъ касательной, отсчитываемый въ ту сторону, какъ это принято въ тригонометріи. Предыдущую формулу можно еще представить въ видѣ

$$\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_1+K\pi\,l^2+l\int\sin V\,ds. \tag{38}$$

Пусть будетъ A_3 третья точка на прямой на разстояніи l' отъ A_1; для площади кривой, описываемой точкою A_3, мы такимъ же образомъ найдемъ

$$\mathfrak{A}_3=\mathfrak{A}_1+K\pi\,l'^2+l'\int\sin V\,ds. \tag{39}$$

Исключая изъ обѣихъ формулъ неизвѣстный интегралъ $\int\sin V\,ds$, мы получимъ соотношеніе

$$l'\,\mathfrak{A}_2-l\,\mathfrak{A}_3=(l'-l)\,\mathfrak{A}_1+K\pi\,ll'\,(l-l'),$$

которому можно дать видъ

$$\mathfrak{A}_1\,(23)+\mathfrak{A}_2\,(31)+\mathfrak{A}_3\,(12)+K\pi\,(12)\,(23)\,(31)=0, \tag{40}$$

гдѣ (ik) обозначаетъ разстояніе между точками A_i, A_k $(i,k=1,2,3)$, взятое съ соотвѣтствующимъ знакомъ. Какъ приложеніе этой формулы, разсмотримъ прямую A_1A_2 длины $a+b$, концы которой A_1 и A_2 описы-

ваютъ одну и ту же замкнутую выпуклую кривую C; точка A_3, дѣлящая A_1A_2 на два отрѣзка $A_1A_3=a$, $A_3A_2=b$, также опишетъ замкнутую кривую C', которая будетъ лежать внутри C. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_1, \quad (12)=a+b, \quad (23)=-b, \quad (31)=-a, \quad K=1,$$

и, раздѣливъ формулу (40) на $a+b$, получимъ

$$\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_3=\pi ab.$$

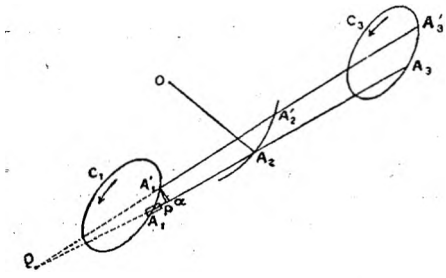
$\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_2$ представляетъ площадь, заключающуюся между двумя кривыми C, C', и мы видимъ, что эта площадь не зависитъ отъ формы кривой C. Эта теорема принадлежитъ Гольдичу (Holditch).

Вмѣсто того чтобы исключать изъ формулъ (38) и (39) $\int \sin V\,ds$, исключимъ изъ нихъ количество $\mathfrak{A}_1$; мы получимъ

$$\mathfrak{A}_3=\mathfrak{A}_2+K\pi(l'^2-l^2)+(l'-l)\int \sin V\,ds. \tag{41}$$

Планиметръ Амслера представляетъ приложеніе этой послѣдней формулы. Пусть будетъ $A_1A_2A_3$ твердый стержень, сочлененный въ A_2 съ другимъ стержнемъ OA_2. Если, оставляя неподвижною точку O, мы будемъ описывать концомъ A_3, снабженнымъ штифтомъ, контуръ C_3 искомой площади, то точка A_2 въ зависимости отъ характера перемѣщенія точки A_3 опишетъ или дугу круга, или цѣлую окружность. Количества $\mathfrak{A}_2$, K, l, l', всегда извѣстны, и чтобы найти искомую площадь, остается найти интегралъ $\int \sin V\,ds$. Этотъ интегралъ взятъ вдоль кривой C_1, описанной концемъ стержня A_1. На этомъ концѣ помѣщенъ круглый цилиндръ съ дѣленіями, ось котораго совпадаетъ съ осью стержня A_1A_3, и который можетъ вращаться вокругъ этой оси.

Черт. 20.



Разсмотримъ безконечно малое перемѣщеніе стержня, переводящее $A_1A_2A_3$ въ положеніе $A'_1A'_2A'_3$. Пусть будетъ Q точка пересѣченія прямыхъ A_1A_3 и $A_1'A_3'$; опишемъ изъ точки Q, какъ изъ центра, дугу круга $A'_1\alpha$ и опустимъ изъ точки A'_1 на A_1A_2 перпендикуляръ A'_1P. Мы можемъ предположить, что при переходѣ изъ перваго положенія во второе стержень сначала скользитъ вдоль самого себя такъ, что точка A_1 приходитъ въ α. При этомъ движеніи цилиндръ скользитъ въ плоскости вдоль образующей, и его вращеніе равно нулю. Если затѣмъ мы повернемъ стержень вокругъ Q такъ, чтобы точка α перешла въ A'_1, то вращеніе цилиндра будетъ измѣряться дугою $\alpha A'_1$. Но отношенія $\dfrac{\alpha A'_1}{A'_1P}$ и $\dfrac{A'_1P}{\operatorname{arc} A_1A'_1}$ при приближеніи дуги A'_1A_1 къ нулю стремятся соотвѣтственно къ 1 и къ $\sin V$. Поэтому мы можемъ написать $\alpha A'_1=\Delta s(\sin V+\varepsilon)$, гдѣ ε безконечно мало вмѣстѣ съ Δs. Такимъ образомъ все вращеніе цилиндра пропорціонально предѣлу суммы $\Sigma\Delta s(\sin V+\varepsilon)$, т.е. пропорціонально интегралу $\int \sin V\,ds$. Поэтому нужно только измѣрить это вращеніе, и мы получимъ искомую площадь.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Доказать, что при безконечномъ возрастаніи n сумма $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$ имѣетъ предѣломъ $\log 2$.

[Слѣдуетъ доказать, что эта сумма имѣетъ предѣломъ опредѣленный интегралъ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.]

2. Найти такимъ же образомъ предѣлы суммъ

$$\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}},$$

приводя ихъ къ опредѣленнымъ интеграламъ. Вообще, предѣлъ суммы $\sum_{i=0}^{n}\varphi(i, n)$ при безконечномъ n равенъ нѣкоторому опредѣленному интегралу, если $\varphi(i, n)$ есть однородная функція степени -1 отъ i и отъ n.

3. Вывести значеніе опредѣленнаго интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx=-\frac{\pi}{2}\log 2$.

[Можно исходить отъ тригонометрической формулы

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}},$$

или воспользоваться равенствами

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx.\Big]$$

4. Вывести отсюда значеніе опредѣленнаго интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x\,dx.$$

5. Показать, что $\int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}\log 2$.

[Можно положить $x=\operatorname{tg}\varphi$ и разбить полученный интегралъ на три части.]

6*. Найти значеніе опредѣленнаго интеграла $\int_0^{\pi}\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$.

[Пуассонъ (Poisson.)]

Раздѣливъ промежутокъ отъ 0 до π на n равныхъ частей и примѣняя извѣстную тригонометрическую формулу, мы придемъ къ вычисленію предѣла выраженія

$$\frac{\pi}{n}\log\left[\frac{\alpha-1}{\alpha+1}(\alpha^{2n}-1)\right]$$

при безконечно большомъ n. Если α заключается между -1 и $+1$, то этотъ предѣлъ равенъ нулю; если же $\alpha^2>1$, то онъ равенъ $\pi \log \alpha^2$.

7. Опредѣленный интегралъ $\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$, гдѣ α положительно, равенъ 2, если $\alpha<1$, и $\frac{2}{\alpha}$, если $\alpha>1$.

8*. Для того чтобы функція $f(x)$ была интегрируемою въ промежуткѣ (a, b), необходимо и достаточно, чтобы всякому положительному числу ε соотвѣтствовало такое разбіеніе промежутка (a, b), чтобы разность $S-s$ соотвѣтствующихъ суммъ была меньше ε.

9. Пусть будутъ $f(x)$ и $\varphi(x)$ функціи, непрерывныя въ промежуткѣ (a, b), и $(a, x_1, x_2, \ldots, b)$ — какое-нибудь разбіеніе этого промежутка. Если мы возьмемъ два какихъ-нибудь значенія ξ_i, η_i въ каждомъ промежуткѣ (x_{i-1}, x_i), то сумма $\Sigma f(\xi_i)\varphi(\eta_i)(x_i-x_{i-1})$ будетъ имѣть предѣломъ опредѣленный интегралъ

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

10. Пусть будетъ $f(x)$ функція, непрерывная и положительная въ промежуткѣ (a, b). Произведеніе опредѣленныхъ интеграловъ $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ будетъ minimum, если функція равна постоянному.

11. Пусть будетъ $I_{x_0}^{x_1}$ указатель функціи (§ 77) между x_0 и x_1. Доказать соотношеніе

$$I_{x_0}^{x_1} f(x)+I_{x_0}^{x_1}\frac{1}{f(x)}=\varepsilon,$$

гдѣ $\varepsilon=+1$, если $f(x_0)>0$, $f(x_1)<0$, и $\varepsilon=-1$, если $f(x_0)<0$, $f(x_1)>0$; $\varepsilon=0$, если $f(x_0)$ и $f(x_1)$ будутъ одинаковаго знака.

Слѣдуетъ приложить къ функціямъ $f(x)$, $\frac{1}{f(x)}$ послѣднюю формулу стр. 165.

12*. Пусть будутъ U и V два многочлена n-ой и $(n-1)$-ой степени, первые между собою. Указатель раціональной дроби $\frac{V}{U}$ между предѣлами $-\infty$ и $+\infty$ перемѣннаго равенъ разности между числами мнимыхъ корней уравненія $U+iV$, имѣющихъ положительный коэффиціентъ при i, и между числомъ этихъ корней, имѣющихъ отрицательный коэффиціентъ при i.

[Эрмитъ, Bulletin de la Société mathématique, т. VII, стр. 128.]

13*. Вывести вторую теорему средняго значенія при помощи интегрированія по частямъ.

Пусть будутъ $f(x)$ и $\varphi(x)$ функціи, непрерывныя въ промежуткѣ (a, b), причемъ первая $f(x)$ постоянно возрастаетъ или постоянно убываетъ и имѣетъ непрерывную производную. Полагая

$$\Phi(x)=\int_a^x \varphi(x)\,dx$$

и интегрируя по частямъ, находимъ

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=f(b)\,\Phi(b)-\int_a^b f'(x)\,\Phi(x)\,dx.$$

Такъ какъ производная $f'(x)$ имѣетъ постоянный знакъ, то остается приложить къ новому интегралу первую формулу средняго значенія.

14. Показать, что при переходѣ отъ одной системы прямоугольныхъ осей къ другой системѣ прямоугольныхъ осей, конгруэнтной съ первою, интегралъ $\int x\,dy - y\,dx$, взятый вдоль замкнутаго контура, обращается въ интегралъ такого же вида.

15. Изъ формулы

$$\int_a \cos\lambda x\,dx = \frac{1}{\lambda}(\sin\lambda b - \sin\lambda a)$$

вывести слѣдующіе опредѣленные интегралы

$$\int_a^b x^{2p+1}\sin\lambda x\,dx, \quad \int_a^b x^{2p}\cos\lambda x\,dx.$$

16. Разсмотримъ двѣ какія-нибудь плоскія кривыя C, C'; будемъ считать соотвѣтствующими точки (x, y), (x', y') обѣихъ кривыхъ, въ которыхъ касательныя параллельны. Точка съ координатами $x_1 = p\,x + q\,x'$, $y_1 = p\,y + q\,y'$, гдѣ p и q — данныя постоянныя, описываетъ новую кривую C_1. Доказать, что соотвѣтствующія дуги трехъ кривыхъ связаны соотношеніемъ

$$s_1 = \pm ps \pm qs'.$$

17. Доказать, что длины соотвѣтственныхъ дугъ кривыхъ

$$C\begin{cases} x = tf'(t) - f(t) + \varphi'(t), \\ y = f'(t) - t\varphi'(t) + \varphi(t), \end{cases} \qquad C'\begin{cases} x' = tf'(t) - f(t) - \varphi'(t), \\ y' = f'(t) + t\varphi'(t) - \varphi(t), \end{cases}$$

равны между собою при всякомъ видѣ функцій $f(t)$ и $\varphi(t)$.

18. Проведемъ изъ точки M плоскости нормали $MP_1, \ldots, MP_n$ къ n кривымъ $C_1, C_2, \ldots, C_n$, лежащимъ въ той же плоскости. Пусть будетъ l_i длина MP_i. Мѣсто точекъ M, для которыхъ между длинами l_i существуетъ данное соотношеніе $F(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0$, есть нѣкоторая кривая Γ. Доказать, что если на каждой прямой MP_i отложимъ въ надлежащемъ направленіи длину, пропорціональную $\frac{\partial F}{\partial l_i}$, то равнодѣйствующая (геометрическая сумма) этихъ n отрѣзковъ дастъ направленіе нормали къ кривой Γ. Распространить это предложеніе на поверхности.

19. Пусть будетъ C замкнутая кривая. Возьмемъ на касательной въ точкѣ m къ кривой C по обѣ стороны отъ точки m два равныхъ отрѣзка mp и mp', причемъ длина mp измѣняется по произвольному закону. Доказать, что площади двухъ кривыхъ, описанныхъ точками p, p', равны. Случай, когда длина mp постоянна.

20. Площадь, заключающаяся между замкнутою выпуклою кривою и кривою параллельною, получающеюся черезъ отложеніе на нормаляхъ къ первой кривой постоянной длины l, равна $\pm\pi l^2 + sl$, гдѣ s — длина замкнутой кривой.

21. Пусть будетъ C замкнутая кривая. Геометрическое мѣсто точекъ A, для которыхъ площадь соотвѣтствующей подарной кривой имѣетъ данное значеніе, есть окружность съ неподвижнымъ центромъ.

Слѣдуетъ опредѣлить кривую C ея тангенціальнымъ уравненіемъ

$$x\cos t + y\sin t = f(t).$$

22. Пусть будетъ C замкнутая кривая, C_1 — ея подарная кривая относительно точки A, C_2 — мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки A на нормали къ C. Между площадями этихъ трехъ кривыхъ существуетъ соотношеніе $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2$.

Если ρ и ω будутъ полярныя координаты точки кривой C_1, то на основаніи свойствъ подарной кривой (§ 36), координаты соотвѣтствующей точки кривой C_2 будутъ ρ' и $\omega+\frac{\pi}{2}$, а координаты соотвѣтствующей точки кривой C будутъ $r=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}$ и $\varphi=\omega+\operatorname{arc\,tg}\frac{\rho'}{\rho}$.

23. Если кривая C катится безъ скольженія по прямой, то всякая точка A, неизмѣнно связанная съ кривою C, описываетъ нѣкоторую кривую, называемую рулеттою. Доказать, что площадь, заключающаяся между дугою рулетты и основаніемъ, равна удвоенной соотвѣтствующей площади подарной кривой точки A относительно кривой C. Доказать также, что длина дуги рулетты равна длинѣ соотвѣтствующей дуги подарной кривой.

[Штейнеръ (Steiner).]

Чтобы доказать эту теорему аналитически, обозначимъ черезъ X, Y координаты точки A относительно системы подвижныхъ осей, составленной изъ касательной и нормали къ кривой C въ точкѣ M. Пусть будетъ s дуга OM, считаемая отъ нѣкоторой постоянной точки на кривой C, и ω — уголъ между касательными въ точкахъ O и M. Легко вывести соотношенія

$$ds+dX=Y\,d\omega,\quad dY+X\,d\omega=0,$$

откуда получаются оба предложенія.

24*. Погрѣшность въ методѣ квадратуръ Гаусса имѣетъ выраженіе

$$\frac{f^{(2n)}(\xi)}{1.2\ldots 2n}\times\frac{2}{2n+1}\left[\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots(2n-1)}\right]^2,$$

гдѣ ξ заключается между -1 и $+1$.

[Мансіонъ (Mansion), Comptes rendus, 1886.]

ГЛАВА V.

Неопредѣленные интегралы.

Въ этой главѣ мы разсмотримъ различнаго рода элементарныя функціи, интегралы отъ которыхъ выражаются при помощи тѣхъ же символовъ. Подъ элементарными функціями мы разумѣемъ алгебраическія функціи, раціональныя и ирраціональныя, функцію показательную и логариѳмическую, функціи тригонометрическія и круговыя и всѣ тѣ, которыя получаются отъ сочетанія предыдущихъ функцій въ конечномъ числѣ. Когда неопредѣленный интегралъ отъ функціи $f(x)$ не можетъ быть выраженъ при помощи этихъ символовъ, то этотъ интегралъ представляетъ новую трансцендентную функцію; изученіе свойствъ этихъ трансцендентныхъ функцій и ихъ классификація составляетъ одну изъ важнѣйшихъ задачъ интегральнаго исчисленія.

I. — ИНТЕГРИРОВАНІЕ РАЦІОНАЛЬНЫХЪ ФУНКЦІЙ.

103. Общій способъ. — Всякая раціональная функція $f(x)$ представляетъ сумму цѣлой части $E(x)$ и дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, гдѣ многочленъ $P(x)$ первый съ $Q(x)$ и его степень ниже степени $Q(x)$. Если дѣйствительные и мнимые корни уравненія $Q(x)=0$ извѣстны, то эта раціональная дробь можетъ быть разложена на сумму простыхъ дробей, принадлежащихъ къ одному изъ двухъ слѣдующихъ типовъ

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Mx+N}{[(x-a)^2+\beta^2]^n}.$$

Простыя дроби перваго типа происходятъ отъ дѣйствительныхъ корней, а второго типа — отъ сопряженныхъ мнимыхъ.

Интегралъ отъ цѣлой части получается непосредственно. Далѣе, если $m>1$, то

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}};$$

если же $m=1$, то

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\log(x-a).$$

Для краткости мы опускаемъ постоянное C, которое должно быть прибавлено въ правой части. Такимъ образомъ остается только изслѣдовать простыя дроби, происходящія отъ мнимыхъ корней знаменателя. Положимъ, для упрощенія,

$$x=\alpha+\beta t, \quad dx=\beta\,dt;$$

тогда

$$\int \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx = \frac{1}{\beta^{2n-1}}\int \frac{M\alpha+N+M\beta t}{(1+t^2)^n}\,dt,$$

и мы получаемъ два рода интегралов

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n}, \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Первый интегралъ легко вычислить, замѣтивъ, что $t\,dt$ есть половина дифференціала отъ $1+t^2$; поэтому, если $n>1$, то мы имѣемъ

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} = -\frac{\beta^{2n-2}}{2(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}},$$

и, если $n=1$, то имѣемъ

$$\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\log(1+t^2) = \frac{1}{2}\log\left[\frac{(x-\alpha)^2+\beta^2}{\beta^2}\right].$$

Остаются только интегралы вида

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Если $n=1$, то значеніе это интеграла будетъ

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Если же n больше единицы, то пользуются формулою приведенія, позволяющею свести вычисленіе предложеннаго интеграла къ вычисленію интеграла такого же вида, но въ которомъ показатель при $1+t^2$ на единицу меньше. Обозначая разсматриваемый интегралъ черезъ I_n, мы можемъ представить его въ видѣ

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}\,dt = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n}.$$

Интегрируемъ $\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n}$ по частямъ, положивъ

$$u=t, \quad dv=\frac{t\,dt}{(1+t^2)^n}; \quad v=-\frac{1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}};$$

мы получимъ

$$\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n}=-\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}}.$$

Замѣнивъ въ уравненіи для I_n послѣдній интегралъ его значеніемъ, найдемъ

$$I_n=\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}+\frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}.$$

Замѣняя въ этой формулѣ n черезъ $n-1$, потомъ черезъ $n-2$ и т. д., мы придемъ къ интегралу $I_1=\operatorname{arc\,tg} t$.

Возвращаясь затѣмъ постепенно къ I_n, наконецъ получимъ

$$I_n=\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2}\operatorname{arc\,tg} t+R(t),$$

гдѣ $R(t)$ есть раціональная функція отъ t, выраженіе которой было бы нетрудно получить; замѣтимъ только, что знаменателемъ ея будетъ $(1+t^2)^{n-1}$, и что степень числителя будетъ ниже $2n-2$ (см. § 97, стр. 203).

Такимъ образомъ, интегралъ отъ раціональной дроби слагается изъ раціональной части и изъ трансцендентныхъ членовъ одного изъ слѣдующихъ видовъ

$$\log(x-\alpha), \quad \log[(x-\alpha)^2+\beta^2], \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Пусть, напримѣръ, требуется вычислить интегралъ $\int \frac{dx}{x^4-1}$. Знаменатель имѣетъ два дѣйствительныхъ корня $+1$ и -1 и два мнимыхъ $+i$ и $-i$. Слѣдовательно, разлагая его на простыя дроби, получимъ

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

Умножая для опредѣленія коэффиціента A обѣ части на $x-1$ и полагая затѣмъ $x=1$, будемъ имѣть $A=\frac{1}{4}$; точно такъ же найдемъ $B=-\frac{1}{4}$. Теперь мы можемъ представить предыдущее тожество въ видѣ

$$\frac{1}{x^4-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{Cx+D}{1+x^2},$$

или, послѣ приведенія,

$$\frac{-1}{2(1+x^2)}=\frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

Слѣдовательно, должно взять $C=0$, $D=-\frac{1}{2}$, и мы можемъ написать

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)},$$

откуда

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$$

Примѣчаніе. — Изложенный методъ — вполнѣ общій, но онъ не всегда самый простой. Иногда можно упростить вычисленіе соотвѣтственными искусственными пріемами. Возьмемъ, напримѣръ, интегралъ

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)^n}.$$

Если $n>1$, то можно было бы или разложить подъинтегральную функцію на простыя дроби, отдѣляя корни $+1$ и -1, или примѣнить формулу приведенія, какъ для интеграла I_n. Но можно получить этотъ интегралъ болѣе изящнымъ способомъ, сдѣлавъ замѣну перемѣннаго $x=\frac{1+z}{1-z}$; это даетъ

$$x^2-1=\frac{4z}{(1-z)^2},\quad dx=\frac{2\,dz}{(1-z)^2},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)^n}=\frac{2}{4^n}\int\frac{(1-z)^{2n-2}}{z^n}\,dz.$$

Разложивъ $(1-z)^{2n-2}$ по формулѣ бинома, намъ нужно будетъ интегрировать только одночлены вида Az^μ, гдѣ μ — положительно или отрицательно.

104. Методъ Эрмита. — До сихъ поръ мы предполагали, что подъинтегральная дробь разложена на простыя дроби, для чего нужно знать корни знаменателя. При помощи слѣдующаго метода, принадлежащаго Эрмиту, можно найти алгебраическую часть интеграла, и не зная этихъ корней; при этомъ требуется производить только элементарныя дѣйствія, т.-е. сложенія, умноженія и дѣленія многочленовъ.

Пусть будетъ $\frac{f(x)}{F(x)}$ раціональная дробь, интегралъ которой нужно найти; мы можемъ предположить, что ея числи-

тель и знаменатель первые между собою. На основаніи теоріи равныхъ корней, многочленъ $F(x)$ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$F(x)=X_1X_2^2X_3^3\ldots X_p^p,$$

гдѣ $X_1, X_2, \ldots, X_p$ — многочлены, содержащіе только простые линейные множители и не имѣющіе попарно никакихъ общихъ множителей. Далѣе, мы можемъ разложить предложенную функцію на простыя дроби со знаменателями $X_1, X_2^2, \ldots, X_p^p$,

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{X_1}+\frac{A_2}{X_2^2}+\ldots+\frac{A_p}{X_p^p},$$

гдѣ A_i есть многочленъ, первый съ X_i. Въ самомъ дѣлѣ, изъ теоріи общаго наибольшаго дѣлителя извѣстно, что если даны два первые между собой многочлена X и Y и какой-нибудь многочленъ Z, то всегда можно найти два многочлена A и B, удовлетворяющихъ тожеству

$$BX+AY=Z.$$

Положимъ $X=X_1$, $Y=X_2^2\ldots X_p^p$, $Z=f(x)$; тогда предыдущее тожество обращается въ

$$BX_1+AX_2^2\ldots X_p^p=f(x).$$

Раздѣливъ на $F(x)$, найдемъ

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{X_1}+\frac{B}{X_2^2\ldots X_p^p},$$

и, на основаніи предыдущаго тожества, ясно, что если многочленъ $f(x)$ будетъ первымъ съ $F(x)$, то A будетъ первымъ съ X_1, и B будетъ первымъ съ $X_2^2\ldots X_p^p$. Продолжая тѣ же самыя дѣйствія надъ дробью

$$\frac{B}{X_2^2\ldots X_p^p},$$

и т. д., мы представимъ $\frac{f(x)}{F(x)}$ въ требуемомъ видѣ.

Такимъ образомъ достаточно показать, какимъ образомъ можно найти раціональную часть интеграла вида

$$\int\frac{A\,dx}{\varphi^n},$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть многочленъ, первый со своею производною. На основаніи выше указанной теоремы, всегда можно найти два другихъ мночлена B и C, удовлетворяющихъ тожеству

$$B\varphi(x)+C\varphi'(x)=A,$$

и мы можемъ представить предыдущій интегралъ въ видѣ

$$\int \frac{A\,dx}{\varphi^n} = \int \frac{B\varphi + C\varphi'}{\varphi^n}\,dx = \int \frac{B\,dx}{\varphi^{n-1}} + \int C\frac{\varphi'\,dx}{\varphi^n}.$$

Если n больше единицы, то полагая

$$u = C, \quad v = \frac{-1}{(n-1)\,\varphi^{n-1}}$$

и интегрируя по частямъ, будемъ имѣть

$$\int C\frac{\varphi'\,dx}{\varphi^n} = -\frac{C}{(n-1)\,\varphi^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{C'}{\varphi^{n-1}}\,dx;$$

внося это въ предыдущее соотношеніе, получимъ

$$\int \frac{A\,dx}{\varphi^n} = -\frac{C}{(n-1)\,\varphi^{n-1}} + \int \frac{A_1\,dx}{\varphi^{n-1}},$$

гдѣ A_1 обозначаетъ новый многочленъ. Если $n > 2$, то къ новому интегралу можно приложить тотъ же самый способъ приведенія и т. д. Мы должны будемъ остановиться только тогда, когда показатель при φ въ знаменателѣ сдѣлается равнымъ единицѣ; мы получимъ тогда соотношеніе вида

$$\int \frac{A\,dx}{\varphi^n} = R(x) + \int \frac{\psi\,dx}{\varphi},$$

гдѣ $R(x)$ есть раціональная функція отъ x, а ψ — многочленъ, степень котораго всегда можно предположить меньшею степени φ, но который можетъ и не быть первымъ съ многочленомъ φ. Для вычисленія послѣдняго интеграла необходимо знать корни многочлена φ, но интегрированіе не введетъ болѣе никакихъ раціональныхъ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, разложеніе дроби $\frac{\psi}{\varphi}$ на простыя дроби дастъ только члены вида

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

а интегралъ отъ каждаго изъ нихъ есть трансцендентная функція.

Въ частности, этотъ методъ позволяетъ узнать, будетъ ли интегралъ отъ данной раціональной функціи самъ раціональнымъ. Для этого необходимо и достаточно, чтобы, послѣ того какъ приведеніе было подвинуто насколько возможно далеко, всѣ многочлены, аналогичные ψ, оказались равными нулю.

Замѣтимъ, что способъ, которымъ мы выше пользовались при приведеніи интеграла I_n, есть въ сущности не что иное, какъ частный случай изложеннаго здѣсь метода. Возьмемъ интегралъ болѣе общаго вида

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}, \quad A \neq 0, \quad B^2 - AC \neq 0.$$

Мы имѣемъ тожество

$$A(Ax^2+2Bx+C)-(Ax+B)^2=AC-B^2,$$

которое позволяетъ представить данный интегралъ въ видѣ

$$\int\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}=\frac{A}{AC-B^2}\int\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}}$$
$$-\frac{1}{AC-B^2}\int(Ax+B)\frac{(Ax+B)\,dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}.$$

Интегрируя послѣдній интегралъ по частямъ, получимъ

$$\int(Ax+B)\frac{Ax+B}{(Ax^2+2Bx+C)^n}\,dx=-\frac{Ax+B}{2(n-1)(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}}$$
$$+\frac{A}{2n-2}\int\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}},$$

и предыдущее соотношеніе обращается въ

$$\int\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}=\frac{Ax+B}{2(n-1)(AC-B^2)(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}}$$
$$+\frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{A}{AC-B^2}\int\frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{n-1}}.$$

Продолжая такимъ же образомъ, мы придемъ къ интегралу

$$\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C},$$

который выражается черезъ логариѳмъ, если $B^2-AC>0$, и черезъ arctg, если $B^2-AC<0$.

Возьмемъ еще интегралъ

$$\int\frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx.$$

Мы имѣемъ тождественно

$$5x^3+3x-1=6x(x^2+1)-(x^3+3x+1);$$

отсюда мы можемъ написать

$$\int\frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx=\int\frac{6x(x^2+1)}{(x^3+3x+1)^3}\,dx-\int\frac{dx}{(x^3+3x+1)^2}.$$

Интегрируя первый интегралъ по частямъ, получимъ

$$\int x\frac{6(x^2+1)}{(x^3+3x+1)^3}\,dx=\frac{-x}{(x^3+3x+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^3+3x+1)^2},$$

и, слѣдовательно, будемъ имѣть

$$\int\frac{5x^3+3x-1}{(x^3+3x+1)^3}\,dx=\frac{-x}{(x^3+3x+1)^2}.$$

Примѣчаніе. — При примѣненіи метода Эрмита мы должны рѣшить слѣдующую задачу: Даны три многочлена A, B, C соотвѣтственно m-ой, n-ой и p-ой степеней, причемъ A и B первые между собою; найти два другихъ многочлена u и v, такъ, чтобы было тождественно $Au+Bv=C$.

Чтобы найти отвѣчающіе на вопросъ многочлены возможно низшей степени, предположимъ сначала, что p не больше $m+n-1$. Тогда за

u и v можно взять многочлены соотвѣтственно $(n-1)$-ой и $(m-1)$-ой степеней; $m+n$ неизвѣстныхъ коэффиціентовъ опредѣлятся изъ системы $m+n$ неоднородныхъ линейныхъ уравненій, опредѣлитель которой не можетъ быть равенъ нулю; въ противномъ случаѣ, можно было бы найти два многочлена u и v степеней не выше $(n-1)$-ой и $(m-1)$-ой, удовлетворяющихъ тожеству $Au+Bv=0$, откуда слѣдуетъ, что A и B должны были бы имѣть общаго множителя.

Если многочленъ C будетъ степени $(m+n)$ или выше, то мы раздѣлимъ C на AB, такъ чтобы получился остатокъ C' не выше $(m+n)$-ой степени: $C=ABQ+C'$. Полагая $u-BQ=u_1$, мы представимъ соотношеніе $Au+Bv=C$ въ видѣ

$$Au_1+Bv=C',$$

и такимъ образомъ придемъ къ предыдущему случаю.

105. Интегралы $\int R(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})\,dx$. — Послѣ интеграловъ отъ раціональныхъ функцій естественно перейти къ разсмотрѣнію интеграловъ отъ функцій ирраціональныхъ. Мы начнемъ съ того случая, когда подъ знакомъ интеграла стоитъ раціональная функція отъ x и отъ корня квадратнаго изъ многочлена второй степени. Здѣсь для уничтоженія корня достаточно простой замѣны перемѣннаго, и мы придемъ къ предыдущему случаю. Эта замѣна перемѣннаго очевидна, если многочленъ подъ знакомъ корня обращается въ двучленъ первой степени $ax+b$. Полагая $ax+b=t^2$, получимъ

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})\,dx=\int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t\right)\frac{2t\,dt}{a},$$

и новая функція подъ знакомъ интеграла будетъ раціональною.

Если многочленъ подъ знакомъ радикала — второй степени и имѣетъ два дѣйствительныхъ корня a и b, то можно написать

$$\sqrt{A(x-a)(x-b)}=(x-b)\sqrt{A\frac{x-a}{x-b}},$$

и опять достаточно положить $\sqrt{A\frac{x-a}{x-b}}=t$, или $x=\frac{Aa-bt^2}{A-t^2}$, чтобы ирраціональность исчезла.

Если многочленъ подъ знакомъ радикала имѣетъ мнимые корни, то этотъ пріемъ привелъ бы насъ къ мнимымъ символамъ. Чтобы ближе подойти къ существу вопроса, замѣтимъ, что если мы обозначимъ радикалъ $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ черезъ y, то x и y будетъ координатами точки кривой, представляемой уравненіемъ

$$y^2=Ax^2+2Bx+C, \qquad (1)$$

и задача приводится къ выраженію координатъ точки кривой второго порядка чрезъ раціональныя функціи нѣкотораго параметра. Геометрически ясно, что это возможно; въ самомъ дѣлѣ, если мы проведемъ черезъ какую-нибудь точку (α, β) этой кривой перемѣнную сѣкущую

$$y-\beta=t(x-\alpha),$$

то ясно, что координаты второй точки пересѣченія этой сѣкущей съ кривою получатся изъ уравненій первой степени и будутъ, слѣдовательно, раціональными функціями отъ t.

Если трехчленъ $Ax^2+2Bx+C$ имѣетъ мнимые корни, то коэффиціентъ A долженъ быть положительнымъ, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, этомъ трехчленъ былъ бы отрицательнымъ при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x. Въ этомъ случаѣ коническое сѣченіе (1) есть гипербола, и, пересѣкая эту гиперболу прямою, параллельною одной изъ ея асимптотъ,

$$y=x\sqrt{A}+t,$$

мы получимъ для координатъ точки пересѣченія

$$x=\frac{C-t^2}{2t\sqrt{A}-2B}, \quad y=t+\sqrt{A}\,\frac{C-t^2}{2t\sqrt{A}-2B}.$$

Если же A отрицательно, то кривая второго порядка есть эллипсъ, и трехчленъ

$$Ax^2+2Bx+C$$

долженъ имѣть два дѣйствительныхъ корня, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, этотъ трехчленъ былъ бы отрицательнымъ при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x. Замѣна перемѣннаго, которая была указана выше, есть та самая, которую мы получили бы, пересѣкая кривую подвижною сѣкущею

$$y=t(x-a).$$

Пусть, напримѣръ, требуется вычислить интегралъ

$$\int\frac{dx}{(x^2+k)\sqrt{x^2+k}}.$$

Вспомогательная кривая второго порядка $y^2=x^2+k$ есть гипербола, и, пересѣкая ее прямою, параллельною асимптотѣ, $x+y=t$, мы получимъ для координатъ точки пересѣченія выраженія

$$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{t}\right), \quad y=\sqrt{x^2+k}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{k}{t}\right),$$

и затѣмъ

$$dx=\frac{dt}{2}\left(\frac{t^2+k}{t^2}\right), \quad \int\frac{dx}{y^3}=\int\frac{4t\,dt}{(t^2+k)^2}=-\frac{2}{t^2+k}.$$

Возвращаясь къ перемѣнному x, находимъ

$$\int \frac{dx}{(x^2+k)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-\sqrt{x^2+k}}{k\sqrt{x^2+k}} = \frac{x}{k\sqrt{x^2+k}} - \frac{1}{k},$$

причемъ въ правой части должно еще стоять произвольное постоянное. Вообще, если $AC-B^2$ не равно нулю, то мы имѣемъ

$$\int \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{AC-B^2} \frac{Ax+B}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ проще искать интегралъ непосредственно, не уничтожая ирраціональности. Какъ примѣръ, разсмотримъ интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

Если коэффиціентъ A положителенъ, то можно написать

$$\int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{A^2x^2+2ABx+AC}} = \int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{(Ax+B)^2+AC-B^2}},$$

и, полагая $Ax+B=t$, получимъ

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+AC-B^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left(t+\sqrt{t^2+AC-B^2}\right).$$

Возвращаясь къ перемѣнному x, находимъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left(Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right).$$

Если коэффиціентъ при x^2 отрицателенъ, то интегралъ можно представить въ видѣ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-Ax^2+2Bx+C}} = \int \frac{\sqrt{A}\,dx}{\sqrt{AC+B^2-(Ax-B)^2}}, \qquad A>0;$$

здѣсь количество $AC+B^2$ должно быть положительнымъ, и, полагая

$$Ax-B=t\sqrt{AC+B^2},$$

мы приходимъ къ интегралу

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin t.$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin \frac{Ax-B}{\sqrt{AC+B^2}}.$$

легко убѣдиться, что, когда x измѣняется между двумя корнями трехчлена, то функція подъ знакомъ arc sin измѣняется между -1 и $+1$.

Въ промежуточномъ случаѣ, когда $A=0$ и $B\neq 0$, интегралъ — алгебраическій

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2Bx+C}} = \frac{1}{B}\sqrt{2Bx+C}.$$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$ приводятся къ предыдущимъ подстановкою $x=a+\frac{1}{y}$. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{A_1y^2+2B_1y+C_1}},$$

гдѣ

$$A_1=Aa^2+2Ba+C, \quad B_1=Aa+B, \quad C_1=A.$$

Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что интегралъ будетъ алгебраическимъ, если a будетъ корнемъ трехчлена, стоящаго подъ знакомъ радикала, и только въ этомъ случаѣ.

Разсмотримъ еще интегралъ $\int \sqrt{x^2+A}\,dx$. Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = x\sqrt{x^2+A} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}};$$

съ другой стороны можно написать

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \sqrt{x^2+A}\,dx - \int \frac{A\,dx}{\sqrt{x^2+A}}$$
$$= \int \sqrt{x^2+A}\,dx - A\log\left(x+\sqrt{x^2+A}\right);$$

изъ этихъ двухъ соотношеній получаемъ

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+A}\right), \qquad (2)$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} - \frac{A}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+A}\right). \qquad (3)$$

Точно такъ же можно вывести формулы

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}, \qquad (4)$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}. \qquad (5)$$

106. Площадь гиперболы. — Предыдущіе интегралы встрѣчаются при вычисленіи площади сектора эллипса или гиперболы. Возьмемъ гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

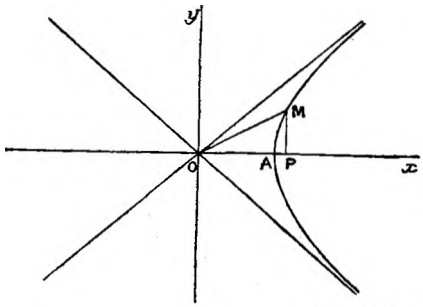
и найдемъ площадь сегмента AMP, ограниченнаго дугою AM, осью Ox и ординатою MP. Эта площадь равна опредѣленному интегралу

$$\int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx,$$

т.-е., по формулѣ (2), равна

$$\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)\right].$$

Черт. 21.



Но $MP=y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, и произведеніе $\frac{1}{2}\frac{b}{a}x\sqrt{x^2-a^2}$ представляетъ площадь треугольника OMP; отсюда слѣдуетъ, что площадь S сектора OAM, заключающагося между дугою AM, радіусомъ OA и радіусомъ OM, имѣетъ выраженіе

$$S=\frac{1}{2}ab\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)=\frac{1}{2}ab\log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Эта формула позволяетъ выразить координаты x и y точки M гиперболы черезъ площадь S. Въ самомъ дѣлѣ, изъ предыдущаго уравненія и изъ уравненія гиперболы мы имѣемъ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=e^{\frac{2S}{ab}},\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=e^{-\frac{2S}{ab}},$$

и, слѣдовательно,

$$x=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{2S}{ab}}+e^{-\frac{2S}{ab}}\right),\qquad y=\frac{b}{2}\left(e^{\frac{2S}{ab}}-e^{-\frac{2S}{ab}}\right).$$

Функціи, стоящія въ правыхъ частяхъ, носятъ названія гиперболическаго синуса и гиперболическаго косинуса

$$\cos\text{hyp}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \sin\text{hyp}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

и мы можемъ написать

$$x=a\cos\text{hyp}\,\frac{2S}{ab},\qquad y=b\sin\text{hyp}\,\frac{2S}{ab}.$$

Гиперболическія функціи обладаютъ свойствами, аналогичными свойствамъ функцій тригонометрическихъ*); такъ, мы имѣемъ

$$\cos^2\text{hyp}\,x-\sin^2\text{hyp}\,x=1,$$
$$\cos\text{hyp}\,(x+y)=\cos\text{hyp}\,x\cos\text{hyp}\,y+\sin\text{hyp}\,x\sin\text{hyp}\,y,$$
$$\sin\text{hyp}\,(x+y)=\sin\text{hyp}\,x\cos\text{hyp}\,y+\sin\text{hyp}\,y\cos\text{hyp}\,x.$$

*) Recueil des formules numériques Уэля (Houël) содержитъ таблицу логариѳмовъ этихъ функцій для положительныхъ значеній аргумента.

Точно такъ же мы нашли бы, что координаты точки эллипса выразятся черезъ площадь сектора слѣдующими формулами

$$x = a\cos\frac{2S}{ab}, \quad y = b\sin\frac{2S}{ab}.$$

Для круга радіуса, равнаго единицѣ, и для равносторонней гиперболы съ полуосью, равною единицѣ, эти формулы обращаются соотвѣтственно въ

$$x = \cos 2S, \qquad y = \sin 2S;$$
$$x = \cos \operatorname{hyp} 2S, \quad y = \sin \operatorname{hyp} 2S.$$

Гиперболическія функціи играютъ ту же роль по отношенію къ равносторонней гиперболѣ, какъ тригонометрическія — по отношенію къ кругу.

107. Спрямленіе параболы. — Найдемъ длину дуги параболы $2py = x^2$ между вершиною O и точкою M. Мы имѣемъ

$$\text{arc } OM = \int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^x \frac{\sqrt{x^2+p^2}}{p}\,dx,$$

или, примѣняя формулу (2),

$$\text{arc } OM = \frac{x\sqrt{x^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}\right).$$

Алгебраическій членъ въ правой части представляетъ длину касательной MT. Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что $OT = \frac{x}{2}$; поэтому

$$MT^2 = y^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{4p^2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2(x^2+p^2)}{4p^2}.$$

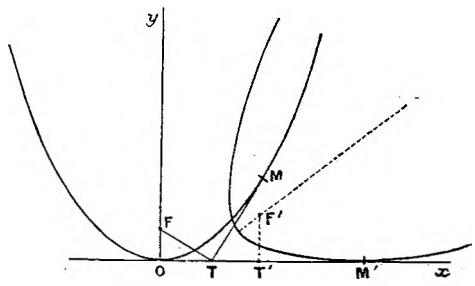
Соединимъ точку T съ фокусомъ F; уголъ MTF — прямой, и мы имѣемъ

$$FT = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{p^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+p^2}.$$

Отсюда можно вывести слѣдующее любопытное свойство параболы.

Предположимъ, что парабола катится безъ скольженія по оси Ox. Найдемъ мѣсто, описываемое фокусомъ, предполагая, что фокусъ неизмѣнно связанъ съ параболою. Если парабола коснется оси Ox въ M', то мы будемъ имѣть $OM' = \text{arc } OM$; точка T перейдетъ въ точку T', такъ что будетъ $M'T' = MT$, и фокусъ F перейдетъ въ точку F', которую получимъ, отложивъ на прямой, параллельной Oy, длину $T'F' = TF$. Координаты X, Y точки F' будутъ имѣть слѣдующія значенія

Черт. 22.



$$X = \text{arc } OM - MT = \frac{p}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}\right),$$
$$Y = TF = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+p^2}.$$

Исключивъ x изъ этихъ двухъ соотношеній, мы получимъ уравненіе мѣста, описываемаго фокусомъ. Изъ перваго уравненія имѣемъ

$$x+\sqrt{x^2+p^2}=pe^{\frac{2X}{p}};$$

къ этому уравненію можно присоединить еще

$$x-\sqrt{x^2+p^2}=-pe^{-\frac{2X}{p}},$$

такъ какъ произведеніе лѣвыхъ частей равно $-p^2$. Вычитая, получимъ

$$\sqrt{x^2+p^2}=\frac{p}{2}\left(e^{\frac{2X}{p}}+e^{-\frac{2X}{p}}\right),$$

и искомое уравненіе будетъ

$$Y=\frac{p}{4}\left(e^{\frac{2X}{p}}+e^{-\frac{2X}{p}}\right)=\frac{p}{2}\operatorname{cos\,hyp}\frac{2X}{p}.$$

Легко построить эту кривую, носящую названіе цѣпной линіи; по своему виду она имѣетъ сходство съ параболою.

108. Уникурсальныя кривыя. — Разсмотримъ теперь, вообще, интегралы отъ алгебраическихъ функцій. Пусть будетъ

$$F(x, y)=0 \qquad (6)$$

уравненіе алгебраической кривой, и $R(x, y)$ — раціональная функція отъ x и отъ y. Предположимъ, что въ $R(x, y)$ мы замѣнили y однимъ изъ корней уравненія (6); мы получимъ функцію только одного перемѣннаго x, и интегралъ

$$\int R(x, y)\,dx$$

называется абелевымъ интеграломъ, связаннымъ съ кривою (6). Если данная кривая и функція $R(x, y)$ — произвольны, то эти интегралы будутъ трансцендентными функціями. Но въ частномъ случаѣ, если данная кривая — уникурсальная, т.-е. если координаты x, y точекъ этой кривой могутъ быть представлены, какъ раціональныя функціи перемѣннаго параметра t, то абелевы интегралы, связанные съ этою кривою, приводятся непосредственно къ интеграламъ отъ раціональныхъ функцій. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t)$$

выраженія координатъ x, y въ функціи t. Принявъ t за новое независимое перемѣнное, получимъ

$$\int R(x, y)\,dx=\int R[f(t), \varphi(t)]\,f'(t)\,dt,$$

и новая функція подъ знакомъ интеграла, очевидно, раціональна.

Въ курсахъ аналитической геометріи*) доказывается, что всякая уникурсальная кривая n-го порядка имѣетъ $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойныхъ точекъ, и что, обратно, всякая кривая n-го порядка, имѣющая это число двойныхъ точекъ, будетъ уникурсальною. Я напомню только, какимъ образомъ можно получить выраженія координатъ въ функціи вспомогательнаго параметра. Пусть дана кривая n-го порядка C_n, имѣющая $\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойныхъ точекъ; черезъ эти δ двойныхъ точекъ и черезъ $n-3$ простыхъ точекъ кривой C_n проведемъ пучекъ кривыхъ $(n-2)$-го порядка; эти точки вполнѣ опредѣлятъ пучекъ кривыхъ $(n-2)$-го порядка, такъ какъ

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 3 = \frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1,$$

а для опредѣленія кривой $(n-2)$-го порядка нужны $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ точекъ. Пусть будетъ $P(x, y) + tQ(x, y) = 0$ уравненіе этого пучка, гдѣ t обозначаетъ произвольный параметръ. Каждая кривая пучка пересѣкаетъ кривую C_n въ $n(n-2)$ точкахъ; при этомъ нѣкоторое число этихъ точекъ пересѣченія не зависитъ отъ t, именно $n-3$ выбранныхъ простыхъ точекъ и δ двойныхъ точекъ, каждая изъ которыхъ считается за двѣ точки пересѣченія. Но

$$n - 3 + 2\delta = n - 3 + (n-1)(n-2) = n(n-2) - 1;$$

такимъ образомъ остается только одна точка пересѣченія, измѣняющаяся вмѣстѣ съ t. Координаты этой точки получатся изъ двухъ уравненій первой степени, коэффиціенты которыхъ будутъ цѣлыми многочленами по t, и потому эти координаты сами будутъ раціональными функціями отъ t. Можно было бы также воспользоваться пучкомъ кривыхъ $(n-1)$-го порядка, проходящихъ черезъ $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойныхъ точекъ и черезъ $2n-3$ простыхъ точекъ, взятыхъ гдѣ угодно на кривой C_n.

Если $n=2$, то $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 0$; такимъ образомъ всякая кривая второго порядка, какъ это уже было указано выше, — уникурсальная. Если $n=3$, то $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 1$; слѣдовательно,

*) См., напримѣръ, Невенгловскій (Niewenglowski): Cours de Géométrie analytique, т. II, стр. 99—114.

изъ кривыхъ третьяго порядка уникурсальными будутъ только тѣ, которыя имѣютъ двойную точку. Принявъ двойную точку за начало координатъ, мы приведемъ уравненіе кривой третьяго порядка къ виду

$$\varphi_3(x, y) + \varphi_2(x, y) = 0,$$

гдѣ φ_3 и φ_2 — однородные многочлены со степенями, соотвѣтствующими ихъ указателямъ. Сѣкущая $y = tx$, проходящая черезъ двойную точку, пересѣчетъ кривую еще только въ одной точкѣ, измѣняющейся вмѣстѣ съ t; координаты этой точки будутъ

$$x = -\frac{\varphi_2(1, t)}{\varphi_3(1, t)}, \quad y = -\frac{t\varphi_2(1, t)}{\varphi_3(1, t)}.$$

Уникурсальная кривая четвертаго порядка имѣетъ три двойныхъ точки. Чтобы получить выраженія координатъ ея точекъ черезъ параметръ, составимъ уравненіе пучка кривыхъ второго порядка, проходящихъ черезъ три двойныхъ точки и черезъ одну простую точку, взятую произвольно на кривой. Каждая кривая этого пучка пересѣчетъ кривую четвертаго порядка только въ одной точкѣ, измѣняющейся вмѣстѣ съ параметромъ. Если, напримѣръ, мы составимъ уравненіе для абсциссъ точекъ пересѣченія, то это уравненіе, по освобожденіи его отъ множителей, соотвѣтствующихъ уже извѣстнымъ корнямъ, обратится въ уравненіе первой степени и опредѣлить x въ видѣ раціональной функціи параметра; точно такъ же мы будемъ поступать для полученія координаты y.

Возьмемъ, напримѣръ, лемнискату

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

имѣющую одну двойную точку въ началѣ координатъ, и, кромѣ того, двѣ двойныхъ точки въ безконечно удаленныхъ круговыхъ точкахъ. Окружность

$$x^2 + y^2 = t(x - y),$$

проходящая черезъ начало координатъ и касающаяся въ этой точкѣ одной изъ вѣтвей лемнискаты, пересѣкаетъ эту кривую только въ одной точкѣ, измѣняющейся вмѣстѣ съ t. Изъ двухъ приведенныхъ уравненій легко получается

$$t^2(x - y)^2 = a^2(x^2 - y^2);$$

отсюда, по раздѣленіи на $x - y$, остается

$$t^2(x - y) = a^2(x + y).$$

Послѣднее уравненіе представляетъ прямую, проходящую черезъ начало координатъ и пересѣкающую окружность въ точкѣ, отличной отъ начала, съ координатами

$$x=\frac{a^2t\,(t^2+a^2)}{t^4+a^4},\quad y=\frac{a^2t\,(t^2-a^2)}{t^4+a^4}.$$

Къ этимъ формуламъ можно придти еще проще, воспользовавшись слѣдующимъ пріемомъ, примѣнимымъ ко всякой уникурсальной кривой четвертаго порядка, одна изъ двойныхъ точекъ которой извѣстна. Пересѣчемъ лемнискату сѣкущею $y=\lambda x$; она встрѣтитъ кривую въ двухъ точкахъ съ координатами

$$x=\frac{\pm a\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2},\quad y=\lambda x.$$

Подъ знакомъ радикала стоитъ многочленъ второй степени, и, чтобы уничтожить ирраціональность, достаточно положить $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=\left(\frac{a}{t}\right)^2$ (§ 105); легко убѣдиться, что это приведетъ насъ къ предыдущимъ формуламъ.

Примѣчаніе. — Если плоская кривая имѣетъ особыя точки высшей кратности, то можно доказать, что каждая изъ нихъ равносильна нѣкоторому числу двойныхъ точекъ. Для того чтобы кривая была уникурсальною, достаточно, чтобы эти особыя точки были равносильны $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойнымъ точкамъ. Напримѣръ, кривая n-го порядка, имѣющая кратную точку $(n-1)$-го порядка, будетъ уникурсальною, такъ какъ прямая, проходящая черезъ эту кратную точку, пересѣкаетъ кривую только въ одной перемѣнной точкѣ.

109. Интегралы отъ дифференціальныхъ биномовъ. — Изъ другихъ интеграловъ, въ которыхъ ирраціональность можетъ быть легко уничтожена, мы укажемъ еще на слѣдующіе

$$\int R\left[x,\,(ax+b)^{\frac{1}{q}}\right]dx,\quad \int R\,(x,\sqrt{ax+b},\,\sqrt{cx+d})\,dx,$$

$$\int R(x^{\alpha},\,x^{\alpha'},\,x^{\alpha''},\ldots)\,dx,$$

гдѣ R есть раціональная функція, и показатели α, α', α'', ... раціональныя числа. Въ первомъ интегралѣ достаточно положить $ax+b=t^q$. Если во второмъ интегралѣ положимъ

$$ax+b=t^2,$$

то будемъ имѣть только одинъ квадратный корень изъ много-

II. — ИНТЕГРАЛЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКІЕ И УЛЬТРА-ЭЛЛИПТИЧЕСКІЕ.

110. Приведеніе интегралов. — Пусть будетъ $P(x)$ цѣлый многочленъ p-ой степени, первый со своею производною. Если степень многочлена $P(x)$ больше 2, то интегралъ

$$\int R[x, \sqrt{P(x)}]\,dx,$$

гдѣ R обозначаетъ раціональную функцію отъ x и отъ радикала $y=\sqrt{P(x)}$, вообще, не можетъ быть выраженъ при помощи элементарныхъ функцій. Интегралы этого вида, представляющіе лишь частный случай болѣе общихъ абелевыхъ интегралов (§ 108), могутъ быть разложены на алгебраическую и логариѳмическую части, и на нѣкоторое число опредѣленнаго вида интегралов, представляющихъ новыя трансцендентныя функціи, которыя не могутъ быть выражены при помощи конечнаго числа элементарныхъ символовъ. Мы изложимъ здѣсь это преобразованіе.

Раціональная функція $R(x, y)$ представляетъ частное двухъ цѣлыхъ многочленовъ по x и по y; замѣняя четныя степени y, напримѣръ y^{2q}, черезъ $[P(x)]^q$, а нечетныя, напримѣръ y^{2q+1}, черезъ $y\,[P(x)]^q$, мы видимъ, что всегда можно считать числителя и знаменателя дроби выраженіями первой степени относительно y

$$R(x, y)=\frac{A+By}{C+Dy},$$

гдѣ A, B, C, D суть цѣлые многочлены по x. Умножая числителя и знаменателя на $C-Dy$ и замѣняя снова y^2 черезъ $P(x)$, получимъ

$$R(x, y)=\frac{F+Gy}{K}.$$

Такимъ образомъ, разсматриваемый интегралъ распадается на два другихъ; изъ нихъ одинъ $\int\frac{F\,dx}{K}$ есть интегралъ отъ раціональной функціи, а другой $\int\frac{Gy}{K}\,dx$ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\int\frac{M\,dx}{N\sqrt{P(x)}},$$

гдѣ M и N — цѣлые многочлены по x. Только этимъ вторымъ интегралом мы и должны заняться. Раціональная дробь $\frac{M}{N}$

можетъ быть разложена на цѣлую часть $E(x)$ и на сумму дробныхъ членовъ

$$\frac{M}{N}=E(x)+\frac{A_1}{X_1}+\frac{A_2}{X_2^2}+\ldots+\frac{A_p}{X_p^p},$$

гдѣ каждый многочленъ X_i—первый со своею производною. Такимъ образомъ намъ нужно будетъ разсмотрѣть только два вида интеграловъ

$$Y_m=\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{P(x)}},\qquad Z_n=\int\frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}}.$$

Если многочленъ $P(x)$ будетъ степени p, то всѣ интегралы Y_m выражаются при помощи $p-1$ первыхъ интеграловъ $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-2}$ и алгебраическихъ количествъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ

$$P(x)=a_0x^p+a_1x^{p-1}+\ldots.$$

Мы имѣемъ

$$\frac{d}{dx}\left(x^m\sqrt{P(x)}\right)=mx^{m-1}\sqrt{P(x)}+\frac{x^mP'(x)}{2\sqrt{P(x)}}$$
$$=\frac{2mx^{m-1}P(x)+x^mP'(x)}{2\sqrt{P(x)}};$$

здѣсь числитель есть многочленъ $(m+p-1)$-ой степени, имѣющій высшимъ членомъ $(2m+p)\,a_0x^{m+p-1}$. Интегрируя предыдущее равенство по частямъ, получимъ

$$2x^m\sqrt{P(x)}=(2m+p)\,a_0Y_{m+p-1}+\ldots,$$

причемъ не написанные члены содержатъ интегралы Y съ указателями, меньшими $m+p-1$. Полагая въ этой формулѣ послѣдовательно $m=0, 1, 2, \ldots$, мы можемъ выразить Y_{p-1}, $Y_p, \ldots$ черезъ алгебраическую часть и черезъ $p-1$ интеграловъ Y_0, $Y_1, \ldots, Y_{p-2}$.

Относительно интеграловъ второго вида должно различать два случая въ зависимости отъ того, будетъ ли X первымъ съ $P(x)$ или нѣтъ.

1°. Если многочленъ X первый съ $P(x)$, то интегралъ Z_n приводится къ алгебраическому члену, къ суммѣ интеграловъ Y_k и къ новому интегралу

$$\int\frac{B\,dx}{X\sqrt{P(x)}},$$

гдѣ B есть многочленъ степени низшей, чѣмъ X.

Такъ какъ многочленъ X — первый съ своею производною X' и съ $P(x)$, то X^n будетъ первымъ съ произведеніемъ PX'. Поэтому всегда можно найти два многочлена λ и μ, удовлетворяющихъ тожеству $\lambda X^n+\mu X'P=A$; при этомъ интегралъ распадается на два другихъ

$$\int\frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}}=\int\frac{\lambda\,dx}{\sqrt{P(x)}}+\int\frac{\mu\sqrt{P}\,X'}{X^n}\,dx.$$

Первая часть есть сумма интеграловъ Y; второй интегралъ при $n>1$ можно проинтегрировать по частямъ, положивъ

$$\mu\sqrt{P}=u,\quad v=\frac{-1}{(n-1)\,X^{n-1}};$$

это даетъ

$$\int\frac{\mu\sqrt{P}\,X'\,dx}{X^n}=\frac{-\mu\sqrt{P}}{(n-1)\,X^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{2\mu'P+\mu P'}{2\,X^{n-1}\sqrt{P(x)}}\,dx.$$

Новый интегралъ — одинаковаго вида съ первоначальнымъ, но только показатель при X уменьшился на единицу. Продолжая приведеніе, насколько возможно, т.-е. пока показатель при X больше единицы, мы придемъ къ результату вида

$$\int\frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P(x)}}=\int\frac{B\,dx}{X\sqrt{P}}+\int\frac{C\,dx}{\sqrt{P}}+\frac{D\sqrt{P}}{X^{n-1}},$$

гдѣ B, C, D — три многочлена, причемъ всегда можно предположить, что степень перваго многочлена B ниже степени X.

2°. Предположимъ, что X и P имѣютъ общаго дѣлителя D, такъ что $X=YD$, $P=SD$, и многочлены D, S, Y попарно первые между собою. Можно найти два такихъ многочлена λ, μ, чтобы было $A=\lambda D^n+\mu Y^n$; поэтому мы можемъ написать

$$\int\frac{A\,dx}{X^n\sqrt{P}}=\int\frac{\lambda\,dx}{Y^n\sqrt{P}}+\int\frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}}.$$

Первый интегралъ имѣетъ разсмотрѣнный выше видъ, что же касается интеграла

$$\int\frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}},$$

гдѣ D есть дѣлитель многочлена P, то онъ приводится къ алгебраическому члену и къ интеграламъ Y.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ многочленъ D^n—первый съ произведеніемъ $D'S$, то можно найти два такихъ многочлена λ_1 и μ_1, чтобы было $\lambda_1 D^n + \mu_1 D'S = \mu$, и разсматриваемый интегралъ можно будетъ представить въ видѣ

$$\int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}} = \int \frac{\lambda_1\,dx}{\sqrt{P}} + \int \frac{\mu_1 SD'}{D^n\sqrt{P}}dx.$$

Замѣнивъ P черезъ SD, представимъ второй изъ этихъ интеграловъ въ видѣ

$$\int \mu_1\sqrt{S}\,\frac{D'}{D^{n+\frac{1}{2}}}\,dx$$

и проинтегрируемъ его по частямъ, полагая

$$u = \mu_1\sqrt{S}, \quad v = \frac{-1}{n-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{D^{n-\frac{1}{2}}}.$$

Мы получимъ

$$\int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}} = \int \frac{\lambda_1\,dx}{\sqrt{P}} - \frac{\mu_1\sqrt{S}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)D^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{2\mu'_1 S + \mu_1 S'}{D^{n-1}\sqrt{P}}\,dx.$$

Мы имѣемъ опять формулу приведенія, но здѣсь благодаря присутствію дробнаго показателя $n-\frac{1}{2}$ приведеніе можно продолжить до того члена, въ которомъ D будетъ стоять въ знаменателѣ въ первой степени, и мы приходимъ къ результату вида

$$\int \frac{\mu\,dx}{D^n\sqrt{P}} = \frac{K\sqrt{P}}{D^n} + \int \frac{H\,dx}{\sqrt{P}},$$

гдѣ H и K — два многочлена.

Такимъ образомъ, всякій интегралъ $\int \frac{M\,dx}{N\sqrt{P}}$ приводится къ алгебраической части и къ суммѣ интеграловъ вида

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{P}}, \quad \int \frac{X_1\,dx}{X\sqrt{P}},$$

гдѣ m не выше $p-2$, многочленъ X — первый со своею производною X' и съ многочленомъ P, и степень многочлена X_1 ниже степени многочлена X. Это приведеніе требуетъ только сложенія, умноженія и дѣленія многочленовъ.

Если корни уравненія $X=0$ извѣстны, то раціональную дробь $\frac{X_1}{X}$ можно разложить на сумму простыхъ дробей вида

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{Bx+C}{(x-a)^2+\beta^2},$$

гдѣ A, B, C — постоянныя, и мы приходимъ къ двумъ новымъ типамъ интеграловъ

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}, \quad \int \frac{(Bx+C)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]\sqrt{P(x)}},$$

которые можно привести къ одному первому, если мы условимся допускать для параметра a также и мнимыя значенія. Такіе интегралы называются интегралами третьяго вида. Интегралами перваго вида называются интегралы Y_m, гдѣ m меньше $\frac{p}{2}-1$; интегралы Y_m при m равномъ или большемъ $\frac{p}{2}-1$ называются интегралами второго вида. Интегралы перваго вида обладаютъ характеристическимъ свойствомъ, — они сохраняютъ конечное значеніе, когда верхній предѣлъ безконечно возрастаетъ или дѣлается равнымъ корню многочлена $P(x)$ (§ 89—90). Что касается интеграловъ второго и третьяго вида, то приведенное выше различіе между ними не самое существенное. Истинное различіе будетъ указано впослѣдствіи.

Примѣчаніе. — До сихъ поръ мы не дѣлали никакого предположенія относительно степени p многочлена $P(x)$. Если степень этого многочлена нечетная, то она всегда можетъ быть увеличена на единицу. Въ самомъ дѣлѣ, пусть многочленъ $P(x)$ будетъ $(2q-1)$-ой степени

$$P(x)=A_0x^{2q-1}+A_1x^{2q-2}+\ldots+A_{2q-1}.$$

Положивъ $x=a+\frac{1}{y}$, причемъ a не есть корень многочлена $P(x)$, получимъ

$$P(x)=P(a)+P'(a)\frac{1}{y}+\ldots+\frac{P^{(2q-1)}(a)}{(2q-1)!}\frac{1}{y^{2q-1}}=\frac{P_1(y)}{y^{2q}},$$

гдѣ $P_1(y)$ обозначаетъ многочленъ $2q$-ой степени. Слѣдовательно,

$$\sqrt{P(x)}=\frac{\sqrt{P_1(y)}}{y^q},$$

и всякій интегралъ, содержащій раціонально x и $\sqrt{P(x)}$, обратится въ интегралъ отъ раціональной функціи отъ y и отъ $\sqrt{P_1(y)}$.

Обратно, если подъ знакомъ радикала стоитъ многочленъ $P(x)$ четной степени $2q$, то степень этого многочлена можно понизить на единицу, если только извѣстенъ одинъ изъ его корней. Пусть будетъ, напримѣръ, a одинъ изъ корней уравненія $P(x)=0$; полагая $x=a+\frac{1}{y}$, будемъ имѣть

$$P(x)=P'(a)\frac{1}{y}+\ldots+\frac{P^{(2q)}(a)}{(2q)!}\frac{1}{y^{2q}}=\frac{P_1(y)}{y^{2q}},$$

гдѣ $P_1(y)$ есть многочленъ $(2q-1)$-ой степени; отсюда

$$\sqrt{P(x)}=\frac{\sqrt{P_1(y)}}{y^q},$$

и новый интегралъ будетъ содержать только одну ирраціональность $\sqrt{P_1(y)}$.

111. Случай интегрируемости въ алгебраическомъ видѣ. — Если данъ интегралъ вида

$$\int R[x,\sqrt{P(x)}]\,dx,$$

то, какъ мы только что видѣли, его всегда можно привести элементарными вычисленіями къ интегралу отъ раціональной дроби, къ алгебраическому члену вида $\frac{G\sqrt{P(x)}}{L}$ и къ суммѣ интеграловъ перваго, второго и третьяго видовъ. Такъ какъ можно также найти посредствомъ элементарныхъ операцій раціональную часть интеграла отъ раціональной дроби, то отсюда слѣдуетъ, что предложенный интегралъ можно всегда представить въ видѣ

$$\int R[x,\sqrt{P(x)}]\,dx=F[x,\sqrt{P(x)}]+T,$$

гдѣ F есть раціональная функція отъ x и отъ $\sqrt{P(x)}$, а T равно суммѣ интеграловъ трехъ видовъ и интеграла $\int\frac{X_1}{X}dx$, въ которомъ многочленъ X — первый со своею производною, и степень многочлена X_1 ниже степени X. Ліувилль (Liouville) доказалъ, что если предложенный интегралъ — алгебраическій, то онъ равенъ $F[x,\sqrt{P(x)}]$, такъ что должно быть тождественно

$$R[x,\sqrt{P(x)}]=\frac{d}{dx}\{F[x,\sqrt{P(x)}]\},$$

и, слѣдовательно, $T=0$.

Такимъ образомъ всегда можно помощью умноженій и дѣленій многочленовъ узнать, будетъ ли данный интегралъ алгебраическимъ, и найти въ этомъ случаѣ его значеніе.

112. Эллиптическіе интегралы. — Если многочленъ $P(x)$ — второй степени, то изложенный общій способъ приведенія позволяетъ привести интегрированіе раціональной функціи отъ x и отъ $\sqrt{P(x)}$ къ вычисленію интеграловъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}},$$

которые мы уже умѣемъ вычислять непосредственно (§ 105).

Простѣйшій послѣ этого случай представляютъ эллиптическіе интегралы, когда $P(x)$ — третьей или четвертой степени; какъ мы видѣли выше, оба эти случая приводятся одинъ къ другому. Пусть будетъ $P(x)$ многочленъ четвертой степени съ дѣйствительными коэффиціентами, имѣющій только простыхъ линейныхъ множителей. Покажемъ прежде всего, что линейною подставкою съ дѣйствительными коэффиціентами всегда можно привести $P(x)$ къ многочлену, содержащему только четныя степени перемѣннаго.

Пусть будутъ a, b, c, d четыре корня уравненія $P(x)=0$. Можно составить инволюціонное соотношеніе

$$L x'x'' + M(x' + x'') + N = 0, \tag{7}$$

удовлетворяющееся при $x'=a$, $x''=b$ и при $x'=c$, $x''=d$. Для опредѣленія отношеній между коэффиціентами L, M, N мы имѣемъ два соотношенія

$$L ab + M(a+b) + N = 0,$$
$$L cd + M(c+d) + N = 0,$$

и мы видимъ, что можно взять

$$L = a+b-c-d, \quad M = cd-ab, \quad N = ab(c+d) - cd(a+b).$$

Обозначимъ черезъ α и β двойныя точки предыдущей инволюціи, т.-е. корни уравненія

$$L u^2 + 2M u + N = 0.$$

Условіе дѣйствительности этихъ корней, именно

$$(cd-ab)^2 - (a+b-c-d)[ab(c+d) - cd(a+b)] > 0,$$

послѣ простыхъ преобразованій можетъ быть представлено въ видѣ

$$(a-c)(a-d)(b-c)(b-d) > 0. \tag{8}$$

Всегда можно распредѣлить корни a, b, c, d такъ, чтобы это условіе было удовлетворено. Если всѣ четыре корня дѣйстви-

тельны, то достаточно взять за a и b два бо́льшихъ корня; тогда всѣ четыре множителя неравенства (8) будутъ положительными. Если уравненіе $P(x)=0$ имѣетъ только два дѣйствительныхъ корня, то за a и b мы возьмемъ эти два дѣйствительныхъ корня, а за c и d — два мнимыхъ сопряженныхъ; тогда множители $a-c$, $a-d$ и $b-c$, $b-d$ будутъ мнимыми сопряженными. Наконецъ, если всѣ четыре корня мнимые, то мы возьмемъ за a и b два мнимыхъ сопряженныхъ корня, а за c и d два другихъ мнимыхъ сопряженныхъ; четыре множителя неравенства (8) будутъ опять попарно сопряженными. Соотвѣтствующія значенія коэффиціентовъ L, M, N будутъ во всѣхъ случаяхъ дѣйствительными.

Вводя количества α, β, мы можемъ представить соотношеніе (7) въ видѣ

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta}+\frac{x''-\alpha}{x''-\beta}=0. \qquad (9)$$

Полагая $\frac{x-\alpha}{x-\beta}=y$, или $x=\frac{\beta y-\alpha}{y-1}$, получимъ

$$P(x)=\frac{P_1(y)}{(y-1)^4},$$

гдѣ $P_1(y)$ есть новый многочленъ четвертой степени съ дѣйствительными коэффиціентами, корнями котораго служатъ

$$\frac{a-\alpha}{a-\beta},\quad \frac{b-\alpha}{b-\beta},\quad \frac{c-\alpha}{c-\beta},\quad \frac{d-\alpha}{d-\beta}.$$

На основаніи формулы (9) эти корни удовлетворяютъ попарно соотношенію $y'+y''=0$; слѣдовательно, многочленъ $P_1(y)$ содержитъ только четныя степени y.

Если корни a, b, c, d, удовлетворяютъ соотношенію $a+b=c+d$, то мы имѣемъ $L=0$, и одна изъ двойныхъ точекъ инволюціи удаляется въ безконечность. Полагая $\alpha=-\frac{N}{2M}$, мы представимъ уравненіе (7) въ видѣ

$$x'-\alpha+x''-\alpha=0,$$

и нужно только положить $x=\alpha+y$, чтобы получить многочленъ съ четными степенями y.

Такимъ образомъ мы можемъ во всѣхъ случаяхъ предполагать, что многочленъ $P(x)$ приведенъ къ каноническому виду

$$P(x)=A_0x^4+A_1x^2+A_2.$$

Тогда всякій эллиптическій интегралъ можетъ быть приведенъ

къ алгебраической части, къ интегралу отъ раціональной функціи, къ интеграламъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

и къ интеграламъ вида

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}.$$

Интегралъ

$$u=\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

есть эллиптическій интегралъ перваго вида; разсматривая въ немъ, обратно, x, какъ функцію отъ u, мы получимъ эллиптическую функцію. Второй интегралъ подстановкою $x^2=u$ приводится къ элементарному интегралу. Третій интегралъ

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

есть Лежандровъ интегралъ второго вида. Наконецъ, мы можемъ написать

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}=\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}}+a\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{P(x)}};$$

интегралъ

$$\int \frac{dx}{(x^2+h)\sqrt{A_0x^4+A_1x^2+A_2}}$$

есть Лежандровъ интегралъ третьяго вида.

Эллиптическіе интегралы получили свое названіе отъ того, что съ ними впервые встрѣтились въ задачѣ о спрямленіи эллипса. Пусть будутъ

$$x=a\cos\varphi, \quad y=b\sin\varphi$$

координаты точки эллипса; мы имѣемъ

$$ds^2=dx^2+dy^2=(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\,d\varphi^2,$$

или, полагая $a^2-b^2=e^2a^2$,

$$ds=a\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Интегралъ, представляющій длину дуги эллипса, обращается послѣ подстановки $\cos\varphi=t$ въ

$$s=a\int \frac{\sqrt{1-e^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=a\int \frac{1-e^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)}}\,dt;$$

мы видимъ, что длина дуги эллипса выражается суммою интеграловъ перваго и второго видовъ.

Разсмотримъ еще лемнискату, представляемую уравненіями

$$x=a^2\frac{t(t^2+a^2)}{t^4+a^4},\quad y=a^2\frac{t(t^2-a^2)}{t^4+a^4};$$

выполнивъ вычисленія, получимъ

$$ds^2=dx^2+dy^2=\frac{2a^4}{t^4+a^4}dt^2.$$

Такимъ образомъ длина дуги лемнискаты выражается эллиптическимъ интеграломъ перваго вида*).

113. Псевдо-эллиптическіе интегралы. — Въ нѣкоторыхъ случаяхъ интегралъ $\int F[x,\sqrt{P(x)}]\,dx$, гдѣ $P(x)$ — многочленъ третьей или четвертой степени, можетъ быть выраженъ при помощи алгебраической функціи и суммы конечнаго числа логариѳмовъ отъ алгебраическихъ функцій; такіе интегралы называются псевдо-эллиптическими. Вотъ довольно общій случай, когда это будетъ имѣть мѣсто. Пусть будетъ

$$Lx'x''+M(x'+x'')+N=0 \qquad (10)$$

инволюціонное соотношеніе, связывающее попарно четыре корня уравненія четвертой степени $P(x)=0$; если раціональная функція $f(x)$ такова, что тождественно будетъ

$$f(x)+f\left(-\frac{Mx+N}{Lx+M}\right)=0, \qquad (11)$$

то интегралъ $\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ — псевдо-эллиптическій.

Пусть будутъ α, β двойныя точки инволюціи; какъ было указано выше, соотношеніе (10) можно представить въ видѣ

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta}+\frac{x''-\alpha}{x''-\beta}=0. \qquad (12)$$

Сдѣлавъ въ интегралѣ подстановку $\frac{x-\alpha}{x-\beta}=y$, получимъ

$$dx=\frac{(\alpha-\beta)\,dy}{(1-y)^2},\qquad P(x)=\frac{P_1(y)}{(1-y)^4},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}=\frac{(\alpha-\beta)\,dy}{\sqrt{P_1(y)}},$$

гдѣ $P_1(y)$ — многочленъ четвертой степени, содержащій только четныя степени перемѣннаго y (§ 122). Что касается раціональной дроби $f(x)$, то

*) Это свойство принадлежитъ цѣлому классу кривыхъ, найденныхъ Serret (Serret), (Cours de Calcul différentiel et intégral, т. II, стран. 264).

она обратится въ раціональную дробь $\varphi(y)$, для которой $\varphi(y)+\varphi(-y)=0$. Въ самомъ дѣлѣ, если два значенія x связаны соотношеніемъ (12), то соотвѣтствующія значенія y', y'' перемѣннаго y должны удовлетворять соотношенію $y'+y''=0$. Отсюда слѣдуетъ, что функція $\varphi(y)$ будетъ имѣть видъ $y\psi(y^2)$, гдѣ ψ есть раціональная функція отъ y^2. Слѣдовательно, разсматриваемый интегралъ обращается въ

$$\int \frac{y\,\psi(y^2)\,dy}{\sqrt{A_0 y^4+A_1 y^2+A_2}},$$

и достаточно положить $y^2=z$, чтобы привести его къ элементарному интегралу. Такимъ образомъ теорема доказана, и, кромѣ того, мы имѣемъ вмѣстѣ съ тѣмъ и способъ выполнить самое приведеніе.

Изложенная теорема справедлива и въ томъ случаѣ, когда многочленъ $P(x)$ будетъ третьей степени; нужно только принять одинъ изъ четырехъ корней этого многочлена безконечно большимъ. Доказательство совершенно одинаково съ предыдущимъ.

Если, напримѣръ, уравненіе $P(x)=0$ возвратное, то однимъ изъ involюціонныхъ соотношеній, перемѣщающихъ корни попарно, будетъ $x'x''=1$. Слѣдовательно, если раціональная функція $f(x)$ такова, что мы имѣемъ тождественно $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, то интегралъ $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ будетъ псевдо-эллиптическимъ, и достаточно положить $\frac{x-1}{x+1}=y$, и $y^2=z$, чтобы привести его къ элементарному интегралу.

Предположимъ еще, что $P(x)$ есть многочленъ третьей степени

$$P(x)=x(x-1)\left(x-\frac{1}{k^2}\right);$$

положимъ $a=\infty$, $b=0$, $c=1$, $d=\frac{1}{k^2}$. Существуютъ три involюціонныхъ соотношенія, перемѣщающихъ эти корни попарно,

$$x'=\frac{1}{k^2 x''},\quad x'=\frac{1-k^2 x''}{k^2(1-x'')},\quad x'=\frac{1-x''}{1-k^2 x''}.$$

Если раціональная функція $f(x)$ удовлетворяетъ одному изъ соотношеній

$$f(x)+f\left(\frac{1}{k^2 x}\right)=0,\quad f(x)+f\left(\frac{1-k^2 x}{k^2(1-x)}\right)=0,$$

$$f(x)+f\left(\frac{1-x}{1-k^2 x}\right)=0,$$

то интегралъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2 x)}}$$

— псевдо-эллиптическій. Изъ этого интеграла можно вывести и другіе. Напримѣръ, полагая $x=z^2$, мы превратимъ предыдущій интегралъ въ

$$\int \frac{2f(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}.$$

Отсюда мы заключаемъ, что если $f(z^2)$ удовлетворяетъ одному изъ соотношеній

$$f(z^2)+f\left(\frac{1}{k^2 z^2}\right)=0, \quad f(z^2)+f\left[\frac{1-k^2 z^2}{k^2(1-z^2)}\right]=0,$$

$$f(z^2)+f\left(\frac{1-z^2}{1-k^2 z^2}\right)=0,$$

то новый интегралъ будетъ также псевдо-эллиптическимъ; первый изъ этихъ случаевъ былъ уже замѣченъ Эйлеромъ (Euler)*).

III. — ИНТЕГРИРОВАНІЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХЪ ФУНКЦІЙ.

114. Интегрированіе раціональныхъ функцій отъ $\sin x$ и $\cos x$. — Извѣстно, что $\sin x$ и $\cos x$ выражаются раціонально черезъ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, и эта замѣна перемѣнныхъ позволяетъ привести вычисленіе интеграла вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

къ интегрированію раціональной функціи отъ t. Мы имѣемъ

$$x=2\operatorname{arc tg} t, \quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}, \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

и разсматриваемый интегралъ обращается въ

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int \Phi(t)\,dt,$$

гдѣ $\Phi(t)$ обозначаетъ раціональную функцію. Напримѣръ,

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dt}{t}=\log t,$$

и, слѣдовательно,

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\log\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

Интегралъ $\int\frac{dx}{\cos x}$ приводится къ предыдущему постановкою $x=\frac{\pi}{2}-y$; это даетъ

$$\int\frac{dx}{\cos x}=-\log\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]=\log\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right].$$

Предыдущій способъ имѣетъ то преимущество, что онъ вполнѣ общій, но часто можно найти такія замѣны перемѣн-

*) См. литографированный курсъ Эрмита, 4-е изданіе, стр. 25—28.

ныхъ, которыя ведутъ къ цѣли гораздо скорѣе. Такъ, если функція $R(\sin x, \cos x)$ имѣетъ періодъ π, то она равна раціональной функціи отъ $\operatorname{tg} x$, $F(\operatorname{tg} x)$, и, принявъ $\operatorname{tg} x = t$ за новое перемѣнное, получимъ

$$\int F(\operatorname{tg} x)\, dx = \int \frac{F(t)\, dt}{1+t^2}.$$

Пусть, напримѣръ, требуется вычислить неопредѣленный интегралъ

$$\int \frac{dx}{A\cos^2 x + B\sin x\cos x + C\sin^2 x + D},$$

гдѣ A, B, C, D — произвольныя постоянныя. Функція подъ знакомъ интеграла имѣетъ періодъ π, и, полагая $\operatorname{tg} x = t$, получимъ

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin x\cos x = \frac{t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

и разсматриваемый интегралъ обращается въ

$$\int \frac{dt}{A + Bt + Ct^2 + D(1+t^2)}.$$

Видъ начальной функціи зависитъ отъ характера корней знаменателя. Предполагая послѣдовательно три изъ четырехъ коэффиціентовъ равными нулю, получимъ формулы

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x, \quad \int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \log(\operatorname{tg} x),$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$$

Если подъинтегральная функція имѣетъ видъ $R(\sin x)\cos x$ или $R(\cos x)\sin x$, то замѣна перемѣннаго — очевидна; въ первомъ случаѣ, должно положить $\sin x = t$, а во второмъ $\cos x = t$.

Прежде чѣмъ прилагать общій методъ, иногда бываетъ выгоднѣе упростить подъинтегральную функцію соотвѣтствующею замѣною перемѣннаго. Разсмотримъ, напримѣръ, интегралъ

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c},$$

гдѣ a, b, c — какія-нибудь постоянныя. Опредѣлимъ положительное число ρ и уголъ φ соотношеніями

$$a = \rho\cos\varphi, \quad b = \rho\sin\varphi,$$

откуда

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

слѣдовательно, данный интегралъ можно представить въ видѣ

$$\int\frac{dx}{\rho\cos(x-\varphi)+c}=\int\frac{dy}{\rho\cos y+c},$$

гдѣ $x-\varphi=y$. Если мы примѣнимъ теперь общій методъ, полагая $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=t$, то предыдущій интегралъ обратится въ

$$\int\frac{2\,dt}{\rho+c+(c-\rho)t^2}.$$

Вычисленіе легко можно довести до конца, и мы получимъ двѣ различныхъ начальныхъ функціи въ зависимости отъ знака выраженія

$$\rho^2-c^2=a^2+b^2-c^2.$$

Интегралъ

$$\int\frac{m\cos x+n\sin x+p}{a\cos x+b\sin x+c}\,dx$$

приводится къ предыдущему. Положимъ, для краткости, $u=a\cos x+b\sin x+c$ и опредѣлимъ три постоянныхъ λ, μ, ν такимъ образомъ, чтобы было тождественно

$$m\cos x+n\sin x+p=\lambda u+\mu\frac{du}{dx}+\nu.$$

Для этого нужно рѣшить три уравненія

$$m=\lambda a+\mu b,\quad n=\lambda b-\mu a,\quad p=\lambda c+\nu,$$

изъ которыхъ два первыхъ даютъ λ и μ. При такомъ выборѣ постоянныхъ разсматриваемый интегралъ обращается въ

$$\int\frac{\lambda u+\mu\frac{du}{dx}+\nu}{u}\,dx=\lambda x+\mu\log u+\nu\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}.$$

Примѣръ. — Вычислимъ опредѣленный интегралъ

$$\int_0^\pi\frac{dx}{1+e\cos x},\quad \text{гдѣ}\quad |e|<1.$$

Разсматривая сначала неопредѣленный интегралъ, получимъ, полагая послѣдовательно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, и $t=u\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$,

$$\int\frac{dx}{1+e\cos x}=2\int\frac{dt}{1+e+(1-e)t^2}=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\int\frac{du}{1+u^2}.$$

Слѣдовательно, неопредѣленный интегралъ равенъ

$$\frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

При измѣненіи x отъ 0 до π, $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$, и arc tg измѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$; поэтому искомый опредѣленный интегралъ равенъ $\frac{\pi}{\sqrt{1-e^2}}$.

115. Формулы приведенія. — При вычисленіи нѣкоторыхъ классовъ интеграловъ можно также пользоваться формулами приведенія. Напримѣръ, формула производной отъ $\operatorname{tg}^{n-1} x$ можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{n-1} x) = (n-1)\operatorname{tg}^{n-2} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x);$$

отсюда имѣемъ

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx.$$

Здѣсь показатель при $\operatorname{tg} x$ подъ знакомъ интеграла уменьшился на двѣ единицы. Поступая такимъ же образомъ далѣе, мы придемъ къ одному изъ двухъ интеграловъ

$$\int dx = x, \quad \int \operatorname{tg} x\,dx = -\log(\cos x).$$

Такая же формула приведенія существуетъ и для интеграловъ $\int \operatorname{ctg}^n x\,dx$,

$$\int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx.$$

Разсмотримъ болѣе общій интегралъ

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

гдѣ m и n — два какихъ-нибудь цѣлыхъ положительныхъ или отрицательныхъ числа. Если одно изъ этихъ чиселъ нечетное, то удобно воспользоваться одною изъ вышеуказанныхъ замѣнъ перемѣннаго. Если, напримѣръ, $n=2p+1$, то, полагая $\sin x = t$, мы придемъ къ вычисленію интеграла $\int t^m (1-t^2)^p\,dt$. Поэтому ограничимся тѣмъ случаемъ, когда m и n оба четные, т.-е. интегралами вида

$$I_{m,n} = \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx.$$

Этотъ интегралъ можно представить въ видѣ

$$I_{m,n}=\int \sin^{2m-1}x\cos^{2n}x\sin x\,dx;$$

разсматривая $\cos^{2n}x\sin x\,dx$, какъ дифференціалъ отъ $\frac{-1}{2n+1}\cos^{2n+1}x$ и интегрируя по частямъ, получимъ

$$I_{m,n}=-\sin^{2m-1}x\frac{\cos^{2n+1}x}{2n+1}+\frac{2m-1}{2n+1}\int \sin^{2m-2}x\cos^{2n}x\,(1-\sin^2x)\,dx,$$

или

$$I_{m,n}=-\frac{\sin^{2m-1}x\cos^{2n+1}x}{2(m+n)}+\frac{2m-1}{2(m+n)}\,I_{m-1,n}. \qquad (A)$$

Эта формула позволяетъ уменьшить первый показатель m, не уменьшая второго. Если m отрицательно, то, рѣшая уравненіе (A) относительно $I_{m-1,n}$ и замѣняя m черезъ $1-m$, получимъ аналогичную формулу

$$I_{-m,n}=\frac{\sin^{1-2m}x\cos^{2n+1}x}{1-2m}+\frac{2(n-m+1)}{1-2m}\,I_{1-m,n}. \qquad (B)$$

Такія же формулы мы имѣемъ и для пониженія показателя при $\cos x$

$$I_{m,n}=\frac{\sin^{2m+1}x\cos^{2n-1}x}{2(m+n)}+\frac{2n-1}{2(m+n)}\,I_{m,n-1}, \qquad (C)$$

$$I_{m,-n}=-\frac{\sin^{2m+1}x\cos^{1-2n}x}{1-2n}+\frac{2(m+1-n)}{1-2n}\,I_{m,-n+1}. \qquad (D)$$

Примѣняя эти формулы должное число разъ, мы можемъ привести каждое изъ чиселъ m и n къ нулю. Мы не могли бы довести преобразованіе до конца по этимъ формуламъ только въ томъ случаѣ, если бы мы пришли къ интегралу $I_{m,n}$, въ которомъ $m+n=0$, т.-е. къ одному изъ интеграловъ, для которыхъ формула приведенія была выведена въ началѣ этого параграфа.

116. Формула Уэллиса. — Для приведенія интеграловъ, подобныхъ предыдущимъ, существуютъ также формулы и независящія отъ того, будетъ ли m и n четными или нечетными.

Вычислимъ, напримѣръ, опредѣленный интегралъ

$$I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx$$

гдѣ m — цѣлое положительное число. Интегрируя по частямъ, получимъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \sin x\, dx = -\left[\cos x \sin^{m-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \cos^2 x\, dx;$$

такъ какъ на обоихъ предѣлахъ $\cos x \sin^{m-1} x$ обращается въ нуль, то

$$I_m = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,(1-\sin^2 x)\, dx = (m-1)(I_{m-2} - I_m).$$

Отсюда имѣемъ рекуррентную формулу

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}. \qquad (13)$$

Продолжая такимъ образомъ, мы придемъ при m четномъ къ интегралу $I_0 = \frac{\pi}{2}$, а при m нечетномъ къ интегралу $I_1 = 1$. Разсмотримъ первый случай, $m = 2p$; полагая въ формулѣ (13) послѣдовательно $m = 2, 4, 6, \ldots 2p$, получимъ

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0, \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2, \quad \ldots, \quad I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2};$$

умножая почленно всѣ эти равенства, найдемъ

$$I_{2p} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p} \frac{\pi}{2}.$$

Точно также будемъ имѣть

$$I_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p+1)}.$$

Отсюда можно вывести любопытную формулу, данную Уэллисомъ (Wallis). Ясно, что интегралъ I_m уменьшается съ возрастаніемъ m, такъ какъ $\sin^{m+1} x$ меньше, чѣмъ $\sin^m x$; поэтому мы имѣемъ

$$I_{2p+1} < I_{2p} < I_{2p-1}.$$

Замѣняя I_{2p+1}, I_{2p}, I_{2p-1} ихъ предыдущими значеніями и полагая, для краткости,

$$H_p = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2p-2}{2p-1} \cdot \frac{2p}{2p-1},$$

получимъ два новыхъ неравенства

$$H_p > \frac{\pi}{2} > H_p \frac{2p}{2p+1}.$$

Такимъ образомъ при неограниченномъ возрастаніи p отношеніе $\frac{\pi}{2H_p}$ имѣетъ предѣломъ единицу, т.-е. число $\frac{\pi}{2}$ есть предѣлъ произведенія H_p при неограниченномъ возрастаніи числа множителей. Законъ составленія множителей этого произведенія очевиденъ.

117. Интегралы $\int \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\ldots dx$. — Разсмотримъ произведеніе нѣкотораго числа множителей вида $\cos(ax+b)$, гдѣ a и b — постоянныя, причемъ одинъ и тотъ же множитель можетъ входить въ произведеніе нѣсколько разъ. Формула

$$\cos u \cos v = \frac{\cos(v+u)}{2} + \frac{\cos(u-v)}{2}$$

позволяетъ замѣнить произведеніе двухъ множителей этого вида суммою двухъ косинусовъ линейныхъ функцій отъ x; слѣдовательно, произведеніе изъ n множителей замѣнится суммою двухъ произведеній изъ $(n-1)$ множителей. Примѣняя эту формулу достаточное число разъ, мы замѣнимъ данное произведеніе суммою вида $\Sigma H\cos(Ax+B)$, каждый членъ которой интегрируется непосредственно. Если A не равно нулю, то

$$\int \cos(Ax+B)\,dx = \frac{\sin(Ax+B)}{A} + C;$$

если же $A=0$, то $\int \cos B\,dx = x\cos B + C$.

Въ частности, это преобразованіе примѣнимо къ произведеніямъ вида

$$\cos^m x \sin^n x,$$

гдѣ m и n — два цѣлыхъ положительныхъ числа. Въ самомъ дѣлѣ, это произведеніе можно представить въ видѣ

$$\cos^m x \cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right);$$

примѣняя предыдущій пріемъ, мы замѣнимъ послѣднее произведеніе суммою синусовъ и косинусовъ кратныхъ дугъ, и интегрированіе выполнится непосредственно.

Пусть, напримѣръ, требуется вычислить площадь кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Положимъ $x=a\cos^3\theta, y=b\sin^3\theta$; мы получимъ всю кривую, измѣняя θ отъ 0 до 2π.

Формула для площади замкнутой кривой

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{(C)} x\,dy - y\,dx$$

обращается въ этомъ случаѣ въ

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \frac{3ab}{2} \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta;$$

но

$$(\sin\theta\cos\theta)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta),$$

и, слѣдовательно, искомая площадь $\mathcal{A}$ равна

$$\mathcal{A} = \frac{3ab}{16}\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi ab}{8}.$$

Въ частности, мы имѣемъ слѣдующіе интегралы

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C,$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\,dx = -\frac{3\cos x}{4} + \frac{\cos 3x}{12} + C,$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8}\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C,$$

. . . . . .

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C,$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\,dx = \frac{3\sin x}{4} + \frac{\sin 3x}{12} + C,$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \int \frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8}\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C,$$

. . . . . .

Относительно этихъ формулъ можно отмѣтить одинъ общій законъ. Интегралы $F(x) = \int_0^x \sin^n x\,dx$ и $\Phi(x) = \int_0^x \cos^n x\,dx$ при n нечетномъ — періодическіе и имѣютъ періодъ 2π; если же n четное, то при возрастаніи x на 2π эти интегралы увеличиваются на постоянное положительное количество. Это свойство можно было предвидѣть заранѣе; въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$F(x+2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx + \int_{2\pi}^{2\pi+x} \sin^n x\,dx,$$

или, вслѣдствіе періодичности $\sin x$,

$$F(x+2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx + \int_0^x \sin^n x\,dx = F(x) + \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx.$$

Если n — четное, то интегралъ, $\int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx$ есть, очевидно, положительное количество; если же n — нечетное, то этотъ инте-

гралъ равенъ нулю, какъ это слѣдуетъ изъ соотношенія $\sin(x+\pi) = -\sin x$.

Примѣчаніе. — Вслѣдствіе большого разнообразія преобразованій, допускаемыхъ тригонометрическими функціями, послѣдними часто бываетъ удобно пользоваться при вычисленіи интегралов. Такъ, возвратимся къ интегралу $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; полагая въ немъ $x = \operatorname{tg}\varphi$, мы обратимъ его въ $\int \cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi + C$ и, возвращаясь къ перемѣнному x, придемъ къ найденной ранѣе (§ 105) формулѣ

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

118. Интегралы $\int R(x)\, e^{\omega x}\, dx$. — Разсмотримъ теперь интегралы вида $\int R(x)\, e^{\omega x}\, dx$, гдѣ $R(x)$ — раціональная функція отъ x. Предположимъ, что мы разложили функцію $R(x)$, какъ мы это уже неоднократно дѣлали,

$$R(x) = E(x) + \frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2^2} + \cdots + \frac{A_p}{X_p^p},$$

гдѣ $E(x)$, A_1, A_2, ..., A_p, X_1, ..., X_p — многочлены, и каждый многочленъ X_i — первый съ своею производною. Данный интегралъ будетъ равенъ интегралу $\int E(x)\, e^{\omega x}\, dx$, сложенному съ суммою интегралов вида

$$\int \frac{A\, e^{\omega x}\, dx}{X^n}.$$

Первый интегралъ можно вычислить послѣдовательными интегрированіями по частямъ (§ 85); что же касается интегралов $\int \frac{A e^{\omega x}\, dx}{X^n}$, то при n большемъ единицы къ нимъ можно примѣнить формулу приведенія. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ многочленъ X — первый съ своею призводною, то можно найти два такихъ многочлена λ, μ, чтобы было тождественно $A = \lambda X + \mu X'$; отсюда мы получимъ

$$\int \frac{A\, e^{\omega x}\, dx}{X^n} = \int \frac{\lambda\, e^{\omega x}\, dx}{X^{n-1}} + \int \frac{\mu X' e^{\omega x}}{X^n}\, dx$$

Затѣмъ, интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int \mu e^{\omega x} \frac{X'\,dx}{X^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{\mu e^{\omega x}}{X^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{e^{\omega x}(\mu' + \mu\omega)}{X^{n-1}}\,dx,$$

и, соединяя обѣ формулы, мы видимъ, что вычисленіе разсматриваемаго интеграла приведено къ вычисленію интеграла того же вида, но въ которомъ показатель n уменьшенъ на единицу. Поступая далѣе такимъ же образомъ, мы придемъ къ интегралу

$$\int \frac{Be^{\omega x}}{X}\,dx,$$

въ которомъ всегда можно предположить, что многочленъ B первый съ многочленомъ X, и что степень многочлена B ниже степени многочлена X. Къ полученному интегралу этотъ способъ приведенія болѣе не примѣнимъ; но если корни уравненія $X=0$ извѣстны, то этотъ интегралъ можно привести только къ одной новой трансцендентной функціи. Предположимъ, для опредѣленности, что всѣ корни многочлена X дѣйствительны; въ этомъ случаѣ интегралъ разлагается на нѣсколько интеграловъ вида

$$\int \frac{\alpha e^{\omega x}}{x-a}\,dx.$$

Отбрасывая постоянный множитель, мы можемъ привести этотъ интегралъ посредствомъ подстановокъ

$$x = a + \frac{y}{\omega},\quad u = e^y$$

къ одному изъ двухъ слѣдующихъ видовъ

$$\int \frac{e^y\,dy}{y},\quad \int \frac{du}{\log u}.$$

Послѣдній интегралъ $\int \frac{du}{\log u}$ представляетъ новую трансцендентную функцію, называемую **интегральнымъ логариѳмомъ**.

119. Разные интегралы. — Разсмотримъ еще интегралы

$$\int e^{ax} f(\sin x, \cos x)\,dx,$$

гдѣ f — **цѣлая** функція отъ $\sin x$ и $\cos x$. Каждый членъ этого интеграла имѣетъ видъ

$$\int e^{ax} \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

гдѣ m и n — цѣлыя положительныя числа. На основаніи сдѣланныхъ выше замѣчаній произведеніе $\sin^m x \cos^n x$ можетъ быть замѣнено суммою синусовъ и косинусовъ кратныхъ дугъ, и такимъ образомъ намъ нужно разсмотрѣть только два слѣдующихъ типа интеграловъ

$$\int e^{ax} \cos b\,x\,dx, \quad \int e^{ax} \sin b\,x\,dx.$$

Интегрируя эти интегралы по частямъ, получимъ

$$\int e^{ax} \cos b\,x\,dx = \frac{e^{ax} \sin b\,x}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax} \sin b\,x\,dx,$$
$$\int e^{ax} \sin b\,x\,dx = -\frac{e^{ax} \cos b\,x}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos b\,x\,dx;$$

отсюда имѣемъ

$$\int e^{ax} \cos b\,x\,dx = \frac{e^{ax}(a \cos b\,x + b \sin b\,x)}{a^2+b^2},$$
$$\int e^{ax} \sin b\,x\,dx = \frac{e^{ax}(a \sin b\,x - b \cos b\,x)}{a^2+b^2}.$$

Изъ интеграловъ, приводимыхъ къ предыдущимъ, мы укажемъ еще на слѣдующіе

$$\int f(\log x)\,x^m\,dx, \qquad \int f(\arcsin x)\,dx,$$
$$\int f(x) \arcsin x\,dx, \qquad \int f(x) \operatorname{arc\,tg} x\,dx,$$

гдѣ f обозначаетъ цѣлую функцію. Если въ двухъ первыхъ примемъ за новое перемѣнное $\log x$ и $\arcsin x$, а въ двухъ послѣднихъ примѣнимъ формулу интегрированія по частямъ, разсматривая $f(x)\,dx$, какъ дифференціалъ отъ нѣкотораго многочлена $F(x)$, то придемъ къ уже разсмотрѣннымъ видамъ интеграловъ.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Вычислить неопредѣленные интегралы отъ слѣдующихъ функцій

$$\frac{1}{(x^4+1)^2}, \quad \frac{1}{x(x^3+1)^3}, \quad \frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}, \quad \frac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}},$$
$$\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{1+\sqrt[3]{1+x}}{1-\sqrt[3]{1+x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x(x+1)}}, \quad \frac{x}{\cos^2 x},$$
$$x e^x \cos x, \quad \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{a+x^{n+2}}}, \quad x^{\frac{p}{q}} \operatorname{arc\,tg} x.$$

2. Найти площадь петли Декартова листа

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

3. Вычислить интегралъ $\int y\,dx$, гдѣ x и y связаны однимъ изъ соотношеній

$$(x^2-a^2)^2-ay^2(2y+3a)=0, \quad y^2(a-x)=x^3,$$
$$y(x^2+y^2)=a(y^2-x^2).$$

4. Вывести формулы

$$\int \sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}+C,$$
$$\int \sin^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=\frac{\sin^n x\sin nx}{n}+C,$$
$$\int \cos^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx=\frac{\cos^n x\sin nx}{n}+C,$$
$$\int \cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=-\frac{\cos^n x\cos nx}{n}+C.$$

[Эйлеръ.]

5. Вычислить псевдо-эллиптическіе интегралы

$$\int\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}, \quad \int\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

6. Привести къ эллиптическимъ интеграламъ интегралы

$$\int\frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a(1+x^6)+bx(1+x^4)+cx^2(1+x^2)+dx^3}},$$
$$\int\frac{R(x)\,dx}{\sqrt{a(1+x^8)+bx^2(1+x^4)+cx^4}},$$

гдѣ $R(x)$ — раціональная функція.

7*. Пусть будутъ a, b, c, d корни уравненія четвертой степени $P(x)=0$. Существуютъ три инволюціонныхъ соотношенія (§ 112)

$$x'=-\frac{M_i x''+N_i}{L_i x''+M} \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

перемѣщающихъ эти корни попарно. Если раціональная функція $f(x)$ такова, что мы имѣемъ тождественно

$$f(x)+\sum_{i=1}^{3} f\left(-\frac{M_i x+N_i}{L_i x+M_i}\right)=0,$$

то интегралъ $\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ — псевдо-эллиптическій (см. Bulletin de la Société mathématique, т. XV, стр. 106).

8. Спрямленіе кривыхъ $y=Ax^\mu$ приводитъ къ интеграламъ отъ дифференціальныхъ биномовъ. Изслѣдовать случаи интегрируемости.

9. Полагая $a>1$, имѣемъ

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Вывести отсюда опредѣленные интегралы

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,\pi.$$

10. Предполагая $AC-B^2>0$, имѣемъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\,\pi\,\frac{A^{n-1}}{(AC-B^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Слѣдуетъ примѣнить формулу приведенія § 104.

11. Вычислить опредѣленный интегралъ $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{1+2a\cos x+a^2}$.

12. Вывести формулы

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\log\left(\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}\right), \quad \alpha\beta>0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)\,dx}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{2-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}.$$

13*. Обозначая черезъ m и n два цѣлыхъ положительныхъ числа ($m<n$), имѣемъ

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Здѣсь слѣдуетъ воспользоваться разложеніемъ на элементарныя дроби.

14. Вывести изъ предыдущей формулы соотношеніе

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0<a<1).$$

15. Полагая $I_{p,q}=\int t^q(t+1)^p\,dt$, имѣемъ формулы приведенія

$$(p+q+1)\,I_{p,q} = t^{q+1}(t+1)^p + p\,I_{p-1,q},$$

$$(p-1)\,I_{-p,q} = t^{q+1}(t+1)^{1-p} - (2+q-p)\,I_{-p+1,q},$$

и двѣ аналогичныхъ формулы для пониженія показателя q.

16. Вывести формулы приведенія для интеграловъ

$$I_n = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}, \qquad Z_m = \int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}.$$

17*. Вывести формулу приведенія для опредѣленныхъ интеграловъ $\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Вывести отсюда для опредѣленнаго интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ формулу, аналогичную формулѣ Уэллиса.

18. Имѣетъ ли опредѣленный интегралъ

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$$

конечное значеніе?

19. Доказать, что площадь эллиптическаго сектора, заключающагося между фокальною осью и радіусомъ векторомъ, выходящимъ изъ фокуса, имѣетъ выраженіе

$$\mathcal{A}=\frac{p^2}{2}\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{(1+e\cos\omega)^2},$$

гдѣ $p=\frac{b^2}{a}$ обозначаетъ параметръ эллипса и e — эксцентрицитетъ. Полагая, по общему способу, $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=t$, $t=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,u$, получимъ

$$\mathcal{A}=ab\left(\operatorname{arc\,tg}u-e\frac{u}{1+u^2}\right).$$

Показать, что это выраженіе можетъ быть также представлено въ видѣ

$$\mathcal{A}=\frac{ab}{2}(\varphi-e\sin\varphi),$$

гдѣ φ обозначаетъ эксцентрическую аномалію.

20. Найти такія кривыя, для которыхъ длина NT или площадь треугольника MNT были бы постоянны (см. черт. 3, стр. 35). Построить обѣ вѣтви кривой.

21*. Пусть будетъ

$$A_n=\frac{x^{2n+1}}{2.4.6\ldots 2n}\int_0^1(1-z^2)^n\cos xz\,dz.$$

Вывести рекуррентную формулу

$$A_{n+1}=(2n+1)A_n-x\frac{dA_n}{dx}.$$

Вывести отсюда формулы

$$A_{2p}=U_{2p}\sin x+V_{2p}\cos x,$$
$$A_{2p+1}=U_{2p+1}\sin x+V_{2p+1}\cos x,$$

гдѣ U_{2p}, V_{2p}, U_{2p+1}, V_{2p+1} — многочлены съ цѣлыми коэффиціентами, и U_{2p}, U_{2p+1} содержатъ только четныя степени перемѣннаго x. Провѣривъ справедливость этого закона при $n=1$, затѣмъ легко убѣдиться, при помощи рекуррентной формулы, что онъ имѣетъ общій характеръ.

Воспользовавшись предыдущимъ выраженіемъ для A_{2p}, можно доказать несоизмѣримость числа π^2. Въ самомъ дѣлѣ, если бы было $\frac{\pi^2}{4}=\frac{b}{a}$, то, замѣняя въ A_{2p} количество x черезъ $\frac{\pi}{2}$, мы получили бы соотношеніе вида

$$H_1=a^p\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{2p}}{2.4.6\ldots 4p}\int_0^1(1-z^2)^{2p}\cos\frac{\pi z}{2}\,dz,$$

гдѣ H_1 — цѣлое число. Но такое равенство невозможно, такъ какъ при неограниченномъ возрастаніи p правая часть стремится къ нулю.

ГЛАВА VI.

Двойные интегралы.

I. — ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. — СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНІЯ. — ФОРМУЛА ГРИНА.

120. Непрерывныя функціи двухъ перемѣнныхъ. — Пусть будетъ $z=f(x,y)$ функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, непрерывная внутри части плоскости A, ограниченной замкнутымъ контуромъ C, а также и на самомъ контурѣ. Для этой функціи можно установить рядъ предложеній, аналогичныхъ предложеніямъ, доказаннымъ для непрерывныхъ функцій одного перемѣннаго (§ 70). Такъ, если дано какое-нибудь положительное число ε, то можно разбить часть плоскости A на меньшія части такимъ образомъ, чтобы разность значеній z въ двухъ точкахъ (x,y), (x',y') одной и той же части была всегда меньше ε.

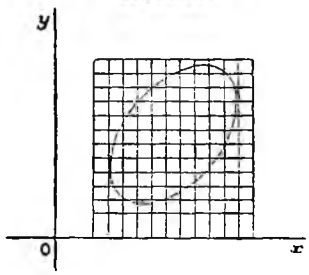
При доказательствѣ по прежнему мы будемъ примѣнять методъ послѣдовательныхъ подраздѣленій. Предположимъ, что часть плоскости A разбита на болѣе мелкія части прямыми, параллельными оси x и оси y, причемъ разстояніе между двумя сосѣднимъ параллельными прямыми равно δ. Среди этихъ частей области A однѣ будутъ квадратами и будутъ лежать вполнѣ внутри C, другія же будутъ частями квадратовъ, ограниченными съ внѣшней стороны частями контура C. Если бы теорема была невѣрна для части A, то она была бы также невѣрна, по крайней мѣрѣ, для одной изъ частей отъ A; назовемъ эту часть черезъ A_1. Подраздѣляя точно такимъ же образомъ часть A_1 и т. д., мы получимъ послѣдовательность квадратовъ или частей квадратовъ

$$A,\ A_1,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots,$$

для которыхъ теорема будетъ невѣрна. Часть A_n вся содержится между двумя прямыми $x=a_n$, $x=b_n$, параллельными оси Oy,

и между двумя прямыми $y=c_n$, $y=d_n$, параллельными оси Ox. При неограниченномъ возрастаніи n, a_n и b_n имѣютъ общій предѣлъ λ; точно также c_n и d_n имѣютъ общій предѣлъ μ; въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ, числа a_n никогда не убываютъ и всѣ меньше нѣкотораго постояннаго числа. Слѣдовательно, всѣ точки части A_n стремятся къ предѣльной точкѣ M съ координатами (λ, μ), расположенной внутри контура C или на самомъ контурѣ. Доказательство заканчивается такъ же, какъ и въ § 70: если бы наша теорема была невѣрна, то функція $f(x, y)$ не могла бы быть непрерывною при $x=\lambda$, $y=\mu$, что противно допущенію.

Черт. 23.



Слѣдствіе. — Предположимъ, что мы взяли параллельныя прямыя настолько близкими, чтобы разность значеній ε въ двухъ точкахъ, принадлежащихъ одному и тому же промежутку, была по абсолютному значенію меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, и пусть будетъ η разстояніе между двумя сосѣдними параллельными прямыми. Пусть будутъ, далѣе, (x, y), (x', y') двѣ точки внутри контура C или на самомъ контурѣ, разстояніе между которыми меньше η. Эти двѣ точки будутъ лежать или въ одной и той же части области A, или въ двухъ различныхъ частяхъ, но съ общею вершиною; въ обоихъ случаяхъ разность

$$f(x, y)-f(x', y')$$

не можетъ быть по абсолютному значенію больше $2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Слѣдовательно, для всякаго положительнаго числа ε можно найти такое соотвѣтствующее положительное число η, чтобы было

$$|f(x, y)-f(x', y')|<\varepsilon$$

всякій разъ, какъ разстояніе между двумя точками (x, y) и (x', y'), взятыми въ A или на контурѣ C, будетъ меньше η. Другими словами, всякая функція, непрерывная въ A, есть равномѣрно непрерывная.

Какъ и выше (§ 70), изъ предыдущаго предложенія можно вывести, что всякая функція, непрерывная въ A, вмѣстѣ съ тѣмъ непремѣнно и конечна въ A. Пусть будутъ

M — верхній предѣлъ и m — нижній предѣлъ функціи z въ области A; разность $\Delta = M - m$ называется колебаніемъ функціи. Пользуясь способомъ послѣдовательныхъ подраздѣленій, можно доказать, что функція достигаетъ по крайней мѣрѣ одинъ разъ каждаго изъ значеній M и m въ точкахъ, лежащихъ внутри контура C или на самомъ этомъ контурѣ. Пусть будетъ a точка, въ которой $z = m$, и b — точка, въ которой $z = M$. Соединимъ a и b ломаною линіею, лежащею всѣми своими точками внутри C. Когда точка (x, y) описываетъ эту линію, z будетъ непрерывною функціею разстоянія точки (x, y) отъ точки a; слѣдовательно, z проходитъ по крайней мѣрѣ одинъ разъ черезъ всякое значеніе μ, заключающееся между m и M (§ 70). Такъ какъ между точками a и b можно провести безчисленное множество ломаныхъ линій, то мы видимъ, что функція $f(x, y)$ принимаетъ каждое изъ значеній μ, заключающихся между m и M, въ безконечномъ числѣ точекъ, лежащихъ внутри контура C.

Для краткости мы будемъ говорить, что конечная часть плоскости A по всѣмъ своимъ размѣрамъ меньше, чѣмъ l, если можно найти кругъ радіуса l, содержащій внутри себя всю часть плоскости A. Перемѣнная часть плоскости называется безконечно малою во всѣхъ своихъ размѣрахъ, если можно найти кругъ произвольно малаго радіуса, содержащій внутри себя эту часть плоскости. Напримѣръ, квадратъ со сторонами, стремящимися къ нулю, или эллипсъ, обѣ оси котораго стремятся къ нулю, будутъ безконечно малы во всѣхъ своихъ размѣрахъ. Напротивъ, прямоугольникъ, у котораго только одна пара сторонъ стремится къ нулю, или эллипсъ, у котораго стремится къ нулю только одна ось, не будутъ безконечно малыми во всѣхъ своихъ размѣрахъ.

121. Двойные интегралы. — Разобьемъ произвольнымъ образомъ часть плоскости A на меньшія части $a_1, a_2, \ldots, a_n$; пусть будетъ ω_i площадь части a_i, и M_i, m_i — предѣлы функціи $f(x, y)$ въ этой части a_i. Разсмотримъ суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} \omega_i M_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i m_i;$$

каждому подраздѣленію A соотвѣтствуютъ такимъ образомъ высшая сумма S и низшая сумма s. Если Ω есть площадь части плоскости A, то всѣ суммы S, очевидно, больше $m\Omega$; слѣдовательно, онѣ имѣютъ нижній предѣлъ I. Точно также всѣ суммы s меньше $M\Omega$; слѣдовательно, онѣ имѣютъ верхній предѣлъ I'.

Кромѣ того, каждая изъ высшихъ суммъ S больше каждой изъ низшихъ суммъ s (доказательство такое же, какъ въ § 71). Поэтому мы имѣемъ

$$I \geqq I'.$$

Если функція $f(x, y)$ непрерывна, то при неограниченномъ уменьшеніи частичныхъ площадей во всѣхъ ихъ размѣрахъ суммы S и s имѣютъ общій предѣлъ. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что мы взяли такое положительное число η, что въ любой части области A, всѣ размѣры которой меньше η, колебаніе функціи будетъ меньше ε. Если всѣ части $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будутъ имѣть размѣры меньшія, чѣмъ η, то каждая изъ разностей $M_i - m_i$ будетъ меньше ε, и разность $S - s$ будетъ сама меньше $\varepsilon\Omega$, гдѣ Ω — вся площадь части плоскости A. Но мы имѣемъ

$$S - s = S - I + I - I' + I' - s,$$

и ни одно изъ чиселъ $S - I$, $I - I'$, $I' - s$ не можетъ быть отрицательнымъ. Слѣдовательно, въ частности, должно быть $I - I' < \varepsilon\Omega$, и, такъ какъ ε есть произвольно малое положительное число, то должно быть $I' = I$. Взявъ ε достаточно малымъ, мы можемъ всѣ разности $S - I$, $I - s$ сдѣлать меньшими всякаго заданнаго числа; слѣдовательно, суммы S и s имѣютъ общій предѣлъ I. Этотъ предѣлъ называется *двойнымъ интеграломъ* отъ функціи $f(x, y)$, распространеннымъ на площадь A. Двойной интегралъ обозначается символомъ

$$I = \int\int_{(A)} f(x, y)\, dx\, dy;$$

часть плоскости A называется *областью интегрированія*.

Пусть будетъ (ξ_i, η_i) какая-нибудь точка внутри части a_i или на ея контурѣ. Очевидно, что сумма $\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\, \omega_i$ заключается между суммами S и s; слѣдовательно, какимъ бы образомъ мы ни выбирали точки (ξ_i, η_i), эта сумма также будетъ имѣть предѣломъ двойной интегралъ.

Первая теорема о среднемъ значеніи можетъ быть легко распространена на двойные интегралы. Пусть будутъ $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ непрерывныя функціи, изъ которыхъ одна, $\varphi(x, y)$, сохраняетъ въ области A постоянный знакъ; предположимъ, напримѣръ, что $\varphi(x, y) > 0$. Если M и m будутъ предѣлами функціи $f(x, y)$ въ области A, то ясно, что

$$M\varphi(\xi_i, \eta_i)\, \omega_i \geqq f(\xi_i, \eta_i)\, \varphi(\xi_i, \eta_i)\, \omega_i \geqq m\varphi(\xi_i, \eta_i)\, \omega_i;$$

складывая всѣ подобныя неравенства и переходя къ предѣлу, получимъ

$$\int\int_{(A)} f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = \mu \int\int_{(A)} \varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

гдѣ μ заключается между M и m. Такъ какъ функція $f(x, y)$ непрерывна, то она приметъ значеніе μ въ нѣкоторой точкѣ (ξ, η), лежащей внутри контура C, и мы можемъ написать

$$\int\int_{(A)} f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta) \int\int_{(A)} \varphi(x, y)\,dx\,dy. \quad (1)$$

Это — формула средняго значенія для двойного интеграла. Если, напримѣръ, $\varphi(x, y) = 1$, то интегралъ $\int\int dx\,dy$, распространенный на часть плоскости A, очевидно, равенъ площади Ω этой части плоскости, и формула (1) обращается въ

$$\int\int_{(A)} f(x, y)\,dx\,dy = \Omega f(\xi, \eta). \quad (2)$$

122. Объемы. — Съ аналитическимъ понятіемъ двойного интеграла связано важное геометрическое понятіе объема. Пусть будетъ $f(x, y)$ функція, непрерывная внутри замкнутаго контура C и на самомъ контурѣ; кромѣ того, мы предположимъ, для опредѣленности, что эта функція всегда положительна. Пусть будетъ S поверхность, представляемая уравненіемъ $z = f(x, y)$, и ограниченная кривою Γ, ортогональная проекція которой на плоскость xy есть контуръ C. Обозначимъ черезъ E часть пространства, ограниченную плоскостью xy, поверхностью S и прямымъ цилиндромъ, опирающимся на контуръ C. Разобьемъ произвольнымъ образомъ часть A плоскости xy, расположенную внутри контура C, на меньшія части; пусть будетъ a_i одна изъ этихъ частей, ограниченная контуромъ c_i, и обозначимъ площадь этой части черезъ ω_i. Прямой цилиндръ, опирающійся на кривую c_i, отсѣчетъ на поверхности S часть s_i, ограниченную нѣкоторою кривою γ_i. Пусть будутъ p_i и P_i точки части s_i поверхности, разстояніе которыхъ отъ плоскости $z = 0$ соотвѣтственно наибольшее и наименьшее. Проведя черезъ эти точки двѣ плоскости параллельно плоскости $z = 0$, мы получимъ два прямыхъ цилиндра съ общимъ основаніемъ ω_i, высоты которыхъ будутъ равны соотвѣтственно предѣламъ m_i и M_i функціи $f(x, y)$ внутри контура c_i.

Объемы V_i и v_i*) этихъ двухъ цилиндровъ соотвѣтственно равны $\omega_i M_i$ и $\omega_i m_i$. Слѣдовательно, суммы S и s, разсмотрѣнныя въ предыдущемъ параграфѣ, представляютъ соотвѣтственно суммы ΣV_i и Σv_i этихъ двухъ системъ цилиндровъ. Мы будемъ называть о б ъ е м о м ъ части E пространства общій предѣлъ, къ которому стремятся обѣ эти суммы. Такъ же, какъ и въ случаѣ площади (§ 78), можно замѣтить, что это опредѣленіе находится въ полномъ согласіи съ обычнымъ представленіемъ объ объемѣ.

Если поверхность S будетъ расположена частью подъ плоскостью xy, то и въ этомъ случаѣ двойной интегралъ будетъ выражать объемъ, если только мы условимся брать со знакомъ — объемы частей пространства, находящихся подъ плоскостью xy. Такимъ образомъ мы видимъ, что каждый двойной интегралъ представляетъ алгебраическую сумму объемовъ, подобно тому какъ простой интегралъ представляетъ алгебраическую сумму площадей. Предѣлы простого интеграла замѣняются здѣсь контуромъ, ограничивающимъ область интегрированія.

123. Вычисленіе двойного интеграла. — Вычисленіе двойного интеграла приводится къ послѣдовательному вычисленію двухъ простыхъ интеграловъ. Разсмотримъ сначала случай, когда область интегрированія есть прямоугольникъ R, ограниченный прямыми $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$, гдѣ $x_0<X$, $y_0<Y$. Разобьемъ этотъ прямоугольникъ прямыми $x=x_i, y=y_k$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, m$), параллельными осямъ координатъ, на меньшіе прямоугольники. Площадь элементарнаго прямоугольника R_{ik}, ограниченнаго прямыми $x=x_{i-1}$, $x=x_i$, $y=y_{k-1}$, $y=y_k$, равна

$$(x_i-x_{i-1})\ (y_k-y_{k-1}).$$

Слѣдовательно, искомый опредѣленный интегралъ есть предѣлъ суммы

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_{ik}, \eta_{ik})(x_i-x_{i-1})(y_k-y_{k-1}), \qquad (3)$$

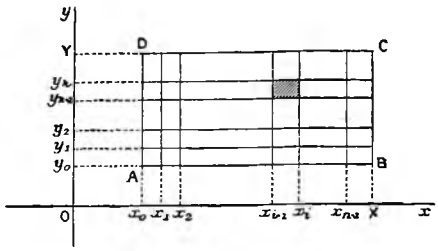
гдѣ (ξ_{ik}, η_{ik}) — координаты любой точки, взятой внутри или на сторонахъ прямоугольника R_{ik}.

---

*) Разсмотримъ прямую призму, имѣющую высотою высоту цилиндра, а основаніемъ — многоугольникъ, вписанный въ основаніе этого цилиндра. О б ъ е м о м ъ п р я м о г о ц и л и н д р а мы называемъ предѣлъ, къ которому стремится объемъ такой призмы при неограниченномъ увеличеніи числа сторонъ многоугольника.

Мы воспользуемся произволомъ въ выборѣ этихъ точекъ $(\xi_{ik}\,\eta_{ik})$ для упрощенія вычисленія. Для этого замѣтимъ, что если какая-нибудь функція $f(x)$ непрерывна въ промежуткѣ (a, b), и мы разобьемъ промежутокъ (a, b) на части произвольными точками дѣленія $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, то въ каждомъ промежуткѣ (x_{i-1}, x_i) можно выбрать такое значеніе ξ_i, чтобы было

Черт. 24.



$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(b-x_{n-1}); \quad (4)$$

для доказательства этого предложенія нужно только приложить къ каждому изъ промежутковъ (a, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{n-1}, b) формулу средняго значенія.

Часть суммы S, происходящая отъ ряда прямоугольниковъ, заключающихся между двумя прямыми $x=x_{i-1}$, $x=x_i$, равна

$$(x_i-x_{i-1})[f(\xi_{i1}, \eta_{i1})(y_1-y_0)+f(\xi_{i2}, \eta_{i2})(y_2-y_1)+\ldots \\ +f(\xi_{ik}, \eta_{ik})\,y_k-y_{k-1})+\ldots].$$

Положимъ $\xi_{i1}=\xi_{i2}=\ldots=\xi_{im}=x_{i-1}$ и возьмемъ $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots$ такимъ образомъ, чтобы сумма

$$f(x_{i-1}, \eta_{i1})(y_1-y_0)+f(x_{i-1}, \eta_{i2})(y_2-y_1)+\ldots$$

была равна опредѣленному интегралу $\int_{y_0}^{Y} f(x_{i-1}, y)\,dy$, гдѣ x_{i-1} разсматривается, какъ постоянное. Поступая такимъ образомъ со всѣми рядами прямоугольниковъ, заключающихся между двумя послѣдовательными прямыми, параллельными оси Oy, и полагая, для краткости,

$$\Phi(x)=\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dy,$$

получимъ

$$S=\Phi(x_0)(x_1-x_0)+\Phi(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+\Phi(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})+\ldots. \quad (5)$$

Функція $\Phi(x)$, представляемая опредѣленнымъ интеграломъ, въ которомъ x разсматривается, какъ параметръ, есть непрерывная функція отъ x; формула (5) показываетъ, что когда

всѣ промежутки $x_i - x_{i-1}$ стремятся къ нулю, то сумма S имѣетъ предѣломъ опредѣленный интегралъ

$$\int_{x_0}^{X} \Phi(x)\, dx.$$

Слѣдовательно, для искомаго двойного интеграла получаемъ

$$\iint_{(R)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy. \qquad (6)$$

Такимъ образомъ, для того чтобы проинтегрировать двойной интегралъ, должно сначала интегрировать функцію $f(x, y)$ между предѣлами y_0 и Y, разсматривая въ ней x, какъ постоянное, а y, какъ перемѣнное: полученный результатъ будетъ функціею одного перемѣннаго x, которую должно еще разъ проинтегрировать между предѣлами x_0 и X.

Произведя дѣйствіе въ обратномъ порядкѣ, т.-е. вычисляя сначала часть суммы S, происходящую отъ ряда прямоугольниковъ, заключающихся между двумя прямыми, параллельными оси Ox, мы нашли бы такимъ же образомъ

$$\iint_{(R)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx.$$

Изъ этихъ двухъ формулъ слѣдуетъ, что

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx.$$

Теорема, выражаемая этою формулою, носитъ названіе теоремы интегрированія подъ знакомъ интеграла. При доказательствѣ существенно предполагается, что предѣлы x_0, X, y_0, Y постоянны, и функція $f(x, y)$ непрерывна въ области интегрированія.

Примѣръ.— Пусть будетъ $z = \frac{xy}{a}$. По общей формулѣ имѣемъ

$$\iint_{(R)} \frac{xy}{a}\, dx\, dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \frac{xy}{a}\, dy$$

$$= \int_{x_0}^{X} \frac{x}{2a}(Y^2 - y_0^2)\, dx = \frac{1}{4a}(X^2 - x_0^2)(Y^2 - y_0^2).$$

Вообще, если функція $f(x, y)$ есть произведеніе функціи перемѣннаго x на функцію перемѣннаго y, то имѣемъ

$$\iint_{(R)} \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\, dx \times \int_{y_0}^{Y} \psi(y)\, dy,$$

причемъ оба интеграла въ правой части совершенно не зависятъ одинъ отъ другого.

Изъ этого замѣчанія Франклинъ (Franklin)*) вывелъ весьма простое доказательство одной интересной теоремы Чебышева. Пусть будутъ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функціи, непрерывныя въ промежуткѣ (a, b), гдѣ $a < b$. Двойной интегралъ

$$\iint [\varphi(x)-\varphi(y)]\,[\psi(x)-\psi(y)]\,dx\,dy,$$

распространенный на квадратъ, ограниченный прямыми $x=a$, $x=b$, $y=a$, $y=b$, равенъ разности

$$2(b-a)\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx - 2\int_a^b \varphi(x)\,dx \times \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Но всѣ элементы предыдущаго двойного интеграла сохраняютъ постоянный знакъ, если функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ всюду въ промежуткѣ (a, b) одновременно возрастаютъ или убываютъ; точно также всѣ элементы этого двойного интеграла сохраняютъ постоянный знакъ и въ томъ случаѣ, если одна изъ функцій всюду возрастаетъ, а другая — убываетъ. Въ первомъ случаѣ разности $\varphi(x)-\varphi(y)$ и $\psi(x)-\psi(y)$ имѣютъ всегда одинаковые знаки, а во второмъ — разные.

Слѣдовательно, если всюду въ промежуткѣ (a, b) функціи $\varphi(x), \psi(x)$ или обѣ возрастаютъ, или обѣ убываютъ, то мы имѣемъ

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx > \int_a^b \varphi(x)\,dx \times \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Если же одна изъ нихъ возрастаетъ, а другая убываетъ, то

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx < \int_a^b \varphi(x)\,dx \times \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Въ случаѣ $\varphi(x)=\psi(x)$ двойной интегралъ имѣетъ вполнѣ опредѣленный знакъ, такъ какъ подъинтегральная функція обращается въ точный квадратъ. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ при всякомъ видѣ функціи $\varphi(x)$

$$(b-a)\int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx \geqq \left[\int_a^b \varphi(x)\,dx\right]^2,$$

причемъ знакъ равенства имѣетъ мѣсто только въ томъ случаѣ, если $\varphi(x)$ равно постоянному.

Отсюда можно вывести рѣшеніе одной интересной задачи варіаціоннаго исчисленія. Пусть будутъ P и Q двѣ данныя точки плоскости съ координатами (a, A) и (b, B). Пусть будетъ, далѣе, $y=f(x)$ уравненіе линіи, соединяющей эти двѣ точки, причемъ предполагается, что функція $f(x)$ вмѣстѣ со своею производною $f'(x)$ непрерывна въ промежуткѣ (a, b). Требуется найти такую кривую $y=f(x)$, для которой интегралъ $\int_a^b y'^2\,dx$ былъ бы minimum. Замѣняя въ предыдущемъ неравенствѣ $\varphi(x)$ черезъ y' и замѣчая, что, по предположенію, $f(a)=A$ и $f(b)=B$, имѣемъ

$$(b-a)\int_a^b y'^2\,dx \geqq (B-A)^2.$$

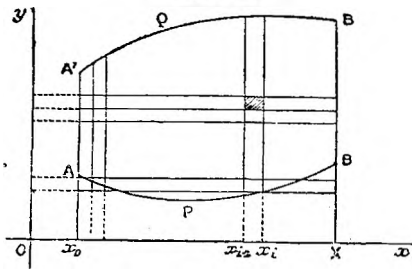
Слѣдовательно, наименьшее значеніе интеграла равно $\frac{(B-A)^2}{b-a}$,

*) American Journal of Mathematics, т. VII, стр. 77.

и интегралъ дѣйствительно достигаетъ этого значенія, если y' равно постоянному, т.-е. если линія, соединяющая разсматриваемыя точки, есть прямая линія PQ.

124. Перейдемъ теперь къ тому случаю, когда область интегрированія ограничена контуромъ произвольнаго вида. Предположимъ сначала, что прямая, параллельная Oy, встрѣчаетъ этотъ контуръ только въ двухъ точкахъ. Тогда можно предположить, что контуръ образованъ двумя прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ и двумя дугами кривыхъ APB, $A'QB'$, представляемыхъ уравненіями $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$, гдѣ функціи φ_1 и φ_2 непрерывны между a и b. Точка A можетъ совпадать съ точкою A', равно какъ и B съ B'; это будетъ, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда контуръ есть выпуклая кривая, какъ, напримѣръ, эллипсъ. Разобьемъ область интегрированія R на части прямыми, параллельными осямъ координатъ; мы получимъ, во-первыхъ, правильныя части, именно прямоугольники, расположенные внутри контура, и, во-вторыхъ, части неправильныя, т.-е. неполные прямоугольники, отчасти ограниченные дугами контура. Здѣсь намъ опять нужно искать предѣлъ суммы

Черт. 25.



$$\Sigma f(\xi,\eta)\,\omega,$$

гдѣ ω есть площадь любой изъ этихъ частей, а (ξ,η) — одна изъ точекъ этой части.

Вычислимъ сперва часть суммы S, происходящую отъ полосы, составленной изъ элементовъ, заключающихся между двумя послѣдовательными параллельными прямыми $x=x_{i-1}$, $x=x_i$. Между этими прямыми будутъ расположены прямоугольники, заключающіеся между ординатами $y'_1 \geqq y_1$ и $y'_2 \leqq y_2$, и, сверхъ того, неправильныя части. Выбирая надлежащимъ образомъ внутри каждаго прямоугольника точку (ξ,η), мы, какъ и прежде, найдемъ, что часть суммы S, происходящая отъ этихъ прямоугольниковъ, можетъ быть представлена въ видѣ

$$(x_i-x_{i-1})\int_{y'_1}^{y'_2} f(x_{i-1},y)\,dy$$

Предположимъ, что колебанія функцій φ_1, φ_2 въ каждомъ изъ промежутковъ (x_{i-1},x_i), а также и всѣ разности (y_k-y_{k-1}), будутъ меньше δ. Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ пло-

щадь неправильныхъ частей, заключающихся между $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$, будетъ меньше $4\delta(x_i - x_{i-1})$, и часть суммы S, происходящая отъ этихъ частей, будетъ по абсолютному значенію меньше $4H\delta(x_i - x_{i-1})$, гдѣ H есть верхній предѣлъ абсолютнаго значенія функціи $f(x, y)$ въ области интегрированія. Съ другой стороны, мы можемъ написать

$$\int_{y'_1}^{y'_2} f(x_{i-1}, y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x_{i-1}, y)\,dy + \int_{y'_1}^{y_1} + \int_{y_2}^{y'_2},$$

и, такъ какъ $|y_1 - y'_1|$ и $|y_2 - y'_2|$, по предположенію, меньше δ, то должно быть

$$\int_{y'_1}^{y'_2} f(x_{i-1}, y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x_{i-1}, y)\,dy + 4H\lambda\delta, \quad -1 < \lambda < +1.$$

Слѣдовательно, часть суммы S, происходящая отъ ряда разсматриваемыхъ элементовъ, можетъ быть представлена въ видѣ

$$(x_i - x_{i-1})\left[\int_{y_1}^{y_2} f(x_{i-1}, y)\,dy + 8H\theta_i\delta\right],$$

гдѣ θ_i содержится между -1 и $+1$. Сумма $8H\delta\Sigma\theta_i(x_i - x_{i-1})$ по абсолютному значенію меньше $8H\delta(b-a)$, и, такъ какъ δ можно предположить сколь угодно малымъ, то она стремится къ нулю. Такимъ образомъ двойной интегралъ есть предѣлъ суммы

$$\Phi(a)(x_1 - a) + \ldots + \Phi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \ldots,$$

гдѣ

$$\Phi(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy,$$

и мы получаемъ

$$\int\int_{(R)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy. \qquad (7)$$

Выполняя первое интегрированіе по y, мы должны разсматривать x, какъ постоянное; но здѣсь предѣлы y_1 и y_2 уже не являются, вообще, постоянными, а будутъ опредѣленными функціями перемѣннаго x.

Примѣръ. — Вычислимъ двойной интегралъ отъ функціи $\frac{xy}{a}$, взятый внутри четверти круга, ограниченной осями координатъ и окружностью

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Предѣлами для x служатъ 0 и R, а при x постоянномъ y можетъ измѣняться отъ 0 до $\sqrt{R^2 - x^2}$. Слѣдовательно, двойной интегралъ имѣетъ выраженіе

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{xy}{a}\,dy = \int_0^R \frac{x}{2a}\left[y^2\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \int_0^R \frac{x(R^2 - x^2)}{2a}\,dx.$$

Послѣдній интегралъ легко получить; онъ равенъ $\frac{R^4}{8a}$.

Если область интегрированія ограничена контуромъ произвольнаго вида, то мы разобьемъ эту область на нѣсколько такихъ частей, чтобы прямая, параллельная оси Oy, пересѣкала контуръ каждой изъ этихъ частей не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ. Мы могли бы также начать и съ интегрированія по перемѣнному x, разбивая область на такія части, чтобы прямая, параллельная оси Ox, пересѣкала контуръ каждой изъ этихъ частей не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ. Возьмемъ, напримѣръ, замкнутую выпуклую кривую, расположенную внутри прямоугольника $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, стороны котораго проходятъ черезъ тѣ четыре точки A, B, C, D кривой, въ которыхъ x и y имѣютъ наибольшія и наименьшія значенія*). Пусть будутъ $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$ уравненія дугъ ACB, ADB; пусть будутъ также $x_1=\psi_1(y)$, $x_2=\psi_2(y)$ уравненія дугъ CAD, CBD, причемъ $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны отъ a до b, а $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ непрерывны при измѣненіи y отъ c до d. Вычисляя двумя различными способами двойной интегралъ отъ функціи $f(x, y)$, непрерывной внутри этого контура, и приравнивая между собою оба получающіяся выраженія, найдемъ

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx; \qquad (8)$$

мы видимъ, что въ обоихъ интегралахъ предѣлы совершенно различны. Всякій выпуклый контуръ даетъ формулу этого рода. Такъ, взявъ за область интегрированія треугольникъ, ограниченный прямыми $y=0$, $x=a$, $y=x$, мы придемъ къ формулѣ, данной Леженъ-Дирикле (Lejeune-Dirichlet),

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx.$$

125. Аналогія съ простыми интегралами. — Интегралъ $\int_a^x f(t)\, dt$, разсматриваемый, какъ функція отъ x, имѣетъ своею производною функцію $f(x)$. Аналогичная теорема существуетъ для двойныхъ интеграловъ. Пусть будетъ $f(x, y)$ функція, непрерывная внутри прямоугольника, ограниченнаго прямыми $x=a$, $x=A$, $y=b$, $y=B$ $(a<A,\ b<B)$. Двойной интегралъ отъ функціи $f(x, y)$, распространенный на площадь прямоугольника, ограниченнаго прямыми $x=a$, $x=X$, $y=b$, $y=Y$ $(a<X<A,\ b<Y<B)$, есть функція координатъ X, Y перемѣнной вершины; эту функцію мы можемъ представить въ видѣ

$$F(X, Y)=\int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\, dx.$$

*) Предлагаемъ читателю сдѣлать чертежъ.

Пусть будетъ $\Phi(x)=\int_b^Y f(x, y)\,dy$. Первое дифференцированіе $F(X, Y)$ по X даетъ

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\Phi(X)=\int_b^Y f(X, y)\,dy;$$

послѣ вторичнаго дифференцированія по Y будемъ имѣть

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial Y}=f(X, Y). \qquad (9)$$

Самый общій видъ функціи $u(X, Y)$, удовлетворяющей предыдущему условію (9), очевидно, получится, если мы прибавимъ къ функціи $F(X, Y)$ такую функцію z, вторая производная которой $\frac{\partial^2 z}{\partial Y\,\partial X}$ была бы равна нулю. Слѣдовательно, функція $u(X, Y)$ будетъ имѣть видъ (§ 38)

$$u(X, Y)=\int_a^X dx\int_b^Y f(x, y)\,dy+\varphi(X)+\psi(Y), \qquad (10)$$

гдѣ $\varphi(X)$ и $\psi(Y)$ — произвольныя функціи. Эти функціи $\varphi(X)$ и $\psi(Y)$ можно всегда выбрать такимъ образомъ, чтобы функція $u(X, Y)$ обращалась при $X=a$ въ данную функцію отъ Y: $V(Y)$, а при $Y=b$ — въ данную функцію отъ X: $U(X)$, причемъ двѣ послѣднихъ функціи должны быть связаны соотношеніемъ $U(a)=V(b)$. Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ соотношеніи (10) послѣдовательно $X=a$, $Y=b$, получимъ два условія

$$V(Y)=\varphi(a)+\psi(Y), \quad U(X)=\varphi(X)+\psi(b);$$

отсюда получаемъ

$$\psi(Y)=V(Y)-\varphi(a), \quad \psi(b)=V(b)-\varphi(a),$$
$$\varphi(X)=U(X)-V(b)+\varphi(a),$$

и формула (10) обращается въ

$$u(X, Y)=\int_a^X dx\int_b^Y f(x, y)\,dy+U(X)+V(Y)-V(b). \qquad (11)$$

О б р а т н о, если мы найдемъ какимъ-нибудь способомъ функцію $u(X, Y)$, удовлетворяющую соотношенію (9), то, на основаніи предыдущаго, значеніе двойного интеграла будетъ равно

$$\int_a^X dx\int_b^Y f(x, y)\,dy=u(X, Y)-U(X, b)-u(a, Y)+u(a, b). \qquad (12)$$

Эта формула аналогична основной формулѣ (6) (см. стр. 162).

Слѣдующая формула представляетъ нѣкоторую аналогію съ формулою интегрированія по частямъ. Пусть будетъ A конечная часть плоскости, ограниченная одною или нѣсколькими кривыми произвольнаго вида. Функція $f(x, y)$, непрерывная въ A, измѣняется въ области A между нѣкоторымъ наименьшимъ значеніемъ v_0 и нѣкоторымъ наибольшимъ значеніемъ V. Проведемъ л и н і и у р о в н я $f(x, y)=v$, гдѣ v заключается между v_0 и V; предположимъ, что мы можемъ найти площадь той части области A, въ которой значеніе $f(x, y)$ заключается между v_0 и v. Эта площадь есть нѣкоторая функція $F(v)$ отъ v, возрастающая вмѣстѣ съ v; площадь, заключающаяся между двумя

безконечно близкими линіями уровня, будетъ, очевидно, равна $F(v+\Delta v)-F(v)=\Delta v\,F'(v+\theta\,\Delta v)$. Разбивъ эту площадь на безконечно малыя части линіями, соединяющими двѣ сосѣднія линіи уровня, мы можемъ взять въ каждой изъ этихъ частей такую точку (ξ,η), чтобы было $f(\xi,\eta)=v+\theta\,\Delta v$; тогда сумма элементовъ двойного интеграла $\int\int f\,dx\,dy$, соотвѣтствующихъ области между сосѣдними линіями уровня, будетъ равна

$$(v+\theta\,\Delta v)\,F'(v+\theta\,\Delta v)\,\Delta v.$$

Слѣдовательно, двойной интегралъ будетъ равенъ предѣлу суммы

$$\Sigma\,(v+\theta\,\Delta v)\,F'(v+\theta\,\Delta v)\,\Delta v,$$

т.-е. равенъ простому интегралу

$$\int_{v_0}^{V} vF'(v)\,dv=VF(V)-\int_{v_0}^{V}F(v)\,dv.$$

Этотъ методъ особенно удобенъ въ томъ случѣ, когда область интегрированія ограничена двумя линіями уровня

$$f(x,y)=v_0,\qquad f(x,y)=V.$$

Пусть, напримѣръ, требуется вычислить двойной интегралъ $\int\int\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$, взятый внутри круга $x^2+y^2=1$. Полагая $v=\sqrt{1+x^2+y^2}$, мы видимъ, что область интегрированія будетъ ограничена двумя линіями уровня $v=1$, $v=\sqrt{2}$, и функція $F(v)$, представляющая площадь круга съ радіусомъ, равнымъ $\sqrt{v^2-1}$, будетъ равна $\pi(v^2-1)$. Слѣдовательно, двойной интегралъ равенъ

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2\pi v^2\,dv=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)^{*}).$$

Предыдущая формула легко распространяется на двойной интегралъ

$$\int\int f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy,$$

если мы обозначимъ черезъ $F(v)$ двойной интегралъ $\int\int\varphi(x,y)\,dx\,dy$, распространенный на часть области интегрированія, ограниченную кривою $v=f(x,y)$.

126. Формула Грина. — Если функція $f(x,y)$ есть частная производная по x или по y отъ нѣкоторой извѣстной функціи, то одно изъ интегрированій совершается непосредственно, и остается выполнить только одну квадратуру. Это простое замѣчаніе приводитъ къ важной формулѣ, называемой формулою Грина (Green).

---

*) Въ мемуарѣ Каталана (Catalan) (Journal de Liouville, I-ая серія, т. IV, стр. 233) можно найти много приложеній этого метода

Разсмотримъ сначала двойной интегралъ $\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$, распространенный на часть плоскости, ограниченную контуромъ C, пересѣкающимся съ прямыми, параллельными оси Oy, не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ (черт. 15, стр. 196).

Пусть будутъ A и B тѣ точки контура, въ которыхъ x будетъ maximum или minimum. Одна изъ прямыхъ, параллельныхъ оси Ox и проходящихъ между линіями Aa и Bb, пересѣчетъ C въ двухъ точкахъ m_1 и m_2 съ ординатами y_1 и y_2. Интегрируя сначала по y, найдемъ для двойного интеграла выраженіе

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\,dx.$$

Но интегралы $\int_a^b P(x, y_1)\,dx$, $\int_a^b P(x, y_2)\,dx$ суть не что иное, какъ криволинейные интегралы, взятые соотвѣтственно вдоль дугъ Am_1B и Am_2B; слѣдовательно, мы можемъ представить предыдущую формулу въ видѣ

$$\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{(C)} P\,dx, \qquad (13)$$

причемъ криволинейный интегралъ берется вдоль контура C въ направленіи, указанномъ стрѣлками, т.-е. въ положительномъ направленіи, если оси координатъ расположены, какъ на чертежѣ. Чтобы распространить эту формулу на площадь, ограниченную контуромъ произвольнаго вида, мы, какъ и выше (§ 94), разобьемъ эту площадь поперечными линіями на нѣсколько такихъ частей, чтобы контуръ каждой изъ нихъ удовлетворялъ вышеуказанному условію, и примѣнимъ предыдущую формулу къ каждой изъ этихъ частей.

Такимъ же образомъ получается формула.

$$\int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{(C)} Q\,dy, \qquad (14)$$

причемъ криволинейный интегралъ опять берется въ прежнемъ направленіи. Изъ равенствъ (13) и (14) находимъ

$$\int_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \qquad (15)$$

гдѣ двойной интегралъ распространяется на площадь, ограниченную контуромъ C. Въ этомъ состоитъ формула Грина; она имѣетъ много весьма важныхъ приложеній. Замѣтимъ только, что, полагая $Q = x$, $P = -y$, мы получимъ выведенную выше (§ 94) формулу для выраженія площади замкнутой кривой черезъ криволинейный интегралъ.

II.— ЗАМѢНА ПЕРЕМѢННЫХЪ.— ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ.

До сихъ поръ при вычисленіи двойного интеграла мы разбивали область интегрированія на безконечно малые прямоугольники прямыми, параллельными осямъ координатъ. Мы предположимъ теперь, что разбіеніе области интегрированія совершается помощью двухъ семействъ кривыхъ совершенно произвольнаго вида.

127. Предварительная формула. — Пусть будутъ u и v координаты точки относительно системы прямоугольныхъ осей на плоскости, и x, y — координаты другой точки относительно другой системы прямоугольныхъ координатъ, расположенныхъ такимъ же образомъ*) въ той же плоскости или въ плоскости, отличной отъ первой. Формулы

$$x=f(u, v), \quad y=\varphi(u, v) \tag{16}$$

устанавливаютъ нѣкоторое соотвѣтствіе между точками обѣихъ плоскостей. Предположимъ: 1) что эти функціи $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ непрерывны и имѣютъ непрерывныя частныя производныя, когда точка (u, v) описываетъ часть A_1 плоскости (u, v), ограниченную контуромъ C_1; 2) что, на основаніи формулъ (16), части A_1 плоскости (u, v) соотвѣтствуетъ часть A плоскости (x, y), ограниченная контуромъ C, и что соотвѣтствіе между точками обѣихъ площадей и обоихъ контуровъ взаимно однозначное, т.-е. каждой точкѣ области A соотвѣтствуетъ только одна точка области A_1, и обратно; 3) что функціональный опредѣлитель $\Delta=\dfrac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$ не мѣняетъ знака внутри C_1, хотя и можетъ обращаться въ нуль въ нѣкоторыхъ точкахъ области A_1.

Здѣсь могутъ представиться два случая. Когда точка (u, v) описываетъ контуръ C_1, двигаясь въ прямомъ направленіи (§ 94), точка (x, y) будетъ описывать контуръ C, перемѣщаясь постоянно или въ прямомъ направленіи или въ направленіи

*) Двѣ системы прямоугольныхъ осей называются одинаково расположенными, если переходъ отъ положительнаго направленія оси x къ положительному направленію оси y совершается въ обоихъ случаяхъ вращеніемъ въ положительномъ направленіи (напр. противъ часовой стрѣлки), или въ обоихъ случаяхъ — въ отрицательномъ направленіи. (*Ред.*)

обратномъ. Въ зависимости отъ этого мы будемъ говорить, что разсматриваемое соотвѣтствіе между областями A и A_1 — прямое или обратное.

Площадь Ω области A плоскости представится интеграломъ

$$\Omega = \int_{(C)} x\, dy,$$

причемъ интегралъ берется вдоль контура C въ прямомъ направленіи. Сдѣлавъ замѣну перемѣнныхъ по формуламъ (16), получимъ

$$\Omega = \pm \int_{(C_1)} f(u, v)\, d\varphi\,(u, v),$$

гдѣ новый интегралъ взятъ вдоль контура C_1 въ прямомъ направленіи, причемъ должно взять знакъ + или — въ зависимости отъ того, будетъ ли соотвѣтствіе прямымъ или обратнымъ. Примѣнимъ къ этому новому интегралу формулу Грина, положивъ $u=x$, $v=y$, $P=f\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $Q=f\frac{\partial\varphi}{\partial v}$. Это даетъ

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \Delta = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)};$$

поэтому

$$\Omega = \pm \int\int_{(A_1)} \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}\, du\, dv.$$

Примѣняя къ двойному интегралу теорему о среднемъ значеніи, получимъ

$$\Omega = \pm \Omega_1 \frac{D(f, \varphi)}{D(\xi, \eta)}, \qquad (17)$$

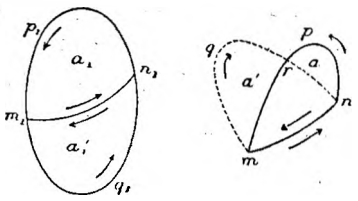
гдѣ (ξ, η) — координаты точки, лежащей внутри C_1, и Ω_1 — площадь области A_1 плоскости (u, v). Мы видимъ, что передъ правою частью должно взять знакъ + или — въ зависимости отъ того, будетъ ли опредѣлитель Δ самъ положительнымъ или отрицательнымъ. Слѣдовательно, соотвѣтствіе будетъ прямымъ или обратнымъ въ зависимости отъ того, будетъ ли Δ положительнымъ или отрицательнымъ.

Формула (17) устанавливаетъ еще одну аналогію между функціональными опредѣлителями и производными. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что область A_1 плоскости неограниченно уменьшается во всѣхъ направленіяхъ, такъ что всѣ ея точки стремятся къ предѣльной точкѣ (u, v). Тогда и область A будетъ неограниченно уменьшаться; поэтому, отношеніе площадей Ω, Ω_1 будетъ имѣть предѣломъ абсолютное значеніе опредѣ-

лителя Δ. Слѣдовательно, подобно тому какъ производная есть отношеніе двухъ линейныхъ элементовъ, опредѣлитель Δ есть отношеніе двухъ элементовъ поверхностныхъ. Съ этой точки зрѣнія формула (17) имѣетъ сходство съ формулою конечныхъ приращеній.

Примѣчанія.— Тѣ предположенія, которыя были сдѣланы относительно соотвѣтствія между областями A и A_1, не всѣ независимы между собою. Такъ, для того чтобы соотвѣтствіе было однозначнымъ, необходимо, чтобы опредѣлитель Δ не мѣнялъ знака въ области A_1 плоскости (u, v). Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что Δ равно нулю вдоль кривой γ_1, отдѣляющей ту часть области A_1, гдѣ Δ положительно, отъ той части, гдѣ Δ отрицательно. Разсмотримъ весьма малую дугу m_1n_1 кривой γ_1 и весьма малую часть области A_1, заключающую внутри себя дугу m_1n_1; эта часть раздѣлится дугою m_1n_1 на двѣ области a_1 и a'_1 (черт. 26).

Черт. 26.



Въ то время какъ точка (u, v) описываетъ площадь a_1, въ которой Δ положительно, точка (x, y) опишетъ площадь a съ контуромъ $mnpq$, и направленія движенія по обоимъ контурамъ $m_1n_1p_1q_1$, $mnpq$ будутъ или одновременно прямыя, или одновременно обратныя. Когда же точка (u, v) описываетъ площадь a'_1, въ которой Δ отрицательно, точка (x, y) опишетъ площадь a', причемъ движеніе по ея контуру $nmqr$ будетъ совершаться въ обратномъ направленіи, если движеніе по контуру $n_1m_1q_1n_1$ совершалось въ прямомъ. Поэтому, площадь a' должна отчасти покрывать площадь a; такимъ образомъ, всякой точкѣ (x, y) общей части nrm площадей a и a' будутъ соотвѣтствовать не одна, а двѣ точки (u, v), лежащія по разныя стороны линіи m_1n_1.

Положимъ, напримѣръ, $X=x$, $Y=y^2$; мы имѣемъ $\Delta=2y$. Если точка (x, y) описываетъ замкнутую площадь, содержащую отрѣзокъ ab оси Ox, то легко видѣть, что точка (X, Y) будетъ описывать двѣ площади, расположенныя надъ осью X и примыкающія къ одному и тому же отрѣзку AB этой оси. Листъ бумаги, сложенный вдоль прямой линіи, даетъ представленіе о площади, описываемой точкою (X, Y).

Для того чтобы соотвѣтствіе было однозначнымъ, недостаточно, чтобы опредѣлитель Δ сохранялъ въ области A_1 постоянный знакъ. Возьмемъ, напримѣръ, $X=x^2-y^2$, $Y=2xy$; опредѣлитель $\Delta=4(x^2+y^2)$ всегда положителенъ. Обозначая черезъ (r, θ), (R, ω) полярныя координаты обѣихъ точекъ (x, y), (X, Y), мы представимъ предыдущія формулы въ видѣ $R=r^2$, $\omega=2\theta$. Будемъ измѣнять r отъ a до b $(a<b)$, и θ отъ 0 до $\pi+\alpha$, гдѣ α заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$; точка (R, ω) опишетъ кольцеобразную полосу, заключающуюся между двумя окружностями съ радіусами a^2 и b^2. Но каждому значенію угла ω, заключающемуся между 0 и 2α, соотвѣтствуютъ два значенія угла θ: одно θ_1, заключающееся между 0 и α, и другое, θ_2, заключающееся между π и $\pi+\alpha$. Площадь, описываемую точкою (X, Y), можно представить при помощи плоской бумажной кольцеобразной полосы, концы которой отчасти находятъ другъ на друга.

128. Замѣна перемѣнныхъ. Первый способъ. — Сохранимъ предположенія предыдущаго параграфа относительно областей A, A_1 а также и формулы (16); пусть будетъ $F(x, y)$ функція, непрерывная въ области A. Разобьемъ область A_1 произвольнымъ образомъ на меньшія области $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; имъ будетъ соотвѣтствовать разбіеніе области A на области $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Пусть будутъ ω_i и σ_i площади двухъ соотвѣтствующихъ областей a_i и α_i; по формулѣ (17) имѣемъ

$$\omega_i = \sigma_i \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u_i, v_i)} \right|,$$

гдѣ u_i, v_i — координаты нѣкоторой точки области α_i. Этой точкѣ (u_i, v_i) соотвѣтствуетъ точка $x_i = f(u_i, v_i)$, $y_i = \varphi(u_i, v_i)$ области a_i. Поэтому, полагая $\Phi(u, v) = F[f(u, v), \varphi(u, v)]$, мы можемъ написать

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i)\, \omega_i = \sum_{i=1}^{n} \Phi(u_i, v_i) \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u_i, v_i)} \right| \sigma_i;$$

отсюда, переходя къ предѣлу, получимъ

$$\iint_{(A)} F(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(A_1)} F[f(u, v), \varphi(u, v)] \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)} \right| du\, dv. \quad (18)$$

Такимъ образомъ, чтобы произвести замѣну перемѣнныхъ въ двойномъ интегралѣ, должно замѣнить x и y ихъ значеніями въ функціи новыхъ перемѣнныхъ u и v, а произведеніе $dx\, dy$ — произведеніемъ $|\Delta|\, du\, dv$. Что же касается новой области интегрированія, то мы уже объяснили выше, какъ она опредѣляется.

Вообще, чтобы найти предѣлы, между которыми должны быть выполнены интегрированія при вычисленіи новаго двойного интеграла, нѣтъ надобности строить контуръ C_1 новой области интегрированія A_1. Въ самомъ дѣлѣ, будемъ разсматривать u и v, какъ систему криволинейныхъ координатъ. Если мы дадимъ въ формулѣ (16) одному изъ перемѣнныхъ u, v постоянное значеніе и будемъ измѣнять другое перемѣнное, то получимъ два семейства кривыхъ $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Вслѣдствіе предположеній, сдѣланныхъ при выводѣ формулъ (16),

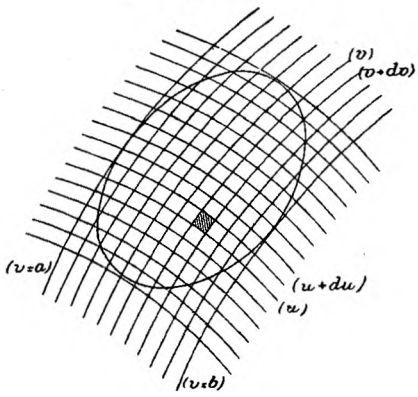
черезъ каждую точку области A проходитъ одна и только одна кривая каждаго изъ обоихъ семействъ. Предположимъ, для опредѣленности, что кривая $v=\text{const.}$ пересѣкаетъ контуръ C только въ двухъ точкахъ M_1, M_2, соотвѣтствующихъ значеніямъ u_1, u_2 перемѣннаго u ($u_1<u_2$), и что всѣ кривыя (v), пересѣкающія контуръ C, расположены между кривыми $v=a$, $v=b$ ($a<b$). Тогда, интегрируя сначала по u и оставляя v постояннымъ, мы должны будемъ измѣнять u отъ u_1 до u_2 (u_1 и u_2 будутъ, вообще, функціями отъ v) и затѣмъ снова проинтегрировать полученный результатъ по перемѣнному v между предѣлами a и b.

Такимъ образомъ искомый двойной интегралъ будетъ равенъ

$$\int_a^b dv \int_{u_1}^{u_2} F[f(u,v), \varphi(u,v)]\,|\Delta|\,du\,dv.$$

Въ сущности, замѣна перемѣнныхъ приводится къ разбіенію области интегрированія на безконечно малыя области двумя семействами кривыхъ (u) и (v). Пусть будетъ ω площадь криволинейнаго четыреугольника, ограниченнаго кривыми (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$, гдѣ du и dv положительны; на плоскости (u,v) этому четыреугольнику соотвѣтствуетъ прямоугольникъ со сторонами du и dv. Поэтому, на основаніи формулы (17), имѣемъ $\omega=|\Delta(\xi,\eta)|\,du\,dv$, гдѣ ξ заключается между u и $u+du$, а η — между v и $v+dv$. Выраженіе $|\Delta(u,v)|\,du\,dv$ называется элементомъ площади въ системѣ координатъ (u,v). Точное значеніе ω есть $\omega=\{|\Delta(u,v)|+\varepsilon\}\,du\,dv$, гдѣ ε безконечно мало вмѣстѣ съ du и dv. Но при вычисленіи предѣла суммы $\Sigma F(x,y)\,\omega$ количествомъ ε можно пренебречь; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ функція $\Delta(u,v)$ — непрерывна, то можно предположить кривыя (u), (v) настолько близкими, чтобы всѣ количества ε были по абсолютному значенію меньше всякаго заданнаго положительнаго числа, и, слѣдовательно, чтобы сумма $\Sigma F(x,y)\,\varepsilon\,dx\,dy$ также была по абсолютному значенію меньше всякаго положительнаго числа.

Черт. 27.



129. Примѣры. 1. Полярныя координаты. — Замѣнимъ прямоугольныя координаты полярными. Мы имѣемъ $x=\varrho\cos\omega$, $y=\varrho\sin\omega$, и мы получимъ всѣ точки плоскости, измѣняя ϱ отъ 0 до $+\infty$ и ω отъ 0 до 2π. Функціональный опредѣлитель равенъ $\Delta=\varrho$, такъ что элементъ площади есть $\varrho\,d\omega\,d\varrho$, какъ это можно легко вывести геометрически. Предположимъ сначала, что требуется вычислить двойной интегралъ, распространенный на часть плоскости, ограниченную двумя прямыми OA, OB, образующими съ Ox углы ω_1, ω_2, и дугою AB, которая пересѣкается съ полупрямою, выходящею изъ начала, не болѣе, чѣмъ въ одной точкѣ (черт. 17 стр. 198). Пусть будетъ $R=\varphi(\omega)$ уравненіе дуги AB; такъ какъ ω заключается между ω_1 и ω_2, а ϱ можетъ измѣняться отъ 0 до R, то двойной интегралъ отъ $f(x, y)$ равенъ

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_0^R f(\varrho\cos\omega, \varrho\sin\omega)\,\varrho\,d\varrho.$$

Въ томъ случаѣ, когда кривая AB замкнутая и содержитъ начало координатъ внутри себя, должно положить $\omega_1=0$, $\omega_2=2\pi$. Всякая другая область интегрированія можетъ быть разложена на нѣсколько областей, подобныхъ предыдущей. Предположимъ, напримѣръ, что контуръ C есть замкнутая выпуклая кривая, оставляющая начало снаружи. Пусть будутъ OA и OB касательныя, проведенныя къ этому контуру черезъ начало координатъ, и $R_1=\varphi_1(\omega)$, $R_2=\varphi_2(\omega)$ уравненія кривыхъ ANB, AMB. При данномъ значеніи ω, заключающемся между ω_1 и ω_2, ϱ можетъ измѣняться отъ R_1 до R_2, а мы получимъ для двойного интеграла выраженіе

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \int_{R_1}^{R_2} f(\varrho\cos\omega, \varrho\sin\omega)\,\varrho\,d\varrho.$$

2. Эллиптическія координаты. — Разсмотримъ семейство софокусныхъ кривыхъ второго порядка

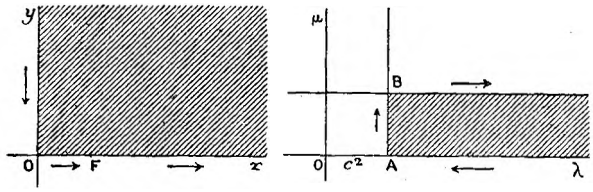
$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1, \qquad (19)$$

гдѣ λ обозначаетъ произвольный параметръ. Черезъ каждую точку плоскости проходятъ двѣ кривыхъ этого рода: это будутъ эллипсъ и гипербола, такъ какъ уравненіе (19) имѣетъ при всякихъ x и y одинъ корень λ, большій c^2, и одинъ положительный корень μ, меньшій c^2. Изъ соотношенія (19) и изъ такого же соотношенія, но въ которомъ λ замѣнено черезъ μ, найдемъ

$$x=\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{c},\quad y=\frac{\sqrt{(\lambda-c^2)(c^2-\mu)}}{c},\quad (0\leqq\mu\leqq c^2\leqq\lambda). \qquad (20)$$

Для избѣжанія неопредѣленности, мы будемъ разсматривать только ту часть плоскости xy, которая расположена въ углѣ xOy. Точки этой

Черт. 28.



области соотвѣтствуютъ однозначно точкамъ части плоскости (λ, μ), ограниченной прямыми

$$\lambda = c^2, \quad \mu = 0, \quad \mu = c^2.$$

Когда точка (λ, μ) описываетъ контуръ этой области въ направленіи, указанномъ стрѣлками, то, какъ видно изъ формулъ (20), точка (x, y) опишетъ оси Ox, Oy въ направленіи, указанномъ стрѣлками. Слѣдовательно, здѣсь соотвѣтствіе — обратное; въ этомъ можно также убѣдиться, вычисливъ Δ,

$$\Delta = \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = -\frac{1}{4}\frac{\lambda - \mu}{\sqrt{\lambda\mu(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}.$$

130. Замѣна перемѣнныхъ. Второй способъ. — Выведемъ теперь общую формулу (18) другимъ пріемомъ, опирающимся исключительно на самый способъ вычисленія двойного интеграла. Мы, разумѣется, сохраняемъ при этомъ всѣ тѣ предположенія, которыя были нами сдѣланы ранѣе относительно соотвѣтствія между точками обѣихъ областей A, A_1. Замѣтимъ сначала, что если формула вѣрна для двухъ частныхъ преобразованій

$$x = f(u, v), \quad u = f_1(u', v'),$$
$$y = \varphi(u, v), \quad v = \varphi_1(u', v'),$$

то она будетъ вѣрна также и для преобразованія, которое получается отъ послѣдовательнаго выполненія обоихъ предыдущихъ преобразованій; это слѣдуетъ изъ извѣстнаго свойства функціональныхъ опредѣлителей (§ 30)

$$\frac{D(x, y)}{D(u', v')} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(u', v')}.$$

Точно также, если формула вѣрна для нѣсколькихъ областей $A, B, C, \ldots, L$, которымъ соотвѣтствуютъ области $A_1, B_1, C_1, \ldots, L_1$, то она будетъ также вѣрна и для области $A + B + C + \ldots + L$. Наконецъ, формула вѣрна, если замѣна перемѣнныхъ приводится къ преобразованію координатъ

$$x = x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha;$$

мы въ этомъ случаѣ имѣемъ $\Delta = 1$, и оба предыдущихъ интеграла равны

$$\iint_{(A)} F(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \iint_{(A')} F(x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,\ y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)\, dx'\, dy',$$

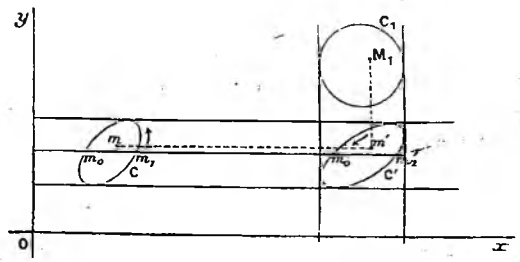
такъ какъ они выражаютъ одинъ и тотъ же объемъ.

Мы выведемъ сначала формулу замѣны перемѣнныхъ для частнаго преобразованія

$$x = \varphi(x', y'), \quad y = y', \tag{21}$$

при которомъ области A соотвѣтствуетъ другая область A', заключающаяся между тѣми же прямыми $y = y_0$, $y = y_1$, параллельными оси Ox. Предположимъ, что каждой точкѣ области A соотвѣтствуетъ только одна точка области A', и обратно. Если прямая, параллельная оси Ox, пересѣкаетъ контуръ C области A только въ двухъ точкахъ, то и контуръ C' области A' будетъ пересѣкаться тою же прямою также только въ двухъ точкахъ. Точкамъ m_0 и m_1 съ ординатою y на контурѣ C соотвѣтствуютъ точки m'_0 и m'_1 на контурѣ C'. Но здѣсь могутъ представиться два случая въ зависимости отъ того, будетъ ли соотвѣтствіе прямымъ или обратнымъ. Чтобы различить оба эти случая, замѣтимъ, что если $\frac{\partial\varphi}{\partial x'}$ положительно, то x возрастаетъ вмѣстѣ съ x', точки m_0 и m_1, m'_0 и m'_1 расположены, какъ указано на черт. 29, и соотвѣтствіе прямое. Напротивъ, если $\frac{\partial\varphi}{\partial x'}$ отрицательно, то соотвѣтствіе — обратное.

Черт. 29.



Разсмотримъ первый случай. Пусть будутъ x_0, x_1, x'_0, x'_1 абсциссы точекъ m_0, m_1, m'_0, m'_1. Примѣняя къ простому интегралу формулу замѣны перемѣннаго, имѣемъ

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y)\, dx = \int_{x'_0}^{x'_1} F[\varphi(x', y'), y'] \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\, dx',$$

гдѣ y и y' разсматриваются, какъ постоянныя; такимъ образомъ получаемъ

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} F(x, y)\, dx = \int_{y_0}^{y_1} dy' \int_{x'_0}^{x'_1} F[\varphi(x', y'), y'] \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\, dx'.$$

Но въ этомъ случаѣ опредѣлитель Якоби Δ равенъ $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$, и предыдущую формулу можно также представить въ видѣ

$$\int\int_{(A)} F(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{(A')} F[\varphi(x', y'), y']\, |\Delta|\, dx'\, dy'.$$

Если $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$ отрицательно, то формула можетъ быть выведена такимъ же образомъ. Очевидно, что она можетъ быть распространена на область, ограниченную контуромъ произвольнаго вида.

Такимъ же образомъ мы докажемъ, что, полагая

$$x = x', \quad y = \psi(x', y'), \tag{22}$$

мы получимъ формулу

$$\int\int_{(A)} F(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{(A')} F[x', \psi(x', y')]\, |\Delta|\, dx'\, dy',$$

причемъ точки новой области интегрированія A' взаимно однозначно соотвѣтствуютъ точкамъ области A.

Разсмотримъ теперь общія формулы преобразованія

$$x = f(x_1, y_1), \quad y = f_1(x_1, y_1). \tag{23}$$

Для большей наглядности будемъ разсматривать (x, y), (x_1, y_1), какъ координаты двухъ соотвѣтствующихъ точекъ m, M_1 относительно одной и той же системы осей координатъ. Пусть будутъ A, A_1 соотвѣтствующія области, ограниченныя контурами C, C_1. Если мы присоединимъ къ двумъ точкамъ m, M_1 еще вспомогательную точку m' съ координатами $x' = x_1$, $y' = y$, то эта точка m' опишетъ вспомогательную область A'; мы предположимъ сначала, что точки области A' находятся во взаимно однозначномъ соотвѣтствіи съ точками каждой изъ областей A, A_1. Между шестью координатами x, y, x_1, y_1, x', y' существуютъ четыре соотношенія

$$x = f(x_1, y_1), \quad y = f_1(x_1, y_1), \quad x' = x_1, \quad y' = y.$$

Отсюда прежде всего имѣемъ

$$x' = x_1, \quad y' = f_1(x_1, y_1); \tag{24}$$

равенства (24) опредѣляютъ преобразованіе вида (22). Далѣе,

изъ соотношенія $y'=f_1(x', y_1)$ получаемъ $y_1=\pi(x', y')$, и, слѣдовательно,

$$x=f(x', y_1)=\varphi(x', y'), \quad y=y'. \tag{25}$$

Такимъ образомъ разсматриваемое преобразованіе (23) можетъ быть получено, какъ результатъ двухъ частныхъ преобразованій (24) и (25), къ которымъ примѣнима общая формула (18); слѣдовательно, эта формула примѣнима также и къ преобразованію (23).

Примѣчаніе. — Мы предполагали, что область, описанная точкою m', находится въ однозначномъ соотвѣтствіи съ каждою изъ областей A, A_1. Мы можемъ всегда этого достигнуть. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ въ области A_1 линіи, которымъ въ области A соотвѣтствуютъ прямыя, параллельныя оси Ox. Если прямая, параллельная оси Oy, пересѣкаетъ каждую изъ этихъ линій только въ одной точкѣ, то ясно, что каждой точкѣ m области A соотвѣтствуетъ только одна точка m' области A'. Поэтому достаточно разбить площадь A_1 на достаточно малыя части, чтобы въ каждой изъ нихъ это условіе было удовлетворено. Если бы линіи области A оказались прямыми, параллельными Oy, то предварительно мы выполнили бы надъ (x_1, y_1) преобразованіе координатъ.

131. Площадь кривой поверхности. — Пусть будетъ S часть поверхности, не имѣющая особыхъ точекъ и ограниченная контуромъ Γ. Разобьемъ S на части какимъ-нибудь образомъ. Пусть будетъ s_i одна изъ этихъ частей, ограниченная контуромъ γ_i; пусть будетъ m_i какая-нибудь точка части s_i. Проведемъ въ m_i касательную плоскость къ поверхности S и предположимъ, что часть s_i настолько мала, что всякая прямая, перпендикулярная къ этой касательной плоскости, пересѣкаетъ s_i только въ одной точкѣ. Кривая γ_i проектируется на касательную плоскость нѣкоторою кривою γ'_i. Обозначимъ черезъ σ_i площадь той части касательной плоскости, которая лежитъ внутри γ'_i; область σ_i есть проекція области s_i. Если число областей s_i неограниченно возрастаетъ и при томъ такъ, что каждая изъ этихъ областей дѣлается безконечно малою во всѣхъ своихъ размѣрахъ, то сумма $\Sigma\sigma_i$ стремится къ нѣкоторому предѣлу; этотъ предѣлъ называется **площадью части поверхности** S.

Пусть будетъ x, y, z прямоугольныя координаты какой-нибудь точки поверхности S. Предположимъ, что эти координаты выражены въ функціи двухъ перемѣнныхъ параметровъ u и v

$$x=f(u, v), \quad y=\varphi(u, v), \quad z=\psi(u, v) \tag{26}$$

такимъ образомъ, что часть поверхности S однозначно соотвѣтствуетъ области R плоскости (u, v), ограниченной замкнутымъ контуромъ C. Предположимъ, что функціи f, φ, ψ вмѣстѣ со своими частными производными непрерывны въ этой области. Разобьемъ R на части; пусть будетъ r_i одна изъ этихъ частей, ограниченная контуромъ c_i, и ω_i — площадь части r_i. Области r_i соотвѣтствуетъ на поверхности S часть s_i, ограниченная контуромъ γ_i; пусть будетъ σ_i площадь соотвѣтствующей части касательной плоскости, какъ это было указано въ началѣ настоящаго параграфа. Найдемъ выраженіе отношенія $\frac{\sigma_i}{\omega_i}$.

Пусть будутъ $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ направляющіе косинусы нормали къ поверхности S въ точкѣ $m_i\,(x_i, y_i, z_i)$, лежащей въ части s_i поверхности, и пусть этой точкѣ m_i соотвѣтствуетъ точка (u_i, v_i) площади r_i. Примемъ точку m_i за начало координатъ, нормаль къ поверхности S въ точкѣ m_i — за ось $m_i Z$, и двѣ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ, проведенныхъ въ касательной плоскости съ направляющими косинусами α', β', γ' и $\alpha'', \beta'', \gamma''$ относительно прежней системы осей, — за оси $m_i X$ и $m_i Y$. Пусть будутъ X, Y, Z координаты какой-нибудь точки поверхности S относительно этой новой системы осей. По извѣстнымъ формуламъ преобразованія координатъ имѣемъ

$$\begin{aligned} X &= \alpha'\,(x-x_i)+\beta'\,(y-y_i)+\gamma'\,(z-z_i),\\ Y &= \alpha''\,(x-x_i)+\beta''\,(y-y_i)+\gamma''\,(z-z_i),\\ Z &= \alpha_i\,(x-x_i)+\beta_i\,(y-y_i)+\gamma_i\,(z-z_i). \end{aligned}$$

Такъ какъ σ_i есть часть плоскости XY, ограниченная замкнутою кривою, описываемою точкою (X, Y), когда точка (u, v) описываетъ контуръ c_i, то, по § 127, будемъ имѣть

$$\sigma_i = \omega_i \left| \frac{D(X, Y)}{D(u'_i, v'_i)} \right|,$$

гдѣ u'_i, v'_i — координаты нѣкоторой точки, лежащей внутр контура c_i. Замѣняя въ предыдущемъ опредѣлителѣ X, Y ихъ выраженіями черезъ x, y, z, получимъ

$$\begin{aligned} \frac{D(X, Y)}{D(u'_i, v'_i)} &= (\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')\,\frac{D(y, z)}{D(u'_i, v'_i)}\\ &\quad +(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')\,\frac{D(z, x)}{D(u'_i, v'_i)}+(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')\,\frac{D(x, y)}{D(u'_i, v'_i)}, \end{aligned}$$

и, пользуясь извѣстными соотношеніями между девятью направляющими косинусами, будемъ имѣть

$$\frac{D(X, Y)}{D(u'_i, v'_i)} = \pm\left\{\alpha_i \frac{D(y, z)}{D(u'_i, v'_i)}+\beta_i \frac{D(z, x)}{D(u'_i, v'_i)}+\gamma_i \frac{D(x, y)}{D(u'_i, v'_i)}\right\}.$$

Слѣдовательно, примѣняя общую формулу (17), мы получимъ соотношеніе

$$\sigma_i=\omega_i\left|\alpha_i\frac{D(y,z)}{D(u'_i,v'_i)}+\beta_i\frac{D(z,x)}{D(u'_i,v'_i)}+\gamma_i\frac{D(x,y)}{D(u'_i,v'_i)}\right|,$$

гдѣ u'_i, v'_i — координаты нѣкоторой точки области r_i въ плоскости (u, v). Если эта область очень мала, то точка (u'_i, v'_i) очень близка къ точкѣ (u_i, v_i), и мы можемъ написать

$$\frac{D(y,z)}{D(u'_i,v'_i)}=\frac{D(y,z)}{D(u_i,v_i)}+\varepsilon_i,\quad \frac{D(z,x)}{D(u'_i,v'_i)}=\frac{D(z,x)}{D(u_i,v_i)}+\varepsilon'_i,\ \ldots,$$

$$\Sigma\sigma_i=\Sigma\omega_i\left|\alpha_i\frac{D(y,z)}{D(u_i,v_i)}+\beta_i\frac{D(z,x)}{D(u_i,v_i)}+\gamma_i\frac{D(x,y)}{D(u_i,v_i)}\right|$$
$$+\theta\Sigma\omega_i\left|\alpha_i\varepsilon_i+\beta_i\varepsilon'_i+\gamma_i\varepsilon''_i\right|,$$

причемъ абсолютное значеніе θ не превосходитъ единицы. Такъ какъ въ области R производныя отъ функцій f, φ, ψ непрерывны, то всѣ области r_i можно предположить настолько малыми, чтобы всѣ количества ε_i, ε'_i, ε''_i были менѣе нѣкотораго произвольнаго положительнаго числа η; тогда абсолютное значеніе добавочнаго члена будетъ навѣрное меньше, чѣмъ $3\eta\Omega$, гдѣ Ω — площадь области R. Слѣдовательно, этотъ добавочный членъ стремится къ нулю, и сумма $\Sigma\sigma_i$ имѣетъ предѣломъ двойной интегралъ

$$\iint_{(R)}\left|\alpha\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+\beta\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+\gamma\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv,$$

гдѣ α, β, γ — направляющіе косинусы нормали къ поверхности S въ точкѣ (u, v).

Вычислимъ эти косинусы. Уравненіе касательной плоскости будетъ (§ 39)

$$(X-x)\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+(Y-y)\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+(Z-z)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=0;$$

слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\frac{\alpha}{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}}=\frac{\beta}{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}}=\frac{\gamma}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}=\frac{\pm1}{\sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2+\cdots}}.$$

Взявъ въ послѣднемъ отношеніи знакъ $+$, получимъ

$$\alpha\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+\beta\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+\gamma\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$
$$=\sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2};$$

При помощи извѣстнаго тожества Лагранжа

$$(ab'-ba')^2+(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2 \\ =(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2$$

количество подъ знакомъ корня можно представить также въ видѣ $EG-F^2$, гдѣ

$$E=S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F=S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad G=S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

и знакъ S указываетъ, что должно замѣнить x послѣдовательно черезъ y, черезъ z и взять сумму полученныхъ трехъ членовъ. Такимъ образомъ площадь поверхности S представится въ видѣ двойного интеграла

$$A=\iint_{(R)}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{28}$$

Функціи E, F, G имѣютъ важное значеніе въ теоріи поверхностей. Возведя въ квадратъ выраженія для dx, dy, dz и сложивъ ихъ, получимъ

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2. \tag{29}$$

Очевидно, что коэффиціенты E, F, G не зависятъ отъ выбора осей координатъ, а исключительно отъ вида поверхности S и отъ выбора независимыхъ перемѣнныхъ u и v. Изъ формулы (28) очевидно, что если независимыя перемѣнныя u, v и поверхность S дѣйствительны, то $EG-F^2$ положительно.

132. Элементъ поверхности. — Выраженіе $\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ есть элементъ площади поверхности S въ системѣ координатъ (u, v). Точное выраженіе площади малой части поверхности, заключающейся между кривыми (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$, есть $(\sqrt{EG-F^2}+\varepsilon)\,du\,dv$, гдѣ ε безконечно мало вмѣстѣ съ du и dv, но, какъ и выше, нетрудно убѣдиться, что членомъ $\varepsilon\,du\,dv$ можно пренебречь. Это выраженіе элемента площади можно легко получить изъ простыхъ соображеній дифференціальной геометріи. Въ самомъ дѣлѣ, если мы примемъ безконечно малую часть разсматриваемой поверхности за параллелограммъ, построенный въ касательной плоскости къ поверхности S въ точкѣ (u, v), то площадь этой части будетъ равна произведенію длинъ двухъ сторонъ на синусъ угла между кривыми (u) и (v). Далѣе, если мы примемъ приращеніе дуги за дифференціалъ ds, то, по формулѣ (29), длины сторонъ

параллелограмма будутъ $\sqrt{E}\,du$, $\sqrt{G}\,dv$ при положительныхъ du и dv. Что касается угла α между обѣими кривыми, то направляющіе параметры касательныхъ къ этимъ кривымъ равны соотвѣтственно $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$; отсюда имѣемъ

$$\cos\alpha=\frac{S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}}=\frac{F}{\sqrt{EG}},$$

и, слѣдовательно,

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Выполнивъ умноженіе, мы придемъ къ прежнему выраженію элемента поверхности. По поводу формулы для $\cos\alpha$ можно замѣтить, что коэффиціентъ F равенъ нулю, если оба семейства кривыхъ (u) и (v) образуютъ ортогональную сѣть, и при томъ только въ этомъ случаѣ.

Если поверхность S обращается въ плоскость, то мы опять приходимъ къ найденному выше выраженію (§ 128). Въ самомъ дѣлѣ, полагая $\psi(u, v)=0$, имѣемъ

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2;\quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,$$

и, по правилу возведенія въ квадратъ опредѣлителя, получимъ

$$\Delta^2=\left\{\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}^2=\begin{vmatrix}E & F\\ F & G\end{vmatrix}=EG-F^2.$$

Такимъ образомъ $\sqrt{EG-F^2}$ обращается въ $|\Delta|$.

Примѣры. — 1. Пусть требуется найти площадь той части поверхности S, представляемой уравненіемъ $z=f(x, y)$, которая проектируется на плоскость xOy областью R, причемъ въ этой области функція $f(x, y)$ и ея производныя $p=\frac{\partial f}{\partial x}$ и $q=\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны. Принимая x и y за независимыя перемѣнныя, получимъ $E=1+p^2$, $F=pq$, $G=1+q^2$, и искомая площадь представится двойнымъ интеграломъ

$$\mathcal{A}=\iint_{(R)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=\iint_{(R)}\frac{dx\,dy}{\cos\gamma},\qquad (30)$$

гдѣ γ обозначаетъ острый уголъ, образуемый нормалью къ поверхности съ осью Oz.

2. Вычислимъ площадь части поверхности вращенія, заключающейся между двумя параллелями. Примемъ ось поверхности за ось Oz, и пусть будетъ $z=f(x)$ уравненіе меридіана въ плоскости xOz. Принимая за независимыя перемѣнныя полярныя координаты ϱ и ω проекціи какой-нибудь точки поверхности на плоскость xOy, имѣемъ для координатъ этой точки поверхности выраженія

$$x=\varrho\cos\omega, \quad y=\varrho\sin\omega, \quad z=f(\varrho).$$

Отсюда

$$ds^2=d\varrho^2\,[1+f'^2(\varrho)]+\varrho^2\,d\omega^2,$$
$$E=1+f'^2(\varrho), \quad F=0, \quad G=\varrho^2.$$

Чтобы получить часть поверхности, заключающуюся между параллелями съ радіусами ϱ_1 и ϱ_2 $(\varrho_1<\varrho_2)$, очевидно, нужно измѣнять ϱ отъ ϱ_1 до ϱ_2, и ω — отъ 0 до 2π. Слѣдовательно, для искомой площади имѣемъ

$$\mathcal{A}=\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}d\varrho\int_0^{2\pi}\varrho\sqrt{1+f'^2(\varrho)}\,d\omega=2\pi\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\varrho\sqrt{1+f'^2(\varrho)}\,d\varrho,$$

и намъ остается выполнить только одну квадратуру. Обозначая черезъ s дугу меридіана, находимъ

$$ds^2=d\varrho^2+dz^2=d\varrho^2\,[1+f'^2(\varrho)];$$

поэтому предыдущую формулу можно представить въ видѣ

$$\mathcal{A}=\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}2\pi\varrho\,ds.$$

Геометрическое истолкованіе этой формулы очевидно: $2\pi\varrho\,ds$ есть боковая поверхность усѣченнаго конуса, образующая котораго равна ds, а радіусъ средней окружности равенъ ϱ. Разсматривая площадь, заключающуюся между двумя безконечно, близкими параллелями, какъ боковую поверхность усѣченнаго конуса, мы и придемъ къ формулѣ для $\mathcal{A}$.

Напримѣръ, если мы имѣемъ параболоидъ, образованный вращеніемъ параболы $x^2=2pz$, то площадь части поверхности этого параболоида, ограниченная параллелью радіуса r, равна

$$\mathcal{A}=2\pi\int_0^r\frac{\varrho}{p}\sqrt{\varrho^2+p^2}\,d\varrho=\frac{2\pi}{3p}\left[(r^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right].$$

III.—РАСШИРЕНІЕ ПОНЯТІЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА.— ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ.

133. Интегралы, у которыхъ область интегрированія безконечна или подъинтегральная функція прерывна. — Пусть будетъ $f(x, y)$ функція, непрерывная во всей части плоскости, лежащей внѣ замкнутой кривой Γ. Двойной интегралъ отъ $f(x, y)$, взятый въ области, заключающейся между кривою Γ и другою замкнутою кривою C, заключающею внутри себя кривую Γ, имѣетъ конечное значеніе. Пусть кривая C, расширяясь, неограниченно удаляется всѣми своими точками въ безконечность; если при этомъ интегралъ стремится къ нѣкоторому предѣлу, то этотъ предѣлъ называется двойнымъ интеграломъ отъ $f(x, y)$, распространеннымъ на область плоскости, расположенную внѣ Γ.

Предположимъ сначала, что внѣ кривой Γ функція $f(x, y)$ сохраняетъ постоянный знакъ; пусть, напримѣръ, она остается положительною. Въ этомъ случаѣ предѣлъ двойного интеграла не зависитъ отъ вида пограничной кривой C. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ послѣдовательность замкнутыхъ кривыхъ, содержащихся одна въ другой, и такихъ, что при неограниченномъ возрастаніи n кривая C_n неограниченно удаляется по всѣмъ направленіямъ. Если двойной интегралъ I_n, распространенный на область, заключающуюся между Γ и C_n, стремится къ нѣкоторому предѣлу I, то тоже самое будетъ имѣть мѣсто для всякой другой послѣдовательности кривыхъ $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m, \ldots$, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ I'_m двойной интегралъ, распространенный на область, заключающуюся между Γ и C'_m. Можно выбрать число n настолько большимъ, чтобы кривая C_n была вся расположена внѣ кривой C'_m; слѣдовательно, мы будемъ имѣть $I'_m < I_n < I$. Но интегралъ I'_m возрастаетъ вмѣстѣ съ m; слѣдовательно, онъ имѣетъ нѣкоторый предѣлъ $I' \leqq I$. Точно такъ же можно доказать, что $I \leqq I'$. Отсюда слѣдуетъ, что оба предѣла равны: $I' = I$.

Разсмотримъ, напримѣръ, функцію $f(x, y)$, имѣющую внѣ круга съ центромъ въ началѣ координатъ и съ радіусомъ r видъ

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{(x^2 + y^2)^\alpha},$$

причемъ числитель $\psi(x, y)$ всегда содержится между двумя положительными числами m и M. Примемъ за кривыя C окружности, концентрическія съ первою. Двойной интегралъ, рас-

пространенный на плоское кольцо, заключающееся между двумя окружностями съ радіусами r и R, будетъ имѣть выраженіе

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_r^R \frac{\psi(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega)\,\rho\,d\rho}{\rho^{2\alpha}};$$

слѣдовательно, этотъ двойной интегралъ содержится между двумя интегралами

$$2\pi m\int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}},\qquad 2\pi M\int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}.$$

При неограниченномъ возрастаніи R разсматриваемый интегралъ имѣетъ предѣлъ, если $2\alpha-1>1$, т.-е. если $\alpha>1$ (§ 90). Напротивъ, при $\alpha\leqq 1$, интегралъ неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ R.

Когда нельзя найти никакой замкнутой кривой, внѣ которой функція $f(x, y)$ сохраняла бы постоянный знакъ, то, какъ и выше (§ 89), можно доказать, что интегралъ $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$ имѣетъ предѣлъ въ томъ случаѣ, если имѣетъ предѣлъ интегралъ $\int\int |f(x, y)|\,dx\,dy$. Но если этотъ послѣдній интегралъ неограниченно возрастаетъ, то первый интегралъ будетъ неопредѣленнымъ. Вотъ интересный примѣръ, данный Кэли (Cayley). Пусть будетъ $f(x, y)=\sin(x^2+y^2)$; интегрируя сначала внутри квадрата со стороною a, мы получимъ для двойного интеграла выраженіе

$$\int_0^a dx\int_0^a \sin(x^2+y^2)\,dy$$
$$=\int_0^a \sin x^2\,dx\times\int_0^a \cos y^2\,dy+\int_0^a \cos x^2\,dx\times\int_0^a \sin y^2\,dy.$$

При неограниченномъ возрастаніи a интегралы въ правой части имѣютъ предѣлъ (§ 91). Можно доказать, что этотъ предѣлъ равенъ $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, и такимъ образомъ правая часть имѣетъ предѣломъ π. Если же мы будемъ интегрировать внутри четверти круга съ радіусомъ R, то получимъ для двойного интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\int_0^R \rho\sin\rho^2\,d\rho=-\frac{\pi}{4}[\cos\rho^2]_0^R=\frac{\pi}{4}[1-\cos R^2],$$

и при неограниченномъ возрастаніи R правая часть дѣлается неопредѣленною.

Такимъ же образомъ можно дать опредѣленіе двойного интеграла отъ функціи $f(x, y)$, которая обращается въ безконечность въ какой-нибудь точкѣ или вдоль какой-нибудь линіи. Прежде всего нужно исключить изъ области интегрированія эту точку или эту линію, окруживъ ихъ контуромъ, весьма малымъ или весьма близкимъ къ линіи прерывности, и затѣмъ неограниченно уменьшать этотъ контуръ. Напримѣръ, если вблизи точки (a, b) функція $f(x, y)$ можетъ быть представлена въ видѣ

$$f(x, y)=\frac{\psi(x, y)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^{\alpha}},$$

причемъ абсолютное значеніе функціи $\psi(x, y)$ заключается между двумя положительными числами m и M, то двойной интегралъ отъ $f(x, y)$ въ области, не содержащей никакихъ точекъ прерывности, кромѣ точки (a, b), будетъ имѣть конечное значеніе, если α меньше единицы, и только въ этомъ случаѣ.

184. Функція $B(p, q)$. — Выше мы предполагали, что контуръ C_n неограниченно удаляется по всѣмъ направленіямъ; но, очевидно, можно предположить, что удаляется въ безконечность только часть этого контура. Это имѣетъ мѣсто въ приведенномъ выше примѣрѣ Кэли, а также и въ слѣдующемъ. Положимъ

$$f(x, y)=4x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2},$$

гдѣ $p>0$, $q>0$. Функція $f(x, y)$ непрерывна и положительна въ координатномъ углѣ xOy. Интегрируя эту функцію сначала внутри квадрата со стороною a, образованнаго осями координатъ и прямыми $x=a$, $y=a$, мы получимъ для двойного интеграла выраженіе

$$\int_0^a 2x^{2p-1}e^{-x^2}dx\times\int_0^a 2y^{2q-1}e^{-y^2}dy.$$

При неограниченномъ возрастаніи a каждый изъ предыдущихъ интеграловъ имѣетъ предѣлъ. Въ самомъ дѣлѣ, если въ интегралѣ, опредѣляющемъ функцію $\Gamma(p)$ (§ 92),

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-t}dt,$$

мы положимъ $t=x^2$, то получимъ

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}2x^{2p-1}e^{-x^2}dx. \qquad (31)$$

Слѣдовательно, искомый двойной интегралъ имѣетъ предѣломъ произведеніе $\Gamma(p)\,\Gamma(q)$.

Проинтегрируемъ теперь ту же функцію внутри четверти круга, ограниченной осями координатъ и окружностью $x^2+y^2=R^2$. Вводя полярныя координаты, мы получимъ для двойного интеграла выраженіе

$$\int_0^R 2\rho^{(2p+q)-1}e^{-\rho^2}d\rho\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi.$$

Такимъ образомъ, полагая

$$B(p, q)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi\, d\varphi, \qquad (32)$$

мы найдемъ, что при неограниченномъ возрастаніи R искомый двойной интегралъ имѣетъ предѣломъ

$$\Gamma(p+q)\,B(p, q).$$

Приравнявъ оба предѣла, получимъ соотношеніе

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\,B(p, q). \qquad (33)$$

Интегралъ $B(p, q)$ называется Эйлеровымъ интеграломъ перваго вида. Полагая $\sin^2\varphi=t$, мы можемъ представить его въ видѣ

$$B(p, q)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt. \qquad (34)$$

Формула (33) приводитъ вычисленіе функціи $B(p, q)$ къ вычисленію функціи Γ. Напримѣръ, полагая, $p=q=\frac{1}{2}$, получимъ

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\Gamma(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\varphi=\pi,$$

и, слѣдовательно, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Отсюда, по формулѣ (31), имѣемъ

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Вообще, если $q=1-p$, и если p заключается между 0 и 1, то

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)=B(p, 1-p)=\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1}\frac{dt}{t}.$$

Ниже мы увидимъ, что этотъ интегралъ равенъ $\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

135. Интегралы по поверхности. — Опредѣленіе интеграловъ по поверхности аналогично опредѣленію криволинейныхъ интеграловъ. Пусть будетъ S часть поверхности, ограниченная одною или нѣсколькими пограничными кривыми Γ. Мы будемъ предполагать, что эта поверхность имѣетъ двѣ различныхъ стороны, такъ что, если бы одну сторону мы окрасили, напримѣръ, въ красный цвѣтъ, а другую — въ голубой, то было бы невозможно перейти съ красной стороны на голубую непрерывнымъ путемъ, расположеннымъ на поверхности, не пересѣкая ни одной пограничной кривой *). Будемъ разсматривать поверхность S, какъ матеріальную поверхность, имѣющую нѣкоторую толщину. Пусть будутъ m, m' двѣ безконечно близкія точки, взятыя на двухъ различныхъ сторонахъ этой поверхности.

*) Легко получить поверхность, которая не удовлетворяла бы этому условію; нужно только согнуть прямоугольную полосу бумаги $ABCD$, и склеить сторону BC со стороною AD такъ, чтобы точка C совпала съ точкою A и точка B — съ точкою D.

Проведемъ въ точкѣ m нормаль mn, не пересѣкающую поверхности; для краткости мы будемъ говорить, что направленіе, опредѣленное такимъ образомъ на нормали, соотвѣтствуетъ той сторонѣ поверхности, на которой находится точка m. Направленіе нормали къ другой сторонѣ поверхности въ точкѣ m' будетъ противоположно первому.

Пусть будетъ $z=\varphi(x, y)$ уравненіе данной поверхности, и пусть будетъ S часть этой поверхности, ограниченная контуромъ Γ и пересѣкающаяся съ каждою прямою, параллельною оси Oz, не болѣе, чѣмъ въ одной точкѣ. Предположимъ, что функція $\varphi(x, y)$ непрерывна внутри области A, ограниченной контуромъ C, представляющимъ проекцію на плоскость xOy контура Γ. Эта поверхность S имѣетъ, очевидно, двѣ стороны. Соотвѣтствующія направленія нормали къ S образуютъ съ Oz соотвѣтственно острый и тупой уголъ; назовемъ верхнею стороною поверхности ту ея сторону, для которой нормаль образуетъ съ Oz острый уголъ. Пусть будетъ $P(x, y, z)$ функція трехъ перемѣнныхъ x, y, z, непрерывная въ нѣкоторой части пространства, содержащей поверхность S. Если въ этой функціи мы замѣнимъ z черезъ $\varphi(x, y)$, то получимъ нѣкоторую функцію только двухъ перемѣнныхъ x и y, и естественно, по аналогіи съ криволинейными интегралами, назвать интеграломъ по поверхности двойной интегралъ

$$\iint_{(A)} P[x, y, \varphi(x, y)]\, dx\, dy, \tag{35}$$

распространенный на область A плоскости xy. Предположимъ, что координаты (x, y, z) точекъ этой поверхности выражены черезъ два вспомогательныхъ перемѣнныхъ u и v такимъ образомъ, что точки части S этой поверхности находятся во взаимно однозначномъ соотвѣтствіи съ точками нѣкоторой части R плоскости (u, v). Пусть будетъ $d\sigma$ элементъ поверхности S, и γ — острый уголъ между осью Oz и нормалью къ верхней сторонѣ поверхности S. Предыдущій двойной интегралъ равенъ (см. §§ 131, 132) двойному интегралу

$$\iint_{(R)} P(x, y, z) \cos\gamma\, d\sigma, \tag{36}$$

гдѣ x, y, z выражены въ функціи отъ u и v. Это новое выраженіе общѣе перваго, такъ какъ въ немъ $\cos\gamma$ можетъ имѣть два значенія въ зависимости отъ того, которую сторону поверхности мы разсматриваемъ. Если уголъ γ — острый, какъ мы это до сихъ поръ предполагали, то мы будемъ говорить, что двойной интегралъ (35) или (36) есть интегралъ по поверхности

$$\iint P(x, y, z)\, dx\, dy,$$

распространенный на верхнюю сторону поверхности S. Если же мы примемъ за γ тупой уголъ, то всѣ элементы двойного интеграла перемѣнятъ знакъ, и мы будемъ говорить, что новый двойной интегралъ представляетъ интегралъ по поверхности $\iint P\,dx\,dy$, распространенный на нижнюю сторону поверхности S. Такимъ образомъ интегралъ по поверхности $\iint P\,dx\,dy$ равенъ $\pm$ двойному интегралу (35) въ зависимости отъ того, на какую сторону поверхности S этотъ интегралъ распространяется.

Это опредѣленіе двойного интеграла позволяетъ провести далѣе аналогію между простыми и двойными интегралами. Такъ, переставляя предѣлы въ простомъ интегралѣ, мы измѣняемъ знакъ интеграла, тогда какъ для двойного интеграла мы до сихъ поръ не имѣли ничего подобнаго. Принимая обобщенное опредѣленіе двойного интеграла, можно сказать, что интегралъ $\int\int f(x,y)\,dx\,dy$, который мы до сихъ поръ разсматривали, есть интегралъ по поверхности, распространенный по верхней сторонѣ плоскости xy, тогда какъ тотъ же самый интегралъ, взятый съ обратнымъ знакомъ, представляетъ двойной интегралъ, взятый по нижней сторонѣ плоскости. Двумъ направленіямъ пути интегрированія въ простомъ интегралѣ соотвѣтствуютъ въ двойномъ интегралѣ двѣ стороны плоскости xy.

Въ выраженіи (36) интеграла по поверхности, очевидно, не заключается, какъ необходимое требованіе, чтобы поверхность пересѣкалась прямою, параллельною оси Oz, только въ одной точкѣ.

Такимъ же образомъ можно дать опредѣленіе интегралovъ по поверхности

$$\int\int Q(x,y,z)\,dy\,dz, \quad \int\int R(x,y,z)\,dx\,dz,$$

а также и болѣе общаго интеграла

$$\int\int P(x,y,z)\,dx\,dy+Q(x,y,z)\,dy\,dz+R(x,y,z)\,dx\,dz;$$

послѣдній интегралъ можетъ быть также представленъ въ видѣ

$$\int\int [P\cos\gamma+Q\cos\alpha+R\cos\beta]\,d\sigma,$$

гдѣ α, β, γ обозначаютъ углы, образуемые съ осями координатъ направленіемъ нормали, соотвѣтствующимъ выбранной сторонѣ поверхности.

Интегралы по поверхности особенно полезны въ Математической Физикѣ.

136. Формула Стокса. — Пусть будетъ L кривая двойной кривизны, вдоль которой функціи $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны. Криволинейный интегралъ

$$\int_{(L)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

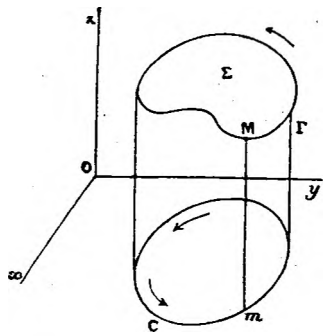
взятый вдоль L, опредѣляется такъ же, какъ и криволинейный интегралъ, взятый вдоль плоской кривой (§ 93); мы не будемъ возвращаться къ этому опредѣленію. Если кривая L — замкнутая, то интегралъ, очевидно, распадается на три криволинейныхъ интеграла, взятыхъ вдоль замкнутыхъ плоскихъ кривыхъ. Прилагая къ каждому изъ этихъ интегралovъ формулу Грина, мы видимъ, что разсматриваемый криволинейный интегралъ можно замѣнить суммою трехъ двойныхъ интегралovъ. Введеніе интегралovъ по поверхности позволяетъ представить окончательный результатъ въ очень простомъ видѣ.

Пусть мы имѣемъ часть двусторонней поверхности Σ (см. § 135); предположимъ, для опредѣленности, что эта часть поверхности ограничена только одною кривою l. Каждой сторонѣ поверхности соотвѣт-

ствуетъ на контурѣ Γ опредѣленное прямое направленіе обхода. Условимся въ слѣдующемъ обозначеніи: проведемъ въ какой-нибудь точкѣ M контура нормаль Mn въ направленіи, соотвѣтствующемъ разсматриваемой сторонѣ поверхности, и вообразимъ наблюдателя, у котораго ноги находятся въ точкѣ M, а голова — въ точкѣ n. Мы будемъ называть прямымъ направленіемъ обхода то направленіе, по которому этотъ наблюдатель долженъ описывать кривую Γ, чтобы имѣть поверхность Σ съ лѣвой стороны. Двумъ сторонамъ поверхности Σ соотвѣтствуютъ два прямыхъ направленія обхода на контурѣ Γ, противоположныхъ между собою.

Разсмотримъ сначала такую часть поверхности Σ, чтобы каждая прямая, параллельная оси Oz, встрѣчала эту часть не болѣе, чѣмъ въ одной точкѣ, и предположимъ, что трехгранный уголъ $Oxyz$ имѣетъ расположеніе, указанное на черт. 30, гдѣ предполагается, что плоскость yOz совпадаетъ съ плоскостью листа, а ось Ox направлена вверхъ отъ листа.

Черт. 30.



Контуру Γ на поверхности Σ соотвѣтствуетъ на плоскости xy замкнутый контуръ C, и оба эти контура описываются одновременно въ направленіяхъ, указанныхъ стрѣлками. Обозначимъ черезъ $P(x, y, z)$ функцію, непрерывную въ части пространства, содержащей поверхность Σ; пусть будетъ $z = \varphi(x, y)$ уравненіе поверхности Σ. Криволинейный интегралъ $\int_{(\Gamma)} P(x, y, z)\, dx$ тождественъ съ криволинейнымъ интеграломъ

$$\int_{(C)} P[x, y, \varphi(x, y)]\, dx,$$

взятымъ вдоль плоской кривой C. Примѣнимъ къ послѣднему интегралу формулу Грина (§ 126). Обозначая, для большей точности,

$$\overline{P(x, y)} = P[x, y, \varphi(x, y)],$$

имѣемъ

$$\frac{\overline{\partial P(x, y)}}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

гдѣ α, β, γ — углы, образуемые направленіемъ нормали къ верхней сторонѣ поверхности Σ съ осями координатъ. Отсюда, по теоремѣ Грина, получимъ

$$\int_{(C)} \overline{P(x, y)}\, dx = \iint_{(A)} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) \frac{dx\, dy}{\cos\gamma},$$

гдѣ двойной интегралъ распространенъ на область A плоскости xy, содержащуюся внутри контура C. Но правая часть есть не что иное, какъ интегралъ по поверхности

$$\iint \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma,$$

взятый по верхней сторонѣ поверхности Σ, и мы можемъ написать

$$\int_{(\Gamma)} P(x, y, z)\, dx = \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Эта формула, очевидно, остается вѣрною и для другой стороны поверхности, если только мы перемѣнимъ направленіе обхода контура Γ.

Какъ и формула Грина, она можетъ быть распространена на поверхность произвольнаго вида. Перемѣщая въ круговомъ порядкѣ x, y, z, мы получимъ еще двѣ такихъ же формулы

$$\int_{(\Gamma)} Q(x, y, z)\, dy = \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\, dy\, dz,$$
$$\int_{(\Gamma)} R(x, y, z)\, dz = \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial R}{\partial y}\, dy\, dz - \frac{\partial R}{\partial x}\, dx\, dz;$$

складывая эти три формулы, мы приходимъ къ общей формулѣ Стокса (Stokes)

$$\left.\begin{aligned}&\int_{(\Gamma)} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz \\ &= \iint_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\, dz.\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Связь между направленіемъ обхода на контурѣ (Γ) и тѣмъ, на какую изъ двухъ сторонъ поверхности распространяется двойной интегралъ, указана выше, въ началѣ этого параграфа.

IV. — АНАЛИТИЧЕСКІЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ ПРИЛОЖЕНІЯ.

137. Вычисленіе объемовъ. — Разсмотримъ, какъ мы это дѣлали выше, часть пространства, ограниченную поверхностью S, расположенною надъ плоскостью xOy, самою этою плоскостью и цилиндромъ, образующія котораго параллельны оси Oz. Предположимъ, что сѣченіе цилиндра плоскостью $z=0$ есть контуръ, образованный, какъ на черт. 25, двумя прямыми, параллельными оси Oy, и двумя дугами кривыхъ APB, $A'QB'$. Если $z=f(x, y)$ есть уравненіе поверхности S, то объемъ, ограниченный такимъ образомъ, представится интеграломъ (§ 124)

$$V = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$

Но интегралъ $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy$ представляетъ площадь $\mathcal{A}$ сѣченія этого объема плоскостью, параллельною плоскости yz; поэтому предыдущую формулу можно также представить въ видѣ

$$V = \int_a^b \mathcal{A}\, dx. \quad (39)$$

Очевидно, что каждый объемъ, ограниченный произвольною поверхностью, равенъ алгебраической суммѣ нѣкотораго числа объемовъ, ограниченныхъ такъ, какъ было сказано выше. Такъ, напримѣръ, для вычисленія объема, ограниченнаго замкнутою выпуклою поверхностью, мы можемъ описать около этой поверхности цилиндръ съ образующими, параллельными оси Oz, и вычислить разность двухъ объемовъ, подобныхъ разсмотрѣнному выше. Такимъ образомъ формула (39) примѣнима ко всякому объему, ограниченному двумя параллельными плоскостями $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ и поверхностью произвольнаго вида, причемъ $\mathfrak{A}$ обозначаетъ площадь сѣченія этого объема плоскостью, параллельною двумъ предыдущимъ плоскостямъ. Предположимъ, что промежутокъ (a, b) разбитъ на меньшіе промежутки $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$; пусть будутъ $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_i, \ldots$ площади сѣченій, соотвѣтствующихъ плоскостямъ $x=a, x=x_1, \ldots$

Опредѣленный интегралъ $\int_a^b \mathfrak{A}\,dx$ есть предѣлъ суммы

$$\mathfrak{A}_0(x_1-a)+\mathfrak{A}_1(x_2-x_1)+\ldots+\mathfrak{A}_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\ldots.$$

Геометрическій смыслъ этой суммы очевиденъ. Въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ, $\mathfrak{A}_{i-1}(x_i-x_{i-1})$ представляетъ объемъ цилиндрическаго слоя, основаніемъ котораго служитъ сѣченіе, образованное плоскостью $x=x_{i-1}$, а высотою — разстояніе между двумя сосѣдними плоскостями. Слѣдовательно, искомый объемъ есть предѣлъ суммы такихъ безконечно тонкихъ цилиндрическихъ слоевъ, что совершенно согласуется съ обычнымъ понятіемъ объ объемѣ.

Если выраженіе площади $\mathfrak{A}$ въ функціи отъ x извѣстно, то искомый объемъ получается посредствомъ одной квадратуры. Предположимъ, напримѣръ, что требуется опредѣлить объемъ, ограниченный поверхностью вращенія и двумя плоскостями, перпендикулярными къ ея оси. Примемъ эту ось за ось Ox, и пусть будетъ $z=f(x)$ уравненіе меридіана въ плоскости xz; въ этомъ случаѣ сѣченіе объема плоскостью, параллельною плоскости yz, есть кругъ радіуса $f(x)$, и искомый объемъ равенъ $\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$.

Найдемъ еще объемъ части эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

заключающейся между двумя плоскостями $x=x_0$, $x=X$. Сѣченіе эллипсоида плоскостью, параллельною плоскости $x=0$, есть эллипсъ, полуоси котораго равны $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a}}$; слѣдовательно, искомый объемъ равенъ

$$V=\int_{x_0}^{X}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(X-x_0-\frac{X^3-x_0^3}{3a^2}\right).$$

Чтобы имѣть объемъ всего эллипсоида, достаточно положить $x_0=-a$, $X=+a$, что даетъ $\frac{4}{3}\pi abc$.

138. Объемъ, ограниченный линейчатою поверхностью. — Когда площадь $\mathcal{A}$ есть цѣлая функція второй степени отъ x, то объемъ выражается очень просто черезъ площади B, B' двухъ крайнихъ сѣченій, черезъ площадь b средняго сѣченія и черезъ разстояніе h между двумя крайними сѣченіями. Принявъ плоскость средняго сѣченія за плоскость yz, имѣемъ

$$V=\int_{-a}^{+a}(lx^2+2mx+n)\,dx=2l\frac{a^3}{3}+2na;$$

съ другой стороны, мы имѣемъ

$$h=2a,\quad b=n,\quad B=la^2+2ma+n,\quad B'=la^2-2ma+n,$$

откуда $n=b$, $a=\frac{h}{2}$, $2la^2=B+B'-2b$. Отсюда получаемъ формулу

$$V=\frac{h}{6}[B+B'+4b]. \tag{40}$$

Въ частности, формула (40) примѣнима къ объему, ограниченному двумя параллельными плоскостями и какою-нибудь линейчатою поверхностью. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ $y=ax+p$, $z=bx+q$ уравненія подвижной прямой, гдѣ a, b, p, q суть непрерывныя функціи перемѣннаго параметра t, принимающія опять начальныя значенія послѣ перехода t отъ t_0 къ T. Эта прямая опишетъ линейчатую поверхность, и площадь сѣченія этой поверхности плоскостью, параллельною плоскости $x=0$, будетъ имѣть выраженіе (§ 94)

$$\mathcal{A}=\int_{t_0}^{T}(ax+p)\,(b'x+q')\,dt,$$

гдѣ a', b', p', q' обозначаютъ производныя отъ a, b, p, q по t; эти производныя могутъ быть прерывными для конечнаго числа значеній параметра t между t_0 и T, что будетъ въ томъ случаѣ, если линейчатая поверхность состоитъ изъ частей различныхъ поверхностей. Послѣдній интегралъ можно также представить въ видѣ

$$\mathcal{A}=x^2\int_{t_0}^{T}ab'\,dt+x\int_{t_0}^{T}(aq'+pb')\,dt+\int_{t_0}^{T}pq'\,dt;$$

интегралы въ правой части, очевидно, на зависятъ отъ x. Слѣдовательно, къ искомому объему примѣнима формула (40). Можно замѣтить, что изъ нея можно получить выраженія большей части объемовъ, вычисляемыхъ въ элементарной геометріи.

139. Задача Вивіани. — Опишемъ на радіусѣ $OA=R$ шара, какъ на діаметрѣ, кругъ C и найдемъ объемъ части шара, заключающейся внутри круглаго цилиндра, для котораго кругъ C служитъ перпендикулярнымъ сѣченіемъ. Примемъ центръ шара за начало координатъ. Четверть искомаго объема будетъ равна двойному интегралу

$$\frac{V}{4}=\iint\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

распространенному на половину круга, описаннаго на OA, какъ на діаметрѣ. Перейдемъ къ полярнымъ координатамъ ϱ, ω. Уголъ ω можетъ измѣняться отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, радіусъ ϱ отъ 0 до $R\cos\omega$, и мы имѣемъ

$$\frac{V}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\omega\int_0^{R\cos\omega}\varrho\sqrt{R^2-\varrho^2}\,d\varrho=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\left[(R^2-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\omega}d\omega,$$

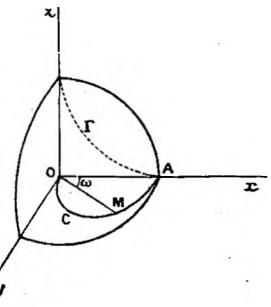
или

$$\frac{V}{4}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R^3-R^3\sin^3\omega)\,d\omega=\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Вычитая изъ шара часть, заключающуюся внутри разсматриваемаго цилиндра и внутри другого такого же цилиндра, расположеннаго симметрично съ первымъ относительно оси Oz, мы найдемъ, что объемъ оставшейся части равенъ

$$\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{8R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{9}R^3.$$

Черт. 31.



Площадь Ω части поверхности шара, содержащейся внутри предыдущаго цилиндра, получится изъ формулы

$$\Omega=4\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Замѣняя p и q ихъ значеніями $-\frac{x}{z}$ и $-\frac{y}{z}$ и переходя къ полярнымъ координатамъ, находимъ

$$\Omega=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\omega\int_0^{R\cos\omega}\frac{R\,\varrho\,d\varrho}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}-R\left(\sqrt{R^2-\varrho^2}\right)_0^{R\cos\omega}d\omega,$$

или

$$\Omega=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\omega)\,d\omega=4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Вычитая изъ поверхности всей сферы часть, содержащуюся внутри двухъ вышеупомянутыхъ цилиндровъ, мы получимъ для остающейся части выраженіе

$$4\pi R^2-8R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8R^2.$$

140. Вычисленіе нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ.— Пользуясь нѣкоторыми изъ доказанныхъ выше теоремъ, какъ, напримѣръ, теоремами дифференцированія или интегрированія подъ знакомъ интеграла, мы можемъ находить значенія нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ, не зная соотвѣтствующихъ неопредѣленныхъ интеграловъ. Приведемъ нѣсколько примѣровъ. Пусть будетъ

$$A=F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx.$$

По формулѣ дифференцированія подъ знакомъ интеграла находимъ

$$\frac{dA}{d\alpha}=\frac{\log(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}+\int_0^{\alpha}\frac{x\,dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)}.$$

Разлагая на простыя дроби, имѣемъ

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{x+\alpha}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)$$

и, слѣдовательно,

$$\int_0^{\alpha}\frac{x\,dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=-\frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arc\,tg}\alpha.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$\frac{dA}{d\alpha}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arc\,tg}\alpha+\frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)},$$

и, замѣчая, что при $\alpha=0$ функція A равна нулю, мы можемъ написать

$$A=\int_0^{\alpha}\frac{\log(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}\,d\alpha+\int_0^{\alpha}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arc\,tg}\alpha\,d\alpha.$$

Интегрируя первый интегралъ по частямъ, получимъ окончательно

$$A=\tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\alpha\log(1+\alpha^2).$$

Разсмотримъ, далѣе, функцію x^y. Эта функція непрерывна, когда x измѣняется между 0 и 1, а y — между двумя положительными числами a и b. Слѣдовательно, по общей формулѣ (§ 123), имѣемъ

$$\int_0^1 dx\int_a^b x^y\,dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx.$$

Но $\int_0^1 x^y\,dx=\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right)_0^1=\frac{1}{y+1}$; поэтому правая часть равна

$$\int_a^b \frac{dy}{y+1}=\log\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

Съ другой стороны, мы имѣемъ $\int_a^b x^y\,dy=\left(\frac{x^y}{\log x}\right)_a^b=\frac{x^b-x^a}{\log x}$; отсюда получаемъ

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\,dx=\log\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

Вообще, пусть будутъ $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функціи, удовлетворяющія условію $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, и пусть будутъ x_0, x_1, y_0, y_1 нѣкоторыя постоянныя. По формулѣ интегрированія подъ знакомъ интеграла имѣемъ

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx,$$

т.-е.

$$\int_{x_0}^{x_1} [P(x, y_1)-P(x, y_0)]\,dx = \int_{y_0}^{y_1} [Q(x_1, y)-Q(x_0, y)]\,dy. \quad (41)$$

Изъ этой формулы Коши вывелъ значенія многихъ опредѣленныхъ интеграловъ. Формула (41) имѣетъ простую связь съ формулою Грина; въ сущности, она представляетъ частный случай послѣдней. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы получить формулу (41), достаточно примѣнить формулу Грина къ криволинейному интегралу $\int P\,dx+Q\,dy$, взятому вдоль контура прямоугольника, образованнаго прямыми $x=x_0$, $x=x_1$, $y=y_0$, $y=y_1$.

Вотъ еще примѣръ, въ которомъ опредѣленный интегралъ вычисляется при помощи совершенно особаго пріема. Интегралъ

$$F(\alpha) = \int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

имѣетъ конечное значеніе, если $|\alpha$ отлично отъ единицы. Эта функція $F(\alpha)$ обладаетъ слѣдующими свойствами:

1. $F(-\alpha)=F(\alpha)$. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$F(-\alpha) = \int_0^\pi \log(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx,$$

и, измѣняя x на $\pi-y$, получимъ

$$F(-\alpha) = \int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos y+\alpha^2)\,dy=F(\alpha).$$

2. $F(a^2)=2F(a)$. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ написать

$$2F(a)=F(a)+F(-a),$$

или

$$2F(a)=\int_0^{\pi}[\log(1-2a\cos x+a^2)+\log(1+2a\cos x+a^2)]\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}\log(1-2a^2\cos 2x+a^4)\,dx.$$

Замѣняя $2x$ черезъ y, получимъ

$$2F(a)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log(1-2a^2\cos y+a^4)\,dy+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\log(1-2a^2\cos y+a^4)\,dy;$$

полагая въ послѣднемъ интегралѣ $y=2\pi-z$, найдемъ

$$\int_{\pi}^{2\pi}\log(1-2a^2\cos y+a^4)\,dy=\int_0^{\pi}\log(1-2a^2\cos z+a^4)\,dz,$$

и, слѣдовательно,

$$2F(a)=\frac{1}{2}F(a^2)+\frac{1}{2}F(a^2)=F(a^2).$$

Изъ предыдущей формулы послѣдовательно выводимъ

$$F(a)=\frac{1}{2}F(a^2)=\frac{1}{4}F(a^4)\ldots=\frac{1}{2^n}F(a^{2^n}).$$

Если $|a|>1$, то при неограниченномъ увеличеніи n количество a^{2^n} стремится къ нулю; вмѣстѣ съ тѣмъ стремится къ нулю и $F(a^{2^n})$, такъ какъ логариѳмъ подъ знакомъ интеграла стремится къ нулю. Слѣдовательно, при $|a|<1$ имѣемъ

$$F(a)=0.$$

Если же $|a|>1$, то полагая $a=\frac{1}{\beta}$, получимъ

$$F(a)=\int_0^{\pi}\log\left(1-\frac{2\cos x}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}\right)dx$$
$$=\int_0^{\pi}\log(1-2\beta\cos x+\beta^2)\,dx-\pi\log\beta^2;$$

такъ какъ $|\beta|<1$, то остается

$$F(a)=-\pi\log\beta^2=\pi\log a^2.$$

Наконецъ, можно доказать (стр. 213, упр. 6), что $F(\pm 1)=0$. Слѣдовательно, функція $F(a)$ непрерывна при всѣхъ значеніяхъ a.

141. Приближенное значеніе $\log \Gamma(n+1)$.— Существуетъ также много другихъ разнообразныхъ пріемовъ, посредствомъ которыхъ можно получать если не точное, то, по крайней мѣрѣ, приближенное значеніе опредѣленнаго интеграла. Мы приведемъ здѣсь одинъ примѣръ. По опредѣленію, имѣемъ (§ 92)

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx.$$

Функція $x^n e^{-x}$ имѣетъ maximum при $x=n$, и ея наибольшее значеніе равно $n^n e^{-n}$. При возрастаніи x отъ 0 до n функція $x^n e^{-x}$ возрастаетъ отъ 0 до $n^n e^{-n}\,(n>0)$, а, при дальнѣйшемъ возрастаніи x отъ n до $+\infty$, $x^n e^{-x}$ убываетъ отъ $n^n e^{-n}$ до 0. Функція $n^n e^{-n} e^{-t^2}$ также возрастаетъ отъ 0 до $n^n e^{-n}$ при возрастаніи t отъ $-\infty$ до 0 и затѣмъ убываетъ отъ $n^n e^{-n}$ до 0 при дальнѣйшемъ возрастаніи t отъ 0 до $+\infty$. Слѣдовательно, сдѣлавъ замѣну перемѣннаго

$$x^n e^{-x}=n^n e^{-n} e^{-t^2}, \qquad (42)$$

мы можемъ установить соотвѣтствіе между значеніями перемѣнныхъ x и t такъ, чтобы, при возрастаніи t отъ $-\infty$ до $+\infty$, x возрастало отъ 0 до $+\infty$.

Намъ нужно еще вычислить $\frac{dx}{dt}$. Взявъ логариѳмическія производныя отъ обѣихъ частей формулы (42), получимъ

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2tx}{x-n}.$$

Съ другой стороны, изъ той же формулы (42) имѣемъ

$$t^2=x-n-n\log\left(\frac{x}{n}\right).$$

Положимъ, для большей простоты вычисленій, $x=n+z$ и разложимъ $\log\left(1+\frac{z}{n}\right)$ по формулѣ Тэлора, ограничиваясь двумя первыми членами; мы получимъ

$$t^2=z-n\left[\frac{z}{n}-\frac{z^2}{2n^2\left(1+\theta\frac{z}{n}\right)^2}\right]=\frac{nz^2}{2(n+\theta z)^2},$$

причемъ θ заключается между нулемъ и единицею. Отсюда найдемъ послѣдовательно

$$\frac{n}{z}+\theta=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

$$\frac{2tx}{x-n}=2t\left(\frac{n}{z}+1\right)=2\left[\sqrt{\frac{n}{2}}+(1-\theta)t\right];$$

слѣдовательно, послѣ замѣны перемѣннаго получимъ

$$\Gamma(n+1)=2n^n e^{-n}\sqrt{\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt+2n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}(1-\theta)t\,dt.$$

Первый интегралъ равенъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

Второй интегралъ нельзя вычислить точно, такъ какъ θ неизвѣстно, но можно найти предѣлъ этого интеграла. Въ самомъ дѣлѣ, всѣ его элементы отрицательны между $-\infty$ и 0 и положительны между 0 и $+\infty$. Сверхъ того, по абсолютному значенію каждый изъ интеграловъ $\int_{-\infty}^{0}$, $\int_{0}^{+\infty}$ меньше интеграла $\int_{0}^{+\infty} te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}$. Слѣдовательно, мы можемъ написать

$$\Gamma(n+1)=\sqrt{2n}\,n^n e^{-n}\left(\sqrt{\pi}+\frac{\omega}{\sqrt{2n}}\right), \qquad (43)$$

гдѣ ω заключается между -1 и $+1$.

Когда n очень велико, $\frac{\omega}{\sqrt{2n}}$ очень мало, и, если мы примемъ за приближенное значеніе $\Gamma(n+1)$ выраженіе

$$\Gamma(n+1)=n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi},$$

то относительная погрѣшность будетъ весьма мала, хотя абсолютная погрѣшность можетъ быть и очень велика. Взявъ логариѳмы отъ обѣихъ частей формулы (43), получимъ

$$\log\Gamma(n+1)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{1}{2}\log 2\pi+\epsilon, \qquad (44)$$

гдѣ, при очень большомъ n, ϵ очень мало. Пренебрегая ϵ, мы будемъ имѣть такъ называемое асимптотическое значеніе $\log\Gamma(n+1)$. Эта формула интересна потому, что она указываетъ порядокъ величины факторіала.

142. Теорема Даламбера.— Формула интегрированія подъ знакомъ интеграла примѣнима ко всякой функціи $f(x, y)$, непрерывной внутри прямоугольника, на который распространяется интегрированіе; поэтому, если, вычисляя двумя различными способами двойной интегралъ отъ функціи $f(x, y)$, мы получимъ два неравныхъ результата, то можно утверждать, что эта функція прерывна по крайней мѣрѣ въ одной точкѣ внутри области интегрированія. Изъ этого замѣчанія Гауссъ вывелъ изящное доказательство теоремы Даламбера.

Пусть будетъ $F(z)$ цѣлый многочленъ m-ой степени по z; мы здѣсь разсмотримъ только тотъ случай, когда всѣ его коэффиціенты дѣйствительны. Замѣняя z черезъ

$$\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$$

и отдѣляя дѣйствительныя и мнимыя части, мы можемъ представить $F(z)$ въ видѣ

$$F(z)=P+iQ,$$

гдѣ

$$P=A_0\rho^m\cos m\omega+A_1\rho^{m-1}\cos(m-1)\omega+\ldots,$$
$$Q=A_0\rho^m\sin m\omega+A_1\rho^{m-1}\sin(m-1)\omega+\ldots.$$

Обозначимъ черезъ V функцію $\operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q}$; мы имѣемъ

$$\frac{\partial V}{\partial\rho}=\frac{Q\frac{\partial P}{\partial\rho}-P\frac{\partial Q}{\partial\rho}}{P^2+Q^2},\qquad \frac{\partial V}{\partial\omega}=\frac{Q\frac{\partial P}{\partial\omega}-P\frac{\partial Q}{\partial\omega}}{P^2+Q^2}.$$

Легко видѣть, не продолжая вычисленія, что вторая производная будетъ имѣть видъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\omega}=\frac{M}{(P^2+Q^2)^2},$$

гдѣ M — непрерывная функція отъ ϱ и отъ ω. Эта вторая производная можетъ сдѣлаться прерывною только для тѣхъ системъ значеній $(\varrho,\ \omega)$ которыя обращаютъ одновременно въ нуль P и Q, т.-е. для корней уравненія $F(z)=0$. Такимъ образомъ, если мы докажемъ, что при данномъ значеніи R интегралы

$$\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^R\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\omega}\,d\varrho,\qquad \int_0^R d\varrho\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\omega}\,d\omega \tag{45}$$

неравны, то отсюда мы можемъ заключить, что уравненіе $F(z)=0$ имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень съ модулемъ, меньшимъ R. Но второй интегралъ всегда равенъ нулю, такъ какъ $\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\omega}d\omega=\left[\frac{\partial V}{\partial\varrho}\right]_{\omega=0}^{\omega=2\pi}$, и $\frac{\partial V}{\partial\varrho}$ есть періодическая функція отъ ω съ періодомъ 2π. Вычислимъ первый интегралъ; мы имѣемъ

$$\int_0^R\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\omega}d\varrho=\left[\frac{\partial V}{\partial\omega}\right]_{\varrho=0}^{\varrho=R}.$$

Простое вычисленіе показываетъ, что $\frac{\partial V}{\partial\omega}$ будетъ имѣть видъ

$$\frac{\partial V}{\partial\omega}=\frac{-m\,A_0^2\varrho^{2m}+\ldots}{A_0^2\varrho^{2m}+\ldots},$$

причемъ опущенные члены будутъ ниже $(2m)$-ой степени относительно ϱ и числитель не имѣетъ члена, свободнаго отъ ϱ. При неограниченномъ возрастаніи ϱ вторая часть имѣетъ предѣломъ $-m$; слѣдовательно, можно взять R настолько большимъ, чтобы значеніе производной $\frac{\partial V}{\partial\varrho}$ при $\varrho=R$ было равно $-m+\varepsilon$, гдѣ ε по абсолютному значенію меньше m. Интегралъ $\int_0^{2\pi}(-m+\varepsilon)\,d\omega$, очевидно, отрицателенъ, и, слѣдовательно, первый изъ интеграловъ (45) не можетъ быть равенъ нулю.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Проведемъ въ какой-нибудь точкѣ M цѣпной линіи, представляемой въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіемъ

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

касательную, продолжимъ ее до точки ея встрѣчи T съ осью Ox и будемъ вращать фигуру около этой оси. Выразить разность площадей, описанныхъ дугою цѣпной линіи AM, гдѣ A есть вершина цѣпной линіи, и касательною MT: 1) въ функціи абсциссы точки M; 2) въ функціи абсциссы точки T.

2. Пусть будутъ Ox, Oy, Oz прямоугольныя оси. Разсмотримъ линейчатую поверхность, образованную по слѣдующему закону: плоскость zOA вращается вокругъ оси Oz; образующая D, лежащая въ этой плоскости, наклонена къ Oz подъ постояннымъ угломъ, тангенсъ котораго равенъ λ, и отсѣкаетъ на OA отрѣзокъ OC, равный $\lambda a \theta$, гдѣ a обозначаетъ данную длину, а θ есть уголъ между двумя плоскостями zOx, zOA.

1) Вычислить объемъ, ограниченный линейчатою поверхностью и плоскостями xOy, zOx, zOA, причемъ уголъ θ между двумя послѣдними плоскостями меньше 2π.

2) Вычислить площадь части поверхности, ограниченной плоскостями xOy, zOx, zOA.

3. Вычислить объемъ, ограниченный поверхностью эллиптическаго параболоида, представляемаго въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіемъ

$$\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2},$$

плоскостью xy и поверхностью цилиндра $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

4. Вычислить площадь криволинейнаго четыреугольника, ограниченнаго четырьмя софокусными кривыми второго порядка

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

соотвѣтствующими значеніямъ $\frac{c^2}{3}$, $\frac{2c^2}{3}$, $\frac{4c^2}{3}$, $\frac{5c^2}{3}$ параметра λ.

5. Дана кривая, представляемая въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіемъ

$$y = \sqrt{2}\,(\sin x - \cos x),$$

причемъ x измѣняется отъ $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{5\pi}{4}$. Требуется вычислить:

1) площадь, заключающуюся между этою кривою и осью Ox;

2) объемъ, образованный этою площадью при вращеніи ея вокругъ Ox;

3) поверхность, ограничивающую этотъ объемъ.

6. Пусть будутъ Ox и Oy прямоугольныя оси координатъ, и A и B — точки на оси Oy. Вычислить криволинейный интегралъ

$$\int [\varphi(y)\, e^x - my]\, dx + [\varphi'(y)\, e^x - m]\, dy,$$

взятый вдоль пути AMB, соединяющаго точки A и B, имѣющаго произвольный видъ, но ограничивающаго вмѣстѣ съ отрѣзкомъ AB площадь $AMBA$ данной величины S; здѣсь m — постоянное, а функція $\varphi(y)$ и ея производная $\varphi'(y)$ — непрерывны.

7. Вычисляя двумя различными способами двойной интегралъ

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin ax \, dy \, dx,$$

показать, что при a, отличномъ отъ 0, имѣемъ

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \pm \frac{\pi}{2},$$

8. Найти площадь части поверхности эллипсоида или гиперболоида вращенія, заключающуюся между двумя параллельными кругами.

9*. Поверхность трехъоснаго эллипсоида. — Половина всей поверхности $\mathcal{A}$ равна двойному интегралу

$$\frac{\mathcal{A}}{2}=\iint\sqrt{\frac{1-\frac{a^2-c^2}{a^4}x^2-\frac{b^2-c^2}{b^4}y^2}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy,$$

взятому внутри эллипса $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Изъ способовъ, предложенныхъ для приведенія этого двойного интеграла къ эллиптическимъ интеграламъ, наиболѣе простой принадлежитъ Каталану; этотъ способъ состоитъ въ преобразованіи, указанномъ въ § 125. Обозначая черезъ v функцію подъ знакомъ двойного интеграла и измѣняя v отъ 1 до $+\infty$, мы найдемъ, что двойной интегралъ равенъ предѣлу при безконечномъ l слѣдующей разности

$$\frac{\pi ab\,l\,(l^2-1)}{\sqrt{\left(l^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(l^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}-\pi ab\int_1^l\frac{(v^2-1)\,dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}.$$

Это выраженіе имѣетъ неопредѣленный видъ, но мы можемъ представить его въ видѣ

$$\int_1^l\frac{v^2\,dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}=\left[\frac{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}{v}\right]_1^l$$
$$+\int_1^l\frac{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)dv}{v^2\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}},$$

и легко видѣть, что предѣлъ приведеннаго выше выраженія равенъ

$$\pi ab\left[\frac{c^2}{ab}+\int_1^{+\infty}\frac{dv}{\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\int_1^{+\infty}\frac{dv}{v^2\sqrt{\left(v^2-1+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(v^2-1+\frac{c^2}{b^2}\right)}}\right].$$

10*. Если изъ центра эллипсоида съ осями $2a$, $2b$, $2c$ опустимъ перпендикуляры на касательныя плоскости къ этому эллипсоиду, то площадь подарной поверхности равна площади поверхности эллипсоида съ полуосями $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{ab}{c}$.

[Вильямъ Робертсъ (William Roberts), Journal de Liouville, т. XI, 1-я серія, стр. 81.]

11. Показать, вычисляя двумя различными способами двойной интегралъ отъ

$$(x-y)^n f(y),$$

распространенный на площадь треугольника, ограниченнаго прямыми $y=x_0$, $y=x$, $x=X$, что

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{x_0}^{x} (x-y)^n f(y)\, dy = \int_{x_0}^{X} \frac{(X-y)^{n+1}}{n+1} f(y)\, dy.$$

Вывести отсюда соотношеніе

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-y)^n f(y)\, dy.$$

Доказать также формулу

$$\int_{x_0}^{x} x\, dx \int_{x_0}^{x} x\, dx \ldots \int_{x_0}^{x} x\, dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \int_{x_0}^{x} (x^2-y^2)^n f(y)\, dy$$

и провѣрить эти формулы при помощи дифференцированія подъ знакомъ интеграла.

ГЛАВА VII.

Кратные интегралы. — Интегрированіе полныхъ дифференціаловъ.

I. — КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. — ЗАМѢНА ПЕРЕМѢННЫХЪ.

143. Тройные интегралы. — Пусть будетъ $F(x, y, z)$ функція трехъ перемѣнныхъ x, y, z, остающаяся непрерывною, пока точка M съ прямоугольными координатами (x, y, z) остается внутри конечной части пространства (E), ограниченной одною или нѣсколькими замкнутыми поверхностями. Предположимъ, что эта часть пространства разбита на части $(e_1), (e_2), \ldots, (e_n)$ съ объемами $v_1, v_2, \ldots, v_n$; пусть будутъ (ξ_i, η_i, ζ_i) координаты какой-нибудь точки m_i области (e_i). Если число областей (e_i) неограниченно возрастаетъ такъ, что размѣры каждой изъ областей стремятся къ нулю, то сумма

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, v_i \qquad (1)$$

стремится къ нѣкоторому предѣлу; этотъ предѣлъ называется тройнымъ интеграломъ отъ функціи $F(x, y, z)$, распространеннымъ на часть (E) пространства; его изображаютъ символомъ

$$\iiint_{(E)} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \qquad (2)$$

Чтобы доказать существованіе этого предѣла, нужно только повторить то, что было сказано выше (§ 121) по поводу двойныхъ интеграловъ.

Тройные интегралы встрѣчаются въ различныхъ вопросахъ механики, между прочимъ, при опредѣленіи массы и центра тяжести твердаго тѣла. Предположимъ, что область (E) наполнена

неоднороднымъ веществомъ. Пусть будетъ $\mu(x, y, z)$ плотность въ нѣкоторой точкѣ, т.-е. предѣлъ отношенія массы, содержащейся въ сферѣ безконечно малаго радіуса съ центромъ въ точкѣ (x, y, z), къ объему этой сферы. Если μ_1 и μ_2 будутъ наибольшія и наименьшія значенія плотности μ въ области (e_i), то ясно, что содержащаяся въ этой области масса заключается между $\mu_1 v_i$ и $\mu_2 v_i$; слѣдовательно, эта масса равна $v_i \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$*), причемъ точка (ξ_i, η_i, ζ_i) взята соотвѣтствующимъ образомъ въ области (e_i). Такимъ образомъ, вся масса равна тройному интегралу $\int\int\int \mu\, dx\, dy\, dz$, взятому въ области (E).

Вычисленіе тройного интеграла можетъ быть приведено къ послѣдовательному вычисленію трехъ простыхъ интеграловъ. Предположимъ сначала, что область (E) есть прямоугольный параллелепипедъ, ограниченный шестью плоскостями $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$, $z=z_0$, $z=Z$. Разобьемъ параллелепипедъ (E) на меньшіе параллелепипеды плоскостями, параллельными тремъ плоскостямъ координатъ. Объемъ каждаго изъ этихъ параллелепипедовъ выражается въ видѣ $(x_i-x_{i-1})(y_k-y_{k-1})(z_l-z_{l-1})$, и мы должны найти предѣлъ суммы

$$S=\sum_i\sum_k\sum_l F(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})(x_i-x_{i-1})(y_k-y_{k-1})(z_l-z_{l-1}), \qquad (3)$$

гдѣ точка $(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})$ есть какая-нибудь точка соотвѣтствующаго частичнаго параллелепипеда. Вычислимъ прежде всего часть суммы S, происходящую отъ ряда элементовъ, содержащихся между четырьмя плоскостями

$$x=x_{i-1}, \quad x=x_i, \quad y=y_{k-1}, \quad y=y_k,$$

причемъ возьмемъ всѣ точки $(\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl})$ на прямой $x=x_{i-1}$, $y=y_{k-1}$. Этотъ рядъ параллелепипедовъ дастъ сумму

$$(x_i-x_{i-1})(y_k-y_{k-1})[F(x_{i-1}, y_{k-1}, \zeta_1)(z_1-z_0)+\ldots];$$

мы можемъ, какъ выше (§ 123), взять всѣ ζ такимъ образомъ, чтобы сумма, стоящая въ скобкахъ, была равна простому интегралу

$$\Phi(x_{i-1}, y_{k-1}) = \int_{z_0}^{Z} F(x_{i-1}, y_{k-1}, z)\, dz.$$

---

*) Здѣсь плотность предполагается непрерывною функціею координатъ x, y, z. *(Ред.)*

Теперь намъ остается только найти предѣлъ суммы

$$\sum_i \sum_k (x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})\, \Phi(x_{i-1}, y_{k-1}),$$

но этотъ предѣлъ есть не что иное, какъ двойной интегралъ

$$\int\int \Phi(x, y)\, dx\, dy,$$

распространенный на прямоугольникъ, ограниченный прямыми $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$. Слѣдовательно, разсматриваемый тройной интегралъ равенъ двойному интегралу

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \Phi(x, y)\, dy.$$

Замѣняя здѣсь функцію $\Phi(x, y)$ ея значеніемъ, мы найдемъ для тройного интеграла выраженіе

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\, dz. \qquad (4)$$

Смыслъ этого символа вполнѣ очевиденъ. Сначала нужно интегрировать функцію $F(x, y, z)$ по z, разсматривая x и y, какъ постоянныя; въ результатѣ получится функція двухъ перемѣнныхъ x и y, которую затѣмъ интегрируемъ между предѣлами y_0 и Y, разсматривая x, какъ постоянное, а y, какъ перемѣнное. Результатъ этой второй интеграціи есть функція одного только x, которую снова интегрируемъ между предѣлами x_0 и X.

Очевидно, что тройной интегралъ можно вычислять столькими способами, сколько можетъ быть перестановокъ изъ 3 элементовъ, т.-е. 6. Напримѣръ, обозначая черезъ $\Psi(z)$ двойной интегралъ отъ $F(x, y, z)$, распространенный на прямоугольникъ, ограниченный прямыми $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$, мы можемъ представить тройной интегралъ въ видѣ

$$\int_{z_0}^{Z} dz \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} F(x, y, z)\, dy = \int_{z_0}^{Z} \Psi(z)\, dz.$$

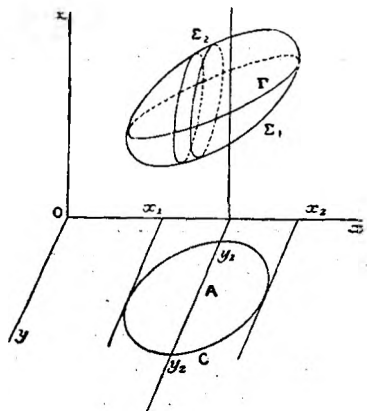
Послѣднее выраженіе мы могли бы получить и другимъ способомъ, начавъ съ вычисленія той части суммы S, которая происходитъ отъ слоя параллелепипедовъ, заключающихся между двумя сосѣдними плоскостями $z = z_{l-1}$, $z = z_l$. При соотвѣтствующемъ выборѣ точекъ (ξ, η, ζ) этотъ слой дастъ въ суммѣ S часть

$$\Psi(z_{l-1})(z_l - z_{l-1}),$$

и разсужденіе заканчивается, какъ выше.

144. Разсмотримъ теперь часть пространства, ограниченную поверхностью произвольнаго вида. Разобьемъ ее прежде всего на такія части, чтобы любая прямая, параллельная нѣкоторому, соотвѣтственнымъ образомъ выбранному направленію, пересѣкала ограничивающую поверхность не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ. Такимъ образомъ намъ достаточно разсмотрѣть только тотъ случай, когда объемъ ограниченъ такою поверхностью, что каждая прямая, параллельная оси Oz, можетъ встрѣтить эту поверхность не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ. Точки этой поверхности проектируются на плоскость xOy внутри нѣкоторой площади A, ограниченной замкнутымъ контуромъ C, и каждой точкѣ (x, y) площади A соотвѣтствуютъ двѣ точки пограничной поверхности, съ координатами $z_1=\varphi_1(x, y)$ и $z_2=\varphi_2(x, y)$. Предположимъ, что функціи φ_1 и φ_2 непрерывны внутри контура C, и что $\varphi_1<\varphi_2$. Разобьемъ, какъ мы это дѣлали выше, разсматриваемый объемъ на части плоскостями, параллельными плоскостямъ координатъ. Но здѣсь, кромѣ правильныхъ частей, мы получимъ еще неправильныя части, представляющія неполные параллелепипеды. Часть суммы (1), происходящая отъ элементарныхъ объемовъ, заключающихся между четырьмя плоскостями $x=x_{i-1}$, $x=x_i$, $y=y_{k-1}$, $y=y_k$, выразится (§ 124) и здѣсь черезъ

Черт. 32.



$$(x_i-x_{i-1})(y_k-y_{k-1})\left[\int_{z_1}^{z_2}F(x_{i-1}, y_{k-1}, z)\,dz+\varepsilon_{ik}\right],$$

причемъ абсолютное значеніе ε_{ik} будетъ меньше всякаго заранѣе даннаго числа ε, если только разстояніе между сосѣдними параллельными плоскостями будетъ взято достаточно малымъ. Поэтому сумма $\sum\limits_i\sum\limits_k \varepsilon_{ik}(x_i-x_{i-1})(y_k-y_{k-1})$ имѣетъ предѣломъ нуль, и искомый тройной интегралъ равенъ двойному интегралу

$$\iint_{(A)}\Phi(x, y)\,dx\,dy,$$

распространенному на область (A), ограниченную контуромъ C,

причемъ функція $\Phi(x, y)$ перемѣнныхъ x, y опредѣляется равенствомъ

$$\Phi(x, y) = \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz.$$

Если при измѣненіи x отъ x_1 до x_2 прямая, параллельная оси Oy, встрѣчаетъ контуръ C только въ двухъ точкахъ съ координатами $y_1 = \psi_1(x)$, $y_2 = \psi_2(x)$, то тройной интегралъ будетъ равенъ также

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz. \qquad (5)$$

Предѣлы z_1 и z_2 зависятъ отъ обоихъ перемѣнныхъ x и y, предѣлы y_1 и y_2 зависятъ только отъ x; наконецъ, предѣлы x_1 и x_2 — постоянны.

При вычисленіи тройного интеграла здѣсь можно также измѣнять порядокъ интегрированій, но для каждаго порядка предѣлы интегрированій будутъ, вообще, совершенно разные.

Примѣчаніе. — Если мы введемъ двойной интегралъ

$$\Psi(x) = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\, dz,$$

распространенный на сѣченіе разсматриваемаго объема нѣкоторою плоскостью, параллельною плоскости yz и соотвѣтствующею опредѣленной абсциссѣ x, то формулу (5) можно будетъ представить въ видѣ

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi(x)\, dx.$$

Это — тотъ самый результатъ, который мы получили бы, вычисляя сначала сумму элементовъ, происходящую отъ слоя, заключающагося между двумя плоскостями $x = x_{i-1}$, $x = x_i$: въ самомъ дѣлѣ, при соотвѣтствующемъ выборѣ точекъ (ξ, η, ζ) этотъ слой дастъ въ суммѣ произведеніе

$$\Psi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Примѣръ. — Пусть требуется вычислить тройной интегралъ $\iiint z\, dx\, dy\, dz$, распространенный на восьмую часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, содержащуюся внутри трехграннаго угла $Oxyz$. Если мы будемъ интегрировать сначала по z, потомъ по y и, наконецъ, по x, то предѣлы интегрированій будутъ слѣдующіе: при данныхъ x и y, z можетъ измѣняться отъ 0 до $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; если дано x, то y можетъ измѣ-

няться отъ 0 до $\sqrt{R^2-x^2}$, и, наконецъ, x измѣняется отъ 0 до R. Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\iiint z\,dx\,dy\,dz = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz;$$

отсюда послѣдовательно находимъ

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz = \tfrac{1}{2}(R^2-x^2-y^2),$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2-x^2-y^2)\,dy = \left[\tfrac{1}{2}(R^2-x^2)\,y - \tfrac{1}{6}y^3\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \tfrac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Остается вычислить опредѣленный интегралъ $\frac{1}{3}\int_0^R (R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$, который, послѣ подстановки $x = R\cos\varphi$, обращается въ

$$\tfrac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \sin^4\varphi\,d\varphi.$$

Такимъ образомъ, данный тройной интегралъ равенъ $\frac{\pi R^4}{16}$ (§ 116).

145. Замѣна перемѣнныхъ. — Пусть будутъ

$$\left.\begin{aligned} x &= f(u, v, w),\\ y &= \varphi(u, v, w),\\ z &= \psi(u, v, w) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

формулы преобразованія, устанавливающія взаимно однозначное соотвѣтствіе между точками области (E) пространства и точками нѣкоторой другой области (E_1); мы будемъ разсматривать u, v, w, какъ прямоугольныя координаты нѣкоторой точки относительно нѣкоторой другой системы прямоугольныхъ осей, вообще, отличной отъ первой. Если функція $F(x, y, z)$ непрерывна въ области (E), то мы всегда имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} &\iiint_{(E)} F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\\ &\quad = \iiint_{(E_1)} F[f(u, v, w), \ldots]\left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

причемъ оба интеграла взяты соотвѣтственно въ областяхъ (E) и (E_1). Это — формула замѣны перемѣнныхъ въ тройномъ интегралѣ.

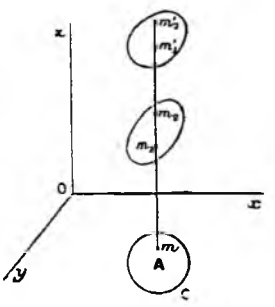
Чтобы доказать, что формула (7) имѣетъ общій характеръ, замѣтимъ прежде всего, что если эта формула доказана для двухъ или нѣсколькихъ частныхъ замѣнъ перемѣнныхъ, то, на основаніи извѣстныхъ свойствъ функціональнаго опредѣлителя (§ 29), она будетъ также вѣрна для замѣны перемѣнныхъ, получающихся отъ послѣдовательнаго выполненія всѣхъ этихъ частныхъ замѣнъ. Далѣе, если формула (7) вѣрна для нѣ-

сколькихъ областей пространства, то она будетъ также вѣрна и для области, получающейся отъ сложенія всѣхъ предыдущихъ областей. Послѣ этого замѣчанія мы докажемъ сначала, какъ и въ случаѣ двойного интеграла (§ 130), что формула (7) примѣнима ко всякому преобразованію, при которомъ замѣнено только одно независимое перемѣнное, напримѣръ, къ преобразованію вида

$$x=x', \quad y=y', \quad z=\psi(x', y', z'). \tag{8}$$

Предположимъ, что обѣ точки $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ отнесены къ одной и той же системѣ осей, и что каждая прямая, параллельная оси Oz, пересѣкаетъ поверхность, ограничивающую область (E), не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ. На основаніи формулъ (8), этой поверхности соотвѣтствуетъ нѣкоторая другая поверхность (E'). Опишемъ около обѣихъ поверхностей цилиндръ, образующія котораго параллельны Oz; онъ пересѣчется съ плоскостью $z=0$ по нѣкоторой замкнутой кривой C. Каждая точка m области A, ограниченной контуромъ C, есть проекція нѣкоторыхъ двухъ точекъ m_1, m_2 съ координатами z_1, z_2 первой поверхности и нѣкоторыхъ двухъ точекъ m'_1, m'_2 съ координатами z'_1, z'_2 второй поверхности. Выберемъ обозначенія такимъ образомъ, чтобы было $z_1<z_2$ и $z'_1<z'_2$. По формуламъ (8), точкѣ m_1 соотвѣтствуетъ или точка m'_1, или точка m'_2. Чтобы различить оба эти случая, достаточно обратить вниманіе на знакъ $\frac{\partial\psi}{\partial z'}$. Если $\frac{\partial\psi}{\partial z'}$ положительно, то z возрастаетъ вмѣстѣ съ z'; тогда точкѣ m_1 соотвѣтствуетъ точка m'_1 и точкѣ m_2 — точка m'_2. Напротивъ, если $\frac{\partial\psi}{\partial z'}$ отрицательно, то, при возрастаніи z', z убываетъ; слѣдовательно, точкѣ m_1 соотвѣтствуетъ точка m'_2 и точкѣ m_2 — точка m'_1. Въ первомъ случаѣ имѣемъ

Черт. 33.



$$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\,dz = \int_{z'_1}^{z'_2} F[x, y, \psi(x, y, z')]\frac{\partial\psi}{\partial z'}\,dz';$$

напротивъ, во второмъ случаѣ,

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\,dz = -\int_{z'_1}^{z'_2} F[x, y, \psi(x, y, z')]\frac{\partial\psi}{\partial z'}\,dz'.$$

Въ обоихъ случаяхъ мы можемъ написать

$$\int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\,dz = \int_{z'_1}^{z'_2} F[x, y, \psi(x, y, z')]\left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right|dz'. \tag{9}$$

Если теперь мы возьмемъ отъ обѣихъ частей этого равенства двойные интегралы, распространенные на область A, то двойной интегралъ

$$\iint_{(A)} dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)\,dz$$

будетъ не что иное, какъ тройной интегралъ

$$\iiint F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

взятый въ области (E) пространства. Точно также, замѣняя къ правой части равенства (9) x черезъ x', а y черезъ y', мы видимъ, что двойной интегралъ отъ правой части равенъ тройному интегралу отъ

$$F[x', y', \psi(x', y', z')]\left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right|,$$

взятому въ области (E'). Слѣдовательно, въ этомъ частномъ случаѣ, имѣемъ

$$\iiint_{(E)} F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{(E')} F[x', y', \psi(x', y', z')]\left|\frac{\partial\psi}{\partial z'}\right| dx'\,dy'\,dz'.$$

Но здѣсь опредѣлитель $\dfrac{D(x, y, z)}{D(x', y', z')}$ обращается въ $\dfrac{\partial\psi}{\partial z'}$, и, слѣдовательно, для замѣны перемѣнныхъ вида (8) формула (7) доказана.

Общая формула (7) примѣнима также къ замѣнѣ перемѣнныхъ, опредѣляемой формулами

$$x = f(x', y', z'), \quad y = \varphi(x', y', z'), \quad z = z'; \qquad (10)$$

гдѣ не замѣнено одно только перемѣнное z. Предположимъ, что эти формулы устанавливаютъ взаимно однозначное соотвѣтствіе между точками двухъ областей (E), (E') пространства; тогда, въ частности, будутъ однозначно соотвѣтствовать другъ другу точки сѣченій R, R', получающихся отъ пересѣченія областей (E) и (E') одною и тою же плоскостью, параллельною плоскости $z=0$. Поэтому, по формулѣ замѣны перемѣнныхъ въ двойномъ интегралѣ, будетъ

$$\iint_{(R)} F(x, y, z)\,dz = \iint_{(R')} F[f(x', y', z'), \varphi(x', y', z'), z']\left|\frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')}\right| dx'\,dy'; \qquad (11)$$

обѣ части этого равенства зависятъ только отъ перемѣннаго $z=z'$. Интегрируя еще разъ между тѣми предѣлами z_1 и z_2, въ которыхъ перемѣнное z можетъ измѣняться въ области (E), мы получимъ формулу

$$\iiint_{(E)} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{(E')} F[f(x', y', z'), \varphi(x', y', z'), z'] \left|\frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')}\right| dx'\, dy'\, dz'.$$

Но въ этомъ случаѣ $\frac{D(x, y, z)}{D(x', y', z')} = \frac{D(x, y)}{D(x', y')}$, такъ что формула (7) примѣнима также и къ замѣнѣ перемѣнныхъ вида (10).

Покажемъ теперь, что всякая замѣна перемѣнныхъ

$$x=f(x_1, y_1, z_1), \quad y=\varphi(x_1, y_1, z_1), \quad z=\psi(x_1, y_1, z_1) \quad (13)$$

можетъ быть получена послѣдовательнымъ выполненіемъ двухъ предыдущихъ замѣнъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $x'=x_1$, $y'=y_1$, $z'=z$; тогда послѣднее уравненіе можно представить въ видѣ $z'=\psi(x', y', z_1)$, откуда находимъ $z_1=\pi(x', y', z')$. Такимъ образомъ, формулы (13) могутъ быть замѣнены системою шести уравненій

$$x=f[x', y', \pi(x', y', z')], \quad y=\varphi[x', y', \pi(x', y', z')], \quad z=z', \quad (14)$$

$$x'=x_1, \quad y'=y_1, \quad z'=\psi(x_1, y_1, z_1). \quad (15)$$

Какъ мы видѣли, общая формула (7) примѣнима къ каждому изъ преобразованій, опредѣляемыхъ формулами (14) и (15); слѣдовательно, она примѣнима также и къ замѣнѣ перемѣнныхъ (13).

Точно также легко было бы доказать, что общее преобразованіе (13) можно замѣнить тремя послѣдовательными преобразованіями вида (8).

146. Элементъ объема.—Положивъ въ формулѣ (7) $F(x, y, z)=1$, получимъ

$$\iiint_{(E)} dx\, dy\, dz = \iiint_{(E_1)} \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw.$$

Лѣвая часть представляетъ объемъ V части (E) пространства. Примѣняя къ интегралу въ правой части теорему о среднемъ значеніи, мы получаемъ соотношеніе

$$V = V_1 \left|\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)}\right|_{(\xi, \eta, \zeta)}, \quad (16)$$

гдѣ V_1 есть объемъ области (E_1), а ξ, η, ζ — координаты нѣ-

которой точки области (E_1). Эта формула совершенно аналогична формулѣ (17) главы VI; она показываетъ, что функціональный опредѣлитель есть предѣлъ отношенія двухъ соотвѣтственныхъ безконечно малыхъ объемовъ.

Если въ формулахъ (6) мы будемъ давать одному изъ перемѣнныхъ u, v, w постоянное значеніе и измѣнять два другихъ перемѣнныхъ, то получимъ три семейства поверхностей $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, которыя разобьютъ область (E) на весьма малые шестигранники, аналогичные разсмотрѣннымъ выше параллелепипедамъ*). Объемъ шестигранника, ограниченнаго поверхностями (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$, (w), $(w+dw)$, гдѣ du, dv, dw положительны, по формулѣ (16) равенъ

$$\left\{\left|\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(u,v,w)}\right| + \varepsilon\right\} du\,dv\,dw,$$

гдѣ ε безконечно мало вмѣстѣ съ du, dv, dw. Членомъ $\varepsilon\,du\,dv\,dw$ можно пренебречь, какъ мы уже неоднократно указывали (§ 128); произведеніе

$$dV = \left|\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw \qquad (17)$$

называется элементомъ объема въ системѣ криволинейныхъ координатъ (u, v, w).

Пусть будетъ ds^2 квадратъ линейнаго элемента въ той же самой системѣ координатъ; изъ формулъ (6) имѣемъ

$$dx = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw, \quad dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \ldots;$$

возведя послѣднія равенства въ квадратъ и сложивъ, получимъ

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = {} & H_1\,du^2 + H_2\,dv^2 + H_3\,dw^2 \\ & + 2F_1\,dv\,dw + 2F_2\,du\,dw + 2F_3\,du\,dv, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad H_2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \quad H_3 = S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2, \\ F_1 &= S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}, \quad F_2 = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}, \quad F_3 = S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

причемъ знакъ S всегда показываетъ, что должно замѣнить x послѣдовательно черезъ y и черезъ z и взять сумму трехъ полу-

*) Такимъ образомъ здѣсь u, v, w разсматриваются уже не какъ прямоугольныя координаты той точки, въ которую переходитъ точка (x, y, z) при преобразованіи (6), а какъ криволинейныя координаты той же самой точки (x, y, z). *(Ред).*

чающихся членовъ. Формула для dV можетъ быть получена весьма просто изъ формулы для ds^2; въ самомъ дѣлѣ, составляя квадратъ опредѣлителя, по извѣстному правилу находимъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w}, & \frac{\partial y}{\partial w}, & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix} = M;$$

слѣдовательно, элементъ объема равенъ $\sqrt{M}\,du\,dv\,dw$.

Разсмотримъ, въ частности, тотъ весьма важный случай, когда координатныя поверхности (u), (v), (w) образуютъ тройную ортогональную систему, т.-е. когда три поверхности, проходящія черезъ какую-нибудь точку пространства, пересѣкаются попарно подъ прямымъ угломъ. Тогда касательныя прямыя къ тремъ линіямъ пересѣченія трехъ поверхностей, взятыхъ попарно, образуютъ прямой трехгранный уголъ; поэтому необходимо $F_1=F_2=F_3=0$, и эти три условія будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточными. Въ этомъ случаѣ формулы для ds^2 и dV принимаютъ слѣдующій простой видъ

$$ds^2=H_1\,du^2+H_2\,dv^2+H_3\,dw^2, \quad dV=\sqrt{H_1\,H_2\,H_3}\,du\,dv,\,dw. \tag{20}$$

Эти формулы легко вывести геометрически. Предположимъ, что du, dv, dw очень малы, и будемъ разсматривать элементарный объемъ, ограниченный поверхностями (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$, (w), $(w+dw)$, какъ весьма малый прямоугольный параллелепипедъ съ плоскими гранями. Пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ, мы найдемъ, что ребра этого параллелепипеда будутъ соотвѣтственно равны $\sqrt{H_1}\,du$, $\sqrt{H_2}\,dv$, $\sqrt{H_3}\,dw$. Принявъ діагональ и объемъ этого элементарнаго параллелепипеда за линейный элементъ и за элементъ объема, мы получимъ формулы (20). Точно также, площадь одной изъ граней $\sqrt{H_1\,H_2}\,du\,dv$ представляетъ элементъ поверхности (w).

Разсмотримъ, напримѣръ, полярныя координаты въ пространствѣ

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z=\rho\cos\theta, \tag{21}$$

гдѣ ρ представляетъ разстояніе точки $M(x,y,z)$ отъ начала координатъ, θ—уголъ, образуемый прямою OM съ осью Oz, и φ — уголъ, образуемый съ Ox слѣдомъ плоскости MOz на плоскости $z=0$. Чтобы имѣть всѣ точки пространства, достаточно

измѣнять ρ отъ 0 до $+\infty$, θ отъ 0 до π, и φ отъ 0 до 2π. Изъ формулъ (21) находимъ

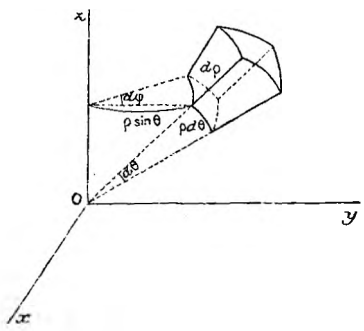
$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2, \tag{22}$$

и, слѣдовательно,

$$dV = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \tag{23}$$

Эти формулы легко получить непосредственно. Три семейства поверхностей (ρ), (θ), (φ) суть соотвѣтственно: концентрическія сферы съ центромъ въ началѣ координатъ, круглые конусы съ вершиною въ началѣ координатъ, осью которыхъ служитъ ось Oz, и, наконецъ, плоскости, проходящія черезъ Oz. Эти три семейства, очевидно, образуютъ тройную ортогональную систему. Измѣренія элементарнаго тѣла, какъ это легко видѣть изъ чертежа, суть $d\rho$, $\rho\, d\theta$, $\rho \sin\theta\, d\varphi$, и мы приходимъ къ формуламъ (22) и (23).

Черт. 34.



Пусть будетъ $R = f(\theta, \varphi)$ уравненіе замкнутой поверхности S, окружающей начало координатъ и пересѣкающейся съ каждою полупрямою, выходящею изъ начала координатъ, не болѣе, чѣмъ въ одной точкѣ. Чтобы при помощи перемѣнныхъ ρ, θ, φ вычислить тройной интегралъ, распространенный на область, ограниченную этою поверхностью S, должно измѣнять ρ отъ 0 до R, θ отъ 0 до π, и φ отъ 0 до 2π. Напримѣръ, объемъ, ограниченный этою поверхностью S, равенъ тройному интегралу пер-

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} \rho^2 \sin\theta\, d\rho;$$

вое интегрированіе выполняется непосредственно, и получается

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R^3 \sin\theta}{3}\, d\theta.$$

Иногда пользуются также цилиндрическими координатами r, ω, z, гдѣ $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + dz^2,$$

$$dV = r\, d\omega\, dr\, dz.$$

147. Эллиптическія координаты. — Поверхности, представляемыя уравненіемъ

$$\frac{x^2}{\lambda-a}+\frac{y^2}{\lambda-b}+\frac{z^2}{\lambda-c}-1=0, \qquad (24)$$

гдѣ λ — перемѣнный параметръ и $a>b>c>0$, образуютъ семейство софокусныхъ поверхностей второго порядка. Черезъ каждую точку пространства проходятъ три поверхности этого семейства: эллипсоидъ, двуполостный гиперболоидъ и однополостный гиперболоидъ, такъ какъ уравненіе (24) всегда имѣетъ одинъ корень λ_1, содержащійся между b и c, одинъ корень λ_2, содержащійся между a и b, и одинъ корень λ_3, большій a. Эти три корня λ_1, λ_2, λ_3 называются эллиптическими координатами точки, прямоугольныя координаты которой суть x, y, z. Каждыя двѣ поверхности этого семейства ортогональны; въ самомъ дѣлѣ, замѣняя въ уравненіи (24) λ сначала черезъ λ_1, потомъ черезъ λ_2 и вычитая почленно полученныя равенства, мы, по раздѣленіи на $\lambda_1-\lambda_2$, получимъ соотношеніе

$$\frac{x^2}{(\lambda_1-a)(\lambda_2-a)}+\frac{y^2}{(\lambda_1-b)(\lambda_2-b)}+\frac{z^2}{(\lambda_1-c)(\lambda_2-c)}=0, \qquad (25)$$

изъ котораго видно, что поверхности (λ_1) и (λ_2) ортогональны.

Чтобы получить наиболѣе простымъ способомъ x, y, z въ функціи $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, замѣтимъ, что такъ какъ λ_1, λ_2, λ_3 суть корни уравненія (24), то должно быть тождественно

$$(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)-x^2(\lambda-b)(\lambda-c)-y^2(\lambda-a)(\lambda-c)-z^2(\lambda-a)(\lambda-b)$$
$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3);$$

полагая въ этомъ тождествѣ послѣдовательно $\lambda=a$, $\lambda=b$, $\lambda=c$, получимъ отсюда

$$\left.\begin{aligned} x^2&=\frac{(\lambda_3-a)(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}{(a-b)(a-c)},\\ y^2&=\frac{(\lambda_3-b)(\lambda_2-b)(b-\lambda_1)}{(a-b)(b-c)},\\ z^2&=\frac{(\lambda_3-c)(\lambda_2-c)(\lambda_1-c)}{(a-c)(b-c)}. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Взявъ логариѳмическія производныя, имѣемъ

$$dx=\frac{x}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-a}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-a}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-a}\right),$$
$$dy=\frac{y}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-b}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-b}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-b}\right);$$
$$dz=\frac{z}{2}\left(\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-c}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-c}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-c}\right).$$

Составивъ сумму квадратовъ послѣднихъ равенствъ, найдемъ, что, на основаніи соотношенія (25) и ему аналогичныхъ, члены съ $d\lambda_1 d\lambda_2$, $d\lambda_2 d\lambda_3$, $d\lambda_1 d\lambda_3$ исчезаютъ. Коэффиціентъ при $d\lambda_1^2$ будетъ

$$\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(\lambda_1-a)^2}+\frac{y^2}{(\lambda_1-b)^2}+\frac{z^2}{(\lambda_1-c)^2}\right];$$

замѣняя x^2, y^2, z^2 ихъ значеніями и дѣлая приведеніе, получимъ

$$M_1=\frac{1}{4}\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)(\lambda_1-c)}; \qquad (27)$$

коэффиціенты M_2 и M_3 при $d\lambda_2^2$ и $d\lambda_3^2$ получатся изъ M_1 круговою перестановкою. Тогда элементъ объема будетъ равенъ $\sqrt{M_1M_2M_3}\,d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$.

148. Интегралы Дирикле. — Пусть требуется вычислить тройной интегралъ

$$\iiint x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \, dx\, dy\, dz,$$

взятый внутри тетраэдра, ограниченнаго плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. Положимъ

$$x+y+z=\xi, \quad y+z=\xi\eta, \quad z=\xi\eta\zeta,$$

гдѣ ξ, η, ζ — новыя перемѣнныя. Эти формулы можно представить иначе въ видѣ

$$\xi=x+y+z, \quad \eta=\frac{y+z}{x+y+z}, \quad \zeta=\frac{z}{y+z};$$

обратно, мы имѣемъ $x=\xi(1-\eta)$, $y=\xi\eta(1-\zeta)$, $z=\xi\eta\zeta$. Если x, y, z положительны, и сумма $x+y+z$ меньше единицы, то ξ, η, ζ заключаются между нулемъ и единицею. Обратно, если ξ, η, ζ заключаются между нулемъ и единицею, то $x>0, y>0, z>0$, и $x+y+z<1$. Такимъ образомъ, мы замѣнили тетраэдръ кубомъ.

Чтобы вычислить функціональный опредѣлитель, положимъ $X=\xi$, $Y=\xi\eta$, $Z=\xi\eta\zeta$, откуда имѣемъ $x=X-Y$, $y=Y-Z$, $z=Z$. Но

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}=\frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}\cdot\frac{D(X, Y, Z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}=\xi^2\eta,$$

и тройной интегралъ послѣ указанной замѣны перемѣнныхъ обратится въ

$$\int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p \zeta^r (1-\zeta)^q \, d\zeta.$$

Подъинтегральная функція представляетъ произведеніе функціи отъ ξ на функцію отъ η и на функцію отъ ζ. Слѣдовательно, данный тройной интегралъ равенъ произведенію трехъ интеграловъ

$$\int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s \, d\xi \times \int_0^1 \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p \, d\eta \times \int_0^1 \zeta^r (1-\zeta)^q \, d\zeta.$$

Вводя функціи Γ (см. формулы (33), (34) стр. 294), мы получимъ для тройного интеграла выраженіе

$$\frac{\Gamma(p+q+r+3)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)} \times \frac{\Gamma(q+r+2)\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} \times \frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)};$$

по сокращеніи на общихъ множителей остается

$$\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}. \qquad (28)$$

149. Формула Остроградскаго (Грина). — Для тройныхъ интеграловъ существуетъ формула, вполнѣ сходная съ формулою (15) § 126. Разсмотримъ сначала замкнутую поверхность S, которая пересѣкается съ каждою прямою, параллельною оси Oz, не болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ; пусть будетъ $R(x, y, z)$ функція, непрерывная вмѣстѣ со своею производною $\frac{\partial R}{\partial z}$ внутри этой поверхности. Всѣ точки поверхности S проектируются на плоскость xy точками нѣкоторой площади A, ограниченной замкнутымъ контуромъ C. Всякой точкѣ (x, y) области A

с отвѣтствуютъ двѣ точки поверхности S съ координатами $z_1=\varphi_1(x, y)$ и $z_2=\varphi_2(x, y)$ (ср. § 144). Такимъ образомъ, поверхность S раздѣлится на двѣ части S_1 и S_2; мы предположимъ, что $z_1<z_2$. Разсмотримъ тройной интегралъ

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz,$$

распространенный на область, ограниченную замкнутою поверхностью S. Производя первую интеграцію по z между предѣлами z_1 и z_2 (§ 144), мы получимъ $R(x, y, z_2)-R(x, y, z_1)$, и должны затѣмъ взять двойной интегралъ

$$\iint [R(x, y, z_2)-R(x, y, z_1)]\, dx\, dy,$$

распространенный на область A. Но двойной интегралъ $\iint R(x, y, z_2)\, dx\, dy$ есть не что иное, какъ интегралъ по поверхности (§ 135)

$$\iint_{(S_2)} R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

взятый по верхней сторонѣ поверхности S_2. Точно также, двойной интегралъ отъ $R(x, y, z_1)$, взятый съ обратнымъ знакомъ, есть интегралъ по поверхности

$$\iint_{(S_1)} R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

взятый по нижней сторонѣ поверхности S_1. Слѣдовательно, складывая оба интеграла, мы можемъ написать

$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{(S)} R(x, y, z)\, dx\, dy,$$

причемъ второй интегралъ взятъ по в н ѣ ш н е й сторонѣ поверхности S.

При помощи извѣстныхъ уже разсужденій эта формула можетъ быть распространена на объемъ, ограниченный поверхностью произвольнаго вида.

Перемѣщая x, y, z, мы получимъ изъ послѣдней формулы двѣ аналогичныхъ формулы

$$\iiint \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{(S)} P(x, y, z)\, dy\, dz,$$

$$\iiint \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint_{(S)} Q(x, y, z)\, dz\, dx.$$

Складывая эти три формулы, мы приходимъ къ общей формулѣ Остроградскаго (Грина) для тройного интеграла

$$\left.\begin{aligned}&\iiint \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\\ &= \iint_{(S)} P(x, y, z)\, dy\, dz+Q(x, y, z)\, dz\, dx+R(x, y, z)\, dx\, dy,\end{aligned}\right\}(29)$$

гдѣ, какъ и выше, интегралы въ правой части берутся по внѣшней сторонѣ поверхности.

Напримѣръ, полагая $P=x$, $Q=R=0$, или $Q=y$, $P=R=0$, или $R=z$, $P=Q=0$, мы видимъ, что объемъ, ограниченный поверхностью S, равенъ любому изъ трехъ интеграловъ по поверхностямъ

$$\iint_{(S)} x\,dy\,dz, \quad \iint_{(S)} y\,dz\,dx, \quad \iint_{(S)} z\,dx\,dy. \tag{29)'}$$

150. Кратные интегралы.— Исходя изъ чисто аналитическихъ выраженій, полученныхъ нами для двойного и тройного интеграловъ, мы можемъ распространить опредѣленіе кратнаго интеграла на функціи отъ произвольнаго числа независимыхъ перемѣнныхъ. Мы ограничимся здѣсь только общими указаніями.

Пусть будетъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ система n независимыхъ перемѣнныхъ. Для краткости мы будемъ говорить, что каждая система значеній $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ этихъ перемѣнныхъ представляетъ нѣкоторую **точку** въ пространствѣ n измѣреній. Точно также, всякое соотношеніе $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, въ которомъ лѣвая часть есть непрерывная функція, представляетъ **поверхность**; если F есть многочленъ первой степени, то мы будемъ говорить, что это уравненіе представляетъ **плоскость**. Разсмотримъ совокупность точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ неравенствамъ вида

$$\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq 0 \quad (i=1, 2, \ldots, k). \tag{30}$$

Мы будемъ говорить, что эта совокупность точекъ образуетъ **область** D въ пространствѣ n измѣреній. Если для всѣхъ точекъ этой области абсолютное значеніе каждой изъ координатъ x_i не превышаетъ нѣкотораго опредѣленнаго числа, то мы будемъ говорить, что область D находится вся **на конечномъ разстояніи**. Если неравенства, опредѣляющія область D, имѣютъ слѣдующій видъ

$$x_1^0 \leqq x_1 \leqq x_1^1, \quad x_2^0 \leqq x_2 \leqq x_2^1, \quad \ldots, \quad x_n^0 \leqq x_n \leqq x_n^1, \tag{31}$$

то мы будемъ называть эту область **призматоидомъ**, и будемъ говорить, что n положительныхъ чиселъ $x_i^1 - x_i^0$ суть измѣренія этого призматоида. Наконецъ, мы будемъ говорить, что точка области D расположена на **границѣ** этой области, если для координатъ этой точки по крайней мѣрѣ одна изъ функцій ψ_i въ формулахъ (30) равна нулю.

Пусть будетъ D конечная область, и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функція, непрерывная въ этой области. Предположимъ, что область D разбита на меньшія области плоскостями, параллельными плоскостямъ $x_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$*). Возьмемъ одинъ изъ призматоидовъ, ограниченныхъ этими плоскостями и содержащихся внутри области D; пусть будутъ $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ его измѣренія, и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — координаты какой-нибудь точки этого призматоида. Если число всѣхъ призматоидовъ, содержащихся внутри области D, неограниченно возрастаетъ такъ, что всѣ измѣренія ихъ стремятся къ нулю, то сумма

$$S=\Sigma f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\,\Delta x_1\,\Delta x_2 \ldots \Delta x_n,$$

*) Т.-е. плоскостями $x_i=\text{const}$. *(Ред.)*

распространенная на всѣ эти призматоиды, стремится къ нѣкоторому предѣлу I. Этотъ предѣлъ I называется n-кратнымъ интеграломъ отъ функціи $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, взятымъ въ области D,

$$I = \iint \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Вычисленіе n-кратнаго интеграла и здѣсь приводится къ послѣдовательному вычисленію n простыхъ интеграловъ. Чтобы доказать, что этотъ законъ — общій, достаточно показать, что если онъ вѣренъ для $(n-1)$-кратнаго интеграла, то онъ также вѣренъ и для n-кратнаго интеграла. Для этого разсмотримъ нѣкоторую точку области D

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Если мы временно не будемъ обращать вниманія на перемѣнное x_n, то ясно, что точка $(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1})$ будетъ описывать нѣкоторую область D' въ пространствѣ $(n-1)$ измѣреній. Предположимъ, что область D удовлетворяетъ слѣдующему условію: всякой точкѣ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ внутри области D' соотвѣтствуютъ на границѣ области D только двѣ точки съ координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n^{(1)})$ и $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; x_n^{(2)})$, причемъ координаты $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ суть функціи $(n-1)$ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, непрерывныя внутри области D'. Если это условіе не удовлетворено, то мы разобьемъ D на такія меньшія области, чтобы это условіе выполнялось для каждой изъ нихъ отдѣльно. Разсмотримъ теперь рядъ призматоидовъ области D, соотвѣтствующихъ одной и той же точкѣ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ области D'; можно доказать, какъ мы это уже дѣлали для двойного интеграла (§ 124), что эти призматоиды дадутъ въ S сумму, равную

$$\Delta x_1\, \Delta x_2 \ldots \Delta x_{n-1} \left[\int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n + \varepsilon \right],$$

гдѣ $|\varepsilon|$ можетъ быть сдѣлано менѣе всякаго положительнаго числа, если только всѣ количества Δx_i будутъ достаточно малы. Полагая

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n \qquad (33)$$

мы видимъ, что I равно предѣлу суммы

$$\Sigma \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, \Delta x_1\, \Delta x_2 \ldots \Delta x_{n-1},$$

т.-е. равно $(n-1)$-кратному интегралу

$$I = \iint \ldots \int \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\, dx_1\, dx_2 \ldots, dx_{n-1}, \qquad (34)$$

взятому въ области D'. Но мы предположили, что высказанное выше предложеніе вѣрно для $(n-1)$-кратнаго интеграла; слѣдовательно, что оно имѣетъ общій характеръ.

Мы могли бы разсуждать еще иначе. Разсмотримъ совокупность тѣхъ точекъ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которыхъ координата x_n имѣетъ дан-

ное значеніе. Точка $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ опишетъ въ пространствѣ $(n-1)$ измѣреній нѣкоторую область δ, и легко видѣть, что n-кратный интегралъ I равенъ также выраженію

$$I = \int_{x_n^{(1)}}^{x_n^{(2)}} \theta(x_n)\, dx_n, \tag{35}$$

гдѣ $\theta(x_n)$ есть $(n-1)$-кратный интегралъ $\iiint \ldots \int f\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$, распространенный на область δ.

Какимъ бы способомъ мы ни вычисляли интегралъ, предѣлы для различныхъ интеграцій, которыя при этомъ должны быть выполнены, зависятъ отъ свойства области D и, вообще, измѣняются въ зависимости отъ перемѣны порядка интеграцій. Исключеніе составляетъ только тотъ случай, когда D есть призматоидъ, опредѣляемый условіями

$$x_1^0 \leqq x_1 \leqq X_1, \quad \ldots, \quad x_i^0 \leqq x_i \leqq X_i, \quad \ldots.$$

Въ этомъ случаѣ кратный интегралъ имѣетъ выраженіе

$$\int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \int_{x_2^0}^{X_2} dx_2 \ldots \int_{x_n^0}^{X_n} f\, dx_n,$$

и мы можемъ произвольнымъ образомъ измѣнять порядокъ интеграцій, не измѣняя предѣловъ, соотвѣтствующихъ каждому перемѣнному.

Формула замѣны перемѣнныхъ также распространяется на n-кратные интегралы. Пусть будутъ

$$x_i = \varphi_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

формулы преобразованія, устанавливающія взаимно однозначное соотвѣтствіе между областью D', описываемою точкою $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, и областью D, описываемою точкою $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Мы имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} &\iiint \ldots \int_{(D)} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \\ &= \iint \ldots \int_{(D')} F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \left| \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x'_1, \ldots, x'_n)} \right| dx'_1 \ldots dx'_n. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Доказательство этой формулы вполнѣ аналогично предыдущимъ. Я укажу здѣсь только въ общихъ чертахъ ходъ разсужденій.

1) Если формула (37) вѣрна для двухъ преобразованій, то она будетъ также вѣрна и для того преобразованія, которое получается отъ послѣдовательнаго выполненія этихъ двухъ преобразованій.

2) Всякая замѣна перемѣнныхъ можетъ быть получена, какъ соединеніе двухъ замѣнъ перемѣнныхъ слѣдующаго вида

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = x'_{n-1}, \quad x_n = \varphi_n(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n), \tag{38}$$

$$x_1 = \psi_1(x'_1, \ldots, x'_n), \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \psi_{n-1}(x'_1, \ldots, x_n'), \quad x_n = x_n'. \tag{39}$$

3) Формула (37) примѣнима къ замѣнѣ перемѣнныхъ вида (38); это слѣдуетъ изъ выраженія (34) для n-кратнаго интеграла. Точно также, изъ выраженія (35) для n-кратнаго интеграла слѣдуетъ, что если мы предположимъ, что формула (37) доказана для $(n-1)$-кратныхъ интеграловъ,

то эта формула будетъ примѣнима также и къ замѣнѣ перемѣнныхъ вида (39). Такимъ образомъ, переходя послѣдовательно отъ n къ $n+1$, можно доказать, что формула (37) имѣетъ общій характеръ.

Предположимъ, напримѣръ, что требуется вычислить опредѣленный интегралъ

$$I=\iint\ldots\int x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}(1-x_1-x_2-\ldots-x_n)^{\beta}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

распространенный на область D, опредѣляемую неравенствами

$$0\leqq x_1,\quad 0\leqq x_2,\quad \ldots,\quad 0\leqq x_n,\quad x_1+x_2+\ldots+x_n\leqq 1,$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ — положительныя числа.

Сдѣлавъ замѣну перемѣнныхъ

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\xi_1,\quad x_2+\ldots+x_n=\xi_1\xi_2,\quad \ldots,\quad x_n=\xi_1\xi_2\ldots\xi_n,$$

мы замѣнимъ область D областью D', опредѣляемою неравенствами

$$0\leqq\xi_1\leqq 1,\quad 0\leqq\xi_2\leqq 1,\quad \ldots,\quad 0\leqq\xi_n\leqq 1.$$

Кромѣ того, простымъ вычисленіемъ (§ 148) получимъ

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}=\xi_1^{n-1}\xi_2^{n-2}\ldots\xi_{n-1}.$$

Подъинтегральная функція принимаетъ видъ

$$\xi_1^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+n-1}\xi_2^{\alpha_2+\ldots+\alpha_n+n-2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}(1-\xi_1)^{\beta}(1-\xi_2)^{\alpha_1}\ldots(1-\xi_n)^{\alpha_{n-1}},$$

и искомый интегралъ выражается при помощи функціи Γ

$$I=\frac{\Gamma(\alpha_1+1)\,\Gamma(\alpha_2+1)\ldots\Gamma(\alpha_n+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\beta+n+1)}. \qquad (40)$$

II. — ИНТЕГРИРОВАНІЕ ПОЛНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛОВЪ.

151. Общій методъ. — Пусть будутъ $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Выраженіе

$$P\,dx+Q\,dy,$$

вообще, не представляетъ полнаго дифференціала отъ нѣкоторой функціи двухъ перемѣненныхъ x, y. Въ самомъ дѣлѣ, какъ извѣстно, уравненіе

$$du=P\,dx+Q\,dy \qquad (41)$$

равносильно двумъ отдѣльнымъ уравненіямъ

$$\frac{du}{dx}=P(x, y),\quad \frac{du}{dy}=Q(x, y). \qquad (42)$$

Дифференцируя первое изъ уравненій (42) по y, а второе по x,

мы видимъ, что функція $u(x, y)$ должна удовлетворять двумъ соотношеніямъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial P(x, y)}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Такимъ образомъ, для того чтобы существовала функція $u(x, y)$, удовлетворяющая условію (41), должно быть тождественно

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{43}$$

Это необходимое условіе вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, существуетъ безчисленное множество функцій $u(x, y)$, частныя производныя которыхъ по x равны $P(x, y)$; всѣ эти функціи заключаются въ формулѣ

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+Y,$$

гдѣ x_0 — произвольное постоянное, а Y — произвольная функція перемѣннаго y. Чтобы эта функція $u(x, y)$ удовлетворяла уравненію (41), необходимо и достаточно, чтобы ея частная производная по y была равна $Q(x, y)$, т.-е. чтобы было

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx+\frac{dY}{dy}=Q(x, y).$$

Но, на основаніи условія интегрируемости (43), имѣемъ

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx=Q(x, y)-Q(x_0, y),$$

и предыдущее соотношеніе обращается въ

$$\frac{\partial Y}{\partial y}=Q(x_0, y).$$

Правая часть зависитъ только отъ y; слѣдовательно, существуетъ безчисленное множество функцій Y отъ y, удовлетворяющихъ послѣднему условію. Всѣ онѣ содержатся въ формулѣ

$$Y=\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy+C,$$

гдѣ y_0 есть нѣкоторое частное значеніе перемѣннаго y, а C — произвольное постоянное. Такимъ образомъ, существуетъ безчис-

ленное множество функцій $u(x, y)$, удовлетворяющихъ уравненію (41); онѣ выражаются формулою

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy+C, \qquad (44)$$

и различаются между собою только значеніями добавочного постояннаго C.

Пусть будетъ, напримѣръ,

$$P=\frac{x+my}{x^2+y^2}, \quad Q=\frac{y-mx}{x^2+y^2};$$

условіе (43) удовлетворяется, и, полагая $x_0=0$, $y_0=1$, имѣемъ

$$u=\int_0^x \frac{x+my}{x^2+y^2}\,dx+\int_1^y \frac{dy}{y}+C.$$

Выполнивъ указанныя интегрированія, получимъ

$$u=\frac{1}{2}[\log(x^2+y^2)]_0^x+m\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)_0^x+\log y+C,$$

или, послѣ приведеній,

$$u=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+m\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}+C.$$

Этотъ методъ можно распространить на случай любого числа независимыхъ перемѣнныхъ. Мы разсмотримъ только случай трехъ перемѣнныхъ. Пусть будутъ P, Q, R функціи отъ x, y, z; уравненіе съ полными дифференціалами

$$du=P\,dx+Q\,dy+R\,dz \qquad (45)$$

равносильно тремъ уравненіямъ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=R. \qquad (46)$$

Вычисляя двумя различными способами производныя $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}$, мы получимъ три необходимыхъ условія

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \qquad (47)$$

Предположимъ, что эти условія удовлетворены. На основаніи перваго условія, существуетъ безчисленное множество функцій $u(x, y, z)$, частныя производныя которыхъ по x и по y равны соотвѣтственно P и Q; всѣ эти функціи содержатся въ формулѣ

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy+Z,$$

гдѣ Z есть произвольная функція отъ z. Чтобы производная $\frac{du}{dz}$ была равна R, необходимо, сверхъ того, чтобы было

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial z}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x_0, y, z)}{\partial z}\,dy + \frac{dZ}{dz} = R;$$

вслѣдствіе соотношеній (47), послѣднее уравненіе обращается въ

$$R(x, y, z) - R(x_0, y, z) + R(x_0, y, z) - R(x_0, x_0, z) + \frac{dZ}{dz} = R(x, y, z),$$

или

$$\frac{dZ}{dz} = R(x_0, y_0, z).$$

Отсюда мы заключаемъ, что существуетъ безчисленное множество функцій $u(x, y, z)$, удовлетворяющихъ уравненію (45); всѣ онѣ представляются формулою

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + C, \quad (48)$$

гдѣ x_0, y_0, z_0 — произвольно выбранныя числовыя значенія перемѣнныхъ, а C — произвольное постоянное.

152. Изслѣдованіе интеграла $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy$. — Предыдущій вопросъ можно разсматривать съ другой точки зрѣнія, которая позволяетъ изслѣдовать его глубже и приводитъ къ новымъ результатамъ. Пусть будутъ $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ функціи, непрерывныя вмѣстѣ со своими частными производными перваго порядка въ области A, ограниченной однимъ замкнутымъ контуромъ C; эта область A можетъ также охватывать всю плоскость, что̀ равносильно предположенію, что контуръ C удаленъ въ безконечность. Криволинейный интегралъ

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

взятый вдоль пути L, расположеннаго цѣликомъ внутри A, зависитъ, вообще, отъ пути интегрированія. Найдемъ прежде всего, при какихъ условіяхъ этотъ интегралъ зависитъ только отъ координатъ (x_0, y_0), (x_1, y_1) конечныхъ точекъ этого пути. Пусть будутъ M и N двѣ какихъ-нибудь точки области A, и L, L' — два пути, соединяющихъ эти точки и не пересѣкающихся между собою; оба эти пути, вмѣстѣ взятые, обра-

зуютъ замкнутый контуръ. Для того чтобы криволинейные интегралы, взятые вдоль L и вдоль L', были равны, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы интегралъ, взятый въ опредѣленномъ направленіи вдоль замкнутаго контура, образованнаго обѣими линіями, былъ равенъ нулю*). Такимъ образомъ, предложенный вопросъ равносиленъ слѣдующему: При какихъ условіяхъ криволинейный интегралъ

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

взятый вдоль какого-нибудь замкнутаго контура, расположеннаго въ области A, будетъ равенъ нулю?

Отвѣтъ на этотъ вопросъ получается непосредственно изъ формулы Грина

$$\int_{(C)} P\,dx + Q\,dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{49}$$

гдѣ C обозначаетъ какой-нибудь замкнутый контуръ, расположенный въ области A, а двойной интегралъ распространенъ на область, заключающуюся внутри контура C. Очевидно, что если производныя отъ функцій P и Q удовлетворяютъ соотношенію

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{43}'$$

то криволинейный интегралъ, стоящій въ лѣвой части, всегда равенъ нулю. Это условіе вмѣстѣ съ тѣмъ и необходимо. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что въ области A разность $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ не равна тождественно нулю; такъ какъ, по предположенію, эта разность есть непрерывная функція, то всегда можно найти настолько малую область a, чтобы въ области a знакъ этой функціи былъ постояненъ; тогда изъ формулы (49) очевидно, что криволинейный интегралъ, взятый вдоль контура области a, не можетъ быть равенъ нулю.

Если условія (43)′ удовлетворяются тождественно, то два пути L, L', имѣющіе одни и тѣ же крайнія точки M, N и не пересѣкающіеся между этими точками, дадутъ для криволинейнаго интеграла одно и то же значеніе. То же самое будетъ и въ томъ случаѣ, если между M и N эти пути нѣсколько

*) Такъ какъ этотъ интегралъ равенъ разности интеграловъ, взятыхъ по обоимъ путямъ отъ точки M до точки N.

(*Ред.*)

разъ пересѣкаются, такъ какъ достаточно ихъ сравнить съ третьимъ путемъ L'', не встрѣчающимся съ двумя первыми нигдѣ, кромѣ точекъ M и N.

Предположимъ теперь, что одинъ изъ концовъ линіи интегрированія есть постоянная точка (x_0, y_0), а другой конецъ — перемѣнная точка (x, y) области A. Интегралъ

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy, \qquad (50)$$

взятый вдоль пути произвольнаго вида, зависитъ только отъ координатъ (x, y) перемѣннаго конца. Частныя производныя отъ функціи $F(x, y)$ суть какъ разъ $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Напримѣръ, мы имѣемъ

$$F(x+\Delta x, y) = F(x, y) + \int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P(x, y)\,dx;$$

въ самомъ дѣлѣ, мы всегда можемъ предположить, что сначала идемъ по прежнему пути отъ точки (x_0, y_0) къ точкѣ (x, y), а потомъ отъ точки (x, y) къ точкѣ $(x+\Delta x, y)$ по прямой, параллельной оси Ox, причемъ вдоль этой прямой мы имѣемъ $dy = 0$. Прилагая формулу средняго значенія, мы можемъ написать

$$\frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y) \quad (0<\theta<1);$$

при приближеніи Δx къ нулю мы получимъ $F'_x = P$. Точно такъ же мы убѣдились бы, что $F'_y = Q$. Такимъ образомъ криволинейный интегралъ $F(x, y)$ удовлетворяетъ уравненію съ полными дифференціалами (41), и мы получимъ общій интегралъ этого уравненія, прибавляя къ $F(x, y)$ произвольное постоянное.

Новая формула (50) общѣе формулы (44), такъ какъ въ ней путь интегрированія остается неопредѣленнымъ; впрочемъ, изъ нея легко вывести формулу (44). Для устраненія всякихъ недоразумѣній, обозначимъ черезъ (x_0, y_0), (x_1, y_1) координаты обоихъ концовъ пути интегрированія и возьмемъ за путь интегрированія двѣ прямыхъ $x = x_0$, $y = y_1$. Вдоль первой прямой мы имѣемъ $x = x_0$, $dx = 0$, причемъ y измѣняется отъ y_0 до y_1; вдоль второй прямой $y = y_1$, $dy = 0$, и x измѣняется отъ x_0 до x_1. Слѣдовательно, нашъ интегралъ равенъ

$$\int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y)\,dy + \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1)\,dx;$$

эта формула отличается (44) только обозначеніями.

Но иногда бываетъ выгоднѣе выбрать другой путь интегрированія. Предположимъ, что полагая $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ и измѣняя t отъ t_0 до t_1, мы заставляемъ точку (x, y) описывать нѣкоторую кривую, соединяющую точку (x_0, y_0) съ точкою (x_1, y_1). Мы имѣемъ

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P\,dx+Q\,dy = \int_{t_0}^{t_1} [P(x, y)\,f'(t)+Q(x, y)\,\varphi'(t)]\,dt,$$

и остается выполнить только одну квадратуру. Напримѣръ, если мы будемъ перемѣщаться по прямой, то нужно положить $x=x_0+t(x_1-x_0)$, $y=y_0+t(y_1-y_0)$ и измѣнять t отъ 0 до 1.

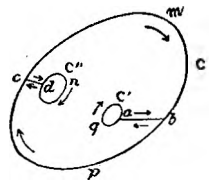
Обратно, зная какой-нибудь частный интегралъ $\Phi(x, y)$ уравненія (41), мы получимъ изъ него криволинейный интегралъ посредствомъ формулы

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P\,dx+Q\,dy = \Phi(x, y)-\Phi(x_0, y_0);$$

послѣдняя формула аналогична формулѣ (6) главы IV.

153. Періоды. — Можно разсматривать и болѣе общіе случаи. Замѣтимъ прежде всего, что формула Грина примѣнима также къ площадямъ, ограниченнымъ нѣсколькими контурами. Разсмотримъ, напримѣръ, площадь A, ограниченную внѣшнимъ контуромъ C и двумя контурами C', C'', расположенными внутри перваго (черт. 35). Пусть будутъ P и Q функціи, непрерывныя вмѣстѣ со своими частными производными перваго порядка внутри этой площади. (Части плоскости, содержащіяся внутри контуровъ C', C'', должно разсматривать, какъ не входящія въ составъ области A; мы не дѣлаемъ никакихъ предположеній относительно свойствъ функцій P и Q въ этихъ обѣихъ областяхъ). Соединимъ контуры C' и C'' поперечными линіями ab, cd съ замкнутымъ контуромъ C. Мы получимъ такимъ образомъ замкнутый контуръ $abmcdndcpbaqa$ или Γ, который можетъ быть описанъ непрерывнымъ движеніемъ *). Примѣняя формулу Грина къ площади, ограниченной этимъ контуромъ, мы найдемъ, что криволинейные интегралы, происходящіе отъ линій ab и cd, исчезнутъ, такъ

Черт. 35.



*) Поперечныя линіи ab, cd разсматриваются здѣсь, какъ двойныя, состоящія изъ двухъ безконечно близкихъ линій. *(Ред.)*

какъ каждый изъ нихъ берется въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ, и у насъ останется

$$\int P\,dx+Q\,dy=\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy;$$

въ этой формулѣ криволинейный интегралъ берется вдоль всего контура площади A, т.-е. вдоль трехъ контуровъ C, C', C'' въ направленіи, указанномъ стрѣлками, такъ, чтобы площадь, ограничиваемая этими контурами, оставалась всегда съ лѣвой стороны.

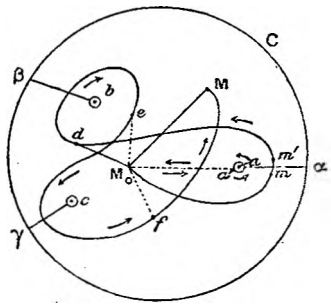
Если въ области A функціи P и Q удовлетворяютъ условію $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, то двойной интегралъ равенъ нулю, и мы можемъ представить полученное соотношеніе въ видѣ

$$\int_{(C)} P\,dx+Q\,dy=\int_{(C')} P\,dx+Q\,dy+\int_{(C'')} P\,dx+Q\,dy, \qquad (51)$$

если мы условимся брать здѣсь всѣ три криволинейныхъ интеграла въ одинаковомъ направленіи.

Возвратимся къ области A, ограниченной однимъ контуромъ C. Пусть будутъ P и Q функціи, удовлетворяющія соотношенію $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ и непрерывныя вмѣстѣ съ своими производными въ области A всюду, за исключеніемъ конечнаго числа точекъ, въ которыхъ по крайней мѣрѣ одна изъ функцій P, Q дѣлается прерывною. Для опредѣленности предположимъ, что въ A находятся три точки прерывности a, b, c.

Черт. 36.



Окружимъ каждую изъ этихъ точекъ окружностью весьма малаго радіуса и соединимъ эти окружности прорѣзами съ контуромъ C (черт. 36). Интегралъ $\int P\,dx+Q\,dy$, взятый отъ нѣкоторой постоянной точки (x_0, y_0) до нѣкоторой перемѣнной точки (x, y) вдоль линіи, не пересѣкающей ни одного изъ прорѣзовъ, имѣетъ въ каждой точкѣ единственное значеніе, такъ какъ контуръ C, прорѣзы и малыя окружности образуютъ вмѣстѣ одну линію, которую можно описать непрерывнымъ движеніемъ. Обозначимъ

черезъ $\overline{F(x, y)}$ значеніе этого интеграла, взятаго вдоль этого прямого пути отъ точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x, y)$.

Путь, состоящій изъ прямой, соединяющей точку M_0 съ точкою a', безконечно близкою къ точкѣ a, изъ малой окружности радіуса aa' съ центромъ въ a и изъ прямой $a'M_0$, называется петлею. Очевидно, что криволинейный интегралъ $\int P\,dx + Q\,dy$, взятый вдоль петли, приводится къ криволинейному интегралу, взятому только вдоль окружности, окружающей точку a. Если одна изъ функцій P или Q обращается въ точкѣ a въ безконечность, то послѣдній интегралъ, вообще, не равенъ нулю, но онъ не зависитъ отъ радіуса этой малой окружности; онъ равенъ нѣкоторому постоянному $\pm \mathfrak{A}$, причемъ двойной знакъ соотвѣтствуетъ двумъ направленіямъ обхода по окружности*). Мы обозначимъ такимъ же образомъ черезъ $\pm \mathfrak{B}$ и $\pm \mathfrak{C}$ значенія криволинейнаго интеграла, взятаго вдоль петель, описанныхъ около каждой изъ особыхъ точекъ b и c.

Теперь легко видѣть, что всякій путь, соединяющій точку M_0 съ точкою M, можетъ быть замѣненъ прямымъ путемъ, идущимъ изъ точки M_0 къ точкѣ M, и рядомъ петель. Напримѣръ, путь $M_0 mdefM$ можетъ быть замѣненъ рядомъ слѣдующихъ путей: $M_0 m dM_0$, $M_0 de M_0$, $M_0 ef M_0$, $M_0 fM$; путь $M_0 m dM_0$ можетъ быть въ свою очередь замѣненъ петлею, описанною около особой точки a; то же будетъ и съ другими путями. Наконецъ, путь $M_0 fM$ равносиленъ прямому пути. Это показываетъ, что, каковъ бы ни былъ путь интегрированія, значеніе криволинейнаго интеграла будетъ имѣть видъ

$$F(x, y) = \overline{F(x, y)} + m\mathfrak{A} + n\mathfrak{B} + p\mathfrak{C}, \qquad (52)$$

---

*) Нетрудно видѣть, что постоянное $\mathfrak{A}$ не зависитъ отъ радіуса окружности, окружающей точку a, если только эта окружность достаточно мала. Въ самомъ дѣлѣ, опишемъ около точки a двѣ концентрическихъ окружности C, C', настолько малыхъ, чтобы внутри ихъ не содержалось ни одной изъ остальныхъ точекъ прерывности $b, c, \ldots$. Тогда внутри кольцеобразной области, ограниченной этими двумя окружностями, функціи P и Q будутъ непрерывны вмѣстѣ съ своими производными перваго порядка; а такъ какъ эта область ограничена двумя контурами — однимъ внѣшнимъ и другимъ внутреннимъ, то, какъ было показано въ началѣ этого параграфа, значеніе интеграла $\int P dx + Q dy$ на внѣшнемъ контурѣ C равно значенію того же интеграла на внутреннемъ контурѣ C'. *(Ред.)*

гдѣ m, n, p — три совершенно произвольныхъ цѣлыхъ числа положительныхъ или отрицательныхъ. Количества $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ называются періодами криволинейнаго интеграла. Такимъ образомъ, этотъ интегралъ есть функція отъ x и y, имѣющая безконечное множество значеній, и намъ ясно происхожденіе этой многозначности.

Примѣчаніе. — Послѣ того какъ проведены прорѣзы $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, функція $\overline{F(x, y)}$ будетъ въ области A вполнѣ опредѣленною функціею; но должно замѣтить, что въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ, лежащихъ по разныя стороны прорѣза, напримѣръ, въ m и m', разность $\overline{F(m)} - \overline{F(m')}$ имѣетъ конечное значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\mathfrak{A} = \int_{M_0}^{m} + \int_{m}^{m'} + \int_{m'}^{M_0}.$$

Это равенство можно представить въ видѣ

$$\int_{M_0}^{m} = \int_{M_0}^{m'} + \mathfrak{A} + \int_{m'}^{m};$$

но количество $\int_{m'}^{m}$ безконечно мало, и у насъ остается

$$\overline{F(m)} - \overline{F(m')} = \mathfrak{A}.$$

Такимъ образомъ, вдоль всего прорѣза $a\alpha$ разность $\overline{F(m)} - \overline{F(m')}$ постоянна и равна $\mathfrak{A}$.

Примѣръ. — Криволинейный интегралъ

$$\int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

имѣетъ одну критическую точку — начало координатъ. Чтобы получить соотвѣтствующій періодъ, возьмемъ данный интегралъ вдоль окружности $x^2 + y^2 = \rho^2$. Мы имѣемъ

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad x\,dy - y\,dx = \rho^2\,d\omega,$$

и періодъ равенъ $\int_0^{2\pi} d\omega = 2\pi$. Этотъ результатъ легко провѣрить, такъ какъ подъ знакомъ интеграла стоитъ полный дифференціалъ отъ $\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

154. Общіе корни двухъ уравненій. — Пусть будутъ X, Y функціи перемѣнныхъ x, y, непрерывныя въ области A, ограниченной

однимъ замкнутымъ контуромъ C; предположимъ, что частныя производныя перваго порядка отъ этихъ функцій также непрерывны.

Выраженіе $\frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2}$ удовлетворяетъ условію интегрируемости, такъ какъ оно есть полный дифференціалъ отъ $\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}$. Отсюда слѣдуетъ, что криволинейный интегралъ

$$\int_{(C)}\frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2}, \tag{53}$$

взятый въ прямомъ направленіи вдоль контура C, равенъ нулю, если только коэффиціенты при dx и при dy подъ знакомъ интеграла остаются непрерывными внутри контура C, т.-е. если кривыя $X=0$, $Y=0$ не имѣютъ ни одной общей точки внутри этого контура. Но если обѣ эти кривыя имѣютъ общія точки a, b, c, . . . , то интегралъ (53) равенъ суммѣ интеграловъ, взятыхъ въ прямомъ направленіи вдоль малыхъ окружностей, описанныхъ около точекъ a, b, c, ... Пусть будутъ (α, β) координаты одной изъ этихъ общихъ точекъ; предположимъ, что функціональный опредѣлитель $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$ въ этой точкѣ не равенъ нулю, т.-е. что кривыя $X=0$, $Y=0$ не касаются въ этой точкѣ другъ друга. Тогда мы можемъ описать около точки (α, β) окружность c настолько малаго радіуса, чтобы, въ то время какъ точка (x, y) находится на кругѣ c, точка (X, Y) описывала вокругъ точки $(0, 0)$ весьма малую площадь, ограниченную нѣкоторымъ контуромъ γ, точки которой находились бы въ однозначномъ соотвѣтствіи съ точками круга c.

Когда точка (x, y) описываетъ окружность c въ прямомъ направленіи, точка (X, Y) описываетъ контуръ γ въ прямомъ направленіи или въ обратномъ въ зависимости отъ знака функціональнаго опредѣлителя внутри этой малой окружности c. Но нашъ опредѣленный интегралъ, взятый вдоль окружности c, равенъ приращенію $\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}$, слѣдовательно, равенъ $\pm 2\pi$. Примѣняя то же самое разсужденіе ко всѣмъ корнямъ, мы отсюда видимъ, что

$$\int_{(C)}\frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2}=2\pi\,(P-N), \tag{54}$$

гдѣ P есть число общихъ точекъ обѣихъ кривыхъ $X=0$, $Y=0$, для которыхъ $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$ положительно, и N — число общихъ точекъ, для которыхъ этотъ опредѣлитель отрицателенъ.

Опредѣленный интегралъ, стоящій въ лѣвой части, равенъ также измѣненію $\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}$ вдоль контура C, т.-е. указателю функціи $\frac{Y}{X}$, когда точка (x, y) описываетъ контуръ C. Если функціи X, Y — многочлены, и если контуръ C состоитъ изъ дугъ уникурсальныхъ кривыхъ, то задача приводится къ вычисленію указателя одной или нѣсколькихъ раціональныхъ функцій, что требуетъ только элементарныхъ операцій (§ 77). Кромѣ того, каковы бы ни были функціи X, Y, всегда можно вычислить опредѣленный интегралъ (54) съ погрѣшностью, меньшею π, что вполнѣ достаточно, такъ какъ правая часть есть кратное 2π.

Очевидно, что формула (54) позволяетъ узнать полное число точекъ, общихъ обѣимъ кривымъ, только въ томъ случаѣ, когда функціональный опредѣлитель сохраняетъ внутри C постоянный знакъ. Новѣйшія работы Пикара (Picard) дополнили этотъ результатъ *).

155. Обобщеніе предыдущихъ результатовъ. — Выводы послѣднихъ параграфовъ могутъ быть распространены безъ существенныхъ измѣненій на криволинейные интегралы въ пространствѣ

$$U = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{55}$$

Обозначимъ черезъ P, Q, R функціи, непрерывныя вмѣстѣ со своими частными производными перваго порядка въ области (E) пространства, ограниченной одною замкнутою поверхностью S. Найдемъ сначала, при какихъ условіяхъ этотъ криволинейный интегралъ зависитъ только отъ концовъ (x_0, y_0, z_0), (x, y, z) пути интегрированія, или, что то же, найдемъ, въ какомъ случаѣ криволинейный интегралъ, взятый вдоль какой-нибудь замкнутой кривой Γ, равенъ нулю. По формулѣ Стокса (§ 136), этотъ криволинейный интегралъ равенъ интегралу по поверхности

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx,$$

распространенному на какую-нибудь поверхность Σ, ограниченную контуромъ Γ. Для того чтобы при всякомъ контурѣ Γ этотъ интегралъ по поверхности былъ равенъ нулю, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{56}$$

Если эти условія удовлетворяются, то существуетъ функція U перемѣнныхъ x, y, z, полный дифференціалъ которой есть $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, и которая однозначна въ части (E) пространства. Чтобы получить значеніе функціи U въ какой-нибудь точкѣ, можно выбрать путь интегрированія совершенно произвольный.

Если функціи P, Q, R удовлетворяютъ соотношеніямъ (56), но обращаются въ безконечность во всѣхъ точкахъ одной или нѣсколькихъ линій области (E), то получаются слѣдствія, аналогичныя полученнымъ въ § 153. Напримѣръ, если одна изъ функцій P, Q, R обращается въ безконечность во всѣхъ точкахъ замкнутой кривой γ, то интегралъ U имѣетъ періодъ, равный значенію криволинейнаго интеграла, взятаго вдоль замкнутаго контура, пересѣкающаго одинъ и только одинъ разъ поверхность σ, ограниченную кривою γ.

Относительно интеграловъ по поверхности также можно поставить вопросъ, аналогичный разобранному выше для криволинейныхъ интеграловъ. Пусть будутъ A, B, C функціи, непрерывныя вмѣстѣ со своими частными производными перваго порядка въ части (E) пространства,

*) Пикаръ, Traité d'Analyse, т. II.

ограниченной одною замкнутою поверхностью S. Пусть будетъ Σ какая-нибудь поверхность въ части (E), ограниченная контуромъ Γ произвольнаго вида. Интегралъ по поверхности

$$I = \iint_{(\Sigma)} A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy \qquad (57)$$

зависитъ, вообще, отъ самой поверхности Σ, а не только отъ одного контура Γ. Чтобы этотъ интегралъ зависѣлъ только отъ контура Γ, необходимо, чтобы двойной интегралъ, распространенный на произвольную замкнутую поверхность, взятую внутри E, былъ равенъ нулю. Условіе для этого можно непосредственно вывести изъ формулы Остроградскаго (§ 149). Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что предыдущій двойной интегралъ, распространенный на какую-нибудь замкнутую поверхность, равенъ тройному интегралу

$$\iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

распространенному на объемъ, ограниченный этою поверхностью. Для того чтобы при всякомъ объемѣ этотъ послѣдній интегралъ былъ равенъ нулю, очевидно, необходимо, чтобы функціи A, B, C удовлетворяли соотношенію

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \qquad (58)$$

Условіе (58) вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно.

Этотъ результатъ легко провѣрить, пользуясь формулою Стокса. Въ самомъ дѣлѣ, если даны три функціи A, B, C, удовлетворяющія соотношенію (58), то безчисленными способами можно найти три такія другія функціи P, Q, R, чтобы было

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C. \qquad (59)$$

Если эти уравненія имѣютъ хотя одно рѣшеніе, то они имѣютъ ихъ безчисленное множество, такъ какъ они не измѣняются при замѣнѣ P, Q, R соотвѣтственно черезъ

$$P + \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad Q + \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad R + \frac{\partial \lambda}{\partial z},$$

гдѣ λ — произвольная функція отъ x, y, z. Положимъ $R = 0$; изъ двухъ первыхъ соотношеній (59) получимъ

$$P = \int_{z_0}^{z} B(x, y, z)\,dz + \varphi(x, y), \qquad Q = -\int_{z_0}^{z} A(x, y, z)\,dz + \psi(x, y),$$

гдѣ $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — произвольныя функціи отъ x и y. Внося эти значенія въ послѣднее уравненіе (59), мы представимъ его въ видѣ

$$-\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dz + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = C(x, y, z),$$

или, принимая во вниманіе условіе (58),

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = C(x, y, z_0).$$

Такимъ образомъ, одну изъ функцій φ, ψ можно взять произвольно.

Опредѣливъ такимъ образомъ функціи P, Q, R, удовлетворяющія уравненіямъ (59), мы найдемъ, что, по формулѣ Стокса, интегралъ по поверхности I будетъ равенъ криволинейному интегралу

$$\int_{(\Gamma)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz;$$

слѣдовательно, онъ зависитъ только отъ контура Γ.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Вычислить значеніе тройного интеграла

$$\iiint [5\,(x-y)^2+3\,az-4\,a^2]\,dx\,dy\,dz,$$

распространеннаго на объемъ, опредѣляемый неравенствами

$$x^2+y^2-az<0, \qquad x^2+y^2+z^2-2a^2<0.$$

2. Вычислить площадь поверхности, представляемой уравненіемъ

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2b^2(x+y^2)\,z}{a^2x^2+b^2y^2},$$

и объемъ, ограниченный этою поверхностью.

3. Изслѣдовать свойства функціи

$$F(X, Y, Z)=\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} f(x, y, z)\,dz,$$

разсматриваемой, какъ функція отъ X, Y, Z. Распространить на этотъ случай выводы § 125.

4. Найти объемъ, ограниченный тою частью поверхности, представляемой уравненіемъ

$$(x^2+y^2+z^2)^3=3\,a^3\,xyz,$$

которая расположена въ трехгранномъ углѣ $Oxyz$.

5. Привести къ простому интегралу кратный интегралъ

$$\int\int\dots\int x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}\,F(x_1+x_2+\dots+x_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n,$$

распространенный на область D, опредѣляемую неравенствами

$$0\leqq x_1, \quad 0\leqq x_2, \quad \dots, \quad 0\leqq x_n, \quad x_1+x_2+\dots+x_n\leqq a.$$

(Здѣсь слѣдуетъ поступать такъ же, какъ въ § 148.)

6. Привести къ простому интегралу кратный интегралъ

$$\int\int\dots\int x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}\,F\left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1}+\dots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n}\right]dx_1\,dx_2\dots dx_n,$$

распространенный на область D, ограниченную неравенствами

$$0\leqq x_1, \quad 0\leqq x_2, \quad \dots, \quad 0\leqq x_n, \quad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{p_1}+\dots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{p_n}\leqq 1.$$

7*. Вывести формулу

$$\int\int\int\dots\int dx_1\,dx_2\dots dx_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

гдѣ кратный интегралъ распространенъ на область D, опредѣляемую неравенствами

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2<1.$$

8*. Вывести формулу

$$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}F'(a\cos\theta+b\sin\theta\cos\varphi+c\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\,d\varphi=2\pi\int_{-1}^{+1}F(uR)\,du,$$

гдѣ a, b, c — произвольныя постоянныя, и $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

[Пуассонъ.]

[Здѣсь слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что предложенный двойной интегралъ представляетъ интегралъ по поверхности, распространенный на сферу $x^2+y^2+z^2=1$, и принять за новую плоскость xy плоскость $bx+cy+az=0$.]

9*. Пусть будетъ $\varrho=F(\theta,\varphi)$ — уравненіе замкнутой поверхности въ полярныхъ координатахъ. Доказать, что объемъ, ограниченный этою поверхностью, равенъ двойному интегралу, распространенному на всю поверхность,

$$\frac{1}{3}\int\int\varrho\cos\gamma\,d\sigma, \qquad (\alpha)$$

гдѣ $d\sigma$ есть элементъ поверхности, и γ — уголъ между радіусомъ векторомъ и внѣшнею нормалью.

10*. Разсмотримъ эллипсоидъ, представляемый уравненіемъ

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1.$$

Будемъ опредѣлять точки его поверхности эллиптическими координатами ν и ϱ, т.-е. корнями предыдущаго уравненія, въ которомъ μ замѣнено неизвѣстнымъ (см. § 147). Примѣненіе формулъ (29′) къ объему этого эллипсоида приводитъ къ слѣдующему соотношенію

$$\int_0^b d\varrho\int_b^c\frac{(\nu^2-\varrho^2)\sqrt{(c^2-\varrho^2)(c^2-\nu^2)}}{\sqrt{(b^2-\varrho^2)(\nu^2-b^2)}}\,d\nu=\frac{1}{b}\pi c^2(c^2-b^2).$$

Примѣненіе формулы (α) (упр. 9) даетъ также

$$\int_0^b d\varrho\int_b^c\frac{(\nu^2-\varrho^2)\,d\nu}{\sqrt{(b^2-\varrho^2)(c^2-\varrho^2)(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}}=\frac{\pi}{2}.$$

[Ламэ].

11. Опредѣлить функціи $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, непрерывныя вмѣстѣ съ своими частными производными, подъ условіемъ, чтобы криволинейный интегралъ

$$\int P(x+\alpha,y+\beta)\,dx+Q(x+\alpha,y+\beta)\,dy,$$

взятый вдоль любого замкнутаго контура, не зависѣлъ отъ постоянныхъ α, β, а зависѣлъ только отъ самого контура.

12*. Разсмотримъ преобразованіе, опредѣляемое уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= f(x', y', z'), \\ y &= \varphi(x', y', z'), \\ z &= \psi(x', y', z'). \end{aligned}\right\}$$

Когда точка (x', y', z') описываетъ какую-нибудь поверхность S', точка (x, y, z) описываетъ нѣкоторую поверхность S. Пусть будутъ α, β, γ направляющіе углы нормали къ поверхности S, α', β', γ' — направляющіе углы соотвѣтствующей нормали къ поверхности S', и $d\sigma$, $d\sigma'$ — соотвѣтственные элементы обѣихъ поверхностей. Доказать формулу

$$\cos\gamma\, d\sigma = \pm d\sigma' \left\{ \frac{D(x, y)}{D(y', z')}\cos\alpha' + \frac{D(x, y)}{D(z', x')}\cos\beta' + \frac{D(x, y)}{D(x', y')}\cos\gamma' \right\}.$$

13*. Вывести непосредственно формулу (16) стр. 319.

[Объемъ V можетъ быть выраженъ интеграломъ по поверхности

$$V = \int_{(S)} z\cos\gamma\, d\sigma,$$

и мы можемъ воспользоваться слѣдующимъ тожествомъ, которое легко провѣрить,

$$\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x', y', z')} = \frac{\partial}{\partial x'}\left\{\psi\frac{D(f, \varphi)}{D(y', z')}\right\} + \frac{\partial}{\partial y'}\left\{\psi\frac{D(f, \varphi)}{D(z', x')}\right\} + \frac{\partial}{\partial z'}\left\{\psi\frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')}\right\}.]$$

ГЛАВА VIII.

Разложенія въ ряды.

I.—ОБЩІЯ СВОЙСТВА РЯДОВЪ.—ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ.

156. Опредѣленія и общія свойства.—Основныя свойства рядовъ подробно излагаются во всѣхъ курсахъ алгебры. Мы напомнимъ здѣсь важнѣйшія изъ этихъ свойствъ.

Разсмотримъ сначала безконечную послѣдовательность количествъ

$$s_0,\quad s_1,\quad s_2,\quad \ldots,\quad s_n,\quad \ldots, \qquad (1)$$

изъ которыхъ каждое занимаетъ опредѣленное мѣсто, соотвѣтствующее его указателю. Если при неограниченномъ возрастаніи указателя n, s_n стремится къ нѣкоторому предѣлу, то такая послѣдовательность называется сходящеюся. Всякая несходящаяся послѣдовательность называется расходящеюся; такая послѣдовательность можетъ получиться или отъ того, что s_n, возрастая вмѣстѣ съ n, становится большимъ всякаго заранѣе даннаго числа, или отъ того, что s_n, хотя и не возрастаетъ неограниченно, но вмѣстѣ съ тѣмъ и не стремится ни къ какому предѣлу.

Для того чтобы послѣдовательность была сходящеюся, необходимо и достаточно, чтобы всякому положительному числу ε соотвѣтствовало такое цѣлое число n, чтобы разность $s_{n+p}-s_n$ была по абсолютному значенію меньше ε, каково бы ни было цѣлое положительное число p.

Это условіе необходимо. Въ самомъ дѣлѣ, если, при неограниченномъ возрастаніи n, s_n имѣетъ предѣлъ s, то можно найти настолько большое число n, чтобы всѣ разности $s-s_n$, $s-s_{n+1}$, $\ldots$, $s-s_{n+p}$ были по абсолютному значенію меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Слѣдовательно, разность $s_{n+p}-s_n$ будетъ при всякомъ p меньше количества $2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Для доказательства обратнаго предложенія мы введемъ весьма важное понятіе, принадлежащее Коши. Предположимъ, что всѣ члены послѣдовательности (1) по абсолютному значенію меньше нѣкотораго положительнаго числа N. Всѣ числа, содержащіяся между $-N$ и $+N$, можно раздѣлить на два класса слѣдующимъ образомъ. Условимся относить данное число α къ классу A, если въ послѣдовательности (1) содержится безчисленное множество членовъ, большихъ этого числа; напротивъ, мы отнесемъ число α къ классу B, если въ послѣдовательности (1) заключается только конечное число членовъ, большихъ числа α, или если такихъ членовъ совсѣмъ нѣтъ. Ясно, что всякое число, содержащееся между $-N$ и $+N$, будетъ принадлежать къ одному изъ двухъ классовъ A и B, и что каждое число класса A меньше каждаго числа класса B. Пусть будетъ S верхній предѣлъ чиселъ класса A; S будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и нижнимъ предѣломъ чиселъ класса B. Это число S Коши назвалъ наибольшимъ изъ предѣловъ*) членовъ послѣдовательности (1). Не должно смѣшивать S съ верхнимъ предѣломъ членовъ послѣдовательности (1); такъ, напримѣръ, для послѣдовательности

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

верхній предѣлъ (§ 68) есть 1, тогда какъ наибольшій изъ предѣловъ есть 0.

Нетрудно объяснить, почему Коши далъ числу S такое названіе. По самому опредѣленію этого числа, какъ бы мало ни было положительное число ε, всегда есть безчисленное множество членовъ послѣдовательности (1), содержащихся между $S-\varepsilon$ и $S+\varepsilon$. Разсмотримъ послѣдовательность положительныхъ убывающихъ чиселъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, общій членъ которой ε_n стремится къ нулю. Пусть будетъ α_i одинъ изъ членовъ послѣдовательности, заключающихся между $S-\varepsilon_i$ и $S+\varepsilon_i$. Тогда послѣдовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ будетъ соотвѣтствовать другая послѣдовательность чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$

*) Résumés analytiques de Turin, 1833 (Œuvres complètes, 2-я серія, т. X, стр. 49).

Это опредѣленіе можетъ быть легко распространено на всякое множество чиселъ, ограниченное сверху.

a_n. . . , входящихъ въ составъ послѣдовательности (1) и имѣющихъ предѣломъ S. При этомъ изъ самаго опредѣленія числа S ясно, что изъ послѣдовательности (1) нельзя выдѣлить никакой частичной сходящейся послѣдовательности, которая имѣла бы предѣломъ число, большее S*). Если послѣдовательность (1) — сходящаяся, то ея предѣлъ есть, очевидно, само число S.

Послѣ этого замѣчанія переходимъ къ доказательству обратнаго предложенія. Предположимъ, что при всякомъ положительномъ числѣ p разность $s_{n+p} - s_n$ двухъ членовъ послѣдовательности (1) по абсолютному значенію меньше нѣкотораго положительнаго числа ε. Всѣ члены послѣдовательности (1), начиная съ s_n, будутъ содержаться между $s_n - \varepsilon$ и $s_n + \varepsilon$. Пусть будетъ S наибольшій изъ предѣловъ членовъ этой послѣдовательности; какъ мы видѣли, изъ послѣдовательности (1) можно выдѣлить частичную послѣдовательность, которая будетъ имѣть предѣломъ S, и, такъ какъ, начиная съ опредѣленнаго мѣста, всѣ дальнѣйшіе члены этой послѣдовательности содержатся между $s_n + \varepsilon$ и $s_n - \varepsilon$, то ясно, что абсолютное значеніе разности $S - s_n$ не можетъ быть больше ε. Пусть будетъ теперь s_m какой-нибудь членъ послѣдовательности (1), у котораго указатель m больше n. Мы можемъ написать

$$s_m - S = (s_m - s_n) + (s_n - S).$$

Мы видимъ, что абсолютное значеніе правой части меньше 2ε. Такъ какъ ε есть произвольное положительное число, то отсюда слѣдуетъ, что при неограниченномъ возрастаніи указателя m общій членъ s_m имѣетъ предѣломъ S.

Примѣчаніе. — Если S есть наибольшій изъ предѣловъ членовъ послѣдовательности (1), то всякое число, большее S, принадлежитъ къ классу B, и всякое число, меньшее S, принадлежитъ къ классу A. Само число S можетъ принадлежать или къ классу A или къ классу B.

---

*) Поэтому S есть наибольшій изъ предѣловъ всѣхъ тѣхъ сходящихся послѣдовательностей, которыя могутъ быть выдѣлены изъ послѣдовательности (1). Такъ, напримѣръ, для послѣдовательности

$$\frac{1}{1}, -1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{3}, -3, \frac{1}{4}, -4, \ldots$$

S равно нулю; для послѣдовательности

$$\frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{6}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \ldots$$

S равно единицѣ. (*Ред.*)

157. Пусть намъ дана какая-нибудь безконечная послѣдовательность

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots.$$

Рядъ

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (2)$$

называется сходящимся, если послѣдовательность $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$, составленная изъ суммъ членовъ этого ряда

$$S_0=u_0,\quad S_1=u_0+u_1,\quad \ldots,\quad S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n,\quad \ldots,$$

—сходящаяся. Пусть будетъ S предѣлъ этой послѣдовательности, т.-е. предѣлъ, къ которому стремится сумма S_n при неограниченномъ возрастаніи указателя n; тогда S называется суммою предыдущаго ряда, и эта зависимость обозначается равенствомъ

$$S=u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{\nu=0}^{+\infty}u_\nu.$$

Рядъ несходящійся называется расходящимся.

Такимъ образомъ, узнать, будетъ ли данный рядъ сходящимся или расходящимся, это значитъ узнать, будетъ ли сходящеюся или расходящеюся послѣдовательность, образованная суммами S_0, S_1, S_2, ... Обратно, чтобы узнать, будетъ ли какая-нибудь безконечная послѣдовательность

$$s_0,\quad s_1,\quad s_2,\quad \ldots,\quad s_n,\quad \ldots$$

сходящеюся, можно изслѣдовать рядъ

$$s_0+(s_1-s_0)+(s_2-s_1)+\ldots(s_n-s_{n-1})+\ldots,$$

такъ какъ сумма S_n первыхъ $(n+1)$ членовъ этого ряда, очевидно, равна общему члену s_n предыдущей послѣдовательности. Этимъ замѣчаніемъ часто пользуются при рѣшеніи вопросовъ о сходимости и расходимости послѣдовательностей.

Рядъ (2) будетъ сходящимся или расходящимся одновременно съ рядомъ

$$u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{p+q}+\ldots, \qquad (3)$$

который получается изъ ряда (2), если мы отбросимъ въ послѣднемъ p первыхъ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ S_n $(n>p)$ сумма $(n+1)$ первыхъ членовъ ряда (2) и Σ_{n-p} сумма $(n-p+1)$ первыхъ членовъ ряда (3)

$$\Sigma_{n-p}=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n.$$

Разность $S_n - \Sigma_{n-p} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{p-1}$ не зависитъ отъ n; слѣдовательно, если сумма S_n стремится къ предѣлу, то и сумма Σ_{n-p} также стремится къ предѣлу, и обратно. Отсюда слѣдуетъ, что если мы хотимъ узнать, будетъ ли данный рядъ сходящимся или расходящимся, то мы всегда можемъ пренебречь любымъ числомъ начальныхъ членовъ этого ряда.

Пусть будетъ S сумма какого-нибудь сходящагося ряда, S_n — сумма его n первыхъ членовъ и R_n — сумма членовъ, начиная съ члена u_{n+1},

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots$$

Очевидно, мы имѣемъ

$$S = S_n + R_n.$$

Вообще, мы не можемъ найти точнаго выраженія суммы S сходящагося ряда. Если мы примемъ за приближенное значеніе суммы S сумму S_n первыхъ $(n+1)$ членовъ ряда, то погрѣшность будетъ равна R_n. Такъ какъ, при неограниченномъ возрастаніи n, S_n имѣетъ предѣломъ S, то разность R_n стремится къ нулю, и, слѣдовательно, всегда можно, по крайней мѣрѣ теоретически, взять столько членовъ ряда, чтобы погрѣшность отъ замѣны S черезъ S_n была менѣе всякаго заранѣе даннаго числа. Чтобы судить о полученномъ приближеніи, достаточно знать верхній предѣлъ суммы R_n. Понятно, что на практикѣ для вычисленій пригодны только такіе ряды, для которыхъ остатокъ R_n стремится къ нулю достаточно быстро.

Изъ самаго опредѣленія сходимости вытекаетъ нѣсколько свойствъ, которыя мы перечислимъ, не приводя доказательствъ.

1. Если мы умножимъ всѣ члены какого-нибудь ряда на постоянное число a, отличное отъ нуля, то новый рядъ будетъ сходящимся или расходящимся одновременно съ первымъ. Если первый рядъ сходящійся и имѣетъ сумму S, то сумма второго ряда равна aS.

2. Если мы имѣемъ два сходящихся ряда

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

съ суммами S и S', то новый рядъ, который получится, если мы почленно сложимъ оба предыдущихъ ряда,

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots$$

также сходящійся, и его сумма равна $S+S'$. То же самое будетъ, если мы сложимъ почленно p сходящихся рядовъ.

3. Сходимость или расходимость ряда не нарушится отъ измѣненія значеній конечнаго числа членовъ этого ряда, такъ какъ, начиная съ достаточно большого числа n, это равносильно увеличенію или уменьшенію всѣхъ суммъ S_n на постоянное количество.

4. Примѣняя признаки сходимости безконечной послѣдовательности къ рядамъ, мы получимъ общее условіе сходимости, принадлежащее Коши*):

Для того чтобы рядъ былъ сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для всякаго положительнаго числа ε можно было найти такое цѣлое число n, чтобы сумма произвольнаго числа членовъ, начиная съ члена u_{n+1}, была по абсолютному значенію менѣе ε.

Въ этомъ нетрудно убѣдиться, замѣтивъ, что $S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}$.

Изъ этого предложенія, въ частности, слѣдуетъ, что въ сходящемся рядѣ общій членъ u_n долженъ при неограниченномъ возрастаніи n стремиться къ нулю.

Правило Коши имѣетъ вполнѣ общій характеръ, но на практикѣ пользоваться имъ трудно; въ сущности, оно есть не что иное, какъ развитіе самого понятія о предѣлѣ. Поэтому мы приведемъ здѣсь наиболѣе употребительныя правила для практическаго рѣшенія вопроса о сходимости или расходимости рядовъ. Всѣ эти правила имѣютъ то общее свойство, что они примѣнимы только при извѣстныхъ условіяхъ; тѣмъ не менѣе для большей части случаевъ эти правила вполнѣ достаточны.

158. Ряды съ положительными членами. — Ряды, всѣ члены которыхъ положительны, имѣютъ большое значеніе, и мы начнемъ съ нхъ разсмотрѣнія. Въ каждомъ такомъ рядѣ сумма S_n возрастаетъ вмѣстѣ съ n; поэтому, для того чтобы рядъ былъ сходящимся, достаточно, чтобы при всякомъ n эта сумма S_n оставалась меньшею нѣкотораго опредѣленнаго количества. Самый общій пріемъ для рѣшенія вопроса о сходимости или расходимости ряда состоитъ въ сравненіи предложеннаго ряда съ другимъ рядомъ, уже изслѣдованнымъ ранѣе. Этотъ пріемъ основанъ на двухъ слѣдующихъ предложеніяхъ:

---

*) Exercices de Mathématiques; 1827 (Œuvres complètes, т. VIII 2-я серія, стр. 267).

1. Если всѣ члены какого-нибудь знакоположительнаго ряда соотвѣтственно меньше или равны членамъ другого знакоположительнаго сходящагося ряда, то и первый рядъ также сходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ, сумма S_n первыхъ n членовъ предложеннаго ряда, очевидно, меньше суммы S' второго ряда; слѣдовательно, эта сумма S_n имѣетъ предѣлъ S, меньшій S'.

2. Если всѣ члены какого-нибудь знакоположительнаго ряда соотвѣтственно больше членовъ другого знакоположительнаго расходящагося ряда, то первый рядъ также расходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ, сумма n первыхъ членовъ перваго ряда больше суммы n первыхъ членовъ второго ряда и, слѣдовательно, она неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ n.

Можно также сравнивать два ряда другимъ способомъ, основываясь на слѣдующей леммѣ. Пусть будутъ

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (U)$$
$$v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \qquad (V)$$

два знакоположительныхъ ряда. Если рядъ (U) — сходящійся, и если, начиная съ нѣкотораго указателя n, мы постоянно имѣемъ $\frac{v_{n+1}}{v_n}<\frac{u_{n+1}}{u_n}$, то рядъ (V) — также сходящійся. Если рядъ (U) расходящійся, и если, начиная съ нѣкотораго указателя n, мы постоянно имѣемъ $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$, то рядъ (V) — также расходящійся.

Чтобы доказать первую часть предложенія, предположимъ, что неравенство $\frac{v_{n+1}}{v_n}<\frac{u_{n+1}}{u_n}$ удовлетворяется для $n\geqq p$. Такъ какъ, умноживъ всѣ члены ряда на постоянный множитель, мы не измѣнимъ ни сходимости ряда, ни отношенія любого члена ряда къ предыдущему члену, то мы можемъ предположить, что $v_p<u_p$; тогда мы будемъ, очевидно, имѣть $v_{p+1}<u_{p+1}$, затѣмъ $v_{p+2}<u_{p+2}$, и т. д. Слѣдовательно, рядъ (V) — сходящійся. Вторая часть леммы доказывается такимъ же способомъ.

Такимъ образомъ, если намъ данъ знакоположительный рядъ, характеръ котораго относительно его сходимости извѣстенъ,

то, пользуясь предыдущими предложеніями, мы можемъ сравнивать съ нимъ другіе знакоположительные ряды; въ зависимости отъ того, будемъ ли мы сравнивать самые члены или только отношенія двухъ послѣдовательныхъ членовъ, мы получимъ два предложенія, которыя позволятъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ убѣдиться въ сходимости или расходимости этого второго ряда.

159. Признаки сходимости Коши и Даламбера.—Простѣйшій рядъ, которымъ можно воспользоваться для сравненія съ нимъ другихъ рядовъ, есть геометрическая прогрессія съ знаменателемъ r; эта прогрессія сходящаяся, если $r<1$, и расходящаяся, если $r>1$. Сравненіе знакоположительнаго ряда съ геометрическою прогрессіею приводитъ къ слѣдующему признаку сходимости, принадлежащему Коши:

Если въ знакоположительномъ рядѣ количество $\sqrt[n]{u_n}$, начиная съ нѣкотораго члена, постоянно меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа, меньшаго единицы, то рядъ—сходящійся; если же $\sqrt[n]{u_n}$, начиная съ нѣкотораго члена, постоянно больше единицы, то рядъ — расходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ, въ первомъ случаѣ мы имѣемъ $\sqrt[n]{u_n}<k<1$, и, слѣдовательно, $u_n<k^n$. Такимъ образомъ, начиная съ нѣкотораго члена, всѣ дальнѣйшіе члены ряда меньше членовъ геометрической прогрессіи съ знаменателемъ k, меньшимъ единицы. Напротивъ, во второмъ случаѣ, мы имѣемъ $\sqrt[n]{u_n}>1$, и $u_n>1$; слѣдовательно, общій членъ ряда не стремится къ нулю.

Предыдущій признакъ примѣнимъ всякій разъ, когда $\sqrt[n]{u_n}$ стремится къ предѣлу; въ этомъ случаѣ мы получаемъ слѣдующее предложеніе:

Если, при неограниченномъ возрастаніи n, $\sqrt[n]{u_n}$ стремится къ нѣкоторому предѣлу l, то рядъ будетъ сходящимся, если l меньше единицы, и расходящимся, если l больше единицы.

При $l=1$ характеръ ряда остается сомнительнымъ, за исключеніемъ того случая, когда $\sqrt[n]{u_n}$ стремится къ единицѣ, оставаясь больше ея: въ этомъ случаѣ рядъ — расходящійся.

Точно также, сравнивая отношеніе двухъ послѣдовательныхъ членовъ знакоположительнаго ряда съ отношеніемъ двухъ

послѣдовательныхъ членовъ геометрической прогрессіи, мы приходимъ къ признаку сходимости Даламбера:

Если въ знакоположительномъ рядѣ, начиная съ нѣкотораго члена, отношеніе каждаго члена къ предыдущему остается меньшимъ нѣкотораго опредѣленнаго числа, меньшаго единицы, то рядъ — сходящійся. Если это отношеніе, начиная съ нѣкотораго члена, больше единицы, то рядъ — расходящійся.

Отсюда слѣдуетъ, что если при неограниченномъ возрастаніи указателя n отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится къ предѣлу l, то рядъ — сходящійся, если $l < 1$, и расходящійся, если $l > 1$. Единственный сомнительный случай — тотъ, когда $l = 1$; но если отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится къ единицѣ, оставаясь больше ея, то рядъ — расходящійся.

Примѣчанія. — Признакъ сходимости Коши примѣнимъ въ болѣе широкихъ случаяхъ, чѣмъ признакъ сходимости Даламбера. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что, начиная съ нѣкотораго мѣста, члены даннаго ряда меньше членовъ нѣкоторой убывающей геометрической прогрессіи, т.-е. что при n, большемъ нѣкотораго опредѣленнаго числа p, общій членъ u_n ряда будетъ меньше Ar^n, гдѣ A — постоянное, и r меньше единицы. Такой рядъ, по предыдущему (§ 158), будетъ сходящимся. Въ этомъ случаѣ, $\sqrt[n]{u_n} < rA^{\frac{1}{n}}$, и при неограниченномъ возрастаніи n лѣвая часть неравенства имѣетъ предѣлъ r. Такимъ образомъ, обозначая черезъ k нѣкоторое постоянное число, заключающееся между r и 1, мы будемъ имѣть, начиная съ нѣкотораго члена, $\sqrt[n]{u_n} < k$. Слѣдовательно, здѣсь всегда примѣнимъ признакъ сходимости Коши, а между тѣмъ можетъ случиться, что отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будетъ принимать значенія, большія единицы, какъ бы далеко мы ни шли въ данномъ рядѣ. Возьмемъ, напримѣръ, рядъ

$$1 + r\,|\sin\alpha| + r^2\,|\sin 2\alpha| + \ldots + r^n\,|\sin n\alpha| + \ldots,$$

гдѣ $r < 1$, и α — какое-нибудь постоянное. Мы имѣемъ $\sqrt[n]{u_n} = r\sqrt[n]{|\sin n\alpha|} < r$, а между тѣмъ отношеніе

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r\left|\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha}\right|$$

при неограниченномъ возрастаніи n можетъ принимать безконечное множество разъ значенія, большія единицы.

Тѣмъ не менѣе полезно удержать и признакъ сходимости Даламбера, которымъ часто удобнѣе пользоваться, чѣмъ признакомъ сходимости Коши. Такъ, въ рядѣ

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

отношеніе любого члена къ предыдущему, равное $\frac{x}{n+1}$, при неограниченномъ возрастаніи n имѣетъ предѣломъ нуль, тогда какъ непосредственно не видно, какія значенія принимаетъ $\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{1.2\ldots n}}$ при весьма большихъ значеніяхъ n.

Если, примѣняя одно изъ предыдущихъ правилъ, мы нашли, что, начиная съ нѣкотораго мѣста, всѣ члены ряда соотвѣтственно меньше членовъ убывающей геометрической прогрессіи

$$A,\quad Ar,\quad Ar^2,\quad \ldots,\quad Ar^n,\quad \ldots,$$

то легко найти предѣлъ погрѣшности, получающейся при замѣнѣ суммы ряда суммою его m первыхъ членовъ; эта погрѣшность, очевидно, меньше суммы прогрессіи

$$Ar^m + Ar^{m+1} + Ar^{m+2} + \ldots = \frac{Ar^m}{1-r}.$$

Замѣтимъ, что если каждое изъ выраженій $\sqrt[n]{u_n}$ и $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ имѣютъ предѣлы, то оба эти предѣла необходимо равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ вспомогательный рядъ

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n \ldots, \qquad (4)$$

гдѣ x положительно. Въ этомъ рядѣ отношеніе любого члена къ предыдущему имѣетъ предѣломъ lx, гдѣ l есть предѣлъ отношенія $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; слѣдовательно, рядъ (4) сходящійся, если $x < \frac{1}{l}$, и расходящійся, если $x > \frac{1}{l}$. Точно также, если l' есть предѣлъ выраженія $\sqrt[n]{u_n}$, то выраженіе $\sqrt[n]{u_n x^n}$ имѣетъ предѣломъ $l'x$, такъ что рядъ (4) будетъ сходящимся, если $x < \frac{1}{l'}$, и расходящимся, если $x > \frac{1}{l'}$. Чтобы оба эти признака сходимости не противорѣчили одинъ другому, очевидно, должно быть $l = l'$; если бы, напримѣръ, было $l > l'$, то всякое число x, содержащееся между $\frac{1}{l}$ и $\frac{1}{l'}$, согласно признаку сходимости Коши дѣлало бы рядъ (4) сходящимся, тогда какъ, согласно признаку Даламбера, то же самое число дѣлало бы этотъ рядъ расходящимся.

Можно даже показать, что если $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится къ предѣлу l, то $\sqrt[n]{u_n}$ также стремится къ тому же самому предѣлу*). Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что, начиная съ нѣкотораго члена, всѣ отношенія

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}},\quad \ldots,\quad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}}$$

содержатся между $l-\varepsilon$ и $l+\varepsilon$, гдѣ ε — нѣкоторое положительное число, которое мы можемъ предположить сколь угодно малымъ, если только n взято достаточно большимъ. Мы будемъ имѣть

$$(l-\varepsilon)^p < \frac{u_{n+p}}{u_n} < (l+\varepsilon)^p,$$

*) Коши, Cours d'Analyse.

или

$$u_n^{\frac{1}{n+p}}(l-\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}} < \sqrt[n+p]{u_{n+p}} < u_n^{\frac{1}{n+p}}(l+\varepsilon)^{\frac{p}{n+p}}.$$

Если n будетъ сохранять свое значеніе, а p будетъ неограниченно возрастать, то крайніе члены этого двойного неравенства будутъ стремиться соотвѣтственно къ $l-\varepsilon$ и $l+\varepsilon$. Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть при всякомъ достаточно большомъ значеніи m

$$l-2\varepsilon < \sqrt[m]{u_m} < l+2\varepsilon;$$ *)

такъ какъ ε произвольно, то отсюда слѣдуетъ, что $\sqrt[m]{u_m}$ имѣетъ предѣломъ число l.

Должно замѣтить, что обратное предложеніе невѣрно. Возьмемъ, напримѣръ, рядъ

$$1,\quad a,\quad ab,\quad a^2b,\quad a^2b^2,\quad \ldots,\quad a^nb^{n-1},\quad a^nb^n,\quad \ldots,$$

гдѣ a и b два различныхъ числа. При неограниченномъ возрастаніи n выраженіе $\sqrt[n]{u_n}$ имѣетъ предѣломъ $\sqrt{ab}$, тогда какъ отношеніе любого члена къ предыдущему поперемѣнно равно a или b.

Предыдущее предложеніе можетъ быть полезнымъ при нахожденіи предѣла нѣкоторыхъ выраженій, имѣющихъ неопредѣленный видъ. Напримѣръ, изъ него слѣдуетъ, что $\sqrt[n]{1.2\ldots n}$ неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ n, такъ какъ отношеніе $\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots(n-1)}$ возрастаетъ неограниченно. Точно также можно убѣдиться, что $\sqrt[n]{n}$ и $\sqrt[n]{\log n}$ имѣютъ предѣлами единицу.

160. Примѣненіе наибольшаго изъ предѣловъ. — Коши представилъ предыдущее предложеніе въ болѣе общемъ видѣ. Пусть будетъ a_n общій членъ знакоположительнаго ряда. Разсмотримъ послѣдовательность

$$a_1,\quad a_2^{\frac{1}{2}},\quad a_3^{\frac{1}{3}},\quad \ldots,\quad a_n^{\frac{1}{n}},\quad \ldots. \tag{5}$$

Если члены этой послѣдовательности не имѣютъ верхняго предѣла, то общій членъ a_n не стремится къ нулю, и данный рядъ расходящійся. Предположимъ, что всѣ члены послѣдовательности (5) меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа, и пусть будетъ въ этомъ случаѣ ω наибольшій изъ предѣловъ членовъ этой послѣдовательности.

Рядъ Σa_n — сходящійся, если ω меньше единицы, и расходящійся, если ω больше единицы.

Чтобы доказать первую часть предложенія, обозначимъ черезъ $1-\alpha$ нѣкоторое число, заключающееся между ω и 1. По самому опредѣленію наибольшаго изъ предѣловъ (§ 156), существуетъ только конечное число членовъ послѣдовательности (5), большихъ $1-\alpha$; слѣдовательно, можно найти такое цѣлое число p, чтобы при всякомъ значеніи числа n, большемъ p, было $\sqrt[n]{a_n} < 1-\alpha$; поэтому, рядъ Σa_n будетъ сходящимся. Напротивъ, если $\omega > 1$, то существуетъ безконечное множество чле-

*) При достаточно большомъ значеніи n крайніе члены предыдущаго неравенства будутъ отличаться отъ своихъ предѣловъ менѣе, чѣмъ на ε. *(Ред.)*

новъ послѣдовательности (5), большихъ $1+\alpha$, гдѣ $1+\alpha$ есть какое-нибудь число, заключающееся между 1 и ω, и, слѣдовательно, есть безконечное множество значеній указателя n, при которыхъ a_n больше единицы; слѣдовательно, рядъ Σa_n — расходящійся. Сомнительнымъ остается только тотъ случай, когда $\omega = 1$.

161. Теорема Коши. — Когда $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ или $\sqrt[n]{u^n}$ стремятся къ единицѣ, но не остаются постоянно большими единицы, то при помощи признаковъ Даламбера и Коши нельзя узнать, будетъ ли данный рядъ сходящимся или расходящимся. Въ этомъ случаѣ нужно сравнивать данный рядъ съ другими рядами, обладающими тѣмъ же самымъ свойствомъ, и характеръ которыхъ извѣстенъ. Слѣдующее предложеніе, которое Коши вывелъ изъ разсмотрѣнія опредѣленныхъ интеграловъ, позволяетъ рѣшить вопросъ о характерѣ ряда во многихъ тѣхъ случаяхъ, когда примѣненіе предыдущихъ признаковъ сходимости не приводитъ къ опредѣленному результату.

Пусть будетъ $\varphi(x)$ функція, которая, начиная съ нѣкотораго значенія a перемѣннаго x, положительна, постоянно убываетъ и при неограниченномъ возрастаніи x стремится къ нулю. Кривая $y=\varphi(x)$ имѣетъ ось x асимптотою; опредѣленный интегралъ $\int_a^l \varphi(x)\,dx$ при неограниченномъ возрастаніи l можетъ или стремиться къ конечному предѣлу или расти неограниченно. Теорема Коши состоитъ въ томъ, что

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n)+\ldots \qquad (6)$$

— сходящійся, если предыдущій интегралъ стремится къ предѣлу, и расходящійся въ противномъ случаѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ прямоугольники, основанія которыхъ равны единицѣ, а высоты равны соотвѣтственно $\varphi(a)$, $\varphi(a+1)$, $\ldots$, $\varphi(a+n)$; такъ какъ въ этихъ прямоугольникахъ есть части, расположенныя надъ кривою $y=\varphi(x)$, то сумма площадей этихъ прямоугольниковъ, очевидно, больше площади, заключающейся между разсматриваемою кривою, осью x и ординатами $x=a$ и $x=a+n$,

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n) > \int_a^{a+n} \varphi(x)\,dx.$$

Напротивъ, если мы возьмемъ прямоугольники, основанія которыхъ равны единицѣ, а высоты равны соотвѣтственно $\varphi(a+1)$, $\varphi(a+2)$, $\ldots$, $\varphi(a+n)$, то сумма площадей этихъ прямоуголь-

никовъ будетъ меньше площади кривой, и мы можемъ написать

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n)<\varphi(a)+\int_a^{a+n}\varphi(x)\,dx.$$

Такимъ образомъ, если при неограниченномъ возрастаніи l интегралъ $\int_a^l \varphi(x)\,dx$ стремится къ нѣкоторому предѣлу L, то сумма $\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n)$, оставаясь постоянно меньшею $\varphi(a)+L$, также стремится къ нѣкоторому предѣлу; слѣдовательно, рядъ (6) — сходящійся. Напротивъ, если интегралъ $\int_a^{a+n}\varphi(x)\,dx$ возрастаетъ выше всякаго предѣла, то, на основаніи перваго неравенства, сумма

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\ldots+\varphi(a+n)$$

также будетъ возрастать выше всякаго предѣла; слѣдовательно, рядъ (6) — расходящійся.

Возьмемъ, напримѣръ, $\varphi(x)=\frac{1}{x^\mu}$, гдѣ μ положительно, и $a=1$. Функція $\varphi(x)$, очевидно, удовлетворяетъ всѣмъ предыдущимъ условіямъ; кромѣ того, при неограниченномъ возрастаніи l интегралъ $\int_1^l \frac{dx}{x^\mu}$ стремится къ предѣлу, если μ больше единицы, и только въ этомъ случаѣ (см. § 90). Отсюда слѣдуетъ, что рядъ

$$\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\ldots+\frac{1}{n^\mu}+\ldots$$

— сходящійся, если $\mu>1$, и расходящійся, если $\mu\leqq 1$.

Возьмемъ еще $\varphi(x)=\frac{1}{x(\log x)^\mu}$, гдѣ μ — положительно, и $\log x$ обозначаетъ неперовъ логариемъ, и положимъ $a=2$. Предполагая $\mu\neq 1$, имѣемъ

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\log x)^\mu}=\frac{-1}{\mu-1}\left[(\log n)^{1-\mu}-(\log 2)^{1-\mu}\right].$$

Правая часть имѣетъ конечный предѣлъ, если $\mu>1$, и неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ n, если $\mu<1$; кромѣ того,

легко видѣть, что при $\mu = 1$ интегралъ возрастаетъ выше всякаго предѣла. Слѣдовательно, рядъ

$$\frac{1}{2(\log 2)^{\mu}} + \frac{1}{3(\log 3)^{\mu}} + \ldots + \frac{1}{n(\log n)^{\mu}} + \ldots$$

— сходящійся, если $\mu > 1$, и расходящійся, если $\mu \leqq 1$.

Вообще, рядъ, общій членъ котораго есть

$$\frac{1}{n \log n \log^2 n \log^3 n \ldots \log^{p-1} n (\log^p n)^{\mu}},$$

— сходящійся, если $\mu > 1$, и расходящійся, если $\mu \leqq 1$. Въ предыдущемъ выраженіи обозначенія $\log^2 n$, $\log^3 n$, ... введены для краткости вмѣсто $\log\log n$, $\log\log\log n$, и т. д. Разумѣется, здѣсь цѣлому числу n даются лишь настолько большія значенія, чтобы $\log n$, $\log^2 n$, $\log^3 n$, ..., $\log^p n$ были положительны, и предполагается, что члены ряда, не удовлетворяющіе этому условію, т.-е. соотвѣтствующіе меньшимъ значеніямъ n, замѣнены нулями. Доказательство здѣсь такое же, какъ и для предыдущихъ рядовъ; напримѣръ, если $\mu \neq 1$, то функція

$$\frac{1}{x \log x \log^2 x \ldots (\log^p x)^{\mu}}$$

представляетъ производную отъ $\frac{1}{1-\mu} (\log^p x)^{1-\mu}$, а послѣдняя функція при неограниченномъ возрастаніи x стремится къ конечному предѣлу только при $\mu > 1$.

Теорема Коши можетъ имѣть также приложенія иного рода. Предположимъ, что функція $\varphi(x)$ удовлетворяетъ всѣмъ выше указаннымъ условіямъ. Разсмотримъ сумму

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) + \ldots + \varphi(n+p),$$

гдѣ n и p — два цѣлыхъ числа, которыя оба неограниченно возрастаютъ. Если рядъ, общій членъ котораго есть $\varphi(n)$, — сходящійся, то предыдущая сумма имѣетъ предѣломъ нуль, такъ какъ она равна разности суммъ S_{n+p+1} и S_n, которыя обѣ стремятся къ суммѣ S ряда. Если же рядъ расходящійся, то мы не можемъ высказать о предыдущей суммѣ никакого общаго сужденія. Воспользовавшись даннымъ въ этомъ параграфѣ геометрическимъ представленіемъ, мы придемъ къ двойному неравенству

$$\int_n^{n+p} \varphi(x)\,dx < \varphi(n) + \varphi(n+1) + \ldots + \varphi(n+p) < \varphi(n) + \int_n^{n+p} \varphi(x)\,dx.$$

Такъ какъ, при неограниченномъ возрастаніи n, $\varphi(n)$ стремится къ нулю, то предѣлъ разсматриваемой суммы равенъ предѣлу интеграла $\int_n^{n+p} \varphi(x)\,dx$ и зависитъ отъ того, по какому закону возрастаютъ числа n и p.

Напримѣръ, чтобы имѣть предѣлъ суммы

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+p},$$

достаточно найти предѣлъ опредѣленнаго интеграла $\int_n^{n+p}\frac{dx}{x}=\log\left(1+\frac{p}{n}\right)$. Ясно, что этотъ интегралъ имѣетъ предѣлъ только въ томъ случаѣ, когда имѣетъ предѣлъ отношеніе $\frac{p}{n}$; если предѣлъ этого отношенія есть α, то сумма предыдущаго ряда имѣетъ предѣломъ $\log(1+\alpha)$, какъ это уже было доказано выше (§ 49).

Точно также, чтобы имѣть предѣлъ суммы

$$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+p}},$$

достаточно найти предѣлъ интеграла

$$\int_n^{n+p}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2(\sqrt{n+p}-\sqrt{n}).$$

Чтобы послѣднее выраженіе имѣло предѣлъ, необходимо, чтобы частное $\frac{p}{\sqrt{n}}$ само имѣло нѣкоторый предѣлъ α. Въ этомъ случаѣ предыдущее выраженіе можно представить въ видѣ

$$2\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}=2\frac{\frac{p}{\sqrt{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{p}{n}}},$$

и мы видимъ, что его предѣлъ также равенъ α.

162. Логариѳмическіе признаки. — Исходя изъ ряда (§ 161)

$$\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}+\ldots+\frac{1}{n^\mu}+\ldots,$$

Коши пришелъ къ другому признаку сходимости, совершенно аналогичному признаку, основанному на разсмотрѣніи $\sqrt[n]{u_n}$.

Если, начиная съ нѣкотораго члена, отношеніе $\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}$ постоянно больше нѣкотораго опредѣленнаго числа, большаго единицы, то рядъ — сходящійся. Если $\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}$ постоянно меньше единицы, то рядъ — расходящійся.

Если при неограниченномъ возрастаніи n **отношеніе** $\dfrac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}$ **стремится къ предѣлу** l, **то рядъ — сходящійся, если** $l>1$, **и расходящійся, если** $l<1$. **Случай** $l=1$ **остается сомнительнымъ.**

Чтобы доказать первую часть предложенія, замѣтимъ, что изъ неравенства

$$\log\frac{1}{u_n}>k\log n$$

слѣдуетъ

$$\frac{1}{u_n}>n^k,$$

или

$$u_n<\frac{1}{n^k};$$

такъ какъ $k>1$, то данный рядъ — сходящійся.

Точно также, если

$$\log\frac{1}{u_n}<\log n,$$

то отсюда получаемъ $u_n>\frac{1}{n}$, и, слѣдовательно, рядъ будетъ расходящимся.

На основаніи этого признака можно утверждать, что рядъ будетъ сходящимся всякій разъ, какъ, начиная съ нѣкотораго указателя, члены этого ряда будутъ соотвѣтственно меньше членовъ ряда

$$\frac{A}{1^\mu}+\frac{A}{2^\mu}+\cdots+\frac{A}{n^\mu}+\cdots,$$

гдѣ A — постоянное, и $\mu>1$. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$u_n<\frac{A}{n^\mu},$$

то отсюда слѣдуетъ

$$\log u_n+\mu\log n<\log A,$$

или

$$\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}>\mu-\frac{\log A}{\log n}.$$

Но правая часть при неограниченномъ возрастаніи n имѣетъ предѣломъ μ. Слѣдовательно, обозначая черезъ K число,

заключающееся между 1 и μ, мы будемъ имѣть, начиная съ нѣ котораго члена,

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} > K.$$

Точно также, пользуясь для сравненія рядами

$$\sum \frac{1}{n(\log n)^{\mu}}, \quad \sum \frac{1}{n \log n (\log^2 n)^{\mu}}, \quad \ldots,$$

мы получимъ безконечное множество признаковъ сходимости, которые всѣ получатся изъ предыдущаго, если мы замѣнимъ въ предыдущей теоремѣ $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ черезъ $\frac{\log \frac{1}{nu_n}}{\log^2 n}$, затѣмъ черезъ $\frac{\log \frac{1}{nu_n \log n}}{\log^3 n}$, и т. д.*). Эти признаки примѣнимы все къ болѣе и болѣе широкимъ случаямъ; въ самомъ дѣлѣ, легко убѣдиться, что если при помощи одного изъ этихъ признаковъ можно установить сходимость или расходимость даннаго ряда, то то же дадутъ и всѣ послѣдующіе признаки. Но можетъ случиться, что сколько бы признаковъ этого рода мы ни пробовали примѣнять къ данному ряду, мы никогда не рѣшимъ вопроса о его сходимости. Дѣйствительно, Дюбуа-Реймонъ (du Bois-Reymond)**) и Прингсгеймъ (Pringsheim)***) составили ряды, какъ сходящіеся, такъ и расходящіеся, къ которымъ логариѳмическіе признаки не примѣнимы. Въ теоретическомъ отношеніи этотъ результатъ представляетъ большой интересъ, но ясно, что такіе ряды сходятся очень медленно и, повидимому, не могутъ имѣть примѣненія при вычисленіяхъ.****)

---

*) См. Бертранъ, Traité de Calcul différentiel et intégral, т. I, стр. 238; Journal de Liouville, 1-я серія, т. VII, стр. 35.

**) Ueber Convergenz von Reihen... (Crelle's Journal, т. 76, стр. 85; 1873).

***) Allgemeine Theorie der Divergenz... (Mathematische Annalen, т. 35; 1890).

****) Въ одномъ примѣрѣ сходящагося ряда, даннымъ Дюбуа-Реймономъ, чтобы получить только половину суммы этого ряда, необходимо, какъ показываетъ авторъ, вычислить сумму такого числа членовъ, каковъ объемъ земли, выраженный въ кубическихъ миллиметрахъ.

163. Признаки Раабе и Дюгамеля. — Исходя изъ тѣхъ же рядовъ, но сравнивая не самые члены рядовъ, а отношенія двухъ послѣдовательныхъ членовъ, можно получить другіе признаки, хотя и менѣе общіе, чѣмъ предыдущіе, но часто болѣе удобные на практикѣ. Пусть будетъ, напримѣръ,

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

знакоположительный рядъ, въ которомъ отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится къ единицѣ, оставаясь постоянно меньшимъ ея. Мы можемъ изобразить это равенствомъ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n},$$

гдѣ при неограниченномъ возрастаніи n положительное число α_n стремится къ нулю. Сравненіе этого отношенія съ $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}$ приводитъ къ слѣдующему признаку сходимости, найденному сначала Раабе (Raabe)*), а потомъ Дюгамелемъ (Duhamel)**).

Если въ данномъ рядѣ произведеніе $n\alpha_n$, начиная съ опредѣленнаго члена, постоянно больше нѣкотораго опредѣленнаго числа, большаго единицы, то рядъ — сходящійся. Если это отношеніе, начиная съ нѣкотораго члена, постоянно меньше единицы, то рядъ — расходящійся.

Вторая часть предложенія очевидна непосредственно. Если, начиная съ нѣкотораго члена, мы имѣемъ $n\alpha_n<1$, то

$$\frac{1}{1+\alpha_n}>\frac{n}{n+1};$$

такимъ образомъ, отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ больше отношенія двухъ послѣдовательныхъ членовъ гармоническаго ряда, и, слѣдовательно, данный рядъ — расходящійся.

Чтобы доказать первую часть предложенія, предположимъ, что, начиная съ нѣкотораго члена, мы постоянно имѣемъ $n\alpha_n>k>1$. Пусть будетъ μ число, заключающееся между 1 и k, $1<\mu<k$. Рядъ будетъ навѣрное сходящимся, если, начиная съ нѣкотораго члена, отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будетъ меньше отноше-

*) Zeitschrift für Mathematik und Physik, т. X; 1832.
**) Journal de Liouville, т. IV; 1838.

нія $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu}$ двухъ послѣдовательныхъ членовъ ряда, общій членъ котораго есть $n^{-\mu}$. Для этого должно быть

$$\frac{1}{1+\alpha_n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}}; \tag{8}$$

разлагая $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$ по формулѣ Тэлора и ограничиваясь тремя членами, мы можемъ представить неравенство (8) въ видѣ

$$1+\frac{\mu}{n}+\frac{\lambda_n}{n^2} < 1+\alpha_n,$$

гдѣ, при неограниченномъ возрастаніи n, λ_n остается постоянно меньшимъ нѣкотораго опредѣленнаго числа. Послѣднее неравенство даетъ

$$\mu+\frac{\lambda_n}{n} < n\alpha_n.$$

При неограниченномъ возрастаніи n лѣвая часть имѣетъ предѣломъ μ; слѣдовательно, начиная съ достаточно большого значенія n, эта часть будетъ постоянно меньше $n\alpha_n$; отсюда вытекаетъ неравенство (8), а, слѣдовательно, и сходимость ряда.

Если произведеніе $n\alpha_n$ при неограниченномъ возрастаніи n стремится къ предѣлу l, то, примѣняя предыдущее правило, мы получимъ, что данный рядъ будетъ сходящимся, если $l>1$, и расходящимся, если $l<1$. Сомнѣніе остается только при $l=1$, если только $n\alpha_n$ не стремится къ единицѣ, оставаясь постоянно меньше ея; въ этомъ случаѣ рядъ будетъ расходящимся.

Если произведеніе $n\alpha_n$ имѣетъ предѣломъ единицу, то нужно сравнить $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ съ отношеніемъ двухъ послѣдовательныхъ членовъ ряда

$$\frac{1}{2(\log 2)^{\mu}}+\ldots+\frac{1}{n(\log n)^{\mu}}+\ldots,$$

который будетъ сходящимся, если $\mu>1$, и расходящимся, если $\mu\leqq 1$

161). Полагая $n\alpha_n=1+\beta_n$, мы можемъ представить отношеніе двухъ послѣдовательныхъ членовъ изслѣдуемаго ряда въ видѣ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}},$$

гдѣ, при неограниченномъ возрастаніи n, β_n стремится къ нулю. Если, начиная съ нѣкотораго члена, произведеніе $\beta_n \log n$ постоянно больше нѣкотораго опредѣленнаго числа, большаго единицы, то рядъ — сходящійся. Если это отношеніе постоянно меньше единицы, то рядъ — расходящійся.

Чтобы доказать первую часть предложенія, предположимъ, что при всѣхъ значеніяхъ указателя n, большихъ числа p, мы имѣемъ $\beta_n \log n > k > 1$. Пусть будетъ μ такое число, что $1 < \mu < k$. Рядъ будетъ сходящимся, если, начиная съ нѣкотораго члена, мы будемъ имѣть

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n}{n+1}\left[\frac{\log n}{\log(n+1)}\right]^{\mu}, \tag{9}$$

или, иначе,

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]^{\mu};$$

примѣняя къ правой части формулу Тэлора, имѣемъ

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{\mu \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}+\lambda_n\left[\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]^2\right\},$$

причемъ, при неограниченномъ возрастаніи n, λ_n по абсолютному значенію остается меньшимъ нѣкотораго опредѣленнаго числа. По упрощеніи послѣднее неравенство обращается въ

$$\beta_n \log n > \mu(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{\lambda_n (n+1)\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\log n}.$$

При неограниченномъ возрастаніи n произведеніе $(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ имѣетъ предѣломъ единицу, такъ какъ, по формулѣ Тэлора, это произведеніе можетъ быть представлено въ видѣ

$$(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{1}{2n}(1+\varepsilon), \tag{10}$$

гдѣ ε стремится къ нулю. Такимъ образомъ, правая часть предыдущаго неравенства имѣетъ предѣломъ μ; слѣдовательно, начиная съ нѣкотораго члена, это неравенство навѣрное справедливо, такъ какъ, по условію, $\beta_n \log n$ больше числа $k > \mu$.

Такимъ же образомъ доказывается и вторая часть предложенія. Здѣсь нужно сравнивать отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ съ отношеніемъ двухъ послѣдовательныхъ членовъ ряда, общій членъ котораго есть $\frac{1}{n \log n}$. Неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n}{n+1}\,\frac{\log n}{\log(n+1)}$$

можетъ быть представлено въ видѣ

$$1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right],$$

или

$$\beta_n \log n<(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Какъ видно изъ формулы (10), при значеніяхъ n, большихъ единицы, правая часть стремится къ единицѣ; слѣдовательно, начиная съ нѣкотораго мѣста въ рядѣ, послѣднее неравенство навѣрное справедливо такъ какъ $\beta_n \log n$, по условію, меньше единицы.

Изъ предыдущаго предложенія слѣдуетъ, что если при неограниченномъ возрастаніи n произведеніе $\beta_n \log n$ стремится къ предѣлу l, то рядъ будетъ сходящимся, если $l>1$, и расходящимся, если $l<1$. Сомнѣніе остается только для $l=1$, за исключеніемъ того случая, когда произведеніе $\beta_n \log n$ остается постоянно меньшимъ единицы; въ послѣднемъ случаѣ данный рядъ — расходящійся.

Если $\beta_n \log n$ стремится къ единицѣ, оставаясь больше ея, то мы можемъ представить отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ въ видѣ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1+\gamma_n}{n\log n}},$$

гдѣ, при неограниченномъ возрастаніи n, γ_n стремится къ нулю. Разсматривая произведеніе $\gamma_n \log^2 n$, мы будемъ имѣть предложенія, вполнѣ аналогичныя предыдущимъ, и т. д.

Слѣдствіе. — Если въ знакоположительномъ рядѣ отношеніе каждаго члена къ предыдущему имѣетъ видъ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{r}{n}+\frac{H_n}{n^{1+\mu}},$$

гдѣ μ — положительное число, r — постоянное, и при неограниченномъ возрастаніи n абсолютное значеніе количества H_n остается меньшимъ нѣкотораго опредѣленнаго числа, то рядъ — сходящійся, если r больше единицы, и расходящійся — въ остальныхъ случаяхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha_n},$$

имѣемъ

$$n\alpha_n=\frac{r-\frac{H_n}{n^\mu}}{1-\frac{r}{n}+\frac{H_n}{n^{1+\mu}}},$$

и, слѣдовательно, $\lim n\alpha_n=r$. Такимъ образомъ, рядъ — сходящійся,

если $r>1$, и расходящійся, если $r<1$. Сомнѣніе остается только въ томъ случаѣ, когда $r=1$. Чтобы устранить это сомнѣніе, положимъ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}};$$

отсюда имѣемъ

$$\beta_n \log n=\frac{\frac{\log n}{n}-\frac{n+1}{n}H_n\frac{\log n}{n\mu}}{1-\frac{1}{n}+\frac{H_n}{n^{1+\mu}}}.$$

При неограниченномъ возрастаніи n правая часть стремится къ нулю, каково бы ни было положительное μ; слѣдовательно, рядъ — расходящійся.

Предположимъ, напримѣръ, что $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ есть раціональная функція отъ n, стремящаяся къ единицѣ при неограниченномъ возрастаніи n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+\ldots}{n^p+b_1n^{p-1}+b_2n^{p-2}+\ldots};$$

выполняя дѣленіе и останавливаясь на членѣ съ $\frac{1}{n^2}$, мы можемъ представить предыдущее равенство въ видѣ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{a_1-b_1}{n}+\frac{\varphi(n)}{n^2},$$

гдѣ $\varphi(n)$ есть раціональная функція отъ n, стремящаяся къ конечному предѣлу при неограниченномъ возрастаніи числа n. На основаніи предыдущаго, необходимымъ и достаточнымъ условіемъ того, чтобы рядъ былъ сходящимся, будетъ

$$b_1>a_1+1.$$

Послѣдняя теорема принадлежитъ Гауссу, который доказалъ ее непосредственно. Это — одинъ изъ первыхъ по времени общихъ признаковъ сходимости *).

164. Ряды абсолютно сходящіеся. — Обратимся теперь къ рядамъ, члены которыхъ могутъ имѣть любые знаки. Если, начиная съ достаточно далекаго члена, знаки всѣхъ членовъ ряда будутъ одинаковые, то этотъ случай непосредственно приводится къ предыдущему. Поэтому здѣсь намъ нужно разсмотрѣть только тотъ случай, когда рядъ содержитъ безконечное множество какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ членовъ. Прежде всего мы докажемъ слѣдующую основную теорему.

---

*) Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\ldots$ (Gesammolte Werke, т. III, стр. 138).

Рядъ, члены котораго имѣютъ произвольные знаки, будетъ сходящимся, если будетъ сходящимся рядъ, составленный изъ абсолютныхъ значеній членовъ перваго ряда.

Пусть будетъ

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots \qquad (11)$$

рядъ, члены котораго могутъ имѣть любые знаки; пусть далѣе будетъ

$$U_0+U_1+\ldots+U_n+\ldots \qquad (12)$$

рядъ, составленный изъ абсолютныхъ значеній членовъ перваго ряда, такъ что $U_n=|u_n|$. Если рядъ (12) — сходящійся, то рядъ (11) будетъ также сходящимся. Это слѣдуетъ изъ общей теоремы о сходимости (§ 157). Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$|u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}|<U_n+U_{n+1}+\ldots+U_{n+p};$$

взявъ число n достаточно большимъ, мы можемъ, оставляя число p произвольнымъ, сдѣлать вторую сумму меньше всякаго даннаго числа.

Въ сходимости ряда (11) можно убѣдиться еще иначе. Представимъ u_n въ видѣ

$$u_n=(u_n+U_n)-U_n$$

и разсмотримъ вспомогательный рядъ, общій членъ котораго есть u_n+U_n,

$$(u_0+U_0)+(u_1+U_1)+\ldots+(u_n+U_n)+\ldots. \qquad (13)$$

Обозначая соотвѣтственно черезъ S_n, S'_n, S''_n суммы n первыхъ членовъ рядовъ (11), (12), (13), мы, очевидно, будемъ имѣть

$$S_n=S''_n-S'_n.$$

По предположенію, рядъ (12) — сходящійся; точно также будетъ сходящимся и рядъ (13), который не имѣетъ ни одного отрицательнаго члена, и общій членъ котораго не превосходитъ $2U_n$. Такимъ образомъ, суммы S'_n, S''_n, а, слѣдовательно, и сумма S_n при неограниченномъ возрастаніи n стремятся къ опредѣленнымъ предѣламъ, т.-е. данный рядъ (11) — сходящійся. Сверхъ того, мы видимъ, что рядъ (11) можно разсматривать, какъ полученный отъ почленнаго вычитанія двухъ знакоположительныхъ сходящихся рядовъ.

Рядъ, абсолютныя значенія членовъ котораго образуютъ сходящійся рядъ, называется абсолютно сходящимся.

Въ такомъ рядѣ можно, не измѣняя суммы ряда, измѣнять по произволу порядокъ его членовъ. Разсмотримъ сначала сходящійся знакоположительный рядъ съ суммою S

$$a_0+a_1+\ldots+a_n+\ldots; \qquad (14)$$

пусть будетъ

$$b_0+b_1+\ldots+b_n+\ldots \qquad (15)$$

другой рядъ, составленный изъ тѣхъ же членовъ, какъ и первый, но расположенныхъ въ другомъ порядкѣ, такъ что каждый членъ ряда (14) находится гдѣ-нибудь въ рядѣ (15), и, обратно, каждый членъ ряда (15) находится также и въ рядѣ (14), хотя, можетъ быть, и на другомъ мѣстѣ.

Пусть будетъ S'_m сумма m первыхъ членовъ ряда (15); такъ какъ всѣ эти члены находятся въ рядѣ (14), то ясно, что можно взять настолько большое число n, чтобы m первыхъ членовъ ряда (15) находились въ числѣ n первыхъ членовъ ряда (14). Слѣдовательно, должно быть

$$S'_m<S_n<S,$$

что доказываетъ, что рядъ (15) сходящійся и имѣетъ сумму $S'\leqq S$. Точно также должно быть $S\leqq S'$, и, слѣдовательно, $S'=S$. То же разсужденіе показываетъ, что если одинъ изъ рядовъ (14) и (15) — расходящійся, то и другой рядъ будетъ также расходящимся.

Мы можемъ также, не измѣняя суммы ряда, соединить въ сходящемся знакоположительномъ рядѣ вмѣстѣ члены произвольнымъ образомъ, т.-е. мы можемъ составить новый рядъ, каждый членъ котораго равенъ суммѣ произвольнаго числа членовъ перваго ряда, взятыхъ въ любомъ порядкѣ. Предположимъ сначала, что мы соединяемъ вмѣстѣ члены въ томъ порядкѣ, въ какомъ они входятъ въ данный рядъ; пусть будетъ

$$A_0+A_1+A_2+\ldots+A_m+\ldots \qquad (16)$$

получающійся при этомъ новый рядъ, въ которомъ, напримѣръ,

$$A_1=a_0+a_1+\ldots+a_p, \qquad A_1=a_{p+1}+\ldots+a_q,$$
$$A_2=a_{q+1}+\ldots+a_r, \quad \ldots.$$

Сумма S'_m m первыхъ членовъ ряда (16) равна суммѣ S_N N первыхъ членовъ первоначальнаго ряда, гдѣ $N>m$. При неограниченномъ возрастаніи m число N также неограниченно возрастаетъ, и, слѣдовательно, сумма S'_m имѣетъ тотъ же самый предѣлъ S.

Соединяя оба предыдущихъ преобразованія, мы видимъ, что если данъ сходящійся знакоположительный рядъ, то мы можемъ, не измѣняя его суммы, замѣнить его такимъ другимъ рядомъ, каждый членъ котораго представляетъ сумму нѣкотораго числа членовъ перваго ряда, взятыхъ въ произвольномъ порядкѣ. Нужно только, чтобы каждый членъ начальнаго ряда входилъ въ одну изъ группъ, составляющихъ члены второго ряда, и притомъ только въ одну.

Такъ какъ всякій абсолютно сходящійся рядъ можно разсматривать, какъ разность двухъ знакоположительныхъ сходящихся рядовъ, то предыдущія преобразованія примѣнимы также и къ абсолютно сходящимся рядамъ. Отсюда видно, что съ абсолютно сходящимся безконечнымъ рядомъ при вычисленіяхъ можно поступать такъ же, какъ съ суммою конечнаго числа членовъ.

165. Ряды условно сходящіеся, или полусходящіеся. — Для того чтобы рядъ, члены котораго имѣютъ разные знаки, былъ сходящимся, нѣтъ необходимости, чтобы рядъ, образованный абсолютными значеніями его членовъ, былъ также непремѣнно сходящимся. Это видно, напримѣръ, изъ слѣдующей теоремы о знакоперемѣнныхъ рядахъ, которую я приведу безъ доказательства:

Рядъ, состоящій изъ членовъ, поочередно положительныхъ и отрицательныхъ, будетъ сходящимся, если абсолютное значеніе каждаго члена меньше абсолютнаго значенія предыдущаго члена, и если, кромѣ того, съ возрастаніемъ указателя члены ряда неограниченно убываютъ по абсолютному значенію.

Напримѣръ, рядъ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

— сходящійся; мы нашли (§ 49), что его сумма равна $\log 2$. Между тѣмъ рядъ, составленный изъ абсолютныхъ значеній членовъ предыдущаго ряда, есть рядъ гармоническій расходящійся (§ 161).

Сходящіеся ряды, которые не суть абсолютно сходящіеся, называются условно сходящимися, полусходящимися или просто сходящимися рядами. Работы Коши, Леженъ-Дирикле и Римана (Riemann) показали, насколько необходимо различать ряды абсолютно сходящіеся и ряды полу-

сходящіеся. Такъ, въ полусходящемся рядѣ мы не имѣемъ права измѣнять порядка членовъ или соединять эти члены между собою произвольнымъ образомъ; эти преобразованія могутъ повлечь за собою измѣненіе суммы ряда, или даже превратить рядъ сходящійся въ рядъ расходящійся, и обратно. Возьмемъ, напримѣръ, сходящійся рядъ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+\ldots,$$

сумма котораго, очевидно, равна предѣлу выраженія

$$\sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$$

при неограниченномъ возрастаніи m. Расположимъ члены этого ряда въ другомъ порядкѣ, такъ, чтобы за каждымъ положительнымъ членомъ слѣдовало два отрицательныхъ

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}+\ldots.$$

Разсматривая суммы S_{3n}, S_{3n+1}, S_{3n+2}, легко доказать, что этотъ новый рядъ — сходящійся; его сумма равна предѣлу выраженія

$$\sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\right)$$

при неограниченномъ возрастаніи m. Но мы имѣемъ

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right),$$

и, слѣдовательно, сумма второго ряда равна половинѣ суммы перваго ряда.

Вообще, если данъ рядъ сходящійся, но не абсолютно, то можно расположить члены этого ряда въ такомъ порядкѣ, чтобы новый рядъ былъ сходящимся, и чтобы его сумма была равна любому заранѣе данному числу A. Обозначимъ черезъ S_p сумму p первыхъ положительныхъ членовъ этого ряда, черезъ S'_q сумму абсолютныхъ значеній q первыхъ отрицательныхъ членовъ; сумма $p+q$ первыхъ членовъ, очевидно, равна $S_p-S'_q$. Если оба числа p и q неограниченно возрастаютъ, то должны неограниченно возрастать и суммы S_p и S'_q, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, рядъ былъ бы или расходящимся, если неограниченно возрастаетъ одна изъ двухъ суммъ, или абсолютно сходящимся, если обѣ суммы стремятся къ конечнымъ предѣламъ. Съ другой стороны, такъ какъ данный рядъ, по опредѣленію, — сходящійся, то общій членъ его долженъ стремиться къ нулю.

Пользуясь этими замѣчаніями, мы можемъ слѣдующимъ образомъ составить новый рядъ, имѣющій своею суммою число A. Возьмемъ

столько положительныхъ членовъ предложеннаго ряда въ томъ порядкѣ, въ какомъ они расположены въ данномъ рядѣ, чтобы ихъ сумма была больше A; напишемъ вслѣдъ за ними первые отрицательные члены даннаго ряда въ томъ порядкѣ, въ которомъ они стоятъ, и остановимся тогда, когда сумма всѣхъ написанныхъ членовъ сдѣлается меньше A; затѣмъ напишемъ положительные члены, начиная съ того, на которомъ мы остановились въ первый разъ, и остановимся тогда, когда сумма всѣхъ взятыхъ членовъ будетъ больше A; потомъ опять возьмемъ отрицательные члены, и т. д. Очевидно, что суммы членовъ этого новаго ряда будутъ то больше, то меньше количества A, но эти суммы будутъ отличаться отъ A на количество, которое безпредѣльно убываетъ.

166. Теорема Абеля. — Абель далъ теорему, позволяющую доказать сходимость нѣкоторыхъ рядовъ, сходимость которыхъ не можетъ быть обнаружена при помощи предыдущихъ признаковъ. Доказательство этой теоремы основывается на леммѣ, которою мы уже пользовались выше (§ 75).

Пусть будетъ

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$$

рядъ сходящійся или неопредѣленный (т.-е. такой, что сумма его n первыхъ членовъ всегда меньше по абсолютному значенію нѣкотораго опредѣленнаго числа A). Съ другой стороны, пусть будетъ

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n,\ \ldots$$

послѣдовательность положительныхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое меньше предыдущаго, причемъ $\lim(\varepsilon_n)_{n=\infty}=0$. При этихъ условіяхъ рядъ

$$\varepsilon_0 u_0+\varepsilon_1 u_1+\ldots+\varepsilon_n u_n+\ldots \qquad (17)$$

будетъ сходящимся.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ этихъ условій слѣдуетъ, что при всякихъ значеніяхъ n и p будетъ

$$|u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}|<2A;$$

слѣдовательно, на основаніи леммы § 75, имѣемъ

$$|u_{n+1}\varepsilon_{n+1}+\ldots+u_{n+p}\varepsilon_{n+p}|<2A\,\varepsilon_{n+1}.$$

Такъ какъ, при неограниченномъ возрастаніи n, ε_{n+1} стремится къ нулю, то число n можно взять настолько большимъ, чтобы при всякомъ p абсолютное значеніе суммы

$$\varepsilon_{n+1}u_{n+1}+\ldots+\varepsilon_{n+p}u_{n+p}$$

было меньше всякаго заранѣе даннаго числа. Слѣдовательно, на основаніи общей теоремы § 157, рядъ (17) будетъ сходящимся.

Если рядъ $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$ обращается въ рядъ

$$1-1+1-1+1-1\ldots,$$

члены котораго поперемѣнно $+1$ и -1, то предыдущее предложеніе обращается въ приведенную выше теорему о знакоперемѣнныхъ рядахъ (§ 165).

Разсмотримъ другой примѣръ. Рядъ

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\ldots+\sin n\theta+\ldots$$

— сходящійся или неопредѣленный. Если $\sin\theta=0$, то всѣ члены ряда равны нулю; если $\sin\theta \gtrless 0$, то, по извѣстной формулѣ тригонометріи, сумма n первыхъ членовъ равна

$$\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right);$$

слѣдовательно, эта сумма по абсолютному значенію меньше $\frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$.

Отсюда заключаемъ, что при всякомъ значеніи количества θ рядъ

$$\frac{\sin\theta}{1}+\frac{\sin 2\theta}{2}+\ldots+\frac{\sin n\theta}{n}$$

— сходящійся. Точно также можно доказать, что рядъ

$$\frac{\cos\theta}{1}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\ldots+\frac{\cos n\theta}{n}+\ldots$$

— сходящійся при всѣхъ значеніяхъ θ, кромѣ $\theta=2k\pi$.

Слѣдствіе. — Ограничиваясь сходящимися рядами, можно высказать еще болѣе общее предложеніе. Пусть будетъ

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$$

сходящійся рядъ, и пусть будетъ

$$\varepsilon_0,\quad \varepsilon_1,\quad \ldots,\quad \varepsilon_n,\quad \ldots$$

послѣдовательность положительныхъ чиселъ, постоянно возрастающихъ или убывающихъ и стремящихся при неограниченномъ возрастаніи n къ предѣлу k, отличному отъ нуля. Рядъ

$$\varepsilon_0 u_0+\varepsilon_1 u_1+\ldots+\varepsilon_n u_n+\ldots \qquad (18)$$

будетъ также сходящимся.

Для опредѣленности предположимъ, что числа ε_i идутъ, возрастая. Мы можемъ написать

$$\varepsilon_0=k-\alpha_0,\quad \varepsilon_1=k-\alpha_1,\quad \ldots,\quad \varepsilon_n=k-\alpha_n,\quad \ldots,$$

гдѣ числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, образуютъ послѣдовательность положительныхъ убывающихъ чиселъ, причемъ, при неограниченномъ возрастаніи n, α_n стремится къ нулю. Оба ряда

$$k\,u_0+k\,u_1+\ldots+k\,u_n+\ldots,$$
$$\alpha_0 u_0+\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_n u_n+\ldots$$

— сходящіеся; слѣдовательно, рядъ (18) будетъ также сходящимся.

II. — РЯДЫ СЪ МНИМЫМИ ЧЛЕНАМИ. — РЯДЫ КРАТНЫЕ.

167. Опредѣленія. — Въ этомъ параграфѣ мы укажемъ на нѣкоторыя обобщенія понятія ряда. Пусть будетъ

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (19)$$

рядъ, всѣ члены котораго — мнимыя количества

$$u_0=a_0+b_0i,\quad u_1=a_1+b_1i,\quad \ldots,\quad u_n=a_n+b_ni,\quad \ldots.$$

Такой рядъ называется с х о д я щ и м с я, если каждый изъ двухъ рядовъ, составленныхъ изъ дѣйствительныхъ частей и изъ коэффиціентовъ при i,

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (20)$$

$$b_0+b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots \qquad (21)$$

будетъ сходящимся. Пусть будутъ S' и S'' суммы рядовъ (20) и (21); с у м м о ю ряда (19) называется количество $S=S'+iS''$. Очевидно, что здѣсь такъ же, какъ и въ предыдущемъ, эта сумма представляетъ предѣлъ суммы S_n n первыхъ членовъ ряда (19) при неограниченномъ возрастаніи числа n. Мы видимъ, что рядъ съ мнимыми членами есть, въ сущности, не что иное, какъ совокупность двухъ рядовъ съ дѣйствительными членами.

Если рядъ, образованный модулями членовъ ряда (19)

$$\sqrt{a_0^2+b_0^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\ldots, \qquad (22)$$

— сходящійся, то каждый изъ рядовъ (20) и (21) будетъ, очевидно, абсолютно сходящимся, такъ какъ

$$|a_n|\leq\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

и

$$|b_n|\leq\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

Въ этомъ случаѣ рядъ (19) называется а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я. Въ такомъ рядѣ мы можемъ, не измѣняя суммы, измѣнять порядокъ членовъ или соединять эти члены произвольнымъ образомъ.

Всякому признаку, позволяющему утверждать, что нѣкоторый знакоположительный рядъ — сходящійся, соотвѣтствуетъ признакъ, позволяющій утверждать, что нѣкоторый рядъ съ любыми членами, дѣйствительными или мнимыми, есть абсолютно сходящійся. Такъ, если въ рядѣ, начиная съ нѣкотораго члена, модуль отношенія $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ меньше опредѣленнаго числа, меньшаго

единицы, то рядъ — абсолютно сходящійся. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $U_i = |u_i|$. Если, начиная съ нѣкотораго члена, мы постоянно имѣемъ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k < 1$, то мы можемъ представить это неравенство въ видѣ

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < k < 1;$$

это показываетъ, что рядъ модулей

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n + \ldots$$

— сходящійся. Если при неограниченномъ возрастаніи n отношеніе $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ стремится къ предѣлу l, то рядъ будетъ сходящимся при $l < 1$ и расходящимся при $l > 1$; въ самомъ дѣлѣ, въ послѣднемъ случаѣ модуль общаго члена u_n не стремится къ нулю, и оба ряда (20) и (21) не могутъ быть одновременно сходящимися. Случай $l = 1$ остается сомнительнымъ.

Вообще, пусть будетъ ω наибольшимъ изъ предѣловъ количествъ $\sqrt[n]{U_n}$, когда n неограниченно возрастаетъ. Рядъ (19) будетъ абсолютно сходящимся, если $\omega < 1$, и расходящимся, если $\omega > 1$, такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ модуль общаго члена не стремится къ нулю (§ 161). Случай $\omega = 1$ остается сомнительнымъ; рядъ можетъ быть абсолютно сходящимся, условно сходящимся или расходящимся.

168. Умноженіе рядовъ. — Пусть будутъ

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (23)$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (24)$$

два ряда съ членами произвольнаго вида. Умножимъ каждый членъ перваго ряда на каждый членъ второго ряда и соберемъ вмѣстѣ всѣ произведенія $u_i v_j$ съ одинаковою суммою указателей $i+j$; такимъ образомъ мы получимъ новый рядъ

$$\left.\begin{array}{c} u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots \\ + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0) + \ldots \end{array}\right\} \qquad (25)$$

Если оба ряда (23) и (24) абсолютно сходящіеся, то рядъ (25) — также сходящійся и имѣетъ суммою произведеніе суммъ обоихъ предыдущихъ рядовъ. Эта теорема, доказанная Коши, была обобщена Мертенсомъ (Mertens)*), который показалъ, что она

*) Crelle's Journal, т. 79.

остается вѣрною и въ томъ случаѣ, когда одинъ рядъ абсолютно сходящійся, а другой — только условно сходящійся.

Предположимъ, напримѣръ, что рядъ (23) — абсолютно сходящійся. Пусть будетъ w_n общій членъ ряда (25)

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + n_n v_0.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при неограниченномъ возрастаніи n обѣ разности

$$w_0 + w_1 + \ldots + w_{2n} - (u_0 + u_1 + \ldots + u_n)\ (v_0 + v_1 + \ldots + v_n),$$
$$w_0 + w_1 + \ldots + w_{2n+1} - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n+1})(v_0 + v_1 + \ldots - v_{n+1})$$

стремятся къ нулю. Такъ какъ доказательство въ обоихъ случаяхъ одинаково, то мы разсмотримъ только первую разность. Расположивъ ее относительно u_i, мы можемъ представить ее въ видѣ

$$\delta = u_0(v_{n+1} + \ldots + v_{2n}) + u_1(v_{n+1} + \ldots + u_{2n-1}) + \ldots + n_{n-1} v_{n+1}$$
$$+ u_{n+1}(v_0 + \ldots + v_{n-1}) + u_{n+2}(v_0 + \ldots + v_{n-2}) + \ldots + u_{2n} v_0.$$

Такъ какъ рядъ (23) абсолютно сходящійся, то сумма

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n$$

остается при всякомъ n меньшею нѣкотораго опредѣленнаго положительнаго числа A; точно также, вслѣдствіе того, что рядъ (24) сходящійся, модуль суммы $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ остается при всякомъ n меньшимъ нѣкотораго положительнаго числа B Пусть будетъ ε нѣкоторое заранѣе данное положительное число; мы можемъ выбрать настолько большое положительное число m, чтобы при $n \geqq m$ было

$$U_{n+1} + \ldots + U_{n+p} < \frac{\varepsilon}{A+B},$$
$$|v_{n+1} + \ldots + v_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{A+B},$$

каково бы ни было число p. Взявъ число n подъ этимъ условіемъ, мы будемъ имѣть верхній предѣлъ разности δ, замѣняя $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ соотвѣтственно черезъ $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$; $v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{n+p}$ черезъ $\frac{\varepsilon}{A+B}$ и, наконецъ, $v_0 + \ldots + v_{n-1}, v_0 + \ldots + v_{n-2}, \ldots, v_0$ черезъ B. Послѣ этой замѣны получимъ

$$|\delta| < U_0 \frac{\varepsilon}{A+B} + U_1 \frac{\varepsilon}{A+B} + \ldots + U_{n-1} \frac{\varepsilon}{A+B}$$
$$+ U_{n+1} B + U_{n+2} B + \ldots + U_{2n} B,$$

или

$$|\delta| < \frac{\varepsilon}{A+B}(U_0+U_1+\ldots+U_{n+1})+B(U_{n+1}+\ldots+U_{2n})$$

$$< \frac{\varepsilon A}{A+B}+\frac{\varepsilon B}{A+B},$$

или, наконецъ, $|\delta|<\varepsilon$. Такимъ образомъ, разность δ имѣетъ предѣломъ нуль.

169. Двойные ряды. — Разсмотримъ прямоугольное поле, ограниченное сверху и слѣва и неограниченно простирающееся вправо и внизъ. Разобьемъ это поле вертикальными и горизонтальными линіями на квадраты на подобіе шахматной доски. Такое поле будетъ содержать безконечное множество вертикальныхъ столбцовъ, которые мы перенумеруемъ, начиная съ 0 до $+\infty$, и безконечное множество горизонтальныхъ строкъ, которыя мы также перенумеруемъ, начиная съ 0 до $+\infty$. Предположимъ, что каждой клѣткѣ этого поля соотвѣтствуетъ нѣкоторое число, которое мы впишемъ въ эту клѣтку. Пусть будетъ a_{ik} число, соотвѣтствующее клѣткѣ, лежащей въ i-ой строкѣ и въ k-омъ столбцѣ. Мы получимъ такимъ образомъ таблицу, имѣющую слѣдующій видъ*)

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0n} & \ldots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right| \qquad (26)$$

Мы предположимъ сначала, что всѣ члены этой таблицы — числа дѣйствительныя и положительныя.

Вообразимъ теперь рядъ линій $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, безконечно удаляющихся по всѣмъ направленіямъ и образующихъ вмѣстѣ съ двумя прямыми, ограничивающими таблицу, рядъ замкнутыхъ линій, каждая изъ которыхъ заключаетъ внутри себя всѣ предыдущія. Пусть будутъ $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ суммы членовъ таблицы, стоящихъ внутри этихъ замкнутыхъ линій.

*) Такая таблица называется также таблицею съ двойнымъ входомъ. (*Ред.*)

Если при неограниченномъ возрастаніи n сумма S_n стремится къ предѣлу S, то двойной рядъ

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} k \qquad (27)$$

называется сходящимся и имѣетъ суммою количество S. Чтобы оправдать это опредѣленіе, нужно доказать, что предѣлъ S не зависитъ отъ вида кривыхъ C. Предположимъ, что мы имѣемъ другой рядъ линій, удаляющихся въ безконечность по всѣмъ направленіямъ, C'_1, C'_2, ..., C'_m, ..., и пусть будутъ $S'_1, S'_2, \ldots S'_m, \ldots$ соотвѣтствующія имъ суммы. Когда число m дано, то всегда можно выбрать число n настолько большимъ, чтобы линія C_n заключала внутри себя линію C'_m; слѣдовательно, мы будемъ имѣть $S'_m < S_n$, и отсюда, при всякомъ m, $S'_m < S$. Но эта сумма S'_m возрастаетъ вмѣстѣ съ указателемъ m; слѣдовательно, она стремится къ предѣлу $S' \leqq S$. Такимъ же образомъ мы докажемъ, что $S \leqq S'$. Слѣдовательно, $S' = S$.

Мы можемъ принять за линію C, напримѣръ, двѣ стороны безпредѣльно увеличивающагося квадрата, или же прямыя, равно наклоненныя къ обѣимъ сторонамъ поля; соотвѣтствующія суммы будутъ въ первомъ случаѣ:

$$a_{00}+(a_{10}+a_{11}+a_{01})+\ldots+(a_{n0}+a_{n1}+\ldots+a_{nn}+a_{n-1,\,n}+\ldots+a_{0n}),$$

а во второмъ:

$$a_{00}+(a_{10}+a_{01})+(a_{20}+a_{11}+a_{02})+\ldots+(a_{n0}+a_{n-1,\,1}+\ldots+a_{0n}).$$

Если при неограниченномъ возрастаніи n одна изъ этихъ суммъ стремится къ нѣкоторому предѣлу, то будетъ стремиться къ предѣлу и другая сумма, и оба эти предѣла будутъ равны между собою.

Сумму таблицы можно также составлять по строкамъ или по столбцамъ. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что двойной рядъ (27) — сходящійся, и пусть будетъ S его сумма. Очевидно, что сумма произвольнаго числа членовъ таблицы меньше S; отсюда слѣдуетъ, что всѣ ряды, подобные слѣдующему

$$a_{i0}+a_{i1}+\ldots+a_{in}+\ldots \quad (i=0,\,1,\,2,\ldots), \qquad (28)$$

получающіеся изъ членовъ какой-нибудь горизонтальной строки, будутъ сходящимися, такъ какъ сумма

$$a_{i0}+a_{i1}+\ldots+a_{in}$$

всегда меньше количества S и возрастаетъ вмѣстѣ съ n. Пусть

будутъ $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots$ суммы полученныхъ такимъ образомъ сходящихся рядовъ; тогда рядъ

$$\sigma_0+\sigma_1+\ldots+\sigma_i+\ldots \qquad (29)$$

будетъ также сходящимся. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ сумму Σa_{ik} тѣхъ членовъ таблицы, у которыхъ $i \leqq p, k \leqq r$. Эта сумма всегда меньше S; если, оставляя число p постояннымъ, мы будемъ неограниченно увеличивать число r, то эта сумма будетъ имѣть предѣломъ

$$\sigma_0+\sigma_1+\ldots+\sigma_p.$$

Такимъ образомъ, мы всегда имѣемъ $\sigma_0+\sigma_1+\ldots+\sigma_p<S$, и такъ какъ эта сумма возрастаетъ вмѣстѣ съ числомъ p, то отсюда слѣдуетъ, что рядъ (29) сходящійся и имѣетъ суммою число $\Sigma \leqq S$. Съ другой стороны, если всѣ ряды (28) — сходящіеся, и если новый рядъ (29), составленный изъ суммъ первыхъ рядовъ, — сходящійся и имѣетъ суммою число Σ, то ясно, что сумма любого числа членовъ таблицы (26) меньшее Σ. Слѣдовательно, мы имѣемъ также $S \leqq \Sigma$, и отсюда $\Sigma = S$.

Все, что было сказано о рядахъ, получающихся изъ горизонтальныхъ строкъ, очевидно, примѣнимо къ рядамъ, получающимся изъ вертикальныхъ столбцовъ. Такимъ образомъ, чтобы получить сумму двойного ряда, всѣ элементы котораго положительны, можно вычислять ее или по строкамъ, или по столбцамъ, или же, наконецъ, брать ограничивающія кривыя произвольнаго вида. Въ частности, если рядъ оказывается сходящимся, когда мы составляемъ сумму по горизонтальнымъ строкамъ, то онъ будетъ также сходящимся и въ томъ случаѣ, если мы будемъ вычислять его по столбцамъ, и его сумма въ обоихъ случаяхъ одна и та же.

Для двойныхъ рядовъ съ положительными членами можно было бы дать рядъ теоремъ, аналогичныхъ теоремамъ, доказаннымъ выше для простыхъ рядовъ. Напримѣръ, если члены двойного знакоположительнаго ряда соотвѣтственно меньше членовъ другого двойного сходящагося ряда, то и первый рядъ также сходящійся, и т. д.

Двойной рядъ съ положительными членами, не сходящійся, называется **расходящимся**. Сумма элементовъ соотвѣтствующей этому ряду таблицы, расположенныхъ внутри какой-нибудь замкнутой кривой, возрастаетъ выше всякаго предѣла, когда эта кривая неограниченно удаляется по всѣмъ направленіямъ.

Разсмотримъ теперь таблицу, въ которой не всѣ элементы положительны. Очевидно, что мы можемъ исключить изъ разсмотрѣнія тѣ случаи, когда всѣ элементы таблицы отрицательны, или когда есть только конечное число положительныхъ или отрицательныхъ элементовъ, такъ какъ всѣ эти случаи непосредственно приводятся къ предыдущему. Поэтому мы предположимъ, что въ разсматриваемой таблицѣ T есть безконечное множество какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ элементовъ. Пусть будетъ a_{ik} общій членъ таблицы T. Если таблица T_1 съ положительными элементами, каждый элементъ которой равенъ абсолютному значенію $|a_{ik}|$ соотвѣтствующаго элемента таблицы T, — сходящаяся, то таблица T называется абсолютно сходящеюся. Абсолютно сходящаяся таблица обладаетъ всѣми существенными свойствами сходящейся таблицы съ положительными членами.

Для доказательства этого предложенія разсмотримъ двѣ вспомогательныхъ таблицы T' и T'', составленныхъ слѣдующимъ образомъ. Таблица T' образована изъ таблицы T такимъ образомъ, что каждый отрицательный элементъ замѣненъ нулемъ, а каждый положительный элементъ оставленъ на своемъ мѣстѣ. Точно также, таблица T'' образована изъ таблицы T, въ которой каждый положительный элементъ замѣненъ нулемъ, а у каждаго отрицательнаго элемента перемѣненъ знакъ. Если таблица T_1 — сходящаяся, то каждая изъ таблицъ T' и T'' также сходящаяся, такъ какъ каждый элементъ, напримѣръ, таблицы T' не превосходитъ соотвѣтствующаго эмемента таблицы T_1. Сумма членовъ ряда T, заключающихся внутри какой-нибудь замкнутой кривой, равна разности между суммою членовъ таблицы T' и суммою членовъ таблицы T'', заключающихся внутри той же кривой. Такъ какъ обѣ послѣднихъ суммы приближаются къ нѣкоторому предѣлу, когда пограничная кривая неограниченно удаляется по всѣмъ направленіямъ, то и первая сумма также стремится къ предѣлу, и этотъ предѣлъ не зависитъ отъ вида пограничной кривой. Этотъ предѣлъ называется суммою таблицы T. Сумму такой таблицы T можно также вычислять по строкамъ или по столбцамъ, какъ это слѣдуетъ изъ разсужденій, приведенныхъ по поводу таблицъ съ положительными элементами. Такимъ образомъ ясно, что если данная таблица абсолютно сходящаяся, то каковы бы ни были знаки ея элементовъ, съ нею можно поступать, какъ съ сходящеюся таблицею съ положительными членами; но при этомъ существенно необходимо, чтобы рядъ T_1 съ положительными членами былъ сходящимся.

Если таблица T_1 — расходящаяся, то будетъ расходящеюся, по крайней мѣрѣ, одна изъ таблицъ T' и T''. Если одна изъ нихъ, напримѣръ T', — расходящаяся, а другая T'' — сходящаяся, то сумма элементовъ таблицы T, заключающихся внутри нѣкоторой замкнутой кривой C, неограниченно возрастаетъ независимо отъ вида кривой C, когда эта кривая неограниченно удаляется по всѣмъ направленіямъ. Если же обѣ таблицы T' и T'' — расходящіяся, то изъ предыдущаго разсужденія слѣдуетъ только то, что сумма элементовъ таблицы T, заключающихся внутри замкнутой кривой C, равна разности между двумя суммами, неограниченно возрастающими, когда кривая C неограниченно удаляется по всѣмъ направленіямъ. При этомъ можетъ случиться, что сумма элементовъ таблицы T, заключающихся внутри C, приближается къ совершенно различнымъ предѣламъ въ зависимости отъ вида кривой C и отъ того, какимъ образомъ удаляется эта кривая т.-е. въ зависимости отъ относительнаго возрастанія числа положительныхъ и отрицательныхъ членовъ въ этой суммѣ; въ нѣкоторыхъ случаяхъ сумма можетъ даже стремиться къ безконечности, или не приближаться ни къ какому предѣлу. Въ частности, если таблица не будетъ абсолютно сходящеюся, то мы можемъ получить совершенно различныя суммы, вычисляя отдѣльно ее по строкамъ и по столбцамъ.

Арндтъ (Arndt) далъ слѣдующій примѣръ*). Разсмотримъ таблицу

$$\left|\begin{array}{llll}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right), & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right), & \ldots, & \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right) - \frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right), \ldots \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2, & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2, & \ldots, & \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2 - \frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^2, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n, & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n, & \ldots, & \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n - \frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^n, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right| \qquad (31)$$

Эта таблица содержитъ безконечное множество положительныхъ и безконечное множество отрицательныхъ элементовъ. Каждый изъ рядовъ, составленныхъ изъ элементовъ каждой отдѣльной строки и каждаго отдѣльнаго столбца, — сходящійся. Сумма ряда, составленнаго изъ элементовъ n-ой строки, очевидно, равна

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Такимъ образомъ, вычисляя сумму таблицы (31) по строкамъ, мы придемъ къ суммѣ сходящагося ряда

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots,$$

которая равна $\frac{1}{2}$. Съ другой стороны, разсмотримъ рядъ, состоящій изъ членовъ $(p-1)$-го столбца,

$$\frac{1}{p}\left[\left(\frac{p-1}{p}\right) + \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right)^n + \ldots\right] - \frac{1}{p+1}\left[\left(\frac{p}{p+1}\right) + \left(\frac{p}{p+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{p}{p+1}\right)^n + \ldots\right].$$

*) Grunert's Archiv, т. XI, стр. 319.

Этотъ рядъ — сходящійся, и его сумма равна

$$\frac{p-1}{p}-\frac{p}{p+1}=\frac{-1}{p(p+1)}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}.$$

Слѣдовательно, вычисляя таблицу (31) по столбцамъ, мы придемъ къ суммѣ сходящагося ряда

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\right)+\ldots,$$

которая равна $-\frac{1}{2}$.

Изъ этого примѣра ясно видно, что двойными рядами можно пользоваться при вычисленіяхъ только въ томъ случаѣ, если они будутъ абсолютно сходящимися.

Перейдемъ теперь къ двойнымъ рядамъ съ мнимыми членами. Если элементы таблицы (26) мнимые, то можно составить двѣ другихъ таблицы T' и T'' такихъ, чтобы каждый элементъ таблицы T' былъ равенъ дѣйствительной части соотвѣтствующаго элемента таблицы T, а каждый элементъ таблицы T'' былъ равенъ коэффиціенту при i соотвѣтствующаго элемента таблицы T. Если таблица T_1, каждый элементъ которой равенъ модулю соотвѣтствующаго элемента таблицы T, — сходящаяся, то каждая изъ таблицъ T' и T'' будетъ абсолютно сходящеюся; въ этомъ случаѣ данная таблица T называется также а б с о л ю т н о с х о д я щ е ю с я. Сумма элементовъ такой таблицы, заключающихся внутри нѣкоторой перемѣнной замкнутой кривой, стремится къ предѣлу, когда пограничная кривая неограниченно удаляется по всѣмъ направленіямъ. Этотъ предѣлъ не зависитъ отъ вида пограничной кривой и называется с у м м о ю данной таблицы. Сумма абсолютно сходящейся таблицы можетъ быть также вычисляема по строкамъ или по столбцамъ.

170. Абсолютно сходящійся двойной рядъ можно замѣнить обыкновеннымъ рядомъ, состоящимъ изъ тѣхъ же членовъ, какъ и данный двойной рядъ. Для этого достаточно показать, что всегда можно перенумеровать клѣтки поля (26) такимъ образомъ, чтобы каждая клѣтка имѣла опредѣленный нумеръ, и чтобы ни одна клѣтка не была пропущена. Другими словами, если мы разсмотримъ, съ одной стороны, рядъ послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots, \qquad (32)$$

а съ другой стороны, всѣ пары цѣлыхъ чиселъ (i, k), гдѣ $i \geqq 0$, $k \geqq 0$, то каждую изъ этихъ паръ можно связать съ однимъ изъ чиселъ послѣдовательности (32) такимъ образомъ, чтобы, обратно, каждому числу n соотвѣтствовала только одна изъ этихъ паръ. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ всѣ эти пары одна за другою слѣдующимъ образомъ. Будемъ писать раньше тѣ пары, у которыхъ сумма чиселъ $i+k$ меньше, а изъ

двухъ паръ съ равными суммами указателей $i+k$ будемъ писать раньше ту, у которой число i больше. Такимъ образомъ мы получимъ такую послѣдовательность паръ

$$(0, 0);\ (1, 0), (0, 1);\ (2, 0), (1, 1), (0, 2);\ (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3); \ldots.$$

Вообще, написавъ всѣ пары, для которыхъ $i+k<n$, мы будемъ писать всѣ пары, для которыхъ $i+k=n$, начиная съ пары $(n, 0)$ и затѣмъ уменьшая i послѣдовательно на единицу до нуля. Очевидно, что каждая пара (i, k) будетъ имѣть передъ собою только к о н е ч н о е число паръ и, слѣдовательно, будетъ занимать въ послѣдовательности опредѣленное мѣсто. Представимъ теперь, что мы написали члены двойного абсолютно сходящагося ряда $\Sigma\Sigma a_{ik}$ въ указанномъ выше порядкѣ; мы получимъ простой рядъ

$$a_{00}+a_{10}+a_{01}+a_{20}+a_{11}+a_{02}+\ldots+a_{n0}+a_{n-1,1}+\ldots; \qquad (33)$$

у этого простого ряда будутъ тѣ же члены, какъ и у разсматриваемаго двойного ряда, онъ будетъ абсолютно сходящимся и будетъ имѣть ту же сумму, какъ и двойной рядъ. Ясно, что этотъ способъ преобразованія не является единственнымъ, такъ какъ мы можемъ затѣмъ переставлять члены ряда по произволу. Обратно, всякій простой абсолютно сходящійся рядъ можетъ быть преобразованъ въ двойной рядъ безконечнымъ множествомъ способовъ. Это преобразованіе съ большимъ успѣхомъ примѣняется при выводѣ нѣкоторыхъ тожествъ*).

Мы видимъ, что понятіе двойнаго ряда не отличается по существу отъ обычнаго понятія ряда. Выше мы видѣли, что въ абсолютно сходящемся рядѣ можно замѣнять конечное число членовъ ихъ суммою, а также располагать члены въ произвольномъ порядкѣ; распространяя эти свойства, мы естественно приходимъ къ введенію двойныхъ рядовъ.

171. Кратные ряды. — Понятіе двойного ряда можетъ быть еще значительно расширено. Прежде всего можно разсматривать ряды, каждый членъ которыхъ a_{mn} зависитъ отъ двухъ указателей, измѣняющихся отъ $-\infty$ до $+\infty$. Мы можемъ вообразить, что члены этого ряда расположены въ клѣткахъ прямоугольнаго поля, простирающагося въ безконечность по всѣмъ направленіямъ; очевидно, что такой двойной рядъ $\Sigma\Sigma a_{mn}$ можно разбить на четыре двойныхъ ряда, подобныхъ разсмотрѣннымъ выше.

Еще болѣе важно слѣдующее обобщеніе понятія ряда. Разсмотримъ рядъ, каждый членъ котораго $a_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ зависитъ отъ p указателей m_1, m_2, $\ldots$, m_p, измѣняющихся отъ 0 до $+\infty$, или отъ $-\infty$ до $+\infty$, причемъ, кромѣ того, эти указатели могутъ быть еще стѣснены нѣкоторыми неравенствами.

*) Таннери (Tannery), Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, стр. 67.

Хотя мы и не можемъ пользоваться геометрическимъ представленіемъ, какъ скоро мы имѣемъ болѣе трехъ указателей, однако нетрудно видѣть, что предложенія, полученныя для двойныхъ рядовъ, могутъ быть легко распространены на кратные ряды порядка p.

Предположимъ сначала, что всѣ члены $a_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ дѣйствительны и положительны. Предположимъ, что мы взяли сумму нѣкотораго числа членовъ этого ряда; далѣе, составимъ вторую сумму, прибавивъ къ первой суммѣ сумму нѣкотораго числа членовъ изъ числа опущенныхъ при составленіи первой суммы и т. д., такъ, чтобы каждый членъ предложеннаго ряда вошелъ въ одну изъ этихъ суммъ, а, слѣдовательно, и во всѣ послѣдующія суммы. Пусть будутъ $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ полученныя такимъ способомъ послѣдовательныя суммы. Если при неограниченномъ возрастаніи числа n сумма S_n стремится къ нѣкоторому предѣлу S, то данный рядъ называется сходящимся и будетъ имѣть суммою это число S. Какъ и въ случаѣ рядовъ съ двумя указателями, предѣлъ S не зависитъ отъ того закона, по какому мы неограниченно увеличиваемъ число складываемыхъ членовъ. Если члены имѣютъ разные знаки или если они мнимые, то и здѣсь рядъ будетъ сходящимся, если будетъ сходящимся рядъ, составленный изъ модулей отдѣльныхъ членовъ.

172. Обобщеніе теоремы Коши. — Вопросъ о сходимости или расходимости кратнаго ряда часто можетъ быть рѣшенъ при помощи слѣдующей теоремы, представляющей собою обобщеніе теоремы Коши (§ 161). Пусть будетъ $f(x, y)$ функція двухъ перемѣнныхъ x, y, положительная для всѣхъ точекъ (x, y), лежащихъ внѣ нѣкоторой замкнутой кривой Γ, и убывающая съ удаленіемъ точки (x, y) отъ начала координатъ. Разсмотримъ, съ одной стороны, двойной интегралъ $\iint f(x, y)\, dx\, dy$, распространенный на кольцеобразную площадь, содержащуюся между кривою Γ и нѣкоторою другою внѣшнею кривою C, которая неограниченно удаляется по всѣмъ направленіямъ. Съ другой стороны, возьмемъ рядъ съ двойнымъ входомъ $\Sigma f(m, n)$, гдѣ мы даемъ указателямъ m и n всѣ такія цѣлыя положительныя и отрицательныя значенія, при которыхъ точка (m, n) лежитъ внѣ кривой Γ.

При этихъ условіяхъ двойной рядъ будетъ сходящимся, если двойной интегралъ имѣетъ предѣлъ, и обратно.

Разобьемъ площадь, заключающуюся между двумя кривыми C и Γ, прямыми, параллельными осямъ координатъ, $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $y=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ на нѣкоторое число квадратовъ и неправильныхъ частей. Если мы возьмемъ въ каждомъ изъ квадратовъ вершину, наиболѣе удаленную отъ начала координатъ, то ясно, что соотвѣтствующая сумма $\Sigma f(m, n)$ будетъ меньше двойного интеграла $\iint f(x, y)\, dx\, dy$, распространеннаго на площадь, заключающуюся между C и Γ. Предположимъ, что кривая C неограниченно удаляется отъ кривой Γ; если при этомъ двойной интегралъ стремится къ нѣкоторому предѣлу S, то отсюда слѣдуетъ, что сумма любого числа членовъ двойного ряда всегда меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа; слѣдовательно, этотъ рядъ — сходящійся. Такимъ же образомъ мы убѣждаемся, что если двойной рядъ — сходящійся, то двойной интегралъ всегда меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа; слѣдовательно, этотъ интегралъ стремится къ нѣкоторому предѣлу. При сохраненіи соотвѣтствующихъ предположеній, теорема распространяется на кратные ряды съ p указателями; ихъ слѣдуетъ сравнивать съ кратными интегралами порядка p.

Такъ, напримѣръ, двойной рядъ, общій членъ котораго есть $\frac{1}{(m^2+n^2)^\mu}$, гдѣ указатели m и n принимаютъ всѣ цѣлыя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, кромѣ $m=n=0$, — сходящійся, если $\mu>1$, и расходящійся, если $\mu\leqq 1$. Въ самомъ дѣлѣ, двойной интегралъ

$$\iint \frac{dx\, dy}{(x^2+y^2)^\mu}, \tag{34}$$

распространенный на площадь, лежащую внѣ круга съ центромъ въ началѣ координатъ, имѣетъ конечное значеніе, если $\mu>1$, и неограниченно возрастаетъ, если $\mu\leqq 1$ (§ 133).

Какъ болѣе общій примѣръ, разсмотримъ кратный рядъ съ общимъ членомъ

$$\frac{1}{(m_1^2+m_2^2+\ldots+m_p^2)^\mu},$$

причемъ система значеній $m_1=m_2=\ldots=m_p=0$ исключается; этотъ рядъ будетъ сходящимся, если $2\mu>p$ *).

*) Болѣе общія предложенія можно найти въ Traité d'Analyse Жордана (Jordan); томъ I, стр. 163.

III. — РЯДЫ СЪ ПЕРЕМѢННЫМИ ЧЛЕНАМИ. — РЯДЫ РАВНОМѢРНО СХОДЯЩІЕСЯ.

173. Опредѣленіе равномѣрной сходимости. — Если члены ряда

$$u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (35)$$

суть функціи перемѣннаго x, непрерывныя въ промежуткѣ (a, b), и если этотъ рядъ — сходящійся при всякомъ значеніи x, содержащемся въ этомъ промежуткѣ, то отсюда еще не слѣдуетъ, чтобы такой рядъ представлялъ въ этомъ промежуткѣ непрерывную функцію перемѣннаго x, какъ это можно было бы думать. Чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно обратиться къ ряду (см. § 4)

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots,$$

сумма котораго прерывна при $x=0$. Такъ какъ въ анализѣ многія функціи вводятся въ видѣ рядовъ, то пришлось обратиться къ изученію свойствъ функцій, представленныхъ такимъ образомъ, и здѣсь первый вопросъ состоитъ именно въ томъ, какъ узнать, будетъ ли сумма даннаго ряда непрерывною функціею перемѣннаго. Хотя мы и не имѣемъ общаго рѣшенія этого вопроса, тѣмъ не менѣе его разсмотрѣніе привело къ весьма важному понятію о равномѣрной сходимости.

Рядъ вида (35), каждый членъ котораго есть функція отъ x, опредѣленная въ промежуткѣ (a, b) (§ 2), называется равномѣрно сходящимся въ этомъ промежуткѣ, если этотъ рядъ будетъ сходящимся при всякомъ значеніи перемѣннаго x, содержащемся въ промежуткѣ (a, b), и если для всякаго произвольно взятаго положительнаго числа ε можно найти такое цѣлое число N, независящее отъ x, чтобы абсолютное значеніе остатка R_n даннаго ряда

$$R_n=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)+\ldots$$

было меньше ε при всякомъ значеніи $n\geqq N$ и при всякомъ значеніи x, заключающемся въ промежуткѣ (a, b).

Послѣднее условіе существенно въ этомъ опредѣленіи. Въ самомъ дѣлѣ, изъ самаго опредѣленія сходимости очевидно, что для всякаго заранѣе даннаго значенія x, при которомъ рядъ — сходящійся, можно найти такое цѣлое число N, соотвѣтствующее любому положительному числу ε, чтобы при $n\geqq N$

было $R_n < \varepsilon$. Но для того чтобы рядъ былъ равномѣрно сходящимся, необходимо, сверхъ того, чтобы число N удовлетворяло этому условію при всякомъ значеніи перемѣннаго x въ промежуткѣ (a, b). Слѣдующіе примѣры показываютъ, что это не всегда имѣетъ мѣсто. Такъ, для ряда, разсмотрѣннаго выше, мы имѣемъ

$$R_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}, \text{ гдѣ } x \neq 0.$$

Легко видѣть, что этотъ рядъ не будетъ равномѣрно сходящимся въ промежуткѣ (0, 1). Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы этотъ рядъ былъ равномѣрно сходящимся, необходимо (но не достаточно), чтобы можно было найти такое число N, чтобы было

$$\frac{1}{(1+x^2)^N} < \varepsilon$$

при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго x въ промежуткѣ (0, 1). Предыдущее неравенство можно представить иначе въ видѣ

$$1 + x^2 > e^{\frac{1}{N}\log\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Но такъ какъ правая часть этого неравенства больше единицы, каковы бы ни были числа N и ε, то всегда есть такія положительныя значенія перемѣннаго x, которыя этому неравенству не удовлетворяютъ.

Разсмотримъ еще рядъ, опредѣляемый уравненіями

$$S_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad S_0(x) = 0, \quad u_n(x) = S_n - S_{n-1}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Сумма n первыхъ членовъ этого ряда, очевидно, равна $S_n(x)$; она стремится къ нулю при неограниченномъ возрастаніи n, каково бы ни было значеніе перемѣннаго x. Слѣдовательно, этотъ рядъ — сходящійся, и его остатокъ $R_n(x)$ равенъ $-nxe^{-nx^2}$. Чтобы этотъ рядъ былъ равномѣрно сходящимся въ промежуткѣ (0, 1), необходимо и достаточно, чтобы для всякаго произвольно взятаго положительнаго числа ε можно было найти такое цѣлое положительное число N, чтобы при всѣхъ значеніяхъ $n \geq N$ было

$$nxe^{-nx^2} < \varepsilon, \quad 0 < x < 1.$$

Но если мы замѣнимъ x черезъ $\frac{1}{n}$, то лѣвая часть этого неравенства будетъ равна $e^{-\frac{1}{n}}$, и при $n > 1$ это послѣднее коли-

чество больше $\frac{1}{e}$. Такъ какъ ε можетъ быть взято меньше, чѣмъ $\frac{1}{e}$, то отсюда слѣдуетъ, что данный рядъ не будетъ равномѣрно сходящимся.

Важное значеніе равномѣрно сходящихся рядовъ основывается на слѣдующемъ ихъ свойствѣ:

Сумма ряда, равномѣрно сходящагося въ промежуткѣ (a, b), всѣ члены котораго суть функціи перемѣннаго x, непрерывныя въ этомъ промежуткѣ, есть непрерывная функція этого перемѣннаго.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ x_0 значеніе перемѣннаго x, заключающееся между a и b, и x_0+h — близкое къ x_0 значеніе, также заключающееся между a и b. Выберемъ число n настолько большимъ, чтобы при всѣхъ значеніяхъ x въ промежуткѣ (a, b) остатокъ $R_n(x)$

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$$

былъ по абсолютному значенію меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, гдѣ ε — сколь угодно малое, заранѣе данное, положительное число. Пусть будетъ $f(x)$ сумма разсматриваемаго сходящагося ряда. Обозначивъ черезъ $\varphi(x)$ сумму его $(n+1)$ первыхъ членовъ

$$\varphi(x)=u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x),$$

мы можемъ написать

$$f(x)=\varphi(x)+R_n(x).$$

Вычитая почленно равенства

$$f(x_0)=\varphi(x_0)+R_n(x_0),$$
$$f(x_0+h)=\varphi(x_0+h)+R_n(x_0+h),$$

получимъ отсюда

$$f(x_0+h)-f(x_0)=[\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)]+R_n(x_0+h)-R_n(x_0).$$

По свойству числа n, имѣемъ

$$|R_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |R_n(x_0+h)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Съ другой стороны, такъ какъ всѣ члены ряда суть непрерывныя функціи отъ x, то $\varphi(x)$ есть также непрерывная функція, и можно найти такое положительное число η, чтобы при $|h|<\eta$ было

$$|\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Слѣдовательно, при всѣхъ значеніяхъ h, меньшихъ η по абсолютному значенію, мы будемъ имѣть a fortiori

$$f(x_0+h)-f(x_0)|<3\frac{\varepsilon}{3}.$$

Послѣднее неравенство показываетъ, что функція $f(x)$ непрерывна при $x=x_0$.

Примѣчаніе.— На первый взглядъ кажется, что весьма трудно узнать, будетъ ли данный рядъ равномѣрно сходящимся въ нѣкоторомъ промежуткѣ. Слѣдующее предложеніе позволяетъ во многихъ случаяхъ утверждать, что рядъ будетъ равномѣрно сходящимся.

Пусть будетъ

$$u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (36)$$

рядъ, всѣ члены котораго суть функціи отъ x, непрерывныя въ промежуткѣ (a, b); съ другой стороны, пусть будетъ

$$M_0+M_1+\ldots+M_n+\ldots \qquad (37)$$

другой сходящійся рядъ, всѣ члены котораго суть постоянныя положительныя числа. Если для всѣхъ значеній x въ промежуткѣ (a, b) мы при всякомъ n имѣемъ $|u_n|<M_n$, то рядъ (36) — равномѣрно сходящійся въ этомъ промежуткѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что при всякомъ значеніи x, заключающемся между a и b, мы имѣемъ

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots|\leqq M_{n+1}+M_{n+2}+\ldots.$$

Возьмемъ n настолько большимъ, чтобы сумма членовъ ряда (37), начиная съ M_{n+1}, была меньше ε; тогда, при всякомъ значеніи x въ промежуткѣ (a, b), будемъ имѣть

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots|<\varepsilon.$$

Напримѣръ, рядъ

$$M_0+M_1\sin x+M_2\sin 2x+\ldots+M_n\sin nx+\ldots,$$

гдѣ M_0, M_1, M_2, ... суть члены сходящагося ряда (37), будетъ равномѣрно сходящимся во всякомъ промежуткѣ.

174. Интегрированіе и дифференцированіе рядовъ.—Всякій равномѣрно сходящійся рядъ можно интегрировать почленно.

Пусть будутъ x_0, x_1 значенія перемѣннаго x, заключающіяся между a и b, и пусть будетъ N такое цѣлое число, чтобы при всѣхъ значеніяхъ x въ промежуткѣ (a, b) было $|R_n(x)|<\varepsilon$, когда $n\geqq N$. Мы можемъ написать

$$f(x)=u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x)+R_n(x),$$

и, слѣдовательно,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} u_0(x)\,dx+\int_{x_0}^{x_1} u_1(x)\,dx+\ldots + \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)\,dx+\int_{x_0}^{x_1} R_n(x)\,dx.$$

Но при $n\geqq N$ абсолютное значеніе интеграла $\int_{x_0}^{x_1} R_n(x)\,dx$ меньше, чѣмъ $\varepsilon|x_1-x_0|$; слѣдовательно, мы можемъ взять число n настолько большимъ, чтобы послѣдній интегралъ былъ менѣе всякаго даннаго числа. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} u_0(x)\,dx+\int_{x_0}^{x_1} u_1(x)\,dx+\ldots+\int_{x_0}^{x_1} u_n(x)\,dx+\ldots.$$

Если, оставляя x_0 постояннымъ, мы будемъ разсматривать x_1, какъ перемѣнное, то получимъ рядъ

$$\int_{x_0}^{x} u_0(x)\,dx+\ldots+\int_{x_0}^{x} u_n(x)\,dx+\ldots,$$

сходящійся въ промежуткѣ (a, b) и представляющій въ этомъ промежуткѣ непрерывную функцію, производная которой равна $f(x)$.

Точно также, всякій сходящійся рядъ можно дифференцировать почленно, если только получающійся при этомъ рядъ будетъ равномѣрно сходящимся.

Пусть будетъ

$$f(x)=u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

рядъ, сходящійся въ промежуткѣ (a, b). Предположимъ, что рядъ, составленный изъ производныхъ отъ $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ будетъ равномѣрно сходящимся въ томъ же промежуткѣ, и обозначимъ черезъ $\varphi(x)$ сумму этого новаго ряда

$$\varphi(x)=\frac{du_0}{dx}+\frac{du_1}{dx}+\ldots+\frac{du_n}{dx}+\ldots.$$

Интегрируя почленно послѣднее равенство между предѣлами x_0 и x, содержащимися между a и b, получимъ

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = [u_0(x) - u_0(x_0)] + [u_1(x) - u_1(x_0)] + \ldots,$$

т.-е.

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = f(x) - f(x_0).$$

Это соотношеніе показываетъ, что $\varphi(x)$ есть производная отъ $f(x)$.

Примѣры. — 1. Интегралъ $\int \frac{e^x}{x}\,dx$ не можетъ быть выраженъ посредствомъ конечнаго числа элементарныхъ функцій. Представимъ его въ слѣдующемъ видѣ

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{e^x - 1}{x}\,dx = \log x + \int \frac{e^x - 1}{x}\,dx.$$

Для послѣдняго интеграла можно найти разложеніе, примѣнимое при всякомъ значеніи перемѣннаго x. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Какъ бы велико ни было R, послѣдній рядъ — равномѣрно сходящійся въ промежуткѣ отъ $-R$ до $+R$, такъ какъ абсолютныя значенія его членовъ меньше соотвѣтствующихъ членовъ сходящагося ряда

$$1 + \frac{R}{1.2} + \ldots + \frac{R^{n-1}}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Отсюда слѣдуетъ, что рядъ, полученный интегрированіемъ,

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{1}{n}\,\frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

— сходящійся при всякомъ x и представляетъ функцію, производная которой равна $\frac{e^x - 1}{x}$.

2. Периметръ эллипса, большая ось котораго равна $2a$, а эксцентриситетъ e, равенъ опредѣленному интегралу (§ 112)

$$S = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Такъ какъ произведеніе $e^2 \sin^2 \varphi$ заключается между 0 и $e^2 < 1$, то корень $\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$ равенъ суммѣ ряда, получающагося по формулѣ бинома

$$\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2.4}e^4\sin^4\varphi - \ldots - \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}e^{2n}\sin^{2n}\varphi - \ldots.$$

Рядъ въ правой части — равномѣрно сходящійся, такъ какъ по абсолютнымъ значеніямъ его члены меньше членовъ ряда, получающагося изъ даннаго ряда при $\sin\varphi = 1$. Слѣдовательно, мы можемъ интегрировать полученный рядъ почленно и, замѣчая, что (§ 116)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\pi}{2},$$

получимъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \ldots - \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 (2n-1)e^{2n} - \ldots\right\}.$$

Если эксцентрицитетъ e очень малъ, то достаточно взять въ правой части небольшое число членовъ, чтобы получить значеніе интеграла съ большимъ приближеніемъ.

Точно также можно разложить въ рядъ интегралъ

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

каковъ бы ни былъ верхній предѣлъ φ. Мы приведемъ здѣсь еще формулу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{9}{64}e^4 + \ldots + \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 e^{2n} + \ldots\right\},$$

дающую разложеніе Лежандрова интеграла перваго вида.

Опредѣленіе равномѣрной сходимости можно распространить на ряды, члены которыхъ суть функціи нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ, а также на ряды кратные. Пусть будетъ, напримѣръ,

$$u_0(x, y) + u_1(x, y) + \ldots + u_n(x, y) + \ldots$$

рядъ, члены котораго суть непрерывныя функціи двухъ перемѣнныхъ x, y, сходящійся, когда точка (x, y) остается внутри нѣкотораго контура C. Такой рядъ называется равномѣрно сходящимся внутри области C, если для всякаго положительнаго числа ε можно найти такое цѣлое число N, чтобы

абсолютное значеніе остатка R_n было меньше ε для всякой точки (x, y), лежащей внутри контура C, когда $n \geqq N$. Какъ и выше, можно доказать, что въ этой области сумма ряда есть непрерывная функція перемѣнныхъ x, y.

Теорема объ интегрированіи можетъ быть также обобщена. Если предыдущій рядъ — равномѣрно сходящійся внутри нѣкоторой области, ограниченной контуромъ C, и если $f(x, y)$ есть сумма этого ряда, то мы имѣемъ

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \iint u_0(x, y)\,dx\,dy + \iint u_1(x, y)\,dx\,dy + \ldots + \iint u_n(x, y)\,dx\,dy + \ldots,$$

гдѣ всѣ двойные интегралы распространены на площадь, заключающуюся внутри контура C.

Точно также, разсмотримъ двойной рядъ, всѣ элементы котораго суть функціи одного или нѣсколькихъ перемѣнныхъ, и который будетъ абсолютно сходящимся при всѣхъ значеніяхъ этихъ перемѣнныхъ, заключающихся въ нѣкоторой области D. Предположимъ, что всѣ элементы двойного ряда расположены въ прямоугольной таблицѣ (§ 169), и пусть будетъ R_c сумма элементовъ этого ряда, расположенныхъ внѣ нѣкоторой замкнутой кривой C, проведенной въ плоскости таблицы. Если для всякаго положительнаго числа ε можно провести, независимо отъ значенія перемѣнныхъ, такую замкнутую кривую K, чтобы было $|R_c| < \varepsilon$ для каждой кривой C, расположенной внѣ K, и притомъ для всѣхъ значеній перемѣнныхъ, заключающихся въ области D, то данный двойной рядъ называется равномѣрно сходящимся въ области D.

Очевидно, что предыдущія опредѣленія и теоремы легко распространяются на ряды любой кратности и съ любымъ числомъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Примѣчаніе. — Если рядъ не будетъ равномѣрно сходящимся, то его не всегда можно интегрировать почленно. Положимъ, напримѣръ

$$S_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad S_0(x) = 0, \quad u_n(x) = S_n - S_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Рядъ съ общимъ членомъ $u_n(x)$ — сходящійся, и его сумма равна нулю, такъ какъ, при неограниченномъ возрастаніи n, $S_n(x)$ стремится къ нулю. Слѣдовательно, мы можемъ написать

$$f(x) = 0 = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Но, съ другой стороны, если мы проинтегрируемъ дан-

ный рядъ почленно между предѣлами 0 и 1, то получимъ новый рядъ, сумма n первыхъ членовъ котораго равна

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = -\left[\frac{e^{-nx^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n});$$

при неограниченномъ возрастаніи n эта сумма имѣетъ предѣломъ $\frac{1}{2}$. Этотъ примѣръ принадлежитъ Осгуду.

175. Приложеніе къ дифференцированію подъ знакомъ интеграла. — Въ приведенномъ выше (§ 97) доказательствѣ формулы дифференцированія подъ знакомъ интеграла существенно предполагается, что предѣлы x_0 и X конечны. Если X безконечно, то мы не всегда имѣетъ право примѣнять эту формулу. Разсмотримъ, напримѣръ, интегралъ

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx.$$

Этотъ интегралъ не зависитъ отъ α, такъ какъ, сдѣлавъ замѣну перемѣннаго $\alpha x = y$ въ предположеніи $\alpha > 0$, мы приведемъ его къ виду

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Примѣняя къ интегралу $F(\alpha)$ обыкновенную формулу дифференцированія, мы придемъ къ равенству

$$F'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \cos \alpha x\,dx,$$

въ которомъ лѣвая часть равна нулю, тогда какъ правая часть не имѣетъ опредѣленнаго значенія.

Мы найдемъ достаточныя условія, при которыхъ обыкновенная формула дифференцированія примѣнима и въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ предѣловъ безконеченъ, связавъ этотъ вопросъ съ разсмотрѣніемъ безконечныхъ рядовъ. Разсмотримъ сначала интегралъ

$$\int_{a_0}^{+\infty} f(x)\,dx;$$

предположимъ, что онъ имѣетъ опредѣленное значеніе (§ 90). Пусть будетъ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ безконечная послѣдовательность чиселъ, бо́льшихъ a_0, и расположенныхъ въ возрастающемъ порядкѣ, причемъ a_n неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ n. Положимъ

$$U_0 = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx, \quad U_1 = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx, \ldots, \quad U_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx, \ldots.$$

Тогда рядъ

$$U_0+U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots$$

будетъ сходящимся, и его сумма равна $\int_{a_0}^{+\infty} f(x)\,dx$, такъ какъ сумма S_n его n первыхъ членовъ равна интегралу $\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx$.

Должно замѣтить, что обратное предложеніе не всегда вѣрно. Возьмемъ, напримѣръ,

$$f(x)=\cos x, \quad a_0=0, \quad a_1=\pi, \quad \ldots, \quad a_n=n\pi, \quad \ldots.$$

Мы имѣемъ

$$U_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\cos x\,dx=0;$$

слѣдовательно, въ этомъ случаѣ предыдущій рядъ — сходящійся, тогда какъ интегралъ не стремится ни къ какому предѣлу.

Пусть будетъ теперь $f(x, \alpha)$ функція двухъ перемѣнныхъ x и α непрерывная, когда x больше a_0, и когда α содержится въ нѣкоторомъ промежуткѣ (α_0, α_1). Если при всякомъ значеніи α интегралъ $\int_{a_0}^{l} f(x, \alpha)\,dx$ при неограниченномъ возрастаніи l стремится къ предѣлу, то этотъ предѣлъ есть функція отъ α

$$F(\alpha)=\int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx.$$

Какъ мы видѣли, эту функцію можно замѣнить суммою сходящагося ряда, всѣ члены котораго суть непрерывныя функціи отъ α,

$$F(\alpha)=U_0(\alpha)+U_1(\alpha)+\ldots+U_n(\alpha)+\ldots,$$

гдѣ

$$U_0(\alpha)=\int_{a_0}^{a_1} f(x, \alpha)\,dx, \quad U_1(\alpha)=\int_{a_1}^{a_2} f(x, \alpha)\,dx, \quad \ldots.$$

Эта функція $F(\alpha)$ непрерывна, если предыдущій рядъ — равномѣрно сходящійся. Распространяя опредѣленіе равномѣрной сходимости на опредѣленные интегралы, мы будемъ называть интегралъ $\int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$ равномѣрно сходящимся въ промежуткѣ (α_0, α_1), если для всякаго положительнаго числа ε

можно найти такое независящее отъ α число N, чтобы при всякомъ значеніи числа $l > N$ было $\left| \int_l^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon$, каково бы ни было значеніе α въ промежуткѣ (α_0, α_1). Если интегралъ — равномѣрно сходящійся, то предыдущій рядъ будетъ также равномѣрно сходящимся, такъ какъ, взявъ $\alpha_n > N$, мы будемъ имѣть

$$|R_n| = \left| \int_{\alpha_n}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Слѣдовательно, функція $F(\alpha)$ будетъ непрерывною въ промежуткѣ (α_0, α_1).

Предположимъ теперь, что при всякомъ значеніи α, содержащемся въ промежуткѣ (α_0, α_1), интегралъ $\int_{\alpha_0}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx$ имѣетъ конечное значеніе и что въ этомъ промежуткѣ онъ равномѣрно сходящійся. Этотъ интегралъ можно представить, какъ сумму ряда

$$\int_{\alpha_0}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx = V_0(\alpha) + V_1(\alpha) + \ldots + V_n(\alpha) + \ldots,$$

гдѣ

$$V_0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx, \quad \ldots, \quad V_n = \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx, \quad \ldots.$$

Этотъ новый рядъ — равномѣрно сходящійся, и его члены соотвѣтственно равны производнымъ отъ членовъ перваго ряда. Слѣдовательно, на основаніи теоремы о дифференцированіи рядовъ, мы имѣемъ

$$F'(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx,$$

т.-е. формула дифференцированія подъ знакомъ интеграла примѣнима и въ этомъ случаѣ, если только интегралъ въ правой части — равномѣрно сходящійся.

Формула интегрированія подъ знакомъ интеграла (§ 123) также можетъ быть распространена на случай, когда предѣлы интеграла обращаются въ безконечность. Пусть будетъ $f(x, \alpha)$ функція двухъ перемѣнныхъ x и α, непрерывная при $x \geqq \alpha_0$, $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$. Если интегралъ $\int_{\alpha_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$ — равномѣрно сходящійся въ промежуткѣ (α_0, α_1), то мы имѣемъ

$$\int_{\alpha_0}^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_{\alpha_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx. \qquad (A)$$

Чтобы доказать формулу (A), возьмемъ какое-нибудь число $l > a_0$. Мы имѣемъ

$$\int_{a_0}^{l} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_{a_0}^{l} f(x, \alpha)\, dx. \qquad (B)$$

При неограниченномъ возрастаніи l двойной интегралъ въ правой части равенства (B) стремится къ двойному интегралу

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx,$$

и разность между этими двойными интегралами равна

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_{l}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx.$$

Выберемъ число N настолько большимъ, чтобы при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго α въ промежуткѣ (α_0, α_1) абсолютное значеніе интеграла $\int_{l}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$ было меньше ε, когда l больше N.

При этомъ абсолютное значеніе предыдущей разности будетъ меньше $\varepsilon\,|\,\alpha_1 - \alpha_0\,|$, и, слѣдовательно, при неограниченномъ возрастаніи l эта разность можетъ быть сдѣлана сколь угодно близкою къ нулю. Отсюда слѣдуетъ, что при неограниченномъ возрастаніи l лѣвая часть равенства (B) также стремится къ предѣлу; этотъ предѣлъ представится символомъ

$$\int_{a_0}^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Такимъ образомъ формула (A) доказана*).

---

*) Изъ формулы (A) легко вывести формулу дифференцированія подъ знакомъ интеграла. Предположимъ, что двѣ функціи $f(x, \alpha)$ и $f'_{\alpha}(x, \alpha)$ непрерывны при $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$, $x \geqq a_0$, что интегралы $F(\alpha) = \int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$ и $\Phi(\alpha) = \int_{a_0}^{+\infty} f'_{\alpha}(x, \alpha)\, dx$ имѣютъ конечныя значенія, и что послѣдній интегралъ — равномѣрно сходящійся въ промежуткѣ (α_0, α_1). Если α заключается въ промежуткѣ (α_0, α_1), то по формулѣ (A) имѣемъ

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} du \int_{a_0}^{+\infty} f'_{u}(x, u)\, dx = \int_{a_0}^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f'_{u}(x, u)\, du,$$

причемъ подъ знакомъ интеграла, для ясности, буква α замѣнена черезъ u. Это равенство можно еще представить въ видѣ

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Phi(u)\, du = \int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx - \int_{a_0}^{+\infty} f(x, \alpha_0)\, dx = F(\alpha) - F(\alpha_0);$$

отсюда, дифференцируя по α, получимъ

$$F'(\alpha) = \Phi(\alpha).$$

176. Примѣры. — 1. Возьмемъ интегралъ (§ 91)

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

гдѣ α — положительно. Интегралъ, получающійся отъ дифференцированія предыдущаго интеграла по α,

$$-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx,$$

— равномѣрно сходящійся при всѣхъ значеніяхъ α, большихъ любого положительнаго числа k. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\left|\int_l^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx\right| < \int_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha l}.$$

Для того чтобы абсолютное значеніе лѣваго интеграла при α, большемъ k, было меньше ε, достаточно взять число l настолько большимъ, чтобы было $ke^{kl} > \frac{1}{\varepsilon}$. Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$F'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx.$$

Соотвѣтствующій неопредѣленный интегралъ былъ уже найденъ ранѣе (§ 119), и мы имѣемъ

$$F'(\alpha) = \left[\frac{e^{-\alpha x}(\cos x + \alpha \sin x)}{1+\alpha^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{1+\alpha^2};$$

отсюда

$$F(\alpha) = C - \operatorname{arc\,tg} \alpha.$$

Чтобы опредѣлить постоянное C, замѣтимъ, что при неограниченномъ возрастаніи α опредѣленный интегралъ $F(\alpha)$ стремится къ нулю. Отсюда находимъ $C = \frac{\pi}{2}$. Такимъ образомъ, имѣемъ окончательно

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\, dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\alpha}. \tag{38}$$

Эта формула выведена нами только для положительныхъ значеній количества α, но выше мы видѣли (§ 91), что лѣвая часть есть сумма знакоперемѣннаго ряда, остатокъ котораго R_n меньше $\frac{1}{n}$. Слѣдовательно, этотъ рядъ — равномѣрно сходящійся, и нашъ интегралъ есть непрерывная функція отъ α, даже при $\alpha = 0$. При приближеніи α къ нулю, мы въ предѣлѣ получимъ

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{39}$$

2. Полагая въ формулѣ § 134

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$x = y\sqrt{\alpha}$, гдѣ α — положительно, получимъ

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-\frac{1}{2}}. \tag{40}$$

Легко убѣдиться, что если α остается большимъ какого либо опредѣленнаго числа $k>0$, то всѣ интегралы, получающіеся изъ интеграла (40) дифференцированіемъ по параметру α, будутъ равномѣрно сходящимися. Поэтому изъ предыдущей формулы получаются значенія цѣлаго ряда интегралов

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2}\,\alpha^{-\frac{3}{2}},\\
&\int_0^{+\infty} y^4 e^{-\alpha y^2}\,dy = \frac{1\cdot 3}{2^3}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{5}{2}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\int_0^{+\infty} y^{2n} e^{-\alpha y^2}\,dy = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{2n+1}{2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Соединяя между собою эти формулы, мы можемъ получить изъ нихъ много другихъ. Такъ, напримѣръ, мы имѣемъ

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\,dy\left[1-\frac{(2\beta y)^2}{1.2}+\ldots+(-1)^n\frac{(2\beta y)^{2n}}{1.2\ldots 2n}+\ldots\right]$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}dy - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\frac{(2\beta y)^2}{1.2}\,dy+\ldots$$
$$+(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\frac{(2\beta y)^{2n}}{1.2\ldots 2n}\,dy+\ldots.$$

Всѣ интегралы, стоящіе въ правой части, намъ извѣстны, и мы получимъ

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}-\frac{(2\beta)^2}{1.2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\alpha^{-\frac{3}{2}}}{2}+\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{(2\beta)^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1\cdot 3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\alpha^{-\frac{2n+1}{2}}+\ldots,$$

или, по упрощеніи,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\cos 2\beta y\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}}. \qquad (42)$$

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Вывести формулу

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}[x^n(\log x)^n] = 1+S_1\log x+\frac{S_2}{1.2}(\log x)^2+\ldots$$
$$+\frac{S_n}{1.2\ldots n}(\log x)^n,$$

гдѣ S_p есть сумма всевозможныхъ произведеній, составленныхъ изъ n первыхъ чиселъ, взятыхъ по p.

[Мерфи, (Murphy).]

[Для доказательства нужно продифференцировать n разъ по x формулу

$$x^{n+\alpha} = x^n\left(1+\alpha\log x+\frac{\alpha^2(\log x)^2}{1.2}+\ldots+\frac{\alpha^n(\log x)^n}{1.2\ldots n}+\ldots\right)\Big].$$

2. Примѣняя дифференцированіе подъ знакомъ интеграла, вычислить опредѣленный интегралъ

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx.$$

3. Вывести формулу

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

[Показать, что $\frac{dI}{da}=-2I.$]

4. Вывести изъ предыдущей формулы значеніе опредѣленнаго интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha-\frac{k^2}{\alpha}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\pi}e^{-2k}.$$

5. Вывести изъ соотношенія $\frac{1}{a^3}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax}\,dx$ формулу

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{e^x-1}.$$

ГЛАВА IX.

Цѣлые ряды. — Тригонометрическіе ряды.

Въ этой главѣ мы займемся изученіемъ рядовъ, принадлежащихъ къ двумъ особенно замѣчательнымъ классамъ, — рядовъ цѣлыхъ и рядовъ тригонометрическихъ. Хотя мы здѣсь разсматриваемъ только дѣйствительныя перемѣнныя, тѣмъ не менѣе разсужденія, которыми мы будемъ пользоваться при изученіи цѣлыхъ рядовъ, непосредственно распространяются и на случай мнимыхъ перемѣнныхъ, если только мы будемъ всюду замѣнять слова абсолютное значеніе словомъ модуль.

I. — ЦѢЛЫЕ РЯДЫ СЪ ОДНИМЪ ПЕРЕМѢННЫМЪ.

177. Область сходимости. — Разсмотримъ рядъ

$$A_0+A_1X+A_2X^2+\ldots+A_nX^n+\ldots. \qquad (1)$$

Предположимъ сначала, что всѣ коэффиціенты A_0, A_1, A_2, ... положительны, и что независимое перемѣнное X можетъ принимать только положительныя значенія. Очевидно, что всѣ члены этого ряда возрастаютъ вмѣстѣ съ X, и, если данный рядъ будетъ сходящимся при какомъ-нибудь частномъ значеніи перемѣннаго $X=X_1$, то онъ тѣмъ болѣе будетъ сходящимся при всякомъ значеніи перемѣннаго X, меньшемъ X_1. Точно также, если при данномъ значеніи X_2 рядъ (1) будетъ расходящимся, то онъ навѣрное будетъ расходящимся при всякомъ значеніи перемѣннаго X, большемъ X_2.

По отношенію къ ряду (1) можетъ представиться нѣсколько случаевъ.

1. Рядъ (1) можетъ быть сходящимся при всякомъ значеніи перемѣннаго X; таковъ, напримѣръ, рядъ

$$1+\frac{X}{1}+\frac{X^2}{1.2}+\ldots+\frac{X^n}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

2. Рядъ (1) можетъ быть расходящимся при всѣхъ значеніяхъ X, кромѣ $X=0$; таковъ, напримѣръ, рядъ

$$1+X+1\cdot 2X^2+\ldots+1\cdot 2\cdot 3\ldots nX^n+\ldots.$$

3. Предположимъ, наконецъ, что данный рядъ будетъ сходящимся или расходящимся въ зависимости отъ значенія перемѣннаго X. Пусть будетъ X_1 одно изъ значеній перемѣннаго X, дѣлающихъ данный рядъ сходящимся, и X_2 — одно изъ значеній перемѣннаго X, дѣлающихъ рядъ расходящимся. На основаніи предыдущаго будемъ имѣть $X_1<X_2$, и рядъ будетъ сходящимся при $X<X_1$ и расходящимся при $X>X_2$. Сомнѣніе остается только для значеній перемѣннаго X, заключающихся между X_1 и X_2. Но всѣ значенія перемѣннаго X, дѣлающія рядъ сходящимся, меньше X_2; слѣдовательно, они имѣютъ нѣкоторый верхній предѣлъ R. Такъ какъ всѣ значенія перемѣннаго X, при которыхъ рядъ будетъ расходящимся, больше каждаго изъ тѣхъ значеній перемѣннаго X, при которыхъ рядъ будетъ сходящимся, то это число R будетъ также нижнимъ предѣломъ значеній перемѣннаго X, дѣлающихъ рядъ расходящимся. Слѣдовательно, рядъ будетъ сходящимся при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ перемѣннаго X, меньшихъ R, и расходящимся — при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго X, большихъ R. При $X=R$ рядъ можетъ быть или сходящимся или расходящимся.

Такъ, напримѣръ, рядъ

$$1+X+X^2+\ldots+X^n+\ldots$$

будетъ сходящимся при $X<1$, и расходящимся при $X\geqq 1$; отсюда $R=1$.

Замѣтимъ, что послѣдній разсмотрѣнный нами случай заключаетъ въ себѣ оба первыхъ случая, какъ случаи предѣльные: полагая R безконечно большимъ, мы получимъ первый случай, а полагая $R=0$ — второй.

Разсмотримъ теперь цѣлый рядъ, т.-е. рядъ вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \qquad (2)$$

въ которомъ коэффиціенты a_i и перемѣнное x могутъ имѣть любые знаки. Въ послѣдующемъ мы будемъ полагать $|a_i|=A_i$, $|x|=X$, такъ что рядъ (1) будетъ состоять изъ абсолютныхъ значеній членовъ ряда (2). Пусть будетъ R число, опредѣленное выше для ряда (1). Изъ самаго опредѣленія числа R очевидно, что рядъ (2) будетъ абсолютно сходящимся при всякомъ значеніи перемѣннаго x, содержащемся между $-R$ и $+R$. Остается

показать, что рядъ (2) будетъ расходящимся, если абсолютное значеніе перемѣннаго x будетъ больше R. Это вытекаетъ изъ слѣдующаго основного предложенія Абеля*):

Если при нѣкоторомъ частномъ значеніи x_0 рядъ (2) будетъ сходящимся, то онъ будетъ абсолютно сходящимся при всякомъ значеніи перемѣннаго x, меньшемъ $|x_0|$ по абсолютному значенію.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что рядъ (2) будетъ сходящимся при $x=x_0$, и пусть будетъ M положительное число, большее абсолютнаго значенія любого изъ членовъ этого ряда при значеніи перемѣннаго $x=x_0$; тогда при всякомъ значеніи числа n мы будемъ имѣть

$$A_n|x_0|^n<M.$$

Но очевидно, что

$$A_n X^n=A_n|x_0|^n\left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n<M\left(\frac{X}{|x_0|}\right)^n.$$

Слѣдовательно, рядъ (1) будетъ сходящимся, если $X<|x_0|$; такимъ образомъ, предложеніе доказано. Изъ теоремы Абеля слѣдуетъ, что если при $x=x_0$ рядъ (2) будетъ сходящимся, то рядъ (1), состоящій изъ абсолютныхъ значеній членовъ ряда (2), будетъ также сходящимся всякій разъ, какъ X будетъ меньше $|x_0|$. Поэтому не можетъ быть $|x_0|>R$, такъ какъ въ этомъ случаѣ число R не было бы верхнимъ предѣломъ значеній X, дѣлающихъ рядъ (1) сходящимся.

Такимъ образомъ, если данъ цѣлый рядъ (2), коэффиціенты котораго имѣютъ произвольные знаки, то существуетъ опредѣленное положительное число R, обладающее слѣдующимъ свойствомъ: рядъ (2) будетъ абсолютно сходящимся при всякомъ значеніи перемѣннаго x, заключающемся между $-R$ и $+R$, и расходящимся при всякомъ значеніи перемѣннаго x, большемъ R по абсолютному значенію. Промежутокъ $(-R,+R)$ называется областью сходимости ряда. Въ предѣльномъ случаѣ, когда $R=\infty$, область сходимости простирается отъ $-\infty$ до $+\infty$; если же $R=0$, то она обращается только въ одно начало координатъ. Этого послѣдняго случая мы въ дальнѣйшемъ разсматривать не будемъ.

Приведенное доказательство не даетъ никакихъ указаній относительно характера ряда при предѣльныхъ значе-

*) Recherche sur la série $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots$.

ніяхъ $x=R$, $x=-R$; при этихъ значеніяхъ рядъ (2) можетъ быть абсолютно сходящимся, просто сходящимся или расходящимся.

Разсмотримъ, напримѣръ, три ряда

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,$$

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

$$1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots.$$

Такъ какъ въ каждомъ изъ этихъ трехъ рядовъ отношеніе любого члена къ предыдущему равно x, то для нихъ $R=1$. Первый рядъ будетъ расходящимся при $x=\pm 1$, второй рядъ будетъ расходящимся при $x=1$ и сходящимся при $x=-1$; третій рядъ будетъ абсолютно сходящимся при $x=\pm 1$.

Примѣчаніе. — Теоремѣ Абеля можно дать болѣе общее выраженіе. Въ самомъ дѣлѣ, для ея доказательства нѣтъ необходимости предполагать, что рядъ (2) будетъ сходящимся при значеніи x_0; достаточно только предположить, что абсолютное значеніе любого члена ряда

$$a_0+a_1x_0+\ldots+a_nx_0^n+\ldots$$

остается меньшимъ нѣкотораго опредѣленнаго числа. Если это условіе удовлетворяется, то при всякомъ значеніи перемѣннаго x, абсолютное значеніе котораго меньше $|x_0|$, рядъ (2) будетъ абсолютно сходящимся.

Число R связано весьма простымъ соотношеніемъ съ числомъ ω (§ 160), представляющимъ наибольшій изъ предѣловъ членовъ послѣдовательности

$$A_1,\ \sqrt{A_2},\ \sqrt[3]{A_3},\ \ldots,\ \sqrt[n]{A_n},\ \ldots.$$

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ аналогичную послѣдовательность

$$A_1X,\ \sqrt{A_2X^2},\ \ldots,\ \sqrt[n]{A_nX^n},\ \ldots;$$

очевидно, что наибольшій изъ предѣловъ членовъ этой второй послѣдовательности будетъ ωX. Слѣдовательно, рядъ (1) будетъ сходящимся, если $X<\frac{1}{\omega}$, и расходящимся, если $X>\frac{1}{\omega}$. Такимъ образомъ $R=\frac{1}{\omega}$ *).

*) Эта теорема была доказана Коши въ его Cours d'Analyse. Адамаръ (Hadamard) получилъ ее вновь въ своей диссертаціи.

178. Цѣлый рядъ, какъ непрерывная функція перемѣннаго. — Обозначимъ черезъ $f(x)$ сумму цѣлаго ряда, сходящагося въ промежуткѣ отъ $-R$ до $+R$,

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots; \qquad (3)$$

пусть будетъ R' нѣкоторое положительное число, меньшее R. Докажемъ сначала, что рядъ (3) будетъ равномѣрно сходящимся въ промежуткѣ $(-R', +R')$. Въ самомъ дѣлѣ, при значеніи перемѣннаго x, меньшемъ R' по абсолютному значенію, остатокъ R_n

$$R_n=a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_{n+p}x^{n+p}+\ldots$$

по абсолютному значенію меньше соотвѣтствующаго остатка ряда (1)

$$A_{n+1}R'^{n+1}+A_{n+2}R'^{n+2}+\ldots.$$

Но такъ какъ $R'<R$, то рядъ (1) будетъ сходящимся при $X=R'$; слѣдовательно, можно взять настолько большое положительное число n, чтобы предыдущій остатокъ былъ меньше любого заданнаго положительнаго числа ε. Поэтому мы будемъ имѣть $|R_n|<\varepsilon$ всякій разъ, какъ $|x|<R'$.

Отсюда слѣдуетъ, что *при всякомъ значеніи перемѣннаго x, заключающемся между $-R$ и $+R$, сумма $f(x)$ ряда есть непрерывная функція отъ x.* Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что если дано какое-нибудь число x_0, меньшее R по абсолютному значенію, то можно найти другое положительное число R', которое было бы меньше числа R и большее $|x_0|$. По предыдущему, данный рядъ будетъ равномѣрно сходящимся въ промежуткѣ отъ $-R'$ до $+R'$; слѣдовательно, его сумма $f(x)$ будетъ непрерывною функціею перемѣннаго при значеніи x_0, принадлежащемъ этому промежутку (§ 173).

Это доказательство не примѣнимо къ предѣламъ области сходимости $+R$ и $-R$. Тѣмъ не менѣе, непрерывность ряда сохраняется и при этихъ предѣльныхъ значеніяхъ всякій разъ, когда рядъ остается при этихъ значеніяхъ сходящимся. Именно, Абель доказалъ, что *если при $x=R$ рядъ (3) остается сходящимся, то сумма ряда (3) при $x=R$ равна предѣлу, къ которому стремится сумма $f(x)$ этого ряда, когда x стремится къ R, оставаясь меньшимъ R.*

Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ S сумму сходящагося ряда

$$S=a_0+a_1R+a_2R^2+\ldots+a_nR^n+\ldots;$$

пусть будетъ n такое цѣлое число, чтобы абсолютное значеніе каждой изъ суммъ

$$a_{n+1}R^{n+1},\ a_{n+1}R^{n+1}+a_{n+2}R^{n+2},\ \ldots,$$
$$a_{n+1}R^{n+1}+\ldots+a_{n+p}R^{n+p},\ \ldots$$

было меньше нѣкотораго заранѣе даннаго положительнаго числа ε. Положимъ $x=\theta R$; когда θ возрастаетъ отъ 0 до 1, x возрастаетъ отъ 0 до R, и мы будемъ имѣть

$$f(x)=f(\theta R)=a_0+a_1\theta R+a_2\theta^2R^2+\ldots+a_n\theta^nR^n+\ldots.$$

Далѣе, мы можемъ написать

$$\left.\begin{aligned} S-f(x)=a_1R(1-\theta)+a_2R^2(1-\theta^2)+\ldots+a_nR^n(1-\theta^n)\\ +a_{n+1}R^{n+1}+\ldots+a_{n+p}R^{n+p}+\ldots\\ -a_{n+1}\theta^{n+1}R^{n+1}-\ldots-a_{n+p}\theta^{n+p}R^{n+p}-\ldots. \end{aligned}\right\}(4)$$

По свойству числа n, сумма ряда во второй строкѣ правой части меньше ε по абсолютному значенію. Далѣе, числа $\theta^{n+1}, \theta^{n+2}, \ldots, \theta^{n+p}$ образуютъ убывающую послѣдовательность; слѣдовательно, на основаніи леммы Абеля (§ 75), имѣемъ

$$|a_{n+1}\theta^{n+1}R^{n+1}+\ldots+a_{n+p}\theta^{n+p}R^{n+p}|<\theta^{n+1}\varepsilon<\varepsilon.$$

Такимъ образомъ, сумма ряда, стоящаго въ третьей строкѣ правой части, также меньше ε по абсолютному значенію. Наконецъ, первая строка формулы (4) представляетъ многочленъ n-ой степени по θ, обращающійся въ нуль при $\theta=1$. Слѣдовательно, можно найти такое положительное число η, чтобы при всякомъ θ, заключающемся между $1-\eta$ и 1, абсолютное значеніе этого многочлена было меньше ε. Такимъ образомъ, при всѣхъ этихъ значеніяхъ θ мы имѣемъ

$$|S-f(x)|<3\varepsilon.$$

Но ε есть произвольно малое положительное число; слѣдовательно, если x стремится къ R, то $f(x)$ имѣетъ предѣломъ S.

Такимъ же образомъ можно доказать, что если рядъ (3) будетъ сходящимся при $x=-R$, то сумма этого ряда при $x=-R$ есть предѣлъ, къ которому стремится сумма $f(x)$, когда x стремится къ $-R$. Чтобы привести этотъ случай къ предыдущему, нужно только замѣнить x черезъ $-x$.

Примѣчаніе. — Это предложеніе позволяетъ пополнить доказанную выше (§ 168) теорему объ умноженіи рядовъ.

Пусть будутъ

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{5}$$
$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{6}$$

два ряда, — сходящіеся, но не абсолютно, а только условно. Рядъ, составленный по правилу умноженія рядовъ,

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots + (u_0 v_n + \ldots + u_n v_0) + \ldots \tag{7}$$

можетъ быть сходящимся или расходящимся; но если онъ сходящійся, то его сумма Σ равна произведенію суммъ двухъ первыхъ рядовъ, $\Sigma = SS'$. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ три цѣлыхъ ряда

$$f(x) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x^n + \ldots,$$
$$\varphi(x) = v_0 + v_1 x + \ldots + v_n x^n + \ldots,$$
$$\psi(x) = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) x + \ldots + (u_0 v_n + \ldots + u_n v_0) x^n + \ldots.$$

По предположенію, при $x = 1$ эти ряды будутъ сходящимися; слѣдовательно, при x, заключающемся между -1 и $+1$, эти ряды будутъ абсолютно сходящимися, и къ нимъ будетъ примѣнима теорема Коши объ умноженіи рядовъ; такимъ образомъ, получаемъ соотношеніе

$$f(x)\,\varphi(x) = \psi(x). \tag{8}$$

По теоремѣ Абеля, если x стремится къ единицѣ, то $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ стремятся соотвѣтственно къ S, S', Σ, и такъ какъ обѣ части формулы (8) остаются все время равными между собою, то въ предѣлѣ имѣемъ $\Sigma = SS'$.

Эта теорема остается вѣрною и для рядовъ съ мнимыми членами и можетъ быть доказана такимъ же образомъ.

179. Производныя отъ цѣлаго ряда. — Дифференцируя почленно цѣлый рядъ

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

сходящійся въ промежуткѣ $(-R, +R)$, мы получимъ новый цѣлый рядъ

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n+1} + \ldots, \tag{9}$$

сходящійся въ томъ же промежуткѣ. Чтобы доказать это, достаточно показать, что рядъ, составленный изъ абсолютныхъ значеній членовъ ряда (9),

$$A_1 + 2A_2 X + \ldots + n A_n X^n + \ldots$$

будетъ сходящимся, если $X < R$, и расходящимся, если $X > R$.

Чтобы доказать первую часть предложенія, предположимъ, что $X < R$, и пусть будетъ R' число, заключающееся между X и R, $X < R' < R$. Разсмотримъ вспомогательный рядъ

$$\frac{1}{R'} + \frac{2}{R'}\frac{X}{R'} + \frac{3}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^2 + \ldots + \frac{n}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^n + \ldots,$$

который будетъ сходящимся, такъ какъ отношеніе каждаго члена къ предыдущему имѣетъ предѣломъ число $\frac{X'}{R}$, меньшее единицы. Умножая члены этого ряда соотвѣтственно на множители

$$A_1 R', \; A_2 R'^2, \; \ldots, \; A_n R'^n, \; \ldots,$$

которые всѣ меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа, такъ какъ $R'<R$, мы получимъ новый рядъ

$$A_1+2A_2 X+\ldots+n A_n X^n+\ldots,$$

который, очевидно, будетъ также сходящимся.

Вторая часть предложенія доказывается такимъ же образомъ. Если бы рядъ

$$A_1+2A_2 X_1+\ldots+n A_n X_1^{n-1}+\ldots,$$

гдѣ $X_1>R$, былъ сходящимся, то былъ бы также сходящимся и рядъ

$$A_1 X_1+2A_2 X_1^2+\ldots+n A_n X_1^n+\ldots,$$

а, слѣдовательно, былъ бы сходящимся и рядъ $\sum_1^{+\infty} A_n X_1^n$, всѣ члены котораго меньше членовъ предыдущаго ряда; но тогда число R не было бы верхнимъ предѣломъ значеній X, дѣлающихъ рядъ (1) сходящимся.

Сумма $f_1(x)$ цѣлаго ряда (9) есть непрерывная функція перемѣннаго x въ промежуткѣ $(-R, \; +R)$. Такъ какъ рядъ $f_1(x)$ — равномѣрно сходящійся во всемъ промежуткѣ $(-R', \; +R')$, гдѣ $R'<R$, то въ этомъ промежуткѣ рядъ $f_1(x)$ представляетъ производную отъ $f(x)$ (§ 174). Но число R' можетъ быть взято сколь угодно близкимъ къ числу R; отсюда слѣдуетъ, что при всякомъ значеніи x, содержащемся между $-R$ и $+R$, функція $f(x)$ имѣетъ производную, и эта производная представляется рядомъ $f'(x)$, члены котораго суть производныя отъ членовъ даннаго ряда $f(x)$,

$$f'(x)=a_1+2a_2 x+\ldots+na_n x^{n-1}+\ldots. \qquad (10)$$

Примѣняя тѣ же разсужденія къ цѣлому ряду (10), мы видимъ, что рядъ $f(x)$ имѣетъ вторую производную

$$f''(x)=2a_2+6a_3 x+\ldots+n(n-1)a_n x^{n-2}+\ldots,$$

и т. д. Такимъ образомъ, въ промежуткѣ $(-R, \; +R)$ функція $f(x)$ имѣетъ безконечное множество производныхъ, и всѣ эти про-

изводныя представляются рядами, получающимися отъ почленнаго дифференцированія ряда (3),

$$f^{(n)}(x)=1.2\ldots n a_n+2.3\ldots n(n+1)a_{n+1}x+\ldots. \quad (11)$$

Полагая въ этихъ формулахъ $x=0$, получимъ

$$a_0=f(0),\quad a_1=f'(0),\quad a_2=\frac{f''(0)}{2},\ \ldots,$$

и, вообще,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n},$$

такъ что разложеніе $f(x)$ тождественно съ разложеніемъ по формулѣ Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0)+\ldots.$$

Такъ какъ коэффиціенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ отличаются отъ значеній функціи $f(x)$ и ея производныхъ при $x=0$ лишь числовыми множителями, то ясно, что функція не можетъ имѣть двухъ различныхъ разложеній въ цѣлый рядъ.

Точно также, интегрируя почленно цѣлый рядъ, мы получимъ новый цѣлый рядъ съ произвольнымъ постояннымъ членомъ. Этотъ рядъ имѣетъ ту же область сходимости, какъ и данный рядъ, и имѣетъ этотъ послѣдній рядъ своею производною. Интегрируя второй рядъ, мы получимъ третій рядъ, два первыхъ коэффиціента котораго произвольны, и т. д..

Примѣры. — 1. Геометрическая прогрессія съ знаменателемъ $-x$

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

— сходящаяся при всякомъ значеніи x, заключающемся между -1 и $+1$, и ея сумма равна $\frac{1}{1+x}$. Интегрируя ее почленно между предѣлами 0 и x, гдѣ $|x|<1$, мы получаемъ уже извѣстное (§ 49) разложеніе $\log(1+x)$

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots.$$

Эта формула вѣрна и при $x=1$, такъ при этомъ значеніи x рядъ, стоящій въ правой части, остается сходящимся.

2. При всякомъ значеніи x, заключающемся между -1 и $+1$, имѣемъ

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots.$$

Интегрируя почленно это равенство между предѣлами 0 и x, гдѣ $|x|<1$, получимъ

$$\operatorname{arc\,tg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots.$$

Такъ какъ при $x=1$ рядъ, стоящій въ правой части, остается сходящимся, то отсюда имѣемъ

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots.$$

3. Пусть будетъ $F(x)$ сумма сходящагося ряда

$$F(x)=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}x^p+\ldots,$$

гдѣ m — какое-угодно число, и $|x|<1$. Дифференцируя, получаемъ

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\ldots+\frac{(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\cdot 2\ldots(p-1)}x^{p-1}+\ldots\right].$$

Умножимъ обѣ части этого равенства на $(1+x)$ и соберемъ члены, содержащіе одинаковыя степени перемѣннаго x. Пользуясь тожествомъ

$$\frac{(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\cdot 2\ldots(p-1)}+\frac{(m-1)\ldots(m-p)}{1\cdot 2\ldots p}=\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\cdot 2\ldots p},$$

которое легко провѣрить, мы получимъ формулу

$$(1+x)F'(x)=m\left[1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}x^p+\ldots\right],$$

или

$$(1+x)F'(x)=mF(x).$$

Отсюда послѣдовательно находимъ

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{m}{1+x},$$

$$\log[F(x)]=m\log(1+x)+\log C,$$

т.-е.

$$F(x)=C(1+x)^m.$$

Для опредѣленія постояннаго C достаточно замѣтить, что $F(0)=1$; отсюда имѣемъ $C=1$, и мы приходимъ къ разложенію $(1+x)^m$, уже найденному въ § 50,

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}x^p+\ldots.$$

4. Замѣняя въ предыдущей формулѣ x черезъ $-x^2$, m — черезъ $-\frac{1}{2}$, получимъ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}x^{2n}+\ldots.$$

Эта формула вѣрна при всякомъ значеніи x, заключающемся между -1 и $+1$. Интегрируя обѣ части между предѣлами 0 и x, гдѣ $|x|<1$, мы получимъ разложеніе $\arcsin x$

$$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots.$$

180. Распространеніе формулы Тэлора. — Пусть будетъ $f(x)$ сумма цѣлаго ряда, сходящагося въ промежуткѣ $(-R,+R)$, x_0 — точка, заключающаяся въ этомъ промежуткѣ, и (x_0+h) — другая точка въ томъ же самомъ промежуткѣ, при условіи $|x_0|+|h|<R$. Рядъ

$$a_0+a_1(x_0+h)+a_2(x_0+h)^2+\ldots+a_n(x_0+h)^n+\ldots,$$

имѣющій сумму $f(x_0+h)$, можетъ быть замѣненъ двойнымъ рядомъ, который получится изъ предыдущаго, если мы разложимъ различныя степени отъ (x_0+h) и будемъ располагать въ одной и той же строкѣ одинаковыя степени h,

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2 \quad +\ldots+a_nx_0^n+\ldots \\ \quad +a_1h \ +2a_2x_0h+\ldots+na_nx_0^{n-1}h+\ldots \\ \qquad +a_2h^2 \quad +\ldots+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_nx_0^{n-2}h^2+\ldots \\ \qquad\qquad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (12)$$

Этотъ двойной рядъ будетъ абсолютно сходящимся. Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя каждый членъ этого ряда его абсолютнымъ значеніемъ, мы получимъ новый двойной рядъ съ положительными членами

$$\left.\begin{array}{l} A_0+A_1|x_0|+A_2|x_0|^2 \quad +\ldots+A_n|x_0|^n+\ldots \\ \quad +A_1|h| \ +2A_2|x_0||h|+\ldots+nA_n|x_0|^{n-1}|h|+\ldots \\ \qquad +A_2|h|^2 \quad +\ldots+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}A_n|x_0|^{n-2}|h|^2+\ldots \\ \qquad\qquad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (13)$$

Составляя сумму элементовъ этой таблицы по вертикальнымъ столбцамъ, мы получимъ рядъ

$$A_0+A_1[|x_0|+|h|]+\ldots+A_n[|x_0|+|h|]^n+\ldots,$$

который будетъ сходящимся, такъ какъ, по предположенію, $|x_0|+|h|<R$.

Такъ какъ двойной рядъ (12) — абсолютно сходящійся, то мы можемъ суммировать элементы таблицы (12) или по строкамъ или по столбцамъ. Суммируя по столбцамъ, мы получимъ $f(x_0+h)$. Вычисляя ту же сумму по строкамъ, мы получимъ рядъ, расположенный по степенямъ h, въ которомъ коэффиціентами при h, h^2, ... будутъ соотвѣтственно $f'(x_0)$, $\frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}$, ... Такимъ образомъ, предполагая $|h|<R-|x_0|$, имѣемъ

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+\ldots. \quad (14)$$

Формула (14) навѣрное примѣнима въ промежуткѣ отъ $x_0-R+|x_0|$ до $x_0+R-|x_0|$, но рядъ, стоящій въ правой части, иногда можетъ быть сходящимся и въ болѣе широкихъ предѣлахъ. Разсмотримъ, напримѣръ, функцію $(1+x)^m$, гдѣ m не есть цѣлое положительное число. Разложеніе этой функціи по степенямъ x возможно въ промежуткѣ отъ $x=-1$ до $x=+1$. Пусть будетъ x_0 значеніе перемѣннаго x, заключающееся въ этомъ промежуткѣ. Мы можемъ написать

$$(1+x)^m=(1+x_0+x-x_0)^m=(1+x_0)^m[1+z]^m,$$

гдѣ

$$z=\frac{x-x_0}{1+x_0}.$$

Если $|z|<1$, т.-е. если значенія перемѣннаго x заключаются въ промежуткѣ отъ -1 до $1+2x_0$, то функція $[1+z]^m$ можетъ быть разложена по степенямъ z*). Такимъ образомъ, если x_0 положительно, то новый промежутокъ будетъ шире прежняго $(-1,+1)$ и, слѣдовательно, новая формула дастъ возможность вычислять значеніе функціи для значеній перемѣннаго, лежащихъ внѣ первоначальнаго промежутка. Развивая это замѣчаніе, мы придемъ къ чрезвычайно важному понятію объ аналитическомъ продолженіи, разсмотрѣніе котораго мы отлагаемъ до слѣдующаго тома.

Примѣчаніе. — Очевидно, что теоремы, доказанныя здѣсь для рядовъ, расположенныхъ по степенямъ перемѣннаго x, легко могутъ быть распространены на ряды, расположенные

*) Полагая $x=x_0+h$, получимъ $z=\frac{h}{1+x_0}$. Слѣдовательно, разложеніе по степенямъ z есть въ то же время разложеніе по степенямъ h, т.-е. формула (14). *(Ред.)*

по положительнымъ степенямъ $x-a$, и, вообще, на ряды, расположенные по положительнымъ степенямъ любой непрерывной функціи $\varphi(x)$. Для этого нужно только разсматривать эти ряды, какъ сложныя функціи отъ x съ посредствующею функціею $\varphi(x)$. Такъ, напримѣръ, рядъ, расположенный по положительнымъ степенямъ $\frac{1}{x}$, будетъ сходящимся при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго x, превосходящихъ по абсолютному значенію нѣкоторый предѣлъ, и будетъ представлять при этихъ значеніяхъ перемѣннаго непрерывную функцію отъ x. Разсмотримъ, напримѣръ, функцію $\sqrt{x^2-a}$, которую мы можемъ представить въ видѣ $\pm x\left(1-\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. При значеніяхъ перемѣннаго x, абсолютныя значенія которыхъ больше $\sqrt{a}$, выраженіе $\left(1-\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ можетъ быть разложено по степенямъ $\frac{1}{x^2}$; при этомъ мы получимъ формулу

$$\sqrt{x^2-a}=x-\frac{1}{2}\frac{a}{x}-\frac{1}{2.4}\frac{a^2}{x^3}-\ldots-\frac{1.2.3\ldots(2p-3)}{2.4.6\ldots 2p}\frac{a^p}{x^{2p-1}}-\ldots,$$

которая даетъ разложеніе функціи $\sqrt{x^2-a}$, когда $x>\sqrt{a}$. Если $x<-\sqrt{a}$, то предыдущій рядъ будетъ также сходящимся, и его сумма равна $-\sqrt{x^2-a}$. Эта формула можетъ служить для разложенія корня квадратнаго изъ цѣлаго числа, если извѣстенъ ближайшій бо́льшій точный квадратъ.

181. Усиливающія функціи. — Выведенныя выше свойства цѣлыхъ рядовъ устанавливаютъ большую аналогію между этими рядами и многочленами. Пусть, напримѣръ, дано нѣсколько цѣлыхъ рядовъ $f_1(x), f_2(x), \ldots$; пусть будетъ $(-r,+r)$ наименьшая изъ ихъ областей сходимости. Тогда при $|x|<r$ всѣ эти ряды будутъ абсолютно сходящимися, и мы можемъ ихъ складывать или перемножать совершенно такъ же, какъ мы это дѣлаемъ съ многочленами; вообще, всякій цѣлый многочленъ по $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ можетъ быть разложенъ въ цѣлый рядъ, сходящійся въ томъ же промежуткѣ $(-r,+r)$.

Чтобы расширить эту аналогію, мы предварительно дадимъ опредѣленіе нѣкоторыхъ выраженій, которыми будемъ пользоваться въ послѣдующемъ. Пусть будетъ $f(x)$ цѣлый рядъ

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots;$$

пусть будетъ $\varphi(x)$ другой цѣлый рядъ съ положительными коэффиціентами

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

сходящійся въ извѣстномъ промежуткѣ. Если каждый изъ коэффиціентовъ a_n въ рядѣ $\varphi(x)$ равенъ или больше абсолютнаго значенія соотвѣтствующаго коэффиціента въ рядѣ $f(x)$,

$$a_0\geqq|a_0|,\quad a_1\geqq|a_1|,\quad\ldots,\quad a_n\geqq|a_n|,\quad\ldots,$$

то функція $\varphi(x)$ называется по отношенію къ $f(x)$ усиливающею функціею (fonction majorante). Чтобы выразить это отношеніе между функціями $f(x)$ и $\varphi(x)$, Пуанкаре (Poincaré) предложилъ слѣдующее обозначеніе

$$f(x)\ll\varphi(x).$$

Усиливающія функціи оказываются полезными при разсмотрѣніи цѣлыхъ рядовъ благодаря слѣдующему ихъ свойству, непосредственно вытекающему изъ ихъ опредѣленія. Пусть будетъ $P_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ многочленъ съ коэффиціентами, дѣйствительными и положительными, зависящій отъ $(n+1)$ первыхъ коэффиціентовъ ряда $f(x)$. Если въ этомъ многочленѣ мы замѣнимъ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ соотвѣтствующими коэффиціентами ряда $\varphi(x)$, то, очевидно, будемъ имѣть

$$|P(a_0, a_1, \ldots, a_n)|\leqq P(a_0, a_2, \ldots, a_n).$$

Напримѣръ, если $\varphi(x)$ есть усиливающая функція для $f(x)$, то $[\varphi(x)]^2$ будетъ усиливающею функціею для $[f(x)]^2$, ..., и, вообще, $[\varphi(x)]^n$ будетъ усиливающею функціею для $[f(x)]^n$. Точно также, если φ и φ_1 будутъ усиливающими функціями соотвѣтственно для f и f_1, то произведеніе $\varphi\varphi_1$ будетъ усиливающею функціею для произведенія ff_1, и т. д..

Если данъ цѣлый рядъ $f(x)$, сходящійся въ промежуткѣ $(-R, +R)$, то нахожденіе для этого ряда усиливающей функціи есть задача очень неопредѣленная. Но для упрощенія послѣдующихъ разсужденій намъ выгодно выбирать усиливающую функцію какъ можно болѣе простого вида. Пусть будетъ r положительное число, меньшее R, но сколь угодно близкое къ нему. Такъ какъ при $x=r$ рядъ $f(x)$ будетъ абсолютно сходящимся, то абсолютныя значенія его членовъ имѣютъ верхній предѣлъ, который мы обозначимъ черезъ M. Слѣдовательно, для всякаго значенія числа n, мы имѣемъ, обозначая $|a_n|$ черезъ A_n (§ 177),

$$A_nr^n\leqq M,\quad\text{или}\quad|a_n|=A_n\leqq\frac{M}{r^n}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что рядъ

$$M+M\frac{x}{r}+\ldots+M\frac{x^n}{r^n}=\frac{M}{1-\frac{x}{r}},$$

общій членъ котораго есть $M\frac{x^n}{r^n}$, будетъ усиливающею функціею для $f(x)$. Этотъ видъ усиливающей функціи самый употребительный; онъ представляетъ убывающую геометрическую прогрессію. Если рядъ $f(x)$ не имѣетъ постояннаго члена, то вмѣсто предыдущей усиливающей функціи мы можемъ взять функцію

$$\frac{M}{1-\frac{x}{r}}-M.$$

За число r можно взять любое число, меньшее R, и ясно, что соотвѣтствующее число M, вообще, уменьшается вмѣстѣ съ r, но никогда не можетъ сдѣлаться меньше A_0. Если A_0 не равно нулю, то всегда можно найти такое положительное число $\varrho < R$, чтобы функція $\frac{A_0}{1-\frac{x}{\varrho}}$ была усиливающею функціею для $f(x)$, т.-е. можно положить $M=A_0$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ

$$M+M\frac{x}{r}+M\frac{x^2}{r^2}+\ldots+M\frac{x^n}{r^n}+\ldots,$$

первоначальная усиливающая функція, причемъ $M > A_0$. Возьмемъ число ϱ, меньшее $r\frac{A_0}{M}$; тогда, при $n \geqq 1$, мы имѣемъ

$$|a_n\varrho^n|=|a_n r^n|\times\left(\frac{\varrho}{r}\right)^n<M\frac{\varrho}{r}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{n-1};$$

отсюда находимъ $|a_n\varrho^n|<A_0$. Но $|a_0|=A_0$; слѣдовательно, рядъ

$$A_0+A_0\frac{x}{\varrho}+A_0\frac{x^2}{\varrho^2}+\ldots.+A_0\frac{x^n}{\varrho^n}+\ldots$$

будетъ усиливающею функціею для $f(x)$. Такимъ образомъ, вообще, за число M можно взять любое число, большее или равное A_0. Этимъ свойствомъ мы вскорѣ воспользуемся.

Точно также можно доказать, что если $a_0=0$, то за усиливающую функцію можно взять

$$\frac{\mu}{1-\frac{x}{\varrho}}-\mu=\frac{\mu}{1-\frac{x}{\varrho}}\frac{x}{\varrho},$$

гдѢ μ — произвольное положительное число*).

Примѣчаніе. — Если для даннаго цѣлаго ряда мы знаемъ усиливающую функцію въ видѣ убывающей геометрической прогрессіи, то мы можемъ также судить о степени погрѣшности, получающейся при замѣнѣ суммы $f(x)$ даннаго ряда суммою его $(n+1)$ первыхъ членовъ. Если выраженіе $\frac{M}{1-\frac{x}{r}}$ есть усиливающая функція для $f(x)$, то абсолютное значеніе суммы отброшенныхъ членовъ даннаго ряда

$$a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\ldots,$$

очевидно, меньше суммы соотвѣтствующихъ членовъ ряда

$$M\left(\frac{x^{n+1}}{r^{n+1}}+\frac{x^{n+2}}{r^{n+2}}+\ldots\right),$$

т.-е. меньше $M\,\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{r}}$.

182. Подстановка ряда въ рядъ. — Пусть будетъ

$$z=f(y)=a_0+a_1y+\ldots+a_ny^n+\ldots \qquad (15)$$

рядъ, расположенный по степенямъ перемѢннаго y и сходящійся въ промежуткѢ $(-R,+R)$. Съ другой стороны, пусть будетъ

$$y=\varphi(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots \qquad (16)$$

другой рядъ, сходящійся въ промежуткѢ $(-r,+r)$. Если мы замѢнимъ въ рядѢ (15) y, y^2, y^3, ... ихъ разложеніями въ ряды по степенямъ x, получающимся изъ формулы (16), то получимъ двойной рядъ

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1b_0\ \ +a_2b_0^2 \qquad\qquad +\ldots+a_nb_0^n+\ldots \\ \quad +a_1b_1x\ +2a_2b_0b_1x \qquad +\ldots+na_nb_0^{n-1}b_1x+\ldots \\ \quad +a_1b_2x^2+a_2(b_1^2+2b_0b_2)x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (17)$$

*) Для этого нужно только взять $\varrho<r\frac{\mu}{M}$.

(Ред.)

Найдемъ, при какихъ условіяхъ этотъ двойной рядъ будетъ абсолютно сходящимся въ нѣкоторомъ промежуткѣ. Прежде всего необходимо, чтобы рядъ, стоящій въ первой строкѣ,

$$a_0+a_1b_0+a_2b_0^2+\ldots+a_nb_0^n+\ldots$$

былъ абсолютно сходящимся, т.-е. чтобы было $|b_0|<R$. Это условіе вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, если это условіе удовлетворяется, то за усиливающую функцію для $\varphi(x)$ мы можемъ взять выраженіе вида $\frac{m}{1-\frac{x}{\varrho}}$, гдѣ m есть любое положительное число, большее $|b_0|$, и гдѣ $\varrho<r$ (см. стран. 414). При этомъ мы можемъ, очевидно, разсматривать только значенія x, заключающіяся въ промежуткѣ $(-\varrho,+\varrho)$. Слѣдовательно, мы можемъ предположить $m<R$. Пусть будетъ R' положительное число, заключающееся между m и R. Мы можемъ взять за усиливающую функцію для $f(y)$ выраженіе вида

$$\frac{M}{1-\frac{y}{R'}}=M+M\frac{y}{R'}+M\frac{y^2}{R'^2}+\ldots.$$

Если мы замѣнимъ въ немъ y черезъ $\frac{m}{1-\frac{x}{\varrho}}$ и разложимъ степени перемѣннаго y по возрастающимъ степенямъ перемѣннаго x по формулѣ бинома, то получимъ новый двойной рядъ

$$\left.\begin{aligned} &M+M\left(\frac{m}{R'}\right)+\ldots+M\left(\frac{m}{R'}\right)^n+\ldots\\ &+M\left(\frac{m}{R'}\right)\frac{x}{\varrho}+\ldots+nM\left(\frac{m}{R'}\right)^n\frac{x}{\varrho}+\ldots\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Всѣ коэффиціенты послѣдняго ряда положительны и больше абсолютныхъ значеній соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ ряда (17), такъ какъ каждый изъ коэффиціентовъ таблицы (17) получается изъ коэффиціентовъ $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$ только при помощи сложеній и умноженій. Слѣдовательно, если двойной рядъ (18) — абсолютно сходящійся, то двойной рядъ (17) будетъ подавно абсолютно сходящимся. Если мы замѣнимъ въ рядѣ (18) x его абсолютнымъ значеніемъ, то для того чтобы полученный рядъ былъ сходящимся, необходимо, чтобы были сходящимися ряды, составленные изъ членовъ каждаго столбца

таблицы (18), т.-е. чтобы было $|x|<\rho$. Если это условіе удовлетворяется, то сумма членовъ $(n+1)$-го столбца по замѣнѣ x черезъ $|x|$ будетъ равна

$$M\left[\frac{m}{R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right)}\right]^n.$$

Это показываетъ, что для абсолютной сходимости ряда (18) сверхъ того должно быть

$$m<R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right),$$

т.-е.

$$|x|<\rho\left(1-\frac{m}{R'}\right). \qquad (19)$$

Такъ какъ неравенство (19) влечетъ за собою предыдущее неравенство $|x|<\rho$, то оно представляетъ необходимое и достаточное условіе, при которомъ двойной рядъ будетъ абсолютно сходящимся. Слѣдовательно, двойной рядъ (17) также будетъ абсолютно сходящимся при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго x, удовлетворяющихъ неравенству (19). Замѣтимъ, что при этихъ значеніяхъ перемѣннаго x рядъ $\varphi(x)$ также будетъ сходящимся, и соотвѣтствующее значеніе перемѣннаго y будетъ меньше R' по абсолютному значенію, такъ какъ изъ неравенствъ

$$|\varphi(x)|<\frac{m}{1-\frac{|x|}{\rho}}, \quad \frac{|x|}{\rho}<1-\frac{m}{R'}$$

слѣдуетъ неравенство $|\varphi(x)|<R'$.

Суммируя рядъ (17) по столбцамъ, будемъ имѣть

$$a_0+a_1\varphi(x)+a_2[\varphi(x)]^2+\ldots+a_n[\varphi(x)]^n+\ldots,$$

т.-е. $f[\varphi(x)]$. Съ другой стороны, суммируя по строкамъ, мы получимъ рядъ, расположенный по возрастающимъ степенямъ x; слѣдовательно, мы имѣемъ

$$f[\varphi(x)]=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots. \qquad (20)$$

Легко убѣдиться, что коэффиціенты $c_0, c_1, c_2, \ldots$ выражаются черезъ коэффиціенты рядовъ (15) и (16) слѣдующими формулами

$$\left.\begin{aligned} c_0&=a_0+a_1b_0+a_2b_0^2+\ldots+a_nb_0^n+\ldots,\\ c_1&=a_1b_1+2a_2b_1b_0+\ldots+na_nb_0^{n-1}b_1+\ldots,\\ c_2&=a_1b_2+a_2(b_1^2+2b_0b_2)+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Мы вывели формулу (20) только для значеній x, удовлетворяющихъ неравенству (19); но это неравенство даетъ лишь нижнюю границу того промежутка, въ которомъ эта формула примѣнима. Возможно, что эта формула будетъ имѣть мѣсто и въ болѣе широкомъ промежуткѣ. Полное рѣшеніе этого вопроса требуетъ изученія функцій мнимаго перемѣннаго; мы возвратимся къ нему впослѣдствіи.

Частные случаи.—1. Такъ какъ въ неравенствѣ (19) можно предположить число R' сколь угодно близкимъ къ числу R, то отсюда слѣдуетъ, что формула (20) будетъ примѣнима при значеніяхъ x, удовлетворяющихъ неравенству $|x|<\varrho\left(1-\frac{m}{R}\right)$. Поэтому, если рядъ (15) будетъ сходящимся при всякомъ значеніи перемѣннаго y, то можно предположить число R безконечно большимъ, m — сколь угодно большимъ, а, слѣдовательно, ϱ — сколь угодно близкимъ къ числу r; отсюда слѣдуетъ, что формула (20) будетъ примѣнима, если $|x|<r$, т.-е. она будетъ примѣнима въ томъ же самомъ промежуткѣ, въ какомъ будетъ сходящимся рядъ (16). Въ частности, если оба ряда $f(x)$ и $\varphi(y)$ — сходящіеся при всѣхъ значеніяхъ x и y, то число r можно взять сколь угодно большимъ, и формула (20) будетъ примѣнима при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго x.

2. Если въ рядѣ (16) постоянный членъ b_0 равенъ нулю, то за усиливающую функцію для $\varphi(x)$ можно принять выраженіе вида

$$\frac{m}{1-\frac{x}{\varrho}}-m=\frac{m\,\frac{x}{\varrho}}{1-\frac{x}{\varrho}},$$

гдѣ $\varrho<r$, и m—произвольное положительное число. Совершенно такъ же, какъ и въ общемъ случаѣ, можно доказать, что формула (20) будетъ примѣнима и въ этомъ случаѣ, если только

$$|x|<\varrho\frac{R'}{R'+m}, \qquad (22)$$

причемъ R' можетъ быть взято сколь угодно близкимъ къ R. Промежутокъ, опредѣляемый неравенствомъ (22), шире промежутка, опредѣляемаго неравенствомъ (19).

Послѣдній частный случай особенно часто встрѣчается. Здѣсь неравенство $|b_0|<R$ удовлетворяется само собою, и коэффиціентъ c_n зависитъ только отъ $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$:

$$c_0=a_0,\quad c_1=a_1b_1,\quad c_2=a_1b_2+a_2b_1^2,\quad \ldots,\quad c_n=a_1b_n+\ldots+a_nb_1^n.$$

Примѣры.—1. Коши показалъ, что формулу бинома можно вывести изъ разложенія $\log(1+x)$. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$y=\mu\log(1+x)=\mu\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right),$$

имѣемъ

$$(1+x)^{\mu}=e^{\mu\log(1+x)}=e^{y}=1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\ldots;$$

подставляя первое разложеніе во второе, получимъ

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)+\frac{\mu^2}{1.2}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)^2+\ldots.$$

Очевидно, что, расположивъ правую часть по степенямъ x, мы будемъ имѣть коэффиціентомъ при x^n нѣкоторый многочленъ n-ой степени по μ; обозначимъ его черезъ $P_n(\mu)$. Этотъ многочленъ долженъ обращаться въ нуль при $\mu=0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ и равняться единицѣ при $\mu=n$; этихъ условій достаточно для его опредѣленія:

$$P_n=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n}. \qquad (23)$$

2. Пусть будетъ $z=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, гдѣ x заключается между -1 и $+1$. Полагая

$$y=\frac{1}{x}\log(1+x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n+1}+\ldots,$$

имѣемъ

$$z=e^{y}=1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\ldots.$$

Второе разложеніе возможно при всякомъ y, первое — только при $|x|<1$. Подставляя первое разложеніе во второе, мы получимъ формулу, примѣнимую для x, содержащагося между -1 и $+1$. Ограничиваясь двумя первыми членами, имѣемъ

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e-\frac{x}{2}\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\ldots\right)+\ldots=e-\frac{e}{2}x+\ldots.$$

Это показываетъ, что если x стремится къ нулю, оставаясь положительнымъ, то функція $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ стремится, возрастая, къ числу e.

183. Дѣленіе цѣлыхъ рядовъ. — Разсмотримъ сначала функцію

$$f(x)=\frac{1}{1+b_1x+b_2x^2+\ldots},$$

гдѣ рядъ, стоящій въ знаменателѣ, начинается съ единицы и остается сходящимся въ промежуткѣ $(-r, +r)$. Полагая

$$y=b_1x+b_2x^2+\ldots,$$

имѣемъ

$$f(x)=\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\ldots.$$

Подставляя первое разложеніе во второе, мы получимъ для $f(x)$ разложеніе въ цѣлый рядъ

$$f(x)=1-b_1x+(b_1^2-b_2)x^2+\ldots, \qquad (25)$$

имѣющее мѣсто въ нѣкоторомъ промежуткѣ.

Такимъ же способомъ мы могли бы получить и разложеніе обратной величины любого цѣлаго ряда, постоянный членъ котораго отличенъ отъ нуля.

Пусть теперь требуется разложить въ рядъ частное двухъ сходящихся цѣлыхъ рядовъ

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots}.$$

Если b_0 не равно нулю, то мы можемъ представить это частное въ видѣ

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)\cdot\frac{1}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots}.$$

По предыдущему, мы можемъ замѣнить правую часть произведеніемъ двухъ сходящихся цѣлыхъ рядовъ. Слѣдовательно, мы можемъ представить данное частное въ видѣ цѣлаго ряда, сходящагося при значеніяхъ x, достаточно близкихъ къ нулю,

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots}=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots. \qquad (26)$$

Освобождаясь отъ знаменателя и сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ, мы получимъ формулы

$$a_n=b_0c_n+b_1c_{n-1}+\ldots+b_nc_0, \quad (n=0,1,2,\ldots); \qquad (27)$$

изъ нихъ можно опредѣлить послѣдовательно коэффиціенты $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Должно замѣтить, что эти коэффиціенты будутъ тѣ же самые, какіе мы получили бы, дѣля первый рядъ на второй по обыкновенному правилу дѣленія многочленовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ x.

Если $b_0=0$, то результатъ будетъ иной. Предположимъ, для большей общности, что $\psi(x)=x^k\psi_1(x)$, гдѣ k — цѣлое положительное число, а $\psi_1(x)$ — цѣлый рядъ, постоянный членъ котораго отличенъ отъ нуля. Мы можемъ написать

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{x^k}\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}.$$

По предыдущему имѣемъ

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{k-1} x^{k-1} + c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + \ldots;$$

отсюда

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{c_0}{x^k} + \frac{c_1}{x^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{k-1}}{x} + c_k + c_{k+1} x + \ldots. \qquad (28)$$

Такимъ образомъ, частное этихъ двухъ рядовъ равно суммѣ раціональной дроби, обращающейся въ безконечность только при $x=0$, и цѣлаго ряда, сходящагося въ нѣкоторомъ промежуткѣ около значенія $x=0$.

Примѣчаніе. — При вычисленіи различныхъ степеней цѣлаго ряда, удобно поступать слѣдующимъ образомъ. Взявъ логариѳмическія производныя отъ обѣихъ частей тожества

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots)^m = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

и освободившись отъ знаменателей, мы придемъ къ новому тожеству

$$\left.\begin{aligned} m\,(a_1 + 2\,a_2 x + \ldots + n\,a_n x^{n-1} + \ldots)\,(c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots) \\ = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots)\,(c_1 + 2\,c_2 x + \ldots + n c_n x^{n-1} + \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Легко найти коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ предыдущаго тожества; сравнивая между собою коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x, мы получимъ рядъ равенствъ, изъ которыхъ можно послѣдовательно опредѣлить коэффиціенты c_1, c_2, ..., c_n, ..., если извѣстенъ первый коэффиціентъ c_0. Но, очевидно, $c_0 = a_0^n$.

184. Разложеніе $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$. — Найдемъ разложеніе $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ по степенямъ z. Полагая $y = 2xz - z^2$, имѣемъ, при $|y|<1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} = (1-y)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} y + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} y^2 + \ldots,$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + \frac{2xz - z^2}{2} + \frac{3}{8}(2xz - z^2)^2 + \ldots. \qquad (30)$$

Собирая члены съ одинаковыми степенями z, мы получимъ разложеніе вида

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \ldots + P_n z^n + \ldots, \qquad (31)$$

гдѣ

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad \ldots.$$

P есть многочленъ n-ой степени по x. Эти многочлены могутъ быть

опредѣлены послѣдовательно изъ рекуррентной формулы. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя формулу (31) по z, имѣемъ

$$\frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}}=P_1+2P_2z+\ldots+nP_nz^{n-1}+\ldots;$$

на основаніи формулы (31), послѣднее равенство можно представить въ видѣ

$$(x-z)(P_0+P_1z+\ldots+P_nz^n+\ldots)=(1-2xz+z^2)(P_1+2P_2z+\ldots).$$

Сравнивая коэффиціенты при z^n въ обѣихъ частяхъ, мы получимъ рекуррентную формулу

$$(n+1)P_{n+1}=(2n+1)xP_n-nP_{n-1}.$$

Эта формула тождественна съ формулою, связывающею три послѣдовательныхъ полинома Лежандра (§ 88); кромѣ того, мы видѣли, что $P_0=X_0$, $P_1=X_1$, $P_2=X_2$. Такимъ образомъ мы имѣемъ, при всякомъ n, $P_n=X_n$, и формула (31) обращается въ

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=1+X_1z+X_2z^2+\ldots+X_nz^n+\ldots, \qquad (32)$$

гдѣ X_n есть n-ый полиномъ Лежандра

$$X_n=\frac{1}{2.4.6\ldots2n}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

Ниже мы увидимъ, въ какомъ промежуткѣ примѣнима формула (32).

II. — ЦѢЛЫЕ РЯДЫ СО МНОГИМИ ПЕРЕМѢННЫМИ.

185. Общія свойства. — Свойства цѣлыхъ рядовъ съ однимъ перемѣннымъ легко распространить и на цѣлые ряды съ нѣсколькими независимыми перемѣнными. Разсмотримъ сначала двойной рядъ $\Sigma a_{mn}x^my^n$, въ которомъ коэффиціенты a_{mn} могутъ быть положительными и отрицательными, и числа m, n измѣняются отъ 0 до $+\infty$. Докажемъ слѣдующую теорему: если при какихъ-нибудь значеніяхъ перемѣнныхъ $x=x_0, y=y_0$ абсолютное значеніе каждаго члена ряда $\Sigma a_{mn}x^my^n$ меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа, то при всѣхъ значеніяхъ перемѣнныхъ x, y, удовлетворяющихъ неравенствамъ $|x|<|x_0|$, $|y|<|y_0|$, этотъ рядъ будетъ абсолютно сходящимся.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что при всѣхъ значеніяхъ чиселъ m и n мы имѣемъ

$$|a_{mn}x_0^my_0^n|<M \quad \text{или} \quad |a_{mn}|<\frac{M}{|x_0|^m|y_0|^n}$$

Абсолютное значеніе общаго члена ряда $\Sigma a_{mn}x^my^n$, очевидно,

меньше соотвѣтствующаго члена двойного ряда $\Sigma M\left|\frac{x}{x_0}\right|^m\left|\frac{y}{y_0}\right|^n$. Но при $|x|<|x_0|$, $|y|<|y_0|$ этотъ послѣдній рядъ — сходящійся, и его сумма равна $\frac{M}{\left(1-\left|\frac{x}{x_0}\right|\right)\left(1-\left|\frac{y}{y_0}\right|\right)}$, какъ это легко видѣть, суммируя сначала элементы каждаго столбца этого двойного ряда и складывая затѣмъ всѣ полученныя суммы.

Пусть будутъ r и ϱ два положительныхъ числа, при которыхъ двойной рядъ $\Sigma|a_{mn}|r^m\varrho^n$ будетъ сходящимся, и пусть будетъ R прямоугольникъ, ограниченный прямыми $x=r$, $x=-r$, $y=\varrho$, $y=-\varrho$. Для всякой точки (x, y), взятой внутри или на сторонахъ этого прямоугольника, абсолютное значеніе каждаго члена двойного ряда.

$$F(x, y)=\Sigma a_{mn}x^m y^n \qquad (33)$$

меньше соотвѣтствующаго члена ряда $\Sigma|a_{mn}|r^m\varrho^n$. Это показываетъ, что рядъ (33) сходится внутри прямоугольника R абсолютно и равномѣрно и, слѣдовательно, опредѣляетъ внутри этой области нѣкоторую непрерывную функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y.

Какъ и въ случаѣ рядовъ съ однимъ перемѣннымъ, можно доказать, что, дифференцируя почленно нѣсколько разъ данный двойной рядъ (33), мы получимъ двойные ряды, абсолютно и равномѣрно сходящіеся внутри прямоугольника, образованнаго прямыми $x=r-\varepsilon$, $x=-r+\varepsilon$, $y=\varrho-\varepsilon'$, $y=-\varrho+\varepsilon'$ гдѣ ε и ε' — два сколь угодно малыхъ положительныхъ числа. Эти ряды представляютъ частныя производныя различныхъ порядковъ отъ $F(x, y)$; напримѣръ, сумма ряда $\Sigma m a_{mn}x^{m-1}y^n$ равна $\frac{\partial F}{\partial x}$, такъ какъ, располагая оба ряда по возрастающимъ степенямъ x, мы найдемъ, что члены второго ряда равны производнымъ отъ соотвѣтствующихъ членовъ перваго ряда. Отсюда слѣдуетъ, что частная производная $\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\,\partial y^n}$ равна суммѣ двойного ряда, постоянный членъ котораго есть $a_{mn}\,1.2\ldots m.1.2\ldots n$; слѣдовательно, коэффиціенты a_{mn} равны значеніямъ соотвѣтствующихъ частныхъ производныхъ $\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\,\partial y^n}$ при $x=y=0$, умноженнымъ на опредѣленные числовые множители, и мы можемъ представить формулу (33) въ видѣ

$$F(x, y)=\sum\frac{\left(\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\,\partial y^n}\right)_0}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}x^m y^n. \qquad (34)$$

Отсюда, между прочимъ, видно, что функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ можетъ разлагаться въ цѣлый рядъ только однимъ способомъ.

Соединяя вмѣстѣ всѣ члены даннаго двойного ряда съ одинаковыми степенями x и y, мы получимъ простой рядъ

$$F(x, y)=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n+\ldots, \qquad (35)$$

гдѣ φ_n есть многочленъ n-ой степени по x и y, который можно представить символически въ видѣ

$$\varphi_n=\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(n)}.$$

Отсюда видно, что разложеніе (35) тождественно съ разложеніемъ функціи $F(x, y)$ по формулѣ Тэлора (§ 51).

Пусть будетъ (x_0, y_0) какая-нибудь точка внутри прямоугольника R, и (x_0+h, y_0+k) — другая точка, при условіи $|x_0|+|h|<r$, $|y_0|+|k|<\varrho$. Внутри прямоугольника, ограниченнаго прямыми

$$x=x_0\pm[r-|x_0|], \quad y=y_0\pm[\varrho-|y_0|],$$

функція $F(x, y)$ можетъ быть разложена въ цѣлый рядъ, расположенный по положительнымъ степенямъ $x-x_0$, $y-y_0$,

$$F(x_0+h, y_0+k)=\sum\frac{\left(\frac{\partial^{m+n}F}{\partial x^m\,\partial y^n}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}}{1\cdot 2\ldots m\cdot 1\cdot 2\ldots n}h^m k^n. \qquad (36)$$

Чтобы доказать формулу (36), замѣнимъ каждый членъ двойного ряда

$$\Sigma a_{mn}(x_0+h)^m(y_0+k)^n$$

его разложеніемъ по степенямъ h и k. При сдѣланныхъ предположеніяхъ, новый кратный рядъ будетъ абсолютно сходящимся; располагая его по степенямъ h и k, мы получимъ формулу (36).

Нетрудно убѣдиться, что всѣ предыдущія разсужденія и теоремы распространяются на цѣлые ряды съ любымъ числомъ независимыхъ перемѣнныхъ.

186. Усиливающія функціи. — Пусть данъ какой-нибудь цѣлый рядъ $f(x, y, z, \ldots)$ съ n перемѣнными. Рядъ $\varphi(x, y, z, \ldots)$ съ n перемѣнными называется по отношенію къ первому усиливающимъ, если каждый коэффиціентъ ряда $\varphi(x, y, z, \ldots)$ положителенъ и больше абсолютнаго значенія соотвѣтствую-

щаго коэффиціента ряда $f(x, y, z, \ldots)$. Въ сущности доказательство теоремы въ § 185 уже было основано на примѣненіи усиливающей функціи. Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ $\Sigma|a_{mn}x^m y^n|$ — сходящійся при $x=r$, $y=\rho$, то функція

$$\varphi(x, y)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}=M\sum\left(\frac{x}{r}\right)^m\left(\frac{y}{r}\right)^n,$$

гдѣ M больше каждаго изъ коэффиціентовъ ряда $\Sigma|a_{mn}x^m y^n|$, есть усиливающая функція для ряда $\Sigma a_{mn}x^m y^n$. Функція

$$\psi(x, y)=\frac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)}$$

можетъ быть также принята за усиливающую функцію для даннаго двойного ряда; въ самомъ дѣлѣ, коэффиціентъ при $x^m y^n$ въ $\psi(x, y)$ равенъ коэффиціенту при $x^m y^n$ въ $M\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{\rho}\right)^{m+n}$ и, слѣдовательно, никакъ не меньше соотвѣтствующаго коэффиціента въ $\varphi(x, y)$.

Точно также, если намъ данъ тройной рядъ

$$f(x, y, z)=\Sigma a_{mnp}x^m y^n z^p,$$

абсолютно сходящійся при $x=r$, $y=r'$, $z=r''$, гдѣ r, r', r'' — положительные числа, то этотъ тройной рядъ допускаетъ, какъ усиливающую функцію, выраженіе вида

$$\varphi(x, y, z)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{r'}\right)\left(1-\frac{z}{r'}\right)},$$

которое можно также замѣнить любымъ изъ слѣдующихъ выраженій

$$\frac{M}{1-\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)}, \quad \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left[1-\left(\frac{y}{r'}+\frac{z}{r''}\right)\right]}, \quad \ldots.$$

Если рядъ $f(x, y, z)$ не содержитъ постояннаго члена, то за усиливающую функцію для него можно также взять любую изъ предыдущихъ функцій, уменьшенную на M.

Теорема о подстановкѣ цѣлаго ряда въ другой цѣлый рядъ (§ 182) можетъ быть распространена на ряды со многими перемѣнными. Если въ сходящемся цѣломъ рядѣ съ p перемѣнными $y_1, y_2, \ldots, y_p$ мы замѣнимъ эти перемѣнныя ихъ разложеніями въ сходящіеся

цѣлые ряды съ q перемѣнными $x_1, x_2, \ldots, x_q$, не содержащими постоянныхъ членовъ, то результатъ такой подстановки можно представить въ видѣ сходящагося цѣлаго ряда, расположеннаго по степенямъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_q$, если только абсолютныя значенія этихъ перемѣнныхъ будутъ меньше нѣкоторыхъ предѣловъ.

Такъ какъ ходъ доказательства не зависитъ отъ числа перемѣнныхъ, то мы ограничимся разсмотрѣніемъ слѣдующаго частнаго случая. Пусть будетъ

$$f(y, z) = \Sigma a_{mn} y^m z^n \tag{37}$$

цѣлый рядъ, сходящійся, если $|y| \leqq r$, $|z| \leqq r'$. Съ другой стороны, пусть будутъ

$$\left.\begin{aligned} y &= b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots, \\ z &= c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

два ряда, не содержащіе постоянныхъ членовъ, и сходящіеся, если абсолютное значеніе перемѣннаго x не превосходитъ ϱ. Подставимъ въ рядъ (37) вмѣсто y и z ихъ разложенія (38). Такъ какъ эти разложенія сходятся при $|x| < \varrho$, то каждое изъ произведеній $y^m z^n$ ряда (37) можетъ быть разложено въ цѣлый рядъ по x, также сходящійся при $|x| < \varrho$. Такимъ образомъ, замѣняя въ рядѣ (37) каждое изъ произведеній $y^m z^n$ его разложеніемъ въ цѣлый рядъ по x, мы получимъ тройной рядъ, всѣ коэффиціенты котораго получаются изъ коэффиціентовъ a_{mn}, b_n, c_n только при помощи сложеній и умноженій. Намъ нужно доказать, что если перемѣнное x не превосходитъ нѣкотораго предѣла, то этотъ тройной рядъ будетъ абсолютно сходящимся, и, слѣдовательно, его можно будетъ расположить по возрастающимъ степенямъ перемѣннаго x. Прежде всего очевидно, что за усиливающую функцію для $f(y, z)$ можно взять функцію

$$\varphi(y, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{y}{r}\right)\left(1 - \frac{z}{r'}\right)} = \Sigma M \left(\frac{y}{r}\right)^m \left(\frac{z}{r'}\right)^n, \tag{39}$$

а за усиливающую функцію для обоихъ рядовъ (38) — выраженіе вида

$$\frac{N}{1 - \frac{x}{\varrho}} - N = \frac{N}{1 - \frac{x}{\varrho}} \frac{x}{\varrho} = \sum_{p=1}^{+\infty} N \left(\frac{x}{\varrho}\right)^p, \tag{40}$$

гдѣ M и N — два положительныхъ числа. Подставимъ въ двой

ной рядъ (39) вмѣсто y и z усиливающія разложенія (40). Такъ какъ эти разложенія сходятся при $|x|<\varrho$, то каждое изъ произведеній $y^m z^n$ въ рядѣ (39) можетъ быть разложено въ рядъ, расположенный по возрастающимъ степенямъ перемѣннаго x и сходящійся при $|x|<\varrho$. Такимъ образомъ, замѣняя въ рядѣ (39) каждое изъ произведеній $y^m z^n$ разложеніемъ въ рядъ по степенямъ x, мы получимъ другой тройной рядъ, всѣ коэффиціенты котораго дѣйствительны, положительны и больше соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ перваго тройного ряда. Поэтому нужно только доказать, что при достаточно малыхъ положительныхъ значеніяхъ перемѣннаго x этотъ второй тройной рядъ будетъ сходящимся. Сумма членовъ, получившихся отъ замѣны въ рядѣ (39) произведенія $y^m z^n$ усиливающимъ выраженіемъ $\left[\sum_{p=1}^{+\infty} N\left(\frac{x}{\varrho}\right)^p\right]^{m+n}$, равна

$$M\frac{N^{m+n}}{r^m r'^n}\frac{\left(\frac{x}{\varrho}\right)^{m+n}}{\left(1-\frac{x}{\varrho}\right)^{m+n}}.$$

Но это выраженіе отличается только множителемъ M отъ общаго члена двойного ряда, получающагося отъ перемноженія рядовъ

$$\sum\left(\frac{N}{r}\right)^m\left(\frac{\frac{x}{\varrho}}{1-\frac{x}{\varrho}}\right)^m, \quad \sum\left(\frac{N}{r'}\right)^n\left(\frac{\frac{x}{\varrho}}{1-\frac{x}{\varrho}}\right)^n,$$

причемъ оба эти ряда будутъ сходящимися, если x удовлетворяетъ неравенствамъ (§ 182, форм. (22))

$$x<\varrho\frac{r}{r+N}, \quad x<\varrho\frac{r'}{r'+N}.$$

Такимъ образомъ, если абсолютное значеніе перемѣннаго x будетъ меньше обоихъ чиселъ $\varrho\frac{r}{r+N}$ и $\varrho\frac{r'}{r'+N}$, то всѣ разсматриваемые ряды будутъ абсолютно сходящимися, и мы будемъ имѣть право расположить начальный тройной рядъ по возрастающимъ степенямъ перемѣннаго x.

Примѣчаніе. — Если ряды (38) содержатъ постоянные члены b_0 и c_0, то теорема будетъ вѣрна и въ этомъ случаѣ, если только $|b_0|<r$, $|c_0|<r'$. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ замѣнить разложеніе (37) разложеніемъ по степенямъ $y-b_0$ и $z-c_0$ (§ 185) и такимъ образомъ придемъ къ предыдущему случаю.

III. — НЕЯВНЫЯ ФУНКЦІИ. — АНАЛИТИЧЕСКІЯ КРИВЫЯ И ПОВЕРХНОСТИ.

187. Неявная функція одного перемѣннаго.—Мы уже установили (гл. II, § 20 и слѣд.) существованіе неявныхъ функцій при опредѣленныхъ условіяхъ относительно непрерывности. Въ тѣхъ случаяхъ, когда лѣвыя части данныхъ уравненій разложимы въ цѣлые ряды, мы можемъ придти къ болѣе опредѣленнымъ выводамъ.

Пусть будетъ $F(x,y)=0$ уравненіе, лѣвая часть котораго можетъ быть разложена въ сходящійся рядъ, расположенный по степенямъ $x-x_0$, $y-y_0$, причемъ этотъ рядъ не содержитъ постояннаго члена, и коэффиціентъ при $y-y_0$ отличенъ отъ нуля. При этихъ условіяхъ уравненіе $F(x,y)=0$ имѣетъ одинъ и только одинъ корень, стремящійся къ y_0, когда x стремится къ x_0, и этотъ корень можетъ быть разложенъ въ цѣлый рядъ, расположенный по степенямъ $x-x_0$.

Для упрощенія вычисленій предположимъ, что $x_0=y_0=0$, что равносильно перенесенію начала координатъ въ точку (x_0, y_0).

Перенеся членъ съ первою степенью y въ другую часть, мы можемъ представить данное уравненіе въ видѣ

$$y=f(x,y)=a_{10}x+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\ldots, \qquad (41)$$

причемъ степень послѣдующихъ членовъ будетъ выше второй. Покажемъ сначала, что формально мы можемъ удовлетворить уравненію (41), замѣняя y рядомъ

$$y=c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots \qquad (42)$$

и поступая съ этимъ рядомъ такъ, какъ если бы онъ былъ сходящимся. Въ самомъ дѣлѣ, сдѣлавъ подстановку и сравнивая коэффиціенты при x въ обѣихъ частяхъ уравненія, мы получимъ условія

$$c_1=a_{10}, \quad c_2=a_{20}+a_{11}c_1+a_{02}c_1^2, \quad \ldots;$$

вообще, c_n выразится только при помощи сложеній и умноженій черезъ коэффиціенты a_{ik}, гдѣ $i+k\leqq n$, и черезъ предыдущіе коэффиціенты $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть

$$c_n=P_n(a_{10}, a_{20}, a_{11}, \ldots, a_{0n}), \qquad (43)$$

гдѣ P_n есть многочленъ, всѣ коэффиціенты котораго суть цѣлыя положительныя числа. Чтобы всѣ предыдущія дѣйствія были возможны, намъ остается доказать, что полученный такимъ образомъ рядъ (42) будетъ сходящимся при достаточно малыхъ значеніяхъ перемѣннаго x. Для доказательства мы воспользуемся однимъ весьма общимъ пріемомъ, основная мысль котораго принадлежитъ Коши; этотъ пріемъ основанъ на примѣненіи усиливающихъ функцій.

Пусть будетъ

$$\varphi(x, Y) = \Sigma b_{mn} x^m Y^n$$

усиливающая функція для функціи $f(x, y)$, причемъ $b_{00} = b_{01} = 0$, и каждый изъ остальныхъ коэффиціентовъ b_{mn} положителенъ и не меньше $|a_{mn}|$. Разсмотримъ вспомогательное уравненіе

$$Y = \varphi(x, Y) = \Sigma b_{mn} x^m Y^n, \qquad (41)'$$

и попытаемся удовлетворить этому уравненію, принявъ за Y цѣлый рядъ по x,

$$Y = C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots . \qquad (42)'$$

Какъ и выше, мы найдемъ для коэффиціентовъ $C_1, C_2, \ldots$ значенія

$$C_1 = b_{10}, \quad C_2 = b_{20} + b_{11} C_1 + b_{02} C_1^2, \ldots ,$$

и, вообще,

$$C_n = P_n(b_{10}, b_{20}, \ldots, b_{0n}). \qquad (43)'$$

Такъ какъ всѣ коэффиціенты многочлена P_n положительны, и $|a_{mn}| \leqq b_{mn}$, то изъ соотношеній (43) и (43)′ непосредственно видно, что $|c_n| < C_n$. Слѣдовательно, если рядъ (42)′ — сходящійся, то и рядъ (42) также будетъ сходящимся. Но за усиливающую функцію $\varphi(x, Y)$ мы можемъ взять выраженіе вида

$$\varphi(x, Y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{Y}{\rho}\right)} - M - M\frac{Y}{\rho},$$

гдѣ M, r, ρ — положительныя числа. Тогда вспомогательное уравненіе (41)′, по освобожденіи отъ знаменателя, приметъ видъ

$$Y^2 - \frac{\rho^2 Y}{\rho + M} + \frac{M\rho^2}{\rho + M} \cdot \frac{\frac{x}{r}}{1 - \frac{x}{r}} = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ одинъ корень, равный нулю при $x=0$, именно:

$$Y=\frac{\varrho^2}{2(\varrho+M)}-\frac{\varrho^2}{2(\varrho+M)}\sqrt{1-\frac{4M(\varrho+M)}{\varrho^2}\,\frac{\frac{x}{r}}{1-\frac{x}{r}}}.$$

Полагая

$$\alpha=r\left(\frac{\varrho}{\varrho+2M}\right)^2,$$

мы можемъ представить подкоренное выраженіе въ видѣ

$$\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-1},$$

и тогда получимъ

$$Y=\frac{\varrho^2}{2(\varrho+M)}\left[1-\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Отсюда видно, что этотъ корень Y разлагается въ промежуткѣ $(-\alpha,+\alpha)$ въ сходящійся рядъ. Это разложеніе должно быть тождественно съ тѣмъ, которое получается при помощи непосредственной подстановки, т.-е. съ разложеніемъ (42)′; слѣдовательно, рядъ (42) a fortiori — сходящійся въ промежуткѣ $(-\alpha,+\alpha)$. Нужно однако замѣтить, что этотъ промежутокъ есть лишь нижняя граница промежутка сходимости, который можетъ быть въ дѣйствительности значительно шире.

Изъ самаго способа полученія коэффиціентовъ c_n очевидно, что сумма y ряда (42) удовлетворяетъ уравненію (41). Представимъ уравненіе $F(x,y)=0$ въ видѣ $F(x,y)=y-f(x,y)=0$; пусть будетъ $y=P(x)$ корень, который мы выше получили. Сдѣлаемъ въ $F(x,y)$ подстановку $y=P(x)+z$ и расположимъ результатъ подстановки по степенямъ x и z. Всѣ члены должны дѣлиться на z, такъ какъ этотъ результатъ долженъ быть равенъ нулю, если $z=0$, каково бы ни было значеніе перемѣннаго x; слѣдовательно, мы будемъ имѣть тождественно

$$F[x,\,P(x)+z]=z\,Q(x,z),$$

причемъ $Q(x,z)$ есть цѣлый рядъ по x и z. Замѣняя теперь въ $Q(x,z)$ перемѣнное z черезъ $y-P(x)$, мы получимъ тожество

$$F(x,y)=[y-P(x)]\,Q_1(x,y).$$

Такъ какъ коэффиціентъ при y въ $F(x,y)$ равенъ единицѣ, то постоянный членъ въ $Q_1(x,y)$ также долженъ равняться

единицѣ, и мы можемъ представить предыдущее тожество въ видѣ

$$F(x, y)=[y-P(x)][1+\alpha x+\beta y+\ldots]. \qquad (44)$$

Это разложеніе $F(x, y)$ на произведеніе двухъ множителей было дано Вейерштрассомъ. Оно выдѣляетъ корень $y=P(x)$ уравненія $F(x, y)=0$ и, кромѣ того, показываетъ, что уравненіе $F(x, y)=0$ не имѣетъ другого корня, стремящагося къ нулю вмѣстѣ съ x, такъ какъ второй множитель не стремится къ нулю при приближеніи x и y къ нулю.

Примѣчаніе. — Предыдущій методъ опредѣленія коэффиціентовъ c_n въ сущности тождественъ съ методомъ, указаннымъ въ § 46. Но здѣсь, кромѣ того, видно, что рядъ, получающійся при неограниченномъ продолженіи вычисленій, — сходящійся.

188. Общая теорема. — Разсмотримъ теперь систему p уравненій съ $p+q$ перемѣнными

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p)=0,\\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_p(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Предположимъ, что функціи $F_1, F_2, \ldots, F_p$ будутъ равны нулю при $x_i=y_k=0$ $(i=1, \ldots, q;\ k=1, \ldots, p)$ и что онѣ разлагаются въ цѣлые ряды вблизи этихъ значеній перемѣнныхъ; кромѣ того, предположимъ, что при $x_i=y_k=0$ функціональный опредѣлитель $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$ не равенъ нулю. При этихъ условіяхъ уравненія (45) имѣютъ одну и только одну систему рѣшеній вида

$$y_1=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_q), \quad \ldots, \quad y_p=\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_q),$$

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$—цѣлые ряды по $x_1, x_2, \ldots, x_q$, обращающіеся въ нуль при $x_1=x_2=\ldots=x_q=0$.

Мы ограничимся для простоты случаемъ двухъ уравненій между двумя функціями u и v и тремя независимыми перемѣнными x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} &F_1=au+bv+cx+dy+ez+\ldots=0,\\ &F_2=a'u+b'v+c'x+d'y+e'z+\ldots=0. \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

Такъ какъ опредѣлитель $ab'-ba'$, по предположенію, не равенъ нулю, то уравненія (46) можно замѣнить двумя уравненіями вида

$$\left.\begin{aligned} u &= \Sigma a_{mnpqr}\, x^m y^n z^p u^q v^r, \\ v &= \Sigma b_{mnpqr}\, x^m y^n z^p u^q v^r, \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

гдѣ правыя части не содержатъ ни постоянныхъ членовъ, ни членовъ первой степени по u и v. Какъ и выше, можно доказать, что этимъ уравненіямъ можно формально удовлетворить, взявъ за u и v цѣлые ряды по x, y, z

$$u = \Sigma c_{ikl}\, x^i y^k z^l, \quad v = \Sigma c'_{ikl}\, x^i y^k z^l, \qquad (48)$$

причемъ коэффиціенты c_{ikl}, c'_{ikl} выразятся черезъ коэффиціенты a_{mnpqr}, b_{mnpqr} при помощи однихъ только сложеній и умноженій. Чтобы доказать сходимость этихъ разложеній, нужно и здѣсь сравнить ихъ съ аналогичными разложеніями, получающимися при рѣшеніи двухъ вспомогательныхъ уравненій

$$U = V = \frac{M}{\left(1-\frac{x+y+z}{r}\right)\left(1-\frac{U+V}{\varrho}\right)} - M\left(1+\frac{U+V}{\varrho}\right),$$

гдѣ M, r, ϱ — положительныя числа, значенія которыхъ были указаны выше (§ 186). Эти два вспомогательныхъ уравненія приводятся къ одному уравненію второй степени

$$U^2 - \frac{\varrho^2 U}{2\varrho+4M} + \frac{M\varrho^2}{2\varrho+4M}\,\frac{\frac{x+y+z}{r}}{1-\frac{x+y+z}{r}} = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ одинъ корень, обращающійся въ нуль при $x=y=z=0$, именно:

$$U = \frac{\varrho^2}{4(\varrho+2M)} - \frac{\varrho^2}{4(\varrho+2M)}\sqrt{\frac{1-\frac{x+y+z}{a}}{1-\frac{x+y+z}{r}}},$$

гдѣ

$$a = r\left(\frac{\varrho}{\varrho+4M}\right)^2.$$

Если абсолютныя значенія перемѣнныхъ x, y, z не превосходятъ $\frac{a}{3}$, то этотъ корень разлагается въ сходящійся цѣлый рядъ. Слѣдовательно, ряды (48) также будутъ сходящимися между этими предѣлами.

Пусть будутъ u_1 и v_1 рѣшенія уравненій (47), разлагающіяся въ цѣлые ряды по x, y, z. Полагая $u=u_1+u'$, $v=v_1+v'$, подставимъ эти значенія u и v въ уравненія (47) и расположимъ результатъ по степенямъ $x, y, z, u' v'$. При этомъ всѣ члены должны имѣть множителей u' и v'; слѣдовательно, возвращаясь къ перемѣннымъ x, y, z, u, v, мы можемъ представить наши уравненія въ видѣ

$$\left.\begin{aligned}(u-u_1)f+(v-v_1)\varphi&=0,\\(u-u_1)f_1+(v-v_1)\varphi_1&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (47)'$$

гдѣ $f, \varphi, f_1 \varphi_1$ — цѣлые ряды по x, y, z, u, v. Такимъ образомъ, рѣшенія $u=u_1$, $v=v_1$ отдѣлены; но, кромѣ того, ясно, что уравненія $F_1=0$, $F_2=0$ не имѣютъ другихъ рѣшеній, обращающихся въ нуль при $x=y=z=0$. Въ самомъ дѣлѣ, всякое другое рѣшеніе уравненій (47)′ должно обращать въ нуль $f\varphi_1-\varphi f_1$; но, сравнивая уравненія (47) и (47)′, мы видимъ, что постоянный членъ въ f и φ_1 равенъ единицѣ, а въ f_1 и φ — нулю. Слѣдовательно, мы не можемъ удовлетворить уравненію $f\varphi_1-f_1\varphi=0$, взявъ для u и v функціи, обращающіяся въ нуль при $x=y=z=0$.

189. Формула Лагранжа. — Разсмотримъ уравненіе

$$y=a+x\varphi(y) \qquad (49)$$

и предположимъ, что функція $\varphi(y)$ можетъ быть разложена въ рядъ по возрастающимъ степенямъ $y-a$, — сходящійся, если абсолютное значеніе разности $y-a$ не превосходитъ нѣкотораго предѣла,

$$\varphi(y)=\varphi(a)+(y-a)\varphi'(a)+\frac{(y-a)^2}{1.2}\varphi''(a)+\ldots.$$

По общей теоремѣ § 187, уравненіе (49) имѣетъ одинъ и только одинъ корень, стремящійся къ a, когда x стремится къ нулю. При достаточно малыхъ значеніяхъ x этотъ корень можетъ быть представленъ суммою сходящагося цѣлаго ряда

$$y=a+a_1x+a_2x^2+\ldots.$$

Вообще, пусть будетъ $f(y)$ функція отъ y, разложимая въ рядъ по положительнымъ степенямъ разности $y-a$. Замѣняя въ ней y предыдущимъ разложеніемъ, мы получимъ для $f(y)$ разложеніе по степенямъ x, сходящееся при значеніяхъ x, заключающихся въ нѣкоторыхъ предѣлахъ

$$f(y)=f(a)+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots. \qquad (50)$$

Формула Лагранжа даетъ выраженія коэффиціентовъ $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ въ функціи отъ a. Замѣтимъ, что эта задача есть не что иное, какъ случай общей задачи (§ 187). Коэффиціентъ A_n равенъ n-ой производной отъ $f(y)$ при $x=0$, дѣленной на $n!$, причемъ y опредѣляется уравненіемъ (49); очевидно, что эту производную можно вычислить при помощи извѣстныхъ намъ правилъ. Вычисленіе кажется сложнымъ, но его можно значительно сократить, воспользовавшись слѣдующимъ

указаніями Лапласа (см. упр. 8, гл. II.) Дифференцируя уравненіе (49) по x и по a, мы получимъ для частныхъ производныхъ отъ y слѣдующія формулы

$$[1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y), \qquad [1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a}=1;$$

полагая $u=f(y)$, изъ предыдущихъ формулъ будемъ имѣть

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial a}. \tag{51}$$

Съ другой стороны, пусть будетъ $F(y)$ какая-нибудь функція отъ y. Легко убѣдиться непосредственнымъ дифференцированіемъ, что

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]; \tag{51}'$$

въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя правую и лѣвую часть, получимъ въ обоихъ случаяхъ

$$F'(y)f'(y)\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial x}+F(y)\frac{\partial^2 u}{\partial a\,\partial x}.$$

Докажемъ, что при всякомъ цѣломъ числѣ n имѣетъ мѣсто формула

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

На основаніи (51), эта формула вѣрна при $n=1$. Чтобы доказать ея общность, предположимъ, что она вѣрна при какомъ-нибудь частномъ значеніи числа n. Тогда мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^n}{\partial a^{n-1}\partial x}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

Но, на основаніи соотношеній (51) и (51)′, получаемъ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial a}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi(y)^n\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi(y)^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right];$$

слѣдовательно,

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\varphi(y)^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

Такимъ образомъ, эта формула вѣрна при всякомъ n.

Предположимъ теперь, что $x=0$. Тогда y обратится въ a, u въ $f(a)$, и n-ая производная отъ u по x будетъ равна

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi(a)^n f'(a)].$$

Такимъ образомъ, разложеніе $f(y)$ по формулѣ Тэлора будетъ имѣть видъ

$$\left.\begin{aligned} f(y)=f(a)+x\varphi(a)f'(a)+\frac{x^2}{1.2}\frac{d}{da}[\varphi(a)^2 f'(a)]+\ldots \\ +\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi(a)^n f'(a)]+\ldots.\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Это — извѣстная формула Лагранжа. Она даетъ разложеніе корня y, стремящагося къ a, когда x стремится къ нулю. Ниже мы увидимъ, между какими предѣлами эта формула примѣнима.

Примѣчаніе. — Изъ общей теоремы слѣдуетъ также, что корень y, разсматриваемый, какъ функція отъ x и a, можетъ быть представленъ двойнымъ рядомъ, расположеннымъ по степенямъ x и a. Этотъ рядъ можно получить, замѣняя каждый изъ коэффиціентовъ A_n его разложеніемъ по степенямъ a. Отсюда слѣдуетъ, что рядъ (59) можно дифференцировать почленно по параметру a.

Примѣры. — 1. Уравненіе

$$y=a+\frac{x}{2}(y^2-1) \tag{53}$$

имѣетъ корень, равный a при $x=0$. Разложеніе этого корня по формулѣ Лагранжа будетъ

$$\left.\begin{aligned} y=a+\frac{x}{2}(a^2-1)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{d(a^2-1)^2}{da}+\dots \\ +\frac{1}{1.2\dots n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{d^{n-1}(a^2-1)^n}{da^{n-1}}+\dots.\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Съ другой стороны, рѣшая уравненіе (53), мы найдемъ для его корней выраженія

$$y=\frac{1}{x}\pm\frac{1}{x}\sqrt{1-2ax+x^2}.$$

Чтобы получить корень, равный a при $x=0$, должно взять знакъ $-$. Дифференцируя обѣ части уравненія (54) по перемѣнному a, мы придемъ къ формулѣ, отличающейся отъ полученной выше формулы (32) (§ 184) только обозначеніями.

2⁰. Извѣстное въ астрономіи уравненіе Кеплера (Kepler) для эксцентрической аномаліи u

$$u=a+e\sin u \tag{55}$$

имѣетъ корень u, равный a при $e=0$. Разложеніе этого корня по формулѣ Лагранжа при e, близкомъ къ нулю, будетъ имѣть видъ

$$u=a+e\sin a+\frac{e^2}{1.2}\frac{d}{da}(\sin^2 a)+\dots+\frac{e^n}{1.2\dots n}\frac{d^{n-1}(\sin^n a)}{da^{n-1}}+\dots. \tag{56}$$

Лапласъ первый доказалъ при помощи весьма искусныхъ пріемовъ изслѣдованій, что предыдущій рядъ — сходящійся, если e меньше 0,662743....

190. Обращеніе функцій. — Пусть будетъ

$$y=a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots \tag{57}$$

рядъ, сходящійся въ промежуткѣ $(-r,+r)$, причемъ первый коэффиціентъ a_1 не равенъ нулю. Будемъ разсматривать въ уравненіи (57) y, какъ независимое перемѣнное, а x — какъ функцію отъ y. По общей теоремѣ (§ 187), это уравненіе имѣетъ одинъ и только одинъ корень x, стремящійся къ нулю вмѣстѣ съ y, и этотъ корень разлагается въ рядъ, расположенный по степенямъ y,

$$x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\dots+b_ny^n+\dots. \tag{58}$$

Коэффиціенты $b_1, b_2, b_3, \ldots$ можно опредѣлить послѣдовательно, замѣняя въ формулѣ (57) x его разложеніемъ (58) и приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ y. Такимъ образомъ получимъ

$$b_1=\frac{1}{a_1},\quad b_2=-\frac{a_2}{a_1^3},\quad b_3=\frac{2a_2-a_1a_3}{a_1^5},\ldots.$$

Общее выраженіе коэффиціентовъ b_n мы можемъ также получить при помощи формулы Лагранжа. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\psi(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}+\ldots,$$

мы можемъ представить уравненіе (57) въ видѣ

$$x=y\,\frac{1}{\psi(x)}.$$

Отсюда, по формулѣ Лагранжа, получимъ разложеніе корня x, обращающагося въ нуль вмѣстѣ съ y

$$x=y\,\frac{1}{\psi(0)}+\ldots+\frac{y^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)_0^n+\ldots,$$

причемъ указатель 0 показываетъ, что послѣ дифференцированій должно замѣнить x нулемъ.

Предыдущая задача извѣстна также подъ именемъ задачи объ о б р а щ е н і и р я д о в ъ.

191. Аналитическія функціи. — Въ послѣдующемъ мы будемъ называть а н а л и т и ч е с к о ю ф у н к ц і е ю всякую функцію отъ любого числа независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$, которая вблизи системы значеній $x_0, y_0, z_0, \ldots$ можетъ быть разложена въ цѣлый рядъ, расположенный по степенямъ $x-x_0, y-y_0, z-z_0, \ldots$,—сходящійся, пока абсолютныя значенія этихъ разностей не превосходятъ нѣкоторыхъ предѣловъ. Значенія x_0, y_0, z_0 могутъ при этомъ подлежать извѣстнымъ ограниченіямъ, на которыхъ мы здѣсь не будемъ останавливаться. Изъ всего изложеннаго въ этой главѣ слѣдуетъ, что эти функціи, такъ сказать, происходятъ однѣ изъ другихъ. Если даны одна или нѣсколько аналитическихъ функцій, то интегрированіе или дифференцированіе, алгебраическія дѣйствія умноженія, дѣленія, подстановки одной функціи въ другую и т. д. приводятъ къ новымъ аналитическимъ функціямъ. Точно также рѣшеніе уравненій, первыя части которыхъ аналитическія функціи, приводитъ къ аналитическимъ функціямъ. Такъ какъ простѣйшія функціи — многочлены, показательная и круговыя функціи — суть функціи аналитическія, то отсюда понятно, почему первыя функціи, которыми стали заниматься геометры, должны были быть аналитическими. Важное значеніе этихъ функцій уяснится

еще болѣе при изученіи функцій мнимаго перемѣннаго и дифференціальныхъ уравненій. Однако, несмотря на основное значеніе аналитическихъ функцій, не должно забывать, что онѣ составляютъ лишь очень частную группу среди всѣхъ непрерывныхъ функцій*).

192. Плоскія кривыя. — Пусть будетъ AB дуга плоской кривой. Дуга AB называется дугою аналитической кривой, если вблизи каждой точки M_0 этой дуги координаты (x, y) перемѣнной точки M могутъ быть разложены въ цѣлые ряды, расположенные по степенямъ нѣкотораго параметра $t-t_0$, — сходящіеся, если абсолютное значеніе разности $t-t_0$ не превосходитъ нѣкотораго предѣла,

$$\left.\begin{aligned} x=\varphi(t)=x_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)^2+\ldots+a_n(t-t_0)^n+\ldots,\\ y=\psi(t)=y_0+b_1(t-t_0)+b_2(t-t_0)^2+\ldots+b_n(t-t_0)^n+\ldots.\end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ аналитической кривой называется обыкновенною точкою, если вблизи этой точки одна изъ двухъ разностей $y-y_0$, $x-x_0$ разлагается въ сходящійся рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ возрастающимъ степенямъ другой разности. Предположимъ, напримѣръ, что при значеніяхъ x, заключающихся между x_0-h и x_0+h, разность $y-y_0$ разлагается по степенямъ $x-x_0$

$$y-y_0=c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots. \quad (60)$$

Тогда точка (x_0, y_0) есть обыкновенная точка, и формулу (60) легко замѣнить двумя формулами вида (59); для этого нужно только положить

$$\left.\begin{aligned} x=x_0+t-t_0,\\ y=y_0+c_1(t-t_0)+\ldots+c_n(t-t_0)^n+\ldots.\end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Если c_1 не равно нулю, какъ это и будетъ въ общемъ случаѣ, то, обратно, изъ уравненія (60) можно получить разложеніе $x-x_0$ по степенямъ $y-y_0$, сходящееся при значеніяхъ $y-y_0$, абсолютное значеніе которыхъ не превосходитъ нѣкотораго предѣла. Такимъ образомъ, каждая изъ разностей $x-x_0$, $y-y_0$ можетъ быть представлена сходящимся рядомъ, расположеннымъ по степенямъ другой разности. Иначе будетъ, если c_1 равно нулю, т.-е. если касательная къ кривой въ точкѣ (x_0, y_0) параллельна

*) Во второмъ томѣ будутъ приведены примѣры неаналитическихъ функцій, которыя тѣмъ не менѣе имѣютъ въ нѣкоторомъ промежуткѣ (a, b) неограниченный рядъ производныхъ.

оси Ox. Какъ мы увидимъ ниже, въ этомъ случаѣ изъ формулы (60) получается разложеніе $x-x_0$ по дробнымъ степенямъ $y-y_0$. Точно также, если въ обыкновенной точкѣ касательная параллельна оси Oy, то $x-x_0$ можно разложить въ цѣлый рядъ по степенямъ $y-y_0$, но обратное предложеніе не имѣетъ мѣста.

Если вблизи какой-нибудь точки M_0 координаты (x, y) представляются формулами (59), то эта точка будетъ обыкновенною точкою, если, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ коэффиціентовъ a_1, b_1 отличенъ отъ нуля. Предположимъ, напримѣръ, что a_1 не равно нулю. Тогда изъ первой формулы мы найдемъ разложеніе $t-t_0$ по степенямъ $x-x_0$ и, внося это разложеніе $t-t_0$ во вторую формулу, получимъ разложеніе $y-y_0$ по степенямъ $x-x_0$.

Замѣтимъ еще, что въ обыкновенной точкѣ кривая можетъ имѣть только два различныхъ вида: или въ этой точкѣ она будетъ имѣть обыкновенный видъ, или эта точка будетъ точкою перегиба. Всякая точка, не принадлежащая къ обыкновеннымъ, называется особою точкою. Если дуга аналитической кривой не имѣетъ особыхъ точекъ, то она называется правильною дугою.

Предположимъ теперь, что въ формулахъ (59) оба коэффиціента a_1, b_1 равны нулю, но что, напримѣръ, a_2 отлично отъ нуля. Тогда первую изъ формулъ (59) можно представить въ видѣ

$$(x-x_0)^{\frac{1}{2}}=(t-t_0)\,[a_2+a_3\,(t-t_0)+\ldots]^{\frac{1}{2}},$$

причемъ выраженіе въ квадратныхъ скобкахъ можетъ быть разложено въ цѣлый рядъ по степенямъ $t-t_0$. Изъ этого уравненія, обратно, мы выведемъ разложеніе $t-t_0$ по степенямъ $(x-x_0)^{\frac{1}{2}}$ и, внося это разложеніе $t-t_0$ во вторую изъ формулъ (59), получимъ для y выраженіе вида

$$y-y_0=c_1\,(x-x_0)+c_2\,(x-x_0)^{\frac{3}{2}}+c_3\,(x-x_0)^2+\ldots.$$

Точка (x_0, y_0) будетъ, вообще, точкою возврата перваго вида.

Предыдущее разсужденіе можно обобщить. Если разложеніе $x-x_0$ по степенямъ $t-t_0$ начинается съ члена n-ой степени, то отсюда для $y-y_0$ получается разложеніе по степенямъ $(x-x_0)^{\frac{1}{n}}$. Можно еще замѣтить, что вблизи точки (x_0, y_0) кривая, представляемая разложеніями (59), можетъ имѣть только четыре различныхъ вида: точка (x_0, y_0) можетъ быть обыкновенною точкою, или точкою перегиба, или же точкою возврата перваго или второго вида.

193. Кривыя двойной кривизны. — Дуга AB кривой двойной кривизны называется аналитическою дугою, если вблизи каждой точки M_0 этой дуги координаты x, y, z перемѣнной точки M могутъ быть разложены въ цѣлые ряды, расположенные по степенямъ параметра $t-t_0$,

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a_1(t-t_0) + \ldots + a_n(t-t_0)^n + \ldots, \\ y &= y_0 + b_1(t-t_0) + \ldots + b_n(t-t_0)^n + \ldots, \\ z &= z_0 + c_1(t-t_0) + \ldots + c_n(t-t_0)^n + \ldots. \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

Точка M_0 называется обыкновенною точкою, если двѣ изъ трехъ разностей $x-x_0, y-y_0, z-z_0$ могутъ быть разложены въ цѣлые ряды, расположенные по степенямъ третьей.

Можно доказать, какъ и выше, что точка M_0 есть обыкновенная точка кривой, если, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ трехъ коэффиціентовъ a_1, b_1, c_1 не равенъ нулю. Поэтому, тѣ значенія параметра t, которыя соотвѣтствуютъ особымъ точкамъ, должны удовлетворять одновременно тремъ уравненіямъ*)

$$\frac{dx}{dt}=0, \quad \frac{dy}{dt}=0, \quad \frac{dz}{dt}=0.$$

Пусть будутъ x_0, y_0, z_0 координаты какой нибудь точки M_0 кривой двойной кривизны Γ, представляемой системою двухъ уравненій,

$$F(x, y, z)=0, \quad F_1(x, y, z)=0, \qquad (63)$$

причемъ лѣвыя части этихъ уравненій суть цѣлые ряды по $x-x_0, y-y_0, z-z_0$. Если функціональные опредѣлители

$$\frac{D(F, F_1)}{D(x, y)}, \quad \frac{D(F, F_1)}{D(y, z)}, \quad \frac{D(F, F_1)}{D(z, x)}$$

не равны одновременно нулю при $x=x_0, y=y_0, z=z_0$, то точка M_0 будетъ обыкновенною точкою кривой. Напримѣръ, если въ точкѣ M_0 не равенъ нулю опредѣлитель $\frac{D(F, F_1)}{D(x, y)}$, то изъ уравненій (63) мы получимъ для $x-x_0, y-y_0$ разложенія въ цѣлые ряды, расположенные по степенямъ $z-z_0$ (§ 188).

---

*) Если каждой точкѣ M, лежащей вблизи точки M_0, соотвѣтствуетъ нѣсколько значеній параметра t, приближающихся къ t_0, когда M приближается къ M_0, то этихъ условій не будетъ достаточно, чтобы точка M_0, соотвѣтствующая значенію t_0 параметра, была особою точкою. Такъ, напримѣръ, для кривой, опредѣляемой уравненіями $x=t^3, y=t^4, z=t^6$, начало координатъ не будетъ особою точкою.

194. Поверхности. — Часть поверхности S называется аналитическою, если вблизи каждой точки M_0 этой части поверхности координаты x, y, z перемѣнной точки M могутъ быть разложены въ цѣлые двойные ряды, расположенные по степенямъ параметровъ $t-t_0$, $u-u_0$,

$$\left.\begin{aligned} x-x_0 &= a_{10}(t-t_0)+a_{01}(u-u_0)+\dots, \\ y-y_0 &= b_{10}(t-t_0)+b_{01}(u-u_0)+\dots, \\ z-z_0 &= c_{10}(t-t_0)+c_{01}(u-u_0)+\dots, \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

— сходящіеся, если абсолютныя значенія разностей $t-t_0$, $u-u_0$ не превосходятъ нѣкоторыхъ предѣловъ. Точка M_0 поверхности S называется обыкновенною точкою, если вблизи этой точки одна изъ трехъ разностей $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ можетъ быть разложена въ двойной цѣлый рядъ, расположенный по степенямъ двухъ другихъ разностей. Всякая точка M_0, для которой три опредѣлителя

$$\frac{D(y,z)}{D(t,u)}, \quad \frac{D(z,x)}{D(t,u)}, \quad \frac{D(x,y)}{D(t,u)}$$

не равны одновременно нулю, есть обыкновенная точка поверхности. Напримѣръ, если первый опредѣлитель не равенъ нулю, то изъ двухъ послѣднихъ уравненій (64) мы получимъ разложенія $t-t_0$, $u-u_0$ по степенямъ $y-y_0$, $z-z_0$ и, вставляя эти разложенія въ первое уравненіе, получимъ разложеніе $x-x_0$ по степенямъ $y-y_0$ и $z-z_0$.

Предположимъ, что поверхность S дана неявнымъ уравненіемъ $F(x,y,z)=0$; пусть будутъ x_0, y_0, z_0 координаты какой-нибудь точки M_0 этой поверхности. Если функцію $F(x,y,z)$ можно разложить въ тройной цѣлый рядъ по степенямъ $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, и если при этомъ три частныхъ производныхъ $\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial y_0}, \frac{\partial F}{\partial z_0}$ не равны одновременно нулю, то изъ общей теоремы (§ 188) слѣдуетъ, что точка M_0 есть обыкновенная точка.

Примѣчаніе. — Данное выше опредѣленіе обыкновенной точки кривой и поверхности не зависитъ отъ выбора осей координатъ. Предположимъ, напримѣръ, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть обыкновенная точка поверхности S. Тогда координаты сосѣдней точки выразятся формулами вида (64), причемъ три опредѣлителя $\frac{D(y,z)}{D(t,u)}, \frac{D(z,x)}{D(t,u)}, \frac{D(x,y)}{D(t,u)}$ при $t=t_0$, $u=u_0$ не равны одновременно нулю. Преобразованіе координатъ замѣняетъ пере-

мѣнныя x, y, z тремя новыми перемѣнными X, Y, Z, представляющими линейныя функціи старыхъ

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1, \\ Y &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2, \\ Z &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3, \end{aligned}$$

причемъ опредѣлитель $\Delta = \frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}$ отличенъ отъ нуля. Замѣняя x, y, z ихъ разложеніями (64), мы получимъ для X, Y, Z три новыхъ разложенія прежняго вида, причемъ при $t = t_0$, $u = u_0$ не можетъ быть одновременно.

$$\frac{D(X, Y)}{D(t, u)} = \frac{D(Y, Z)}{D(t, u)} = \frac{D(Z, X)}{D(t, u)} = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулъ преобразованія мы найдемъ

$$\begin{aligned} x &= A_1 X + B_1 Y + C_1 Z + D_1, \\ y &= A_2 X + B_2 Y + C_2 Z + D_2, \\ z &= A_3 X + B_3 Y + C_3 Z + D_3, \end{aligned}$$

и легко видѣть, что три приведенныхъ выше функціональныхъ опредѣлителя отъ X, Y, Z могутъ одновременно равняться нулю только въ томъ случаѣ, если равны нулю три опредѣлителя отъ перемѣнныхъ x, y, z.

IV. — ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКІЕ РЯДЫ. — РЯДЫ ИНОГО ВИДА.

195. Вычисленіе коэффиціентовъ. — Мы займемся здѣсь рядами совершенно иного характера, чѣмъ ряды, изученные нами выше. Въ первый разъ тригонометрическіе ряды, повидимому, разсматривались Даніиломъ Бернульи (Daniel Bernoulli) въ задачѣ о колебаніи струнъ. Тотъ способъ опредѣленія коэффиціентовъ, который мы здѣсь изложимъ, принадлежитъ Эйлеру.

Пусть будетъ $f(x)$ функція перемѣннаго x, опредѣленная въ промежуткѣ (a, b) (§ 2). Мы предположимъ сначала, что a и b соотвѣтственно равны $-\pi$ и $+\pi$; этого всегда можно достигнуть, взявъ новое перемѣнное x', связанное съ x соотношеніемъ

$$x' = \frac{2\pi x - (a+b)\pi}{b-a}.$$

Предположимъ, что при всѣхъ значеніяхъ x, заключающихся между $-\pi$ и $+\pi$, мы имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\dots \\ +(a_m\cos mx+b_m\sin mx)+\dots, \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

гдѣ $a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m, \dots$ — неизвѣстные постоянные коэффиціенты. Эти коэффиціенты можно опредѣлить слѣдующимъ простымъ пріемомъ. Напомнимъ сначала слѣдующія очевидныя формулы, въ которыхъ предполагается, что m и n — цѣлыя положительныя числа:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\,dx=0; \\ &\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\,dx=0, \quad \text{если } m\neq 0; \\ &\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(m-n)x+\cos(m+n)x}{2}\,dx=0, \\ &\text{если } m\neq n; \\ &\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2 mx\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}\,dx=\pi, \quad \text{если } m\neq 0; \\ &\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x}{2}\,dx=0, \\ &\text{если } m\neq n \\ &\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2 mx\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-\cos 2mx}{2}\,dx=\pi, \quad \text{если } m\neq 0; \\ &\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{2}\,dx=0. \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

Проинтегрируемъ обѣ части равенства (65) между предѣлами $-\pi$ и $+\pi$, причемъ въ правой части произведемъ интегрированіе почленно; мы получимъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}dx=\pi a_0;$$

отсюда найдемъ значеніе a_0. Умножимъ теперь обѣ части соотношенія (65) на $\cos mx$ или $\sin mx$ и проинтегрируемъ между предѣлами $-\pi$ и $+\pi$. Единственнымъ членомъ въ правой части, интегралъ котораго между предѣлами $-\pi$ и $+\pi$ не будетъ равенъ нулю, будетъ членъ съ $\cos^2 mx$ или $\sin^2 mx$; такимъ образомъ мы получимъ слѣдующія формулы

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos mx\,dx=\pi a_m, \quad \int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin mx\,dx=\pi b$$

Слѣдовательно, значенія всѣхъ коэффиціентовъ опредѣлятся формулами

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha, \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\,d\alpha, \\ b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

Приведенное здѣсь вычисленіе представляетъ не болѣе, какъ наведеніе. Въ самомъ дѣлѣ, мы предположили, что разложеніе функціи $f(\alpha)$ въ рядъ вида (65) возможно, и что, кромѣ того, это разложеніе — сходящееся между предѣлами $-\pi$ и $+\pi$. Но нельзя быть увѣреннымъ заранѣе, что оба эти условія удовлетворяются. Поэтому необходимо изслѣдовать, будетъ ли полученный такимъ образомъ рядъ сходящимся, и будетъ ли его сумма равна $f(x)$. Замѣнивъ коэффиціенты a_i, b_i ихъ значеніями (67) и сдѣлавъ приведенія, мы найдемъ для суммы $(m+1)$ первыхъ членовъ ряда (65) выраженіе

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \ldots + \cos m(\alpha - x)\right] d\alpha.$$

Но по извѣстной тригонометрической формулѣ имѣемъ

$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos m\alpha = \frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

и, слѣдовательно,

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\dfrac{\alpha - x}{2}}\,d\alpha,$$

или, полагая $\alpha = x + 2y$,

$$S_{m+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2y)\,\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}\,dy. \qquad (68)$$

Вся трудность состоитъ въ томъ, чтобы найти предѣлъ этой суммы при неограниченномъ возрастаніи цѣлаго числа m. Для рѣшенія этого вопроса предположимъ, что функція $f(x)$ удовлетворяетъ слѣдующимъ условіямъ:

1. Функція $f(x)$, вообще, непрерывна между $-\pi$ и $+\pi$ за исключеніемъ к о н е ч н а г о числа значеній перемѣннаго x, при которыхъ она сразу переходитъ съ одного значенія къ другому

слѣдующимъ образомъ. Пусть будетъ c какое-нибудь число, заключающееся между $-\pi$ и $+\pi$. Всегда возможно, при любомъ значеніи этого числа c, найти такое положительное число h, чтобы функція $f(x)$ была непрерывною какъ между $c-h$ и c, такъ и между c и $c+h$. Пусть будетъ ε какое-нибудь произвольно малое положительное число. Когда ε стремится къ нулю, то $f(c+\varepsilon)$ стремится къ нѣкоторому предѣлу $f(c+0)$, а $f(c-\varepsilon)$ — къ нѣкоторому предѣлу $f(c-0)$. Если $f(x)$ при $x=c$ непрерывна, то, очевидно, $f(c)=f(c+0)=f(c-0)$. Но если оба предѣла $f(c+0)$ и $f(c-0)$ имѣютъ различныя значенія, то функція $f(c)$ при $x=c$ будетъ прерывною, и мы условимся принимать за $f(c)$ среднее ариѳметическое $\frac{f(c+0)+f(c-0)}{2}$. Очевидно, что послѣднее равенство имѣетъ мѣсто также и для всѣхъ точекъ, въ которыхъ функція непрерывна. Мы предположимъ, кромѣ того, что при приближеніи ε къ нулю $f(-\pi+\varepsilon)$ и $f(\pi-\varepsilon)$ имѣютъ предѣлы $f(-\pi+0)$ и $f(\pi-0)$. При существованіи точекъ прерыва, кривая, представляемая уравненіемъ $y=f(x)$, будетъ имѣть видъ, аналогичный виду кривой на черт. 11 (стр. 168). Мы видѣли, что такая функція $f(x)$ интегрируема во всякомъ промежуткѣ, заключающемся между $-\pi$ и $+\pi$ (§ 79); очевидно, что произведеніе функціи $f(x)$ на любую непрерывную функцію будетъ также интегрируемо въ томъ же промежуткѣ.

2. Можно разбить промежутокъ $(-\pi, +\pi)$ на конечное число промежутковъ, въ каждомъ изъ которыхъ функція $f(x)$ будетъ постоянно возрастающею или постоянно убывающею.

Для краткости мы будемъ говорить, что такая функція $f(x)$ удовлетворяетъ условіямъ Дирикле въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$. Очевидно, что всякая функція, непрерывная въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$ и имѣющая въ этомъ промежуткѣ только конечное число maxima и minima, тѣмъ самымъ удовлетворяетъ условіямъ Дирикле.

196. Изслѣдованіе интеграла $\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx$. — Полученное выше выраженіе для суммы S_{m+1} приводитъ къ разысканію предѣла опредѣленнаго интеграла

$$\int_0^h f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}dx$$

при неограниченномъ возрастаніи n. Первое вполнѣ строгое

изслѣдованіе этого вопроса принадлежитъ Леженъ-Дирикле*). Въ нашемъ изложеніи мы отчасти будемъ слѣдовать методу О. Бонне**).

Разсмотримъ предварительно опредѣленный интегралъ

$$J = \int_0^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx, \tag{69}$$

гдѣ h — положительное число, меньшее π, и $\varphi(x)$ — функція, удовлетворяющая въ промежуткѣ $(0, h)$ условіямъ Дирикле. Если $\varphi(x)$ обращается въ постоянное C, то предѣлъ интеграла J найти легко. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $nx = y$, имѣемъ

$$J = C \int_0^{nh} \frac{\sin y}{y} dy;$$

слѣдовательно, при неограниченномъ возрастаніи n, J имѣетъ предѣломъ $\frac{\pi}{2} C$ (§ 176, формула 39).

Предположимъ теперь, что функція $\varphi(x)$ положительна и убываетъ въ промежуткѣ отъ 0 до h. Такъ какъ подъинтегральная функція мѣняетъ знакъ, когда x принимаетъ одно изъ значеній вида $\frac{k\pi}{n}$, то мы можемъ представить интегралъ J въ видѣ

$$J = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^k u_k + \ldots + (-1)^m \theta u_m, \quad (0 < \theta < 1),$$

гдѣ

$$u_k = \left| \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx \right|,$$

причемъ мы предполагаемъ, что верхній предѣлъ h содержится между $\frac{m\pi}{n}$ и $\frac{(m+1)\pi}{n}$. Интегралы $u_0, u_1, u_2, \ldots$ идутъ въ убывающемъ порядкѣ; въ самомъ дѣлѣ, полагая въ интегралѣ u_k $nx = k\pi + y$, получимъ

$$u_k = \int_0^\pi \varphi\left(\frac{y + k\pi}{n}\right) \frac{\sin y}{y + k\pi} dy.$$

Но при тѣхъ предположеніяхъ, какія мы сдѣлали относительно свойствъ функціи $\varphi(x)$, этотъ интегралъ уменьшается съ воз-

*) Crelle's Journal, т. IV; 1829.

**) Mémoires des savants étrangers, publiés par l'Académie de Belgique, т. XXIII.

растаніемъ указателя k. Такъ какъ интегралъ J можно представить въ двухъ видахъ

$$J=u_0-(u_1-u_2)-(u_3-u_4)-\ldots,$$
$$J=u_0-u_1+(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\ldots,$$

то отсюда слѣдуетъ, что J заключается между u_0 и u_0-u_1. Такимъ образомъ J есть положительное число, меньшее u_0, т.-е. меньшее интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx.$$

Но послѣдній интегралъ, въ свою очередь, меньше интеграла

$$\varphi(+0)\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin nx}{x}\,dx=\varphi(+0)\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy=A\,\varphi(+0),$$

гдѣ A есть значеніе опредѣленнаго интеграла $\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy$.

Путемъ такого же разсужденія можно убѣдиться, что опредѣленный интегралъ

$$J'=\int_c^h \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

гдѣ c есть какое-нибудь положительное число, меньшее h, при неограниченномъ возрастаніи n стремится къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что число c заключается между $(i-1)\frac{\pi}{n}$ и $\frac{i\pi}{n}$. Какъ и выше, можно доказать, что абсолютное значеніе интеграла J' меньше

$$\left|\int_c^{\frac{i\pi}{n}} \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx\right| + \left|\int_{\frac{i\pi}{n}}^{\frac{(i+1)\pi}{n}} \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx\right|,$$

и тѣмъ болѣе меньше

$$\frac{\varphi(c)}{c}\left(\frac{i\pi}{n}-c\right)+\frac{\varphi\left(\frac{i\pi}{n}\right)}{\frac{i\pi}{n}}\frac{\pi}{n}<\frac{2\pi}{n}\,\frac{\varphi(c)}{c}.$$

Слѣдовательно, при неограниченномъ возрастаніи n, J' стремится къ нулю*).

*) Къ этому результату можно придти еще проще, воспользовавшись второю теоремою о среднемъ значеніи (§ 75). Такъ какъ функція $\varphi(x)$ убываетъ, то по формулѣ (5) (§ 75) имѣемъ

$$\int_c^h \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx=\frac{\varphi(c)}{c}\int_c^{\xi}\sin nx\,dx=\frac{1}{n}\,\frac{\varphi(c)}{c}\,(\cos nc-\cos n\xi),$$

и правая часть, очевидно, стремится къ нулю.

Для интеграла J, т. е. при $c=0$, послѣдній пріемъ не примѣнимъ. Чтобы найти предѣлъ интеграла J, возьмемъ какое-нибудь число c, заключающееся между 0 и h, такъ чтобы функція $\varphi(x)$ была непрерывна между 0 и c, и положимъ $\varphi(x)=\varphi(c)+\psi(x)$; очевидно, что $\psi(x)$ есть убывающая функція, положительная въ промежуткѣ $(0, c)$ и измѣняющаяся отъ $\varphi(+0)-\varphi(c)$ до нуля, когда x возрастаетъ отъ 0 до c. Представимъ интегралъ J въ видѣ

$$J=\varphi(c)\int_0^c \frac{\sin nx}{x}\,dx+\int_0^c \psi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx+\int_c^h \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx,$$

или, вычитая изъ обѣихъ частей $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$,

$$\left.\begin{aligned} J-\frac{\pi}{2}\varphi(+0)=\varphi(c)\left[\int_0^c \frac{\sin nx}{x}\,dx-\frac{\pi}{2}\right]+\frac{\pi}{2}[\varphi(c)-\varphi(+0)] \\ +\int_0^c \psi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx+\int_c^h \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Чтобы доказать, что предѣлъ J равенъ $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$, достаточно показать, что можно найти такое цѣлое число m, чтобы при всякомъ значеніи числа n, большемъ m, абсолютное значеніе каждаго изъ четырехъ членовъ правой части было меньше любого заранѣе даннаго положительнаго числа $\frac{\varepsilon}{4}$. На основаніи сдѣланнаго выше замѣчанія, абсолютное значеніе интеграла

$$\int_0^c \psi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx$$

меньше $A\psi(+0)=A[\varphi(+0)-\varphi(c)]$. Такъ какъ, при приближеніи x къ нулю, $\varphi(x)$ стремится къ $\varphi(+0)$, то прежде всего мы можемъ взять число c настолько близкимъ къ нулю, чтобы обѣ разности $A[\varphi(+0)-\varphi(c)]$ и $\frac{\pi}{2}[\varphi(+0)-\varphi(c)]$ были меньше $\frac{\varepsilon}{4}$. Послѣ того какъ мы такимъ образомъ выбрали значеніе для c, мы видимъ, что два остальныхъ члена правой части уравненія (70) стремятся къ нулю при неограниченномъ возрастаніи n. Слѣдовательно, можно взять число n настолько большимъ, чтобы каждый изъ этихъ четырехъ членовъ по абсолютному значенію былъ меньше $\frac{\varepsilon}{4}$. Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$\lim_{n=\infty} J=\frac{\pi}{2}\varphi(+0). \quad (71)$$

Мы доказали эту формулу при нѣкоторыхъ ограничительныхъ предположеніяхъ относительно функціи $\varphi(x)$; теперь мы постараемся отъ нихъ освободиться. Предположимъ, сначала что въ промежуткѣ $(0, h)$ функція $\varphi(x)$ убываетъ, но не остается все время положительною. Въ этомъ случаѣ всегда можно прибавить къ функціи $\varphi(x)$ такое постоянное положительное число C, чтобы сумма $\psi(x) = \varphi(x) + C$ была положительною въ промежуткѣ отъ 0 до h. Къ функціи $\psi(x)$ формула (71) примѣнима, и мы, очевидно, имѣемъ

$$\int_0^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \int_0^h \psi(x) \frac{\sin nx}{x} dx - C \int_0^h \frac{\sin nx}{x} dx;$$

но правая часть имѣетъ предѣломъ $\frac{\pi}{2}\psi(+0) - \frac{\pi}{2}C$, т.-е. $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$.

Предположимъ далѣе, что функція $\varphi(x)$ возрастаетъ отъ 0 до h; тогда функція $-\varphi(x)$ убываетъ, и мы имѣемъ

$$\int_0^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx = -\int_0^h -\varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx.$$

Слѣдовательно, и въ этомъ случаѣ интегралъ также стремится къ $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$.

Предположимъ наконецъ, что $\varphi(x)$ есть какая-угодно функція, удовлетворяющая въ промежуткѣ $(0, h)$ условіямъ Дирикле. Мы можемъ разбить этотъ промежутокъ на конечное число такихъ частичныхъ промежутковъ $(0, a)$, (a, b), $(b, c), \ldots, (l, h)$, чтобы въ каждомъ изъ нихъ функція $\varphi(x)$ была или возрастающею, или убывающею. Мы знаемъ, что интегралъ отъ 0 до a имѣетъ предѣломъ $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$. Что касается остальныхъ интеграловъ, имѣющихъ видъ

$$H = \int_a^b \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx,$$

то всѣ они стремятся къ нулю. Предположимъ, напримѣръ, что функція $\varphi(x)$ возрастаетъ въ промежуткѣ отъ a до b. Мы можемъ безчисленными способами составить функцію $\psi(x)$, возрастающую въ промежуткѣ отъ 0 до b, непрерывную отъ 0 до a и совпадающую съ $\varphi(x)$ въ промежуткѣ отъ a до b. При неограниченномъ возрастаніи n интегралы

$$\int_0^a \psi(x) \frac{\sin nx}{x} dx, \quad \int_0^b \psi(x) \frac{\sin nx}{x} dx$$

имѣютъ оба предѣломъ $\psi(+0)$; слѣдовательно, ихъ разность, которая есть не что иное, какъ H, стремится къ нулю. Такимъ образомъ, формула (71) доказана для всѣхъ функцій $\varphi(x)$, удовлетворяющихъ въ промежуткѣ $(0, h)$ условіямъ Дирикле.

Разсмотримъ теперь опредѣленный интегралъ

$$I = \int_0^h f(x) \frac{\sin nx}{\sin x} dx, \quad (0<h<\pi), \tag{72}$$

гдѣ функція $f(x)$ положительна и возрастаетъ въ промежуткѣ отъ 0 до h. Мы можемъ представить интегралъ I въ видѣ

$$I = \int_0^h \left[f(x) \frac{x}{\sin x} \right] \frac{\sin nx}{x} dx.$$

Функція $\varphi(x) = f(x) \frac{x}{\sin x}$ положительна и возрастаетъ въ промежуткѣ отъ 0 до h; кромѣ того, $f(+0) = \varphi(+0)$, и, слѣдовательно,

$$\lim_{n=\infty} I = \frac{\pi}{2} f(+0). \tag{73}$$

Выведя формулу (73) въ предположеніи, что $f(x)$ положительна и возрастаетъ въ промежуткѣ отъ 0 до h, мы можемъ затѣмъ доказать такъ же, какъ это было сдѣлано выше, что эта формула вѣрна для всякой функціи $f(x)$, удовлетворяющей въ промежуткѣ $(0, h)$ условіямъ Дирикле.

197. Ряды Фурье. — Тригонометрическіе ряды, коэффиціенты которыхъ a_m и b_m опредѣляются формулами (67), называются обыкновенно рядами Фурье (Fouier), такъ какъ Фурье первый высказалъ теорему, что всякая функція, произвольно данная въ нѣкоторомъ промежуткѣ, длина котораго равна 2π, можетъ быть представлена тригонометрическимъ рядомъ (65). Подъ словами произвольная функція онъ подразумѣвалъ функцію, представляемую графически дугами нѣсколькихъ кривыхъ, считающихся обыкновенно различными. Мы замѣнимъ это нѣсколько неопредѣленное понятіе болѣе точнымъ, ограничиваясь функціями, удовлетворяющими условіямъ Дирикле.

Чтобы доказать, что такая функція можетъ быть представлена въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$ рядомъ Фурье, нужно найти предѣлъ интеграла (68) при неограниченномъ возрастаніи m.

Разобьемъ этотъ интегралъ на два другихъ, имѣющихъ предѣлами соотвѣтственно 0 и $\frac{\pi-x}{2}$, $-\frac{\pi+x}{2}$ и 0, и положимъ во второмъ интегралѣ $y=-z$. Мы получимъ

$$S_{m+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}dz.$$

Если x заключается между $-\pi$ и $+\pi$, то значенія $\frac{\pi-x}{2}$ и $\frac{\pi+x}{2}$ заключаются между 0 и π, и, на основаніи предыдущаго параграфа, предѣлъ правой части при неограниченномъ возрастаніи m равенъ

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}f(x+0)+\frac{\pi}{2}f(x-0)\right]=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Слѣдовательно, при всякомъ значеніи перемѣннаго x, заключающемся между $-\pi$ и $+\pi$, данный рядъ — сходящійся и имѣетъ сумму $f(x)$.

Предположимъ теперь, что x равно одному изъ предѣловъ, напримѣръ, $-\pi$. Мы можемъ представить S_{m+1} въ видѣ

$$S_{m+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(-\pi+2y)\frac{\sin(2m+1)y}{\sin y}dy.$$

Первый интегралъ правой части имѣетъ предѣлъ

$$\frac{1}{2}f(-\pi+0).$$

Замѣняя во второмъ интегралѣ y черезъ $\pi-z$, получимъ

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2z)\frac{\sin(2m+1)z}{\sin z}dz;$$

этотъ интегралъ имѣетъ предѣломъ $\frac{1}{2}f(\pi-0)$. Слѣдовательно, при $x=-\pi$ сумма тригонометрическаго ряда равна

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}.$$

Очевидно, что при $x=+\pi$ эта сумма равна тому же самому предѣлу.

Будемъ изображать x не длиною, откладываемою на прямой, а дугою, откладываемою въ положительномъ направленіи на окружности, радіусъ которой равенъ единицѣ, начиная отъ точки пересѣченія этой окружности съ положительнымъ направленіемъ нѣкотораго начальнаго діаметра. Очевидно, что сумма ряда въ какой-нибудь точкѣ m окружности есть среднее ариѳметическое двухъ предѣловъ, къ которымъ стремятся суммы этого ряда въ двухъ точкахъ m', m'', взятыхъ по обѣ стороны точки m, когда эти точки m', m'' неограниченно приближаются къ точкѣ m. Если оба предѣльныхъ значенія $f(-\pi+0)$, $f(\pi-0)$ различны, то точка окружности, лежащая на отрицательномъ концѣ начальнаго діаметра, есть точка прерыва.

Такимъ образомъ, всякая функція, опредѣленная въ промежуткѣ $(-\pi,+\pi)$ и удовлетворяющая въ этомъ промежуткѣ условіямъ Дирикле, можетъ быть разложена въ этомъ промежуткѣ въ рядъ Фурье.

Вообще, пусть будетъ $f(x)$ функція, опредѣленная въ какомъ-нибудь промежуткѣ $(\alpha, \alpha+2\pi)$, длина котораго равна 2π, и удовлетворяющая въ этомъ промежуткѣ условіямъ Дирикле. Очевидно, что существуетъ одна и только одна функція $F(x)$, имѣющая періодъ 2π и совпадающая съ $f(x)$ въ промежуткѣ $(\alpha, \alpha+2\pi)$; дѣйствительно, при всякомъ значеніи x эта функція $F(x)$ представляется суммою тригонометрическаго ряда, коэффиціенты котораго a_m и b_m опредѣляются формулами (67),

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos mx\,dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin mx\,dx.$$

Предполагая, что α содержится между $2h\pi-\pi$ и $2h\pi+\pi$, мы можемъ представить коэффиціентъ a_m въ видѣ

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha-2h\pi}^{\pi} F(x)\cos mx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\alpha-2h\pi} F(x)\cos mx\,dx.$$

Такъ какъ функція $F(x)$ имѣетъ періодъ 2π и совпадаетъ въ промежуткѣ $(\alpha, \alpha+2\pi)$ съ функціею $f(x)$, то

$$\left.\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{2h\pi+\pi} f(x)\cos mx\,dx + \int_{2h\pi+\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos mx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos mx\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Точно такъ же мы нашли бы

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin mx\,dx. \qquad (75)$$

Такимъ образомъ, если функція $f(x)$ опредѣлена въ какомъ-нибудь промежуткѣ, длина котораго равна 2π, то предыдущія формулы позволяютъ вычислить коэффиціенты разложенія этой функціи въ рядъ Фурье, не приводя предѣловъ промежутка къ $-\pi$ и $+\pi$.

198. Примѣры. — 1. Пусть требуется найти рядъ Фурье, сумма котораго была бы равна -1 при $-\pi<x<0$ и $+1$ при $0<x<+\pi$. Изъ формулъ (67) имѣемъ

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 0,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos mx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos mx\,dx = 0,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin mx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin mx\,dx = \frac{2-\cos m\pi-\cos(-m\pi)}{m\pi}.$$

Если m — число четное, то b_m равно нулю; если же m — нечетное, то b_m равно $\frac{4}{m\pi}$. Умножая всѣ коэффиціенты на $\frac{\pi}{4}$, мы получимъ рядъ

$$y = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1} + \ldots. \qquad (76)$$

Если $-\pi<x<0$, то сумма этого ряда равна $-\frac{\pi}{4}$; если же $0<x<+\pi$, то его сумма равна $\frac{\pi}{4}$. Точка $x=0$ есть точка прерыва, и при $x=0$ сумма ряда равна нулю, какъ это и должно быть. Вообще, сумма ряда равна $\frac{\pi}{4}$, если $\sin x$ положительно; она равна $-\frac{\pi}{4}$, если $\sin x$ отрицательно, и равна нулю при $\sin x=0$.

Кривая, представляемая уравненіемъ (76), состоитъ изъ безчисленнаго множества прямолинейныхъ отрѣзковъ, длины которыхъ равны π, лежащихъ на прямыхъ $y=\pm\frac{\pi}{4}$, параллельныхъ оси Ox, и изъ безчисленнаго множества уединенныхъ точекъ ($y=0$, $x=k\pi$), лежащихъ на оси Ox.

2. Пусть требуется найти разложеніе перемѣннаго x въ рядъ Фурье въ промежуткѣ между 0 и 2π. Мы имѣемъ

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\,dx = 2\pi,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\cos m\,x\,dx = \left[\frac{x\sin m\,x}{m\,\pi}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{m\,\pi}\int_{0}^{2\pi}\sin m\,x\,dx = 0,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\sin m\,x\,dx = -\left[\frac{x\cos m\,x}{m\,\pi}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{m\,\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos m\,x\,dx = -\frac{2}{m}.$$

Отсюда находимъ

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}-\ldots. \qquad (77)$$

Формула (77) вѣрна для всѣхъ значеній x, заключающихся между 0 и 2π. Приравнявъ правую часть этой формулы перемѣнному y, мы получимъ уравненіе кривой, состоящей изъ безчисленнаго множества отрѣзковъ прямыхъ, параллельныхъ прямой $y=\frac{x}{2}$, и изъ безчисленнаго множества уединенныхъ точекъ.

Примѣчаніе. — Если функція, опредѣленная въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$, — четная, т.-е. если $f(-x)=f(x)$, то всѣ коэффиціенты b_m равны нулю, такъ какъ, очевидно,

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin mx\,dx=-\int_{0}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx.$$

Напротивъ, если функція $f(x)$ — нечетная, т.-е. если $f(-x)=-f(x)$, то всѣ коэффиціенты a_m равны нулю, включая сюда a_0. Если функція опредѣлена только въ промежуткѣ отъ 0 до π, то мы можемъ продолжить ее въ промежуткѣ отъ $-\pi$ до 0, положивъ

$$f(-x)=f(x), \quad \text{или} \quad f(-x)=-f(x).$$

Такимъ образомъ, въ промежуткѣ отъ 0 до π функція $f(x)$ можетъ быть также представлена рядомъ однихъ синусовъ или однихъ косинусовъ.

199. Разложеніе непрерывной функціи. Теорема Вейерштрасса. — Пусть будетъ $y=f(x)$ функція, непрерывная въ промежуткѣ (a, b). Вейерштрассъ доказалъ слѣдующее замѣчательное предложеніе. Пусть будетъ ε произвольно данное положительное число. Можно найти такой многочленъ $P(x)$, чтобы при всѣхъ значеніяхъ x въ промежуткѣ (a, b) абсолютное значеніе разности $f(x)-P(x)$ было меньше ε.

Изъ множества доказательствъ этой теоремы наиболѣе простое принадлежитъ Лебегу (Lebesgue)*). Разсмотримъ сначала слѣдующій частный случай. Пусть будетъ $\psi(x)$ функція, непрерывная въ промежуткѣ отъ -1 до $+1$ и опредѣленная слѣдующимъ образомъ: $\psi(x)=0$ при $-1\leqq x\leqq 0$, и $\psi(x)=2kx$ при $0\leqq x\leqq 1$, гдѣ k — данное постоянное число. Мы можемъ представить $\psi(x)$ въ видѣ $\psi(x)=k[x+|x|]$. Съ другой стороны, при всѣхъ значеніяхъ x, заключающихся между -1 и $+1$, мы имѣемъ

$$|x|=\sqrt{1-(1-x^2)}.$$

При этихъ значеніяхъ x, корень можно разложить въ равномѣрно сходящійся рядъ, расположенный по степенямъ $(1-x^2)$. Такимъ образомъ, $|x|$, а, слѣдовательно, и $\psi(x)$ могутъ быть представлены въ этомъ промежуткѣ многочленомъ съ любою степенью приближенія. Разсмотримъ теперь произвольную функцію $f(x)$, непрерывную въ промежуткѣ (a, b). Разобьемъ этотъ промежутокъ на n частичныхъ проме-

*) Bulletin des Sciences mathématiques, стр. 278; 1898.

жутковъ (a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a_n), причемъ $a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_{n-1}<a_n=b$, такъ чтобы колебаніе функціи $f(x)$ въ каждомъ изъ нихъ было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть будетъ L ломаная линія, состоящая изъ отрѣзковъ прямыхъ, соединяющихъ между собою въ послѣдовательномъ порядкѣ точки кривой $y=f(x)$ съ абсциссами $a_0, a_1, a_2, \ldots, b$. Ордината любой точки этой ломаной линіи, очевидно, есть непрерывная функція $\varphi(x)$ абсциссы, и абсолютное значеніе разности $f(x)-\varphi(x)$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ при $a_{\mu-1}<x<a_\mu$ функція $\varphi(x)$ содержится между $f(a_{\mu-1})$ и $f(a_\mu)$, то мы можемъ написать

$$\varphi(x)=f(a_{\mu-1})+\theta[f(a_\mu)-f(a_{\mu-1})]=f(a_{\mu-1})(1-\theta)+f(a_\mu)\theta,$$

гдѣ θ — положительное число, меньшее единицы. Отсюда имѣемъ

$$f(x)-\varphi(x)=[f(x)-f(a_{\mu-1})](1-\theta)+[f(x)-f(a_\mu)]\,\theta.$$

Такъ какъ множитель θ положителенъ и меньше единицы, то абсолютное значеніе разности $f-\varphi$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta+\theta)=\frac{\varepsilon}{2}$. Мы можемъ представить функцію $\varphi(x)$, какъ сумму n функцій, аналогичныхъ выше указанной функціи $\psi(x)$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ вершины ломаной линіи L, взятыя въ ихъ послѣдовательномъ порядкѣ. Функція $\varphi(x)$ можетъ быть представлена, какъ сумма двухъ функцій ψ_1 и φ_1; ψ_1 представляетъ въ промежуткѣ (a, b) ту прямую, на которой лежитъ сторона A_0A_1, а φ_1 — представляетъ нѣкоторую многоугольную линію $A_0'A_1'\ldots A_n'$, первая сторона которой лежитъ на оси Ox, такъ какъ въ промежуткѣ (a_0, a_1) мы должны имѣть $\varphi(x)=\psi_1(x)$. Функція $\varphi_1(x)$, въ свою очередь, равна суммѣ двухъ непрерывныхъ функцій ψ_2 и φ_2; ψ_2 въ промежуткѣ между a и a_1 равна нулю, а въ промежуткѣ между a_1 и b представляетъ прямую, на которой лежитъ сторона $A_1'A_2'$, тогда какъ φ_2 представляетъ нѣкоторую многоугольную линію $A_0''A_1''A_2''\ldots A_n''$, три вершины которой A_0'', A_1'', A_2'' лежатъ на оси Ox, и т. д.. Такимъ образомъ, мы можемъ представить $\varphi(x)$ какъ сумму n функцій $\varphi(x)=\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_n$, гдѣ ψ_i есть непрерывная функція, равная нулю между a и a_{i-1}, и представляемая отрѣзкомъ нѣкоторой прямой въ промежуткѣ между a_{i-1} и b. Сдѣлавъ замѣну перемѣннаго $X=mx+n$ и выбирая соотвѣтствующимъ образомъ числа m и n, мы можемъ представить $\psi_i(x)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ слѣдующимъ равенствомъ

$$\psi_i(x)=k[X+|X|].$$

Это показываетъ, что $\psi_i(x)$ можно представить съ любою степенью приближенія многочленомъ. Такъ какъ каждую изъ функцій ψ_i можно представить въ промежуткѣ (a, b) многочленомъ съ приближеніемъ, меньшимъ $\frac{\varepsilon}{2n}$, то ясно, что сумма этихъ многочленовъ будетъ отличаться отъ функціи $f(x)$ меньше, чѣмъ на ε.

Изъ предыдущей теоремы слѣдуетъ, что **всякая функція, непрерывная въ промежуткѣ (a, b), можетъ быть представлена въ этомъ промежуткѣ равномѣрно сходящимся рядомъ многочленовъ.** Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ послѣдовательность положительныхъ убывающихъ чиселъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, общій

членъ которой ε_n при неограниченномъ возрастаніи n стремится къ нулю. На основаніи предыдущей теоремы, для каждаго числа ε этой послѣдовательности мы можемъ найти такой многочленъ $P_i(x)$, чтобы абсолютное значеніе разности $f(x)-P_i(x)$ во всемъ промежуткѣ (a, b) было меньше ε_i. Разсмотримъ рядъ

$$P_1(x)+[P_2(x)-P_1(x)]+\ldots+[P_n(x)-P_{n-1}(x)]+\ldots.$$

Если x заключается въ промежуткѣ (a, b), то этотъ рядъ — сходящійся, и его сумма равна $f(x)$. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что сумма S_n его n первыхъ членовъ равна $P_n(x)$; слѣдовательно, разность $f(x)-S_n$, абсолютное значеніе которой остается меньшимъ ε_n, при неограниченномъ возрастаніи n стремится къ нулю. Кромѣ того, рядъ будетъ равномѣрно сходящимся, такъ какъ, взявъ n достаточно большимъ, можно сдѣлать абсолютное значеніе разности $f(x)-S_n$ меньшимъ произвольно малаго положительнаго числа при всякомъ значеніи x, заключающемся въ промежуткѣ (a, b).

200. Непрерывная функція, не имѣющая производной. — Въ заключеніе этой главы мы приведемъ данный Вейерштрассомъ примѣръ непрерывной функціи, не имѣющей производной ни при какомъ значеніи перемѣннаго. Пусть будетъ b постоянное положительное число, меньшее единицы, и a — цѣлое нечетное число. Разсмотримъ функцію $F(x)$, равную суммѣ сходящагося безконечнаго ряда

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x). \tag{78}$$

Такъ какъ этотъ рядъ — равномѣрно сходящійся во всякомъ промежуткѣ, то функція $F(x)$ непрерывна при всякомъ значеніи x. Если произведеніе ab меньше единицы, то все, сказанное о рядѣ (78), можно распространить и на рядъ, составленный изъ производныхъ отъ членовъ перваго ряда; слѣдовательно, функція $F(x)$ имѣетъ производную, которая будетъ сама непрерывною функціею. Напротивъ, мы покажемъ, что если произведеніе ab будетъ больше нѣкотораго предѣла, то рядъ (78) не будетъ имѣть производной*).

Обозначимъ черезъ m какое-нибудь цѣлое число и положимъ

$$S_m=\frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m-1} b^n\left\{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos(a^n\pi x)\right\},$$

$$R_m=\frac{1}{h}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n\left\{\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos(a^n\pi x)\right\}.$$

Тогда

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=S_m+R_m. \tag{79}$$

---

*) Замѣняя въ (78) $F(x)$ черезъ y, мы видимъ, что y есть результатъ сложенія безчисленнаго множества гармоническихъ колебательныхъ движеній съ убывающими амплитудами и періодами.

Примѣняя къ функціи $\cos(a^n\pi x)$ формулу конечныхъ приращеній, мы найдемъ, что абсолютное значеніе разности $\cos[a^n\pi(x+h)]-\cos(a^n\pi x)$ меньше $\pi a^n|h|$. Слѣдовательно, абсолютное значеніе S_m будетъ меньше

$$\pi\sum_{n=0}^{m-1}a^n b^n=\pi\frac{a^m b^m-1}{ab-1},$$

и, тѣмъ болѣе, меньше $\pi\frac{(ab)^m}{ab-1}$, если $ab>1$. Будемъ искать теперь нижній предѣлъ абсолютнаго значенія R_m, давъ приращенію h нѣкоторое частное значеніе. Мы можемъ представить $a^m x$ въ видѣ

$$a^m x=\alpha_m+\xi_m,$$

гдѣ α_m — нѣкоторое цѣлое число, и ξ_m заключается между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$. Положимъ

$$h=\frac{e_m-\xi_m}{a^m},$$

гдѣ e_m равно ± 1. Такъ какъ $|\xi_m|<\frac{1}{2}$, то ясно, что h имѣетъ знакъ, одинаковый со знакомъ e_m, и по абсолютному значенію меньше $\frac{3}{2a^m}$. При такомъ выборѣ числа h имѣемъ при $n\geqq m$

$$a^n\pi(x+h)=a^{n-m}a^m\pi(x+h)=a^{n-m}\pi(\alpha_m+e_m).$$

Такъ какъ a — число нечетное, и $e_m=\pm 1$, то произведеніе $a^{n-m}(\alpha_m+e_m)$, гдѣ $n>m$, одинаковой четности съ α_m+1, и, слѣдовательно,

$$\cos[a^n\pi(x+h)]=(-1)^{\alpha_m+1}.$$

Точно также имѣемъ

$$\cos(a^n\pi x)=\cos(a^{n-m}a^m\pi x)=\cos[a^{n-m}\pi(\alpha_m+\xi_m)]$$
$$=\cos(a^{n-m}\alpha_m\pi)\cos(a^{n-m}\xi_m\pi).$$

Такъ какъ число $a^{n-m}\alpha_m$ одинаковой четности съ α_m, то

$$\cos(a^n\pi x)=(-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\xi_m\pi).$$

Слѣдовательно, мы получаемъ

$$R_m=\frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{+\infty}b^n[1+\cos(a^{n-m}\xi_m\pi)].$$

Такъ какъ всѣ члены этого ряда положительны, то сумма этого ряда больше перваго члена и, слѣдовательно, больше b^m, такъ какъ ξ_m заключается между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$. Такимъ образомъ, мы имѣемъ

$$|R_m|>\frac{b^m}{|h|},$$

или, принимая во вниманіе, что $h<\frac{3}{2a^m}$,

$$R_m|>\frac{2}{3}(ab)^m.$$

Предположимъ, что

$$\frac{2}{3}(ab)^m > \frac{\pi(ab)^m}{ab-1},$$

для чего числа a и b должны удовлетворять неравенству

$$ab > 1+\frac{3\pi}{2}. \tag{80}$$

Тогда соотношеніе (79) показываетъ, что

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right| > |R_m| - |S_m| > \frac{2}{3}(ab)^m \frac{ab-1-\frac{3\pi}{2}}{ab-1}.$$

Будемъ теперь давать цѣлому числу m все бо́льшія значенія. При неограниченномъ возрастаніи m правая часть послѣдняго неравенства неограниченно возрастаетъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ h стремится къ нулю. Слѣдовательно, какъ бы ни было мало число ε, всегда можно найти такое приращеніе h, меньшее ε по абсолютному значенію, чтобы абсолютное значеніе $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ было больше всякаго заранѣе даннаго числа. Такимъ образомъ, если соотношеніе (80) удовлетворено, то функція $F(x)$ не имѣетъ производной ни при какомъ значеніи перемѣннаго x.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Примѣнить формулу Лагранжа къ разложенію по степенямъ x того корня уравненія $y^2=ay+x$, который обращается въ a при $x=0$.

2. Рѣшить ту же задачу для уравненія $y-a+xy^{m+1}=0$. Примѣнить результатъ къ квадратному уравненію $a-bx+cx^2=0$: разложить по степенямъ c корень, стремящійся къ $\frac{a}{b}$, когда c стремится къ нулю.

3. Вывести формулу

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\ldots.$$

4. Если x больше $-\frac{1}{2}$, то

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots.$$

5. Если $|x|<1$, то

$$x = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2.4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3+\frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5+\ldots.$$

Чему равна сумма ряда, если $|x|>1$?

6. Вывести формулу

$$(a+x)^{-n}=\frac{1}{a^n}\left[1-\frac{nx}{a+x}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3+\dots\right].$$

7. Показать, что тѣ значенія $\sin mx$ и $\cos mx$, которыя при $\sin x=0$ равны соотвѣтственно 0 и 1, разлагаются въ ряды по степенямъ $\sin x$

$$\sin mx=m\left[\sin x-\frac{m^2-1}{1.2.3}\sin^3 x+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x-\dots\right],$$

$$\cos mx=1-\frac{m^2}{1.2}\sin^2 x+\frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\sin^4 x-\dots.$$

[Можно воспользоваться дифференціальнымъ уравненіемъ

$$(1-y^2)\frac{d^2u}{dy^2}-y\frac{du}{dy}+m^2u=0,$$

которому удовлетворяютъ $\cos mx$ и $\sin mx$, разсматриваемыя, какъ функціи отъ $y=\sin x$.]

8. Вывести изъ предыдущихъ формулъ разложенія

$$\cos(n \operatorname{arc}\cos x), \quad \sin(n \operatorname{arc}\cos x).$$

ГЛАВА X.

Плоскія кривыя.

Въ Аналитической Геометріи обыкновенно разсматриваются только аналитическія линіи и поверхности. Но для существованія тѣхъ геометрическихъ элементовъ, къ опредѣленію которыхъ мы теперь переходимъ, нужно только, чтобы функціи имѣли производныя до нѣкотораго конечнаго порядка. Такъ, плоская кривая, представляемая уравненіемъ $y=f(x)$, имѣетъ касательную, если функція $f(x)$ имѣетъ производную $f'(x)$, имѣетъ радіусъ кривизны, если $f'(x)$ въ свою очередь имѣетъ производную $f''(x)$, и т. д..

I. — ОГИБАЮЩІЯ КРИВЫЯ.

201. Разысканіе огибающихъ.— Пусть дано уравненіе плоской кривой C

$$f(x, y, a)=0, \qquad (1)$$

зависящее отъ перемѣннаго параметра a. При измѣненіи этого параметра кривая C будетъ, вообще, непрерывно измѣняться по виду и по положенію. Если всѣ кривыя C касаются нѣкоторой опредѣленной кривой E, то эта кривая E называется о г и б а ю щ е ю кривыхъ C; кривыя C называются о г и б а е м ы м и кривою E. Посмотримъ, какъ по даннымъ кривымъ C узнать, имѣютъ ли эти кривыя огибающую, и какъ найти эту огибающую.

Предположимъ, что огибающая существуетъ. Пусть будутъ (x, y) координаты точки прикосновенія M кривой E съ огибаемою кривою C, соотвѣтствующею значенію a параметра. Эти координаты x, y суть неизвѣстныя функціи параметра a, удовлетворяющія уравненію (1). Чтобы ихъ найти, намъ нужно выразить, что касательная къ кривой, описываемой точкою M при измѣненіи a, совпадаетъ съ касательною

къ кривой C. Обозначимъ черезъ δx и δy количества, пропорціональныя направляющимъ косинусамъ касательной къ огибаемой кривой C, и черезъ $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}$ — производныя отъ неизвѣстныхъ функцій $x=\varphi(a), y=\psi(a)$. Тогда должно быть

$$\frac{\frac{dx}{da}}{\delta x}=\frac{\frac{dy}{da}}{\delta y}. \tag{2}$$

Такъ какъ кривая C представлена уравненіемъ (1), въ которомъ параметръ a имѣетъ постоянное значеніе, то для опредѣленія касательной къ кривой C мы имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y=0. \tag{3}$$

Съ другой стороны, и неизвѣстныя функціи $x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$ также должны удовлетворять уравненію

$$f(x, y, a)=0,$$

но a обозначаетъ здѣсь уже не постоянное, какъ ранѣе, а независимое перемѣнное; поэтому мы будемъ также имѣть

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}+\frac{\partial f}{\partial a}=0. \tag{4}$$

Условіе (2) вмѣстѣ съ уравненіями (3) и (4) даетъ

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0. \tag{5}$$

Уравненія (5) и (1) опредѣляютъ неизвѣстныя функціи $x=\varphi(a), y=\psi(a)$. Слѣдовательно, въ тѣхъ случаяхъ, когда огибающая существуетъ, мы получимъ ея уравненіе, исключивъ параметръ a изъ уравненій $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial a}=0$.

Пусть будетъ $R(x, y)=0$ результатъ исключенія параметра a изъ уравненій (1) и (5). Найдемъ, при какихъ условіяхъ эта кривая представляетъ огибающую. Пусть будетъ C_0 одна изъ кривыхъ семейства (1), соотвѣтствующая значенію a_0 параметра; далѣе, пусть будутъ (x_0, y_0) координаты точки пересѣченія M_0 кривыхъ

$$f(x, y, a_0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_0}=0.$$

Уравненія (1) и (5) опредѣляютъ двѣ функціи $x=\varphi(a)$, $y=\psi(a)$, обращающіяся при $a=a_0$ соотвѣтственно въ x_0, y_0. Слѣдовательно, при $a=a_0$ мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\left(\frac{dx}{da}\right)_0+\frac{\partial f}{\partial y_0}\left(\frac{dy}{da}\right)_0=0.$$

Изъ этого соотношенія и изъ соотношенія (3) видно, что въ точкѣ (x_0, y_0) касательная къ кривой C_0 совпадаетъ съ касательною къ кривой $R(x, y)=0$, описанной точкою (x, y), если только не будетъ одновременно $\frac{\partial f}{\partial x_0}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$, т.-е. если точка (x_0, y_0) не будетъ особою точкою кривой C_0. Такимъ образомъ, уравненіе $R(x, y)=0$ представляетъ или огибающую кривыхъ C, или же мѣсто особыхъ точекъ этихъ кривыхъ.

Этотъ результатъ можно дополнить слѣдующимъ замѣчаніемъ. Если каждая изъ кривыхъ C имѣетъ одну или нѣсколько особыхъ точекъ, то мѣсто этихъ особыхъ точекъ необходимо входитъ, какъ часть, въ кривую $R(x, y)=0$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ (x, y) координаты одной изъ этихъ особыхъ точекъ. Координаты (x, y) суть функціи отъ a, удовлетворяющія одновременно тремъ уравненіямъ

$$f(x, y, a)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

а, слѣдовательно, и уравненію $\frac{\partial f}{\partial a}=0$. Отсюда слѣдуетъ, что координаты (x, y) удовлетворяютъ уравненію $R=0$, получающемуся отъ исключенія параметра a изъ уравненій $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial a}=0$. Въ самомъ общемъ случаѣ кривая $R(x, y)=0$ состоитъ изъ двухъ аналитически различныхъ частей, изъ которыхъ одна есть собственно огибающая, тогда какъ другая представляетъ мѣсто особыхъ точекъ кривыхъ даннаго семейства.

Примѣръ. — Разсмотримъ семейство кривыхъ

$$f(x, y, a)=y^4-y^2+(x-a)^2=0.$$

Мы имѣемъ $\frac{\partial f}{\partial a}=-2(x-a)$ и, исключая a изъ уравненій $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial a}=0$, получимъ уравненіе $y^4-y^2=0$, представляющее три прямыхъ $y=0$, $y=+1$, $y=-1$. Легко видѣть, что мы можемъ получить всѣ кривыя даннаго семейства изъ кривой $y^4-y^2+x^2=0$, заставляя ее перемѣщаться параллельно Ox. Но эта послѣдняя

кривая имѣетъ двойную точку въ началѣ координатъ и касается прямыхъ $y=\pm 1$ въ точкахъ ихъ пересѣченія съ осью Oy. Слѣдовательно, прямая $y=0$ есть мѣсто двойныхъ точекъ, тогда какъ прямыя $y=\pm 1$ представляютъ огибающую въ собственномъ смыслѣ.

202. Если кривыя C имѣютъ огибающую E, то каждая точка этой огибающей есть предѣльное положеніе точки пересѣченія двухъ кривыхъ разсматриваемаго семейства, соотвѣтствующихъ двумъ безконечно близкимъ значеніямъ параметра. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ

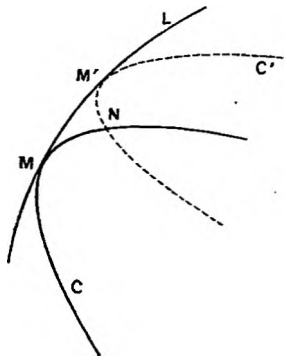
$$f(x, y, a)=0, \quad f(x, y, a+h)=0 \tag{7}$$

уравненія двухъ кривыхъ семейства, близкихъ между собою. Уравненія (7), опредѣляющія точки пересѣченія этихъ кривыхъ, очевидно, могутъ быть замѣнены системою двухъ равносильныхъ уравненій

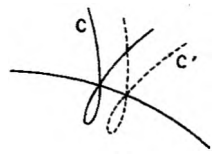
$$f(x, y, a)=0, \quad \frac{f(x, y, a+h)-f(x, y, a)}{h}=0.$$

При приближеніи h къ нулю, т.-е. при неограниченномъ приближеніи второй кривой къ первой, второе изъ этихъ уравненій обращается въ $\frac{\partial f}{\partial a}=0$, откуда видно, что въ предѣлѣ эти точки

Черт. 37 *a*.



Черт. 37 *b*.



пересѣченія обращаются въ точки огибающей кривой. Геометрически это свойство почти очевидно. Въ самомъ дѣлѣ, изъ чертежа 37 *a* видно, что точка пересѣченія N двухъ близкихъ между собою кривыхъ C, C' неограниченно приближается къ точкѣ прикосновенія M, когда кривая C' стремится слиться

съ кривою C. Точно также, изъ чертежа 37 b видно, что если кривыя (1) имѣютъ двойныя точки, то двѣ точки пересѣченія двухъ близкихъ между собою кривыхъ C, C' стремятся слиться съ этою двойною точкою, когда кривая C' неограниченно приближается къ кривой C.

Изъ предыдущаго замѣчанія понятно, почему вмѣстѣ съ огибающею мы должны получить и мѣсто особыхъ точекъ. Предположимъ, напримѣръ, что $f(x, y, a)$ есть многочленъ m-ой степени по a. Для точки $M_0(x_0, y_0)$, взятой произвольно на плоскости, уравненіе

$$f(x_0, y_0, a)=0 \qquad (8)$$

даетъ, вообще, m различныхъ корней для a; слѣдовательно, черезъ точку M_0 проходитъ m различныхъ кривыхъ разсматриваемаго семейства. Но если точка M_0 лежитъ на кривой $R(x, y)=0$, то мы имѣемъ одновременно

$$f(x_0, y_0, a)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}=0,$$

и уравненіе (8) имѣетъ двойной корень относительно a. Такимъ образомъ мы видимъ, что кривая $R(x, y)=0$ есть мѣсто тѣхъ точекъ плоскости, для которыхъ сливаются между собою двѣ изъ числа кривыхъ семейства (1), проходящихъ черезъ одну изъ этихъ точекъ. Но изъ черт. 37 a и 37 b видно, что приближается ли точка N неограниченно или къ огибающей или къ кривой, представляющей мѣсто особыхъ точекъ, — въ обѣихъ случаяхъ двѣ кривыя семейства, проходящія черезъ N, весьма близки одна къ другой и въ предѣлѣ стремятся слиться.

Примѣчаніе. — Часто бываетъ нужно найти огибающую кривой

$$F(x, y, a, b)=0, \qquad (9)$$

уравненіе которой содержитъ два перемѣнныхъ параметра a и b, связанныхъ соотношеніемъ $\varphi(a, b)=0$. Этотъ случай не отличается существенно отъ общаго случая, такъ какъ мы можемъ разсматривать b, какъ функцію отъ a, опредѣляемую уравненіемъ $\varphi=0$. Согласно выведенному выше правилу, мы должны присоединить къ уравненію (9) другое уравненіе, которое получимъ, приравнявъ нулю производную по a отъ лѣвой части уравненія (9),

$$\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da}=0.$$

Но изъ соотношенія $\varphi(a, b)=0$ имѣемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{db}{da}=0.$$

Исключая изъ двухъ послѣднихъ уравненій $\frac{db}{da}$, получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial b}-\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial\varphi}{\partial a}=0. \qquad (10)$$

Такимъ образомъ, мы получимъ уравненіе огибающей, исключая a и b изъ уравненій $F=0$, $\varphi=0$ и изъ уравненія (10).

203. Огибающая прямой линіи. — Возьмемъ уравненіе прямой D въ нормальномъ видѣ

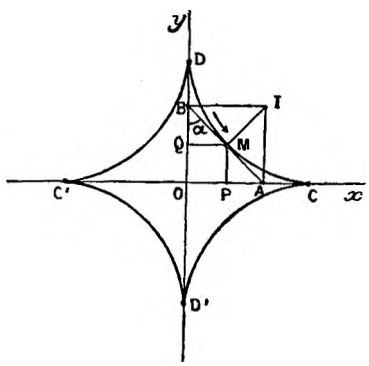
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-f(\alpha)=0, \qquad (11)$$

причемъ перемѣннымъ параметромъ служитъ уголъ α. Взявъ производную по параметру α, получимъ

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha-f'(\alpha)=0. \qquad (12)$$

Изъ уравненій (11) и (12) мы найдемъ координаты точки прикосновенія подвижной прямой D съ огибающею

Черт. 38.



$$\left.\begin{aligned} x&=f(\alpha)\cos\alpha-f'(\alpha)\sin\alpha,\\ y&=f(\alpha)\sin\alpha+f'(\alpha)\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Легко убѣдиться, что касательная къ кривой E, описываемой точкою (x, y), есть въ самомъ дѣлѣ прямая D; дѣйствительно, изъ уравненій (13) имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} dx&=-[f(\alpha)+f''(\alpha)]\sin\alpha\,d\alpha,\\ dy&=\;\;[f(\alpha)+f''(\alpha)]\cos\alpha\,d\alpha,\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Но $\operatorname{ctg}\alpha$ есть угловой коэффиціентъ прямой D. Обозначая черезъ s длину дуги огибающей, мы получимъ изъ уравненій (14)

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\pm[f(\alpha)+f''(\alpha)]d\alpha,$$

и, слѣдовательно,

$$s=\pm\left[\int f(\alpha)\,d\alpha+f'(\alpha)\right].$$

Отсюда видно, что взявъ за $f(\alpha)$ производную отъ заранѣе извѣстной функціи, мы получимъ спрямляемую кривую *).

*) Всѣ количества, входящія въ формулу для s,

$$s=\pm\left[f'(\alpha)+\int f(\alpha)\,d\alpha\right],$$

Положимъ, напримѣръ, $f(\alpha)=l\sin\alpha\cos\alpha$. Полагая въ уравненіи (11) πослѣдовательно $y=0$, $x=0$, получимъ (черт. 38) $OA=l\sin\alpha$, $OB=l\cos\alpha$, и, слѣдовательно, $AB=l$. Мы видимъ, что искомая кривая есть огибающая прямолинейнаго отрѣзка постоянной длины l, концы котораго скользятъ по двумъ взаимно перпендикулярнымъ прямымъ. Формулы (13) даютъ здѣсь

$$x=l\sin^3\alpha, \qquad y=l\cos^3\alpha,$$

и уравненіе огибающей будетъ

$$\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Это — уравненіе гипоциклоиды съ четырьмя точками возврата; она имѣетъ видъ, представленный на черт. (38). При измѣненіи α отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, точка прикосновенія M описываетъ дугу DC. Длина этой дуги, считая отъ точки D, равна

$$s=\int_0^{\alpha}3l\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha=\frac{3l}{2}\sin^2\alpha.$$

Пусть будутъ I вершина прямоугольника, построеннаго на OA и OB, и M — основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ I на AB. Изъ треугольниковъ AMI, AMP имѣемъ

$$AM=AI\cos\alpha=l\cos^2\alpha, \qquad AP=AM\sin\alpha=l\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

Слѣдовательно, $OP=OA-AP=l\sin^3\alpha$, и точка M есть точка прикосновенія прямой AB съ огибающею. Отсюда получаемъ

$$BM=l-AM=l\sin^2\alpha;$$

такимъ образомъ, длина дуги $DM=\frac{3}{2}BM$.

204. Огибающая окружности. — Пусть будетъ

$$(x-a)^2+(y-b)^2-\varrho^2=0 \qquad (15)$$

уравненіе окружности, гдѣ a, b, ϱ суть функціи перемѣннаго параметра t. Мы знаемъ, что точки, въ которыхъ окружность (15) касается огибающей, суть точки пересѣченія этой окружности съ прямою

$$(x-a)\,a'+(y-b)b'+\varrho\varrho'=0. \qquad (16)$$

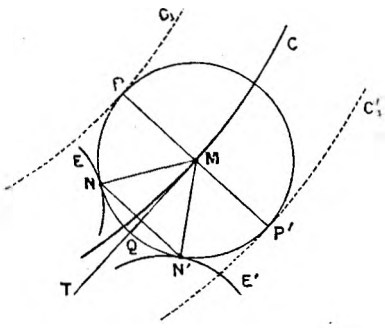
Прямая (16) перпендикулярна къ касательной къ кривой, описываемой центромъ (a, b) окружности при измѣненіи параметра t; разстояніе этой прямой отъ центра равно $\varrho\frac{d\varrho}{ds}$, гдѣ s — длина дуги кривой C, отсчи-

---

имѣютъ геометрическое значеніе. Такъ, α есть уголъ между Ox и перпендикуляромъ ON, опущеннымъ изъ начала координатъ на подвижную прямую, $f(\alpha)$ — разстояніе ON отъ начала координатъ до этой прямой, $f'(\alpha)$ равно по абсолютному значенію разстоянію MN отъ точки прикосновенія M подвижной прямой съ ея огибающею до основанія N перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на подвижную прямую. Эта формула спрямленія называется иногда ф о р м у л о ю Л е ж а н д р а.

тываемая отъ какой-либо опредѣленной точки этой кривой. Прямая (16) пересѣкаетъ окружность въ двухъ точкахъ N, N', симметричныхъ относительно касательной MT; слѣдовательно, огибающая будетъ состоять изъ двухъ вѣтвей E, E', которыя, вообще, не будутъ аналитически различными. Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ.

Черт. 39.



1. Если ϱ постоянно, то хорда прикосновенія NN' обращается въ нормаль PP' къ кривой C, и огибающая состоитъ изъ двухъ параллельныхъ кривыхъ C_1, C_1'. Мы получимъ эти кривыя, откладывая на нормали къ кривой C по обѣ стороны отъ точки M постоянную длину ϱ.

2. Если $\varrho = s + c$, то $\varrho \dfrac{d\varrho}{ds} = \varrho$, и хорда NN' обращается въ касательную къ окружности въ точкѣ Q. Въ этомъ случаѣ обѣ вѣтви огибающей сливаются въ одну кривую Γ, и нормалями къ этой огибающей Γ служатъ касательныя къ кривой C. Кривая C называется въ этомъ случаѣ развертkою кривой Γ; обратно, кривая Γ называется развертывающею кривой C (см. § 206).

Если $d\varrho > ds$, то прямая (16) не пересѣкаетъ окружности, и огибающая будетъ мнимая.

Вторичныя каустики. — Предположимъ, что радіусъ перемѣнной окружности пропорціоналенъ разстоянію центра этой окружности отъ нѣкоторой постоянной точки O. Примемъ эту точку O за начало координатъ. Тогда уравненіе окружности будетъ имѣть видъ

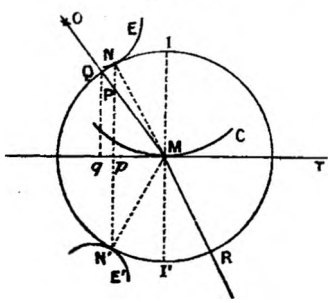
$$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2(a^2+b^2),$$

гдѣ k — постоянный множитель. Уравненіе хорды прикосновенія будетъ

$$(x-a)a'+(y-b)b'+k^2(aa'+bb')=0.$$

Пусть будутъ δ и δ' разстоянія центра $M(a, b)$ окружности отъ хорды прикосновенія NN', и отъ параллельной ей прямой, проведенной черезъ начало координатъ (черт. 40). Изъ предыдущихъ уравненій имѣемъ $\delta = k^2\delta'$. Слѣдовательно, мы получимъ хорду прикосновеній, взявъ на радіусѣ MO такую точку P, чтобы $MP = k^2 MO$, и опустивъ изъ точки P перпендикуляръ на касательную MT къ мѣсту центровъ C даннаго семейства окружностей. Предположимъ, что $k<1$, и пусть будетъ E вѣтвь огибающей кривой, расположенная по одну сторону съ точкою O относительно касательной къ кривой C. Обозначимъ черезъ i и r углы, образуемые прямыми MO и MN съ нормалью MI. Мы будемъ имѣть

Черт. 40.



$$\sin i = \frac{Mq}{MQ}, \quad \sin r = \frac{Mp}{MN}, \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{Mq}{Mp} = \frac{MQ}{MP} = \frac{1}{k}.$$

Предположимъ, что въ O находится свѣтящаяся точка, и что кривая C служитъ линіею раздѣла между средою, въ которой находится точка O, и другою средою, показатель преломленія которой относительно первой среды равенъ $\frac{1}{k}$. Послѣ преломленія падающій лучъ OM обращается въ преломленный лучъ MR, который, по закону преломленія, будетъ лежать на продолженіи прямой MN. Слѣдовательно, всѣ преломленные лучи MR будутъ нормальными къ огибающей E, которая называется вторичною каустикою черезъ преломленіе. Каустика въ собственномъ смыслѣ, или огибающая преломленныхъ лучей, есть развертка вторичной каустики.

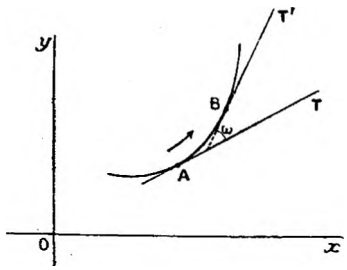
Вторая вѣтвь огибающей E' не имѣетъ, разумѣется, никакого физическаго значенія; она соотвѣтствовала бы отрицательному показателю преломленія. Если мы предположимъ $k=1$, то огибающая E обратится въ самую точку O, тогда какъ огибающая E' будетъ геометрическимъ мѣстомъ точекъ, симметричныхъ съ точкою O относительно касательной къ кривой C. Вмѣстѣ съ тѣмъ эта кривая будетъ также вторичною каустикою черезъ отраженіе для свѣтовыхъ лучей, выходящихъ изъ точки O и отраженныхъ отъ кривой C. Такимъ же образомъ можно доказать, что если изъ каждой точки кривой C мы опишемъ окружность радіусомъ, пропорціональнымъ разстоянію этой точки отъ нѣкоторой неподвижной прямой, то огибающею этихъ окружностей будутъ вторичныя каустики для свѣтовыхъ лучей, выходящихъ изъ безконечно удаленной свѣтящейся точки.

II. — КРИВИЗНА.

205. Радіусъ кривизны. — Согласно обычному представленію о кривизнѣ, кривизна линіи тѣмъ болѣе, чѣмъ быстрѣе эта линія удаляется отъ своей касательной. Чтобы перейти отъ этого нѣсколько неопредѣленнаго представленія къ точному опредѣленію, разсмотримъ сначала окружность. Ея кривизна возрастаетъ съ уменьшеніемъ радіуса; поэтому естественно принять за мѣру ея кривизны наиболѣе простую функцію радіуса, увеличивающуюся вмѣстѣ съ уменьшеніемъ этого радіуса, т.-е. обратную функцію радіуса $\frac{1}{R}$. Разсмотримъ на окружности радіуса R дугу AB, соотвѣтствующую центральному углу ω. Уголъ между касательными въ концахъ дуги A и B будетъ также равенъ ω, и длина дуги AB будетъ равна $s=R\omega$; слѣдовательно, кривизну окружности можно также измѣрять частнымъ $\frac{\omega}{s}$. Очевидно, что это новое опредѣленіе кривизны можно распространить на всякую плоскую кривую. Пусть будетъ AB дуга плоской кривой, не имѣющая точекъ перегиба; пусть будетъ, далѣе, ω уголъ между касательными въ концахъ

этой дуги, причемъ направленіе этихъ касательныхъ соотвѣтствуетъ нѣкоторому опредѣленному направленію на кривой, напримѣръ, направленію отъ A до B. Частное $\frac{\omega}{\text{arc } AB}$ называется среднею кривизною дуги AB. Если точка B неограниченно приближается къ точкѣ A, то это частное, вообще, стремится къ нѣкоторому предѣлу, который называется кривизною въ точкѣ A. Радіусъ кривизны есть радіусъ такой окружности, которая имѣетъ ту же кривизну, что и данная кривая въ точкѣ A; слѣдовательно, радіусъ кривизны есть количество, обратное кривизнѣ. Пусть будутъ s дуга кривой, отсчитываемая отъ нѣкоторой опредѣленной точки этой кривой, и α — уголъ, образуемый направленіемъ касательной съ какимъ-нибудь постояннымъ направленіемъ, напримѣръ, съ осью Ox. Очевидно, что средняя кривизна дуги AB равна абсолютному значенію частнаго $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. Отсюда, радіусъ кривизны будетъ равенъ

Черт. 41.



$$R = \pm \lim \frac{\Delta s}{\Delta \alpha} = \pm \frac{ds}{d\alpha}.$$

Предположимъ, что уравненіе разсматриваемой кривой рѣшено относительно y, т.-е. представлено въ видѣ $y = f(x)$. Мы имѣемъ

$$\alpha = \text{arc tg } y', \quad d\alpha = \frac{y''\,dx}{1+y'^2}, \quad ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

и, слѣдовательно,

$$R = \pm \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \qquad (17)$$

Такъ какъ радіусъ кривизны есть количество существенно положительное, то знакъ $\pm$ указываетъ здѣсь, что должно брать абсолютное значеніе.

Отложимъ на нормали къ кривой, начиная отъ точки A и въ направленіи вогнутости кривой, длину, равную радіусу кривизны. Мы получимъ такимъ образомъ точку I, которая называется центромъ кривизны. Кругъ, описанный изъ точки I радіусомъ, равнымъ R, называется кругомъ кри-

визны. Пусть будутъ (x_1, y_1) координаты центра кривизны. Эти координаты удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$(x_1-x)+(y_1-y)\,y'=0, \quad (x_1-x)^2+(y_1-y)^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2},$$

причемъ первое соотношеніе показываетъ, что точка I лежитъ на нормали, а второе, — что разстояніе ея отъ точки A равно R. Исключая x_1 изъ этихъ уравненій, получимъ

$$y_1-y=\pm\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Чтобы узнать, какой должно взять знакъ, замѣтимъ, что если y'' положительно, какъ на черт. (41), то y_1-y должно быть положительно, и нужно взять знакъ $+$; если же y'' отрицательно, то y_1-y должно быть также отрицательно, и потому здѣсь также нужно взять знакъ $+$. Слѣдовательно, для координатъ центра кривизны мы будемъ имѣть

$$y_1-y=\frac{1+y'^2}{y''}, \quad x_1-x=-y'\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{18}$$

Если координаты (x, y) точекъ кривой выражены въ функціи перемѣннаго параметра t, то мы имѣемъ (§ 33)

$$y'=\frac{dy}{dx}, \quad y''=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3},$$

и формулы (17) и (18) обращаются въ слѣдующія

$$\left.\begin{aligned} R&=\pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x},\\ y_1-y&=\frac{dx\,(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}, \quad x_1-x=-\frac{dy\,(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Въ точкѣ перегиба $y''=0$, и радіусъ кривизны обращается въ безконечность. Въ точкѣ возврата перваго вида y разлагается по степенямъ $x^{\frac{1}{2}}$, причемъ разложеніе начинается съ члена съ первою степенью x; слѣдовательно, y' имѣетъ конечное значеніе, тогда какъ y'' безконечно велико; такимъ образомъ, въ этой точкѣ радіусъ кривизны равенъ нулю.

Примѣчаніе. — Если координаты точекъ выражены въ функціи длины дуги кривой, причемъ эта длина принимается за независимое перемѣнное, то мы имѣемъ

$$x=\varphi(s), \quad y=\psi(s);$$

такъ какъ $dx^2+dy^2=ds^2$, то функціи φ и ψ удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$\varphi'^2(s)+\psi'^2(s)=1,$$
$$\varphi'\varphi''+\psi'\psi''=0.$$

Рѣшая эти уравненія по φ' и ψ', получимъ

$$\varphi' = \varepsilon \frac{\psi''}{\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2}}, \quad \psi' = -\varepsilon \frac{\varphi''}{\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2}},$$

гдѣ $\varepsilon = \pm 1$. Въ этомъ случаѣ формула, опредѣляющая радіусъ кривизны, принимаетъ слѣдующій изящный видъ

$$\frac{1}{R^2} = [\varphi''(s)]^2 + [\psi''(s)]^2. \qquad (20)$$

206. Развертки. — Для всякой точки кривой центромъ кривизны служитъ предѣльное положеніе точки пересѣченія двухъ безконечно близкихъ нормалей. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ уравненіе нормали

$$X - x + (Y - y)\, y' = 0,$$

гдѣ X, Y — текущія координаты. Чтобы получить точку пересѣченія этой нормали съ безконечно близкою нормалью, намъ нужно присоединить къ этому уравненію другое, которое мы получимъ, приравнявъ нулю производную по x отъ лѣвой части предыдущаго уравненія, т.-е.

$$-1 - y'^2 + (Y - y)\, y'' = 0.$$

Значеніе Y, получающееся изъ этого уравненія, есть какъ разъ ордината центра кривизны; такимъ образомъ, теорема доказана. Отсюда слѣдуетъ, что мѣсто центровъ кривизны плоской кривой есть огибающая нормалей или р а з в е р т к а этой кривой.

Прежде чѣмъ приступить къ болѣе подробному изученію отношенія между кривою и ея разверткою, мы предварительно условимся точнѣе въ выборѣ нѣкоторыхъ направленій. Будемъ отсчитывать длину дуги плоской кривой отъ какой-нибудь неподвижной точки, взятой на этой кривой, въ одну опредѣленную сторону; пусть будетъ α уголъ, образуемый съ осью Ox касательною, проведенною въ направленіи возрастанія дугъ. Изъ формулы $\operatorname{tg}\alpha = y'$ имѣемъ

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \pm \frac{dx}{ds}.$$

Въ правой части всегда нужно брать знакъ $+$; въ самомъ дѣлѣ, если x и s одновременно возрастаютъ или убываютъ, то уголъ α — острый, если же x и s измѣняются въ противоположныхъ направленіяхъ, то уголъ α — тупой (§ 81). Точно также, обозначая

черезъ β уголъ, образуемый касательною съ осью Oy, мы будемъ имѣть $\cos\beta=\frac{dy}{ds}$. Эти формулы можно также представить въ видѣ

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \sin\alpha=\frac{dy}{ds},$$

причемъ уголъ α отсчитывается въ томъ же направленіи, какъ въ тригонометріи. Замѣтимъ далѣе, что если на дугѣ нѣтъ точекъ перегиба, то на ней можно выбрать такое направленіе, чтобы s и α измѣнялись въ одинаковомъ направленіи, т.-е. или оба возрастали, или оба убывали; тогда мы будемъ имѣть вдоль всей дуги $R=\frac{ds}{d\alpha}$. При такомъ выборѣ легко видѣть, изслѣдуя на чертежѣ два возможныхъ здѣсь случая, что направленіе отрѣзка, имѣющаго началомъ точку кривой, а концомъ — центръ кривизны, всегда образуетъ съ осью Ox уголъ $\alpha_1=\alpha+\frac{\pi}{2}$. Слѣдовательно, для координатъ центра кривизны мы получимъ формулы

$$x_1=x+R\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=x-R\sin\alpha,$$
$$y_1=y+R\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=y+R\cos\alpha;$$

отсюда имѣемъ

$$dx_1=\cos\alpha\,ds-R\cos\alpha\,d\alpha-\sin\alpha\,dR=-\sin\alpha\,dR,$$
$$dy_1=\sin\alpha\,ds-R\sin\alpha\,d\alpha+\cos\alpha\,dR=+\cos\alpha\,dR.$$

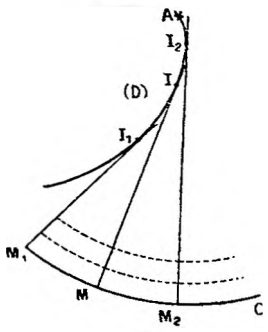
Изъ этихъ формулъ прежде всего находимъ $\frac{dy_1}{dx_1}=-\operatorname{ctg}\alpha$; эта формула показываетъ, что касательная къ разверткѣ есть нормаль къ данной кривой, какъ это уже было доказано непосредственно (§ 204; 2). Далѣе, мы имѣемъ

$$ds_1^2=dx_1^2+dy_1^2=dR^2,$$

или $ds_1=\pm dR$. Предположимъ, для опредѣленности, что при перемѣщеніи вдоль кривой C (черт. 42) отъ M_1 до M_2 радіусъ кривизны постоянно возрастаетъ, и будемъ отсчитывать дугу развертки въ такомъ направленіи, чтобы эта дуга возрастала вмѣстѣ съ R. Тогда изъ предыдущей формулы имѣемъ $ds_1=dR$, или $s_1=R+C$, и, слѣдовательно, $\text{arc}\,I_1I_2=R_2-R_1$. **Такимъ образомъ, длина дуги развертки равна разности радіусовъ кривизны кривой (C), соотвѣтствующихъ двумъ концамъ этой дуги.**

Это свойство позволяетъ, зная развертку (D), вычертить непрерывнымъ движеніемъ развертывающую (C). Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что на разверткѣ (D), начиная отъ произвольной точки A, навита нить, которая затѣмъ отходитъ отъ развертки въ точкѣ I_2, принимая направленіе касательной $I_2 M_2$. Если мы обрѣжемъ нить $A I_2 M_2$ въ M_2 и будемъ наматывать ее на развертку, все время держа нить натянутою, то конецъ нити M_2 опишетъ развертывающую (C).

Черт. 42.



Это построеніе можно также описать слѣдующимъ образомъ. Пусть будетъ s длина дуги AI развертки; отложимъ на каждой касательной къ разверткѣ длину $IM=l$ такъ, чтобы $l+s$ имѣло постоянное значеніе. Измѣняя это постоянное, мы получимъ безконечное множество развертывающихъ, которыя всѣ получатся изъ одной изъ нихъ, если мы будемъ откладывать на нормаляхъ къ ней произвольную постоянную длину.

Замѣтимъ, что эти свойства можно легко получить изъ общей формулы для дифференціала длины отрѣзка (§ 82)

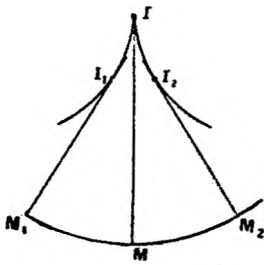
$$dl = -d\sigma_1 \cos\omega_1 - d\sigma_2 \cos\omega_2.$$

Если прямолинейный отрѣзокъ перемѣщается, оставаясь касательнымъ къ кривой, описываемой однимъ изъ его концовъ, и если онъ при этомъ остается нормальнымъ къ кривой, описываемой другимъ концомъ, то мы имѣемъ $\omega_1=\pi$, $\omega_2=\frac{\pi}{2}$; отсюда $dl-d\sigma_1=0$.

Если же отрѣзокъ нормаленъ къ одной изъ двухъ кривыхъ, и длина l постоянна, то $dl=0$, $\cos\omega_1=0$, и, слѣдовательно, $\cos\omega_2=0$.

Въ этомъ изложеніи теоремы о длинѣ дуги развертки весьма существенно предположеніе, что радіусъ кривизны измѣняется между концами разсматриваемой дуги въ одномъ и томъ же направленіи. Въ противномъ случаѣ теорема должна быть выражена иначе. Замѣтимъ прежде всего, что если въ какой-нибудь точкѣ радіусъ кривизны имѣетъ maximum или minimum, то $dR=0$, и отсюда $dx_1=dy_1=0$; слѣдовательно, развертка имѣетъ точку возврата. Предполо-

Черт. 43.



жимъ, напримѣръ, что радіусъ кривизны имѣетъ maximum въ точкѣ M; мы имѣемъ

$$\text{arc } II_1 = IM - I_1M_1,$$
$$\text{arc } II_2 = IM - I_2M_2,$$

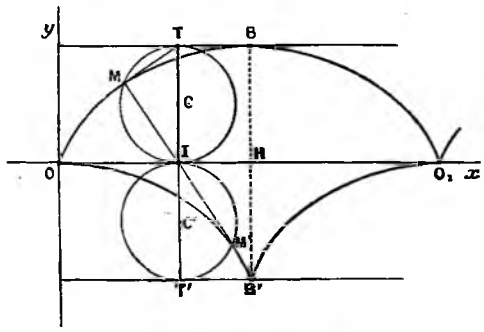
и, слѣдовательно,

$$\text{arc } I_1II_2 = 2IM - I_1M_1 - I_2M_2.$$

Въ этомъ случаѣ разность $I_1M_1 - I_2M_2$ равна не суммѣ дугъ II_1, II_2, а ихъ разности.

207. Циклоида. — Циклоидою называется кривая, которую описываетъ точка окружности, катящейся безъ скольженія по неподвижной прямой. Примемъ неподвижную прямую за ось Ox, ту точку, въ которой окружность касалась этой прямой въ началѣ движенія (т.-е. когда точка, описывающая циклоиду, была точкою касанія), — за начало координатъ, и перпендикулярную прямую — за ось Oy. Когда движущаяся окружность касается прямой Ox въ точкѣ I, то точка этой окружности, которая была сначала въ O, переходитъ въ точку M, и мы имѣемъ arc $IM = OI$. Примемъ за независимое перемѣнное уголъ φ между радіусомъ CM и радіусомъ CI. Обозначая черезъ P и Q проекціи точки M на OI и на IT, мы будемъ имѣть для координатъ точки M (черт. 44)

Черт. 44.



$$x = OI - IP = R\varphi - R\sin\varphi, \quad y = MP = IC + CQ = R - R\cos\varphi.$$

Легко убѣдиться, что эти формулы вѣрны при всякомъ значеніи угла φ. Послѣ полнаго оборота точка M опишетъ дугу OBO_1, и если бы движеніе продолжалось неограниченно, то мы получили бы безчисленное множество дугъ, равныхъ дугѣ OBO_1.

Изъ предыдущихъ формулъ имѣемъ

$$x = R(\varphi - \sin\varphi), \quad dx = R(1 - \cos\varphi)d\varphi, \quad d^2x = R\sin\varphi\, d\varphi^2,$$
$$y = R(1 - \cos\varphi), \quad dy = R\sin\varphi\, d\varphi, \quad d^2y = R\cos\varphi\, d\varphi^2.$$

Угловой коэффиціентъ касательной равенъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};$$

эта формула показываетъ, что касательною въ точкѣ M служитъ прямая MT, такъ какъ въ равнобедренномъ треугольникѣ MTC уголъ при T равенъ половинѣ внѣшняго угла $MCI = \varphi$. Слѣдовательно, нормалью въ точкѣ M будетъ прямая MI, соединяющая точку M съ точкою прикосновенія I окружности съ неподвижною прямою.

Для длины дуги циклоиды получимъ

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 [\sin^2\varphi + (1-\cos\varphi)^2] = 4R^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi^2;$$

если мы условимся отсчитывать длину дуги s такимъ образомъ, чтобы она возрастала вмѣстѣ съ φ, то будемъ имѣть

$$ds = 2R \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi.$$

Отсюда, принимая точку O за начало дугъ, имѣемъ

$$s = 4R\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Полагая $\varphi = 2\pi$, найдемъ, что длина всей дуги OBO_1 равна $8R$; слѣдовательно, длина дуги OMB между началомъ координатъ O и наивысшею точкою B равна $4R$, а длина дуги BM равна $4R\cos\frac{\varphi}{2}$. Но изъ треугольника MTC имѣемъ $MT = 2R\cos\frac{\varphi}{2}$; слѣдовательно, $\text{arc}\, BM = 2MT$.

Такимъ же образомъ для площади циклоиды получимъ

$$\mathfrak{A} = \int_0^\varphi y\, dx = \int_0^\varphi R^2(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= R^2\int_0^\varphi\left(\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi,$$

т.-е.

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right) R^2.$$

Отсюда слѣдуетъ, что площадь, заключающаяся между дугою OBO_1 и основаніемъ OO_1 равна $3\pi R^2$, т.-е. равна утроенной площади образующаго круга. [Галилей (Galilei).]

Формула для радіуса кривизны плоской кривой обращается здѣсь въ

$$\rho = \frac{8R^3\sin^3\frac{\varphi}{2}\, d\varphi^3}{2R^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi^3} = 4R\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Но изъ треугольника MCI имѣемъ $MI = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$. Слѣдовательно, $\rho = 2MI$; поэтому мы получимъ центръ кривизны, продолживъ прямую MI за точку I на длину, равную MI. Пользуясь этимъ свойствомъ, мы можемъ найти развертку циклоиды. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ окружность, симметричную съ подвижною окружностью относительно точки I. Пусть будетъ M' точка, въ которой прямая MI пересѣкаетъ эту окружность; очевидно, $M'I = IM$, такъ что M' есть центръ кривизны. Но

$$\text{arc}\, T'M' = \pi R - \text{arc}\, IM' = \pi R - \text{arc}\, IM = \pi R - OI,$$

или,

$$\text{arc}\, T'M' = OH - OI = IH = T'B'.$$

Слѣдовательно, точка M' описываетъ дугу такой же циклоиды, какъ и начальная кривая OBO_1; точка возврата этой циклоиды лежитъ

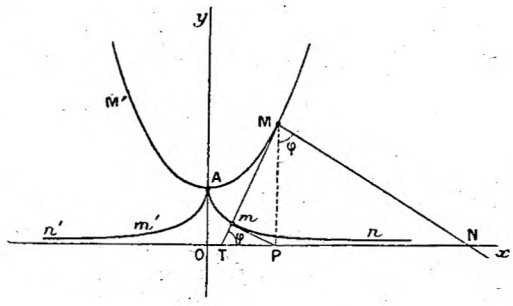
въ B', а вершина въ O. Когда точка M описываетъ дугу BO_1, точка M' описываетъ дугу $B'O_1$, симметричную съ дугою OB' относительно BB'.

208. Цѣпная линія. — Цѣпною линіею называется плоская кривая, уравненіе которой при соотвѣтствующемъ выборѣ системы прямоугольныхъ осей имѣетъ видъ

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right). \quad (21)$$

Эта кривая имѣетъ видъ MAM' (черт. 45).

Черт. 45.



Уравненіе (21) даетъ

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$y''=\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{y}{a^2}, \qquad 1+y'^2=\frac{\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4}=\frac{y^2}{a^2}.$$

Обозначая черезъ φ уголъ, образуемый касательною TM съ осью Ox, изъ выраженія для y' получимъ

$$\sin\varphi=\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}, \quad \cos\varphi=\frac{2}{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}=\frac{a}{y}.$$

Радіусъ кривизны R имѣетъ выраженіе

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\frac{y^2}{a};$$

но изъ треугольника MPN имѣемъ $MP=MN\cos\varphi$, и, слѣдовательно,

$$MN=\frac{MP}{\cos\varphi}=\frac{y^2}{a}=R.$$

Отсюда видно, что радіусъ кривизны цѣпной линіи равенъ длинѣ нормали MN; пользуясь этимъ свойствомъ, легко было бы найти развертку цѣпной линіи. Длина s дуги AM цѣпной линіи равна

$$s=\int_0^x\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}dx=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

или $s=y\sin\varphi$. Если изъ точки P опустимъ перпендикуляръ Pm на касательную MT, то изъ треугольника PMm будемъ имѣть

$$Mm=MP\sin\varphi=s;$$

слѣдовательно, длина дуги AM равна отрѣзку Mm.

209. Трактриса. — Кривая, описываемая точкою m, называется трактрисою; она представляетъ одну изъ развертывающихъ цѣпной линіи и имѣетъ въ A точку возврата (черт. 45). Очевидно, что каса-

тельною къ трактрисѣ въ точкѣ m служитъ прямая mP. Изъ треугольника MPm имѣемъ $mP=y\cos\varphi=a$; такимъ образомъ, длина отрѣзка касательной къ трактрисѣ между точкою прикосновенія m и осью Ox равна постоянному количеству a; трактриса есть единственная кривая, обладающая этимъ свойствомъ.

Изъ треугольника MTP имѣемъ также $Mm\times mT=a^2$; такимъ образомъ, для трактрисы произведеніе радіуса кривизны на длину нормали равно постоянному количеству, — но послѣднее свойство принадлежитъ кромѣ трактрисы также и безчисленному множеству другихъ плоскихъ кривыхъ.

Пусть будутъ (x_1, y_1) координаты точки m; мы имѣемъ

$$x_1=x-s\cos\varphi=x-a\,\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}},$$

$$y_1=y-s\sin\varphi=\frac{2a}{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}};$$

полагая $e^{\frac{x}{a}}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, получимъ уравненія трактрисы въ видѣ

$$x_1=a\cos\theta+a\log\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right),\qquad y_1=a\sin\theta. \tag{22}$$

При измѣненіи параметра θ отъ $\frac{\pi}{2}$ до π точка (x_1, y_1) описываетъ дугу Amn, имѣющую асимптотою ось Ox; когда же θ измѣняется отъ $\frac{\pi}{2}$ до 0, то точка (x_1, y_1) описываетъ дугу $Am'n'$, симметричную съ первою относительно оси Oy и соотвѣтствующую вѣтви AM' цѣпной линіи.

210. Естественное уравненіе кривой. — Пусть требуется найти плоскую кривую, если извѣстенъ радіусъ ея кривизны R въ функціи длины дуги s, $R=\varphi(s)$. Обозначая черезъ α уголъ, образуемый съ осью Ox направленіемъ касательной, имѣемъ $R=\pm\frac{ds}{d\alpha}$, и, слѣдовательно,

$$d\alpha=\pm\frac{ds}{R}=\pm\frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Интегрируя, имѣемъ

$$\alpha=\alpha_0\pm\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}$$

и затѣмъ находимъ x и y при помощи двухъ новыхъ квадратуръ

$$x=x_0+\int_{s_0}^{s}\cos\alpha\,ds,\qquad y=y_0+\int_{s_0}^{s}\sin\alpha\,ds.$$

Получающіяся кривыя зависятъ отъ трехъ постоянныхъ x_0, y_0, α_0; но если мы будемъ обращать вниманіе только на форму кривой, а не на ея положеніе, то получимъ, въ сущности, только одну кривую. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ частную кривую C, представляемую уравненіями

$$X=\int_{s_0}^{s}\cos\left[\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}\right]ds,\qquad Y=\int_{s_0}^{s}\sin\left[\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\varphi(s)}\right]ds.$$

Если мы въ выраженіи для α возьмемъ знакъ $+$, то общія формулы могутъ быть представлены въ видѣ

$$x = x_0 + X\cos\alpha_0 - Y\sin\alpha_0,$$
$$y = y_0 + X\sin\alpha_0 + Y\cos\alpha_0.$$

Слѣдовательно, онѣ представляютъ ту же кривую C, но иначе расположенную относительно осей координатъ. Точно также, если мы возьмемъ при $\varphi(s)$ знакъ $-$, то получимъ кривую, симметричную съ кривою C относительно оси X. Слѣдовательно, плоская кривая будетъ вполнѣ опредѣлена по своей формѣ, если извѣстенъ радіусъ кривизны кривой въ функціи длины дуги. Уравненіе $R=\varphi(s)$ называется естественнымъ уравненіемъ (équation intrinsèque) кривой. Вообще, если дано соотношеніе между двумя изъ количествъ R, s, α, то кривая будетъ вполнѣ опредѣлена по своей формѣ, и координаты ея точекъ могутъ быть получены посредствомъ квадратуръ. Такъ, если извѣстенъ радіусъ кривизны R въ функціи угла α, $R=f(\alpha)$, то мы имѣемъ $ds=f(\alpha)\,d\alpha$ и затѣмъ

$$dx = \cos\alpha\, f(\alpha)\, d\alpha,$$
$$dy = \sin\alpha\, f(\alpha)\, d\alpha,$$

и x и y получаются посредствомъ двухъ квадратуръ. Если, напримѣръ, R постоянно, то изъ предыдущихъ формулъ имѣемъ

$$x = x_0 + R\sin\alpha, \quad y = y_0 - R\cos\alpha;$$

слѣдовательно, искомая кривая есть окружность съ радіусомъ, равнымъ R. Этотъ результатъ слѣдуетъ также непосредственно изъ свойства развертки; такъ какъ длина дуги развертки искомой кривой должна равняться нулю, то развертка разсматриваемой кривой должна обратиться въ точку.

Найдемъ еще плоскую кривую, радіусъ кривизны которой былъ бы обратно пропорціоналенъ длинѣ дуги, $R=\frac{a^2}{s}$. Мы имѣемъ

$$\alpha = \int_0^s \frac{s\,ds}{a^2} = \frac{s^2}{2a^2};$$

далѣе

$$x = \int_0^s \cos\frac{s^2}{2a^2}\,ds, \quad y = \int_0^s \sin\frac{s^2}{2a^2}\,ds.$$

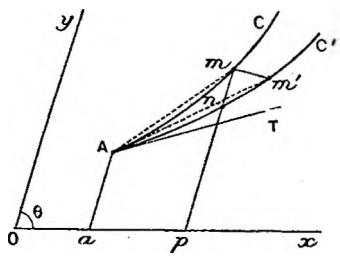
Хотя эти интегралы не выражаются черезъ элементарныя функціи, тѣмъ не менѣе не трудно составить представленіе о формѣ этой кривой. Когда s измѣняется отъ 0 до $+\infty$, то x и y, проходя черезъ безконечное множество maxima и minima, стремятся къ нѣкоторому общему конечному предѣлу (§ 91); слѣдовательно, кривая имѣетъ форму спирали и приближается асимптотически къ нѣкоторой точкѣ на прямой $y=x$*).

*) Очевидно, что эта кривая расположена симметрично относительно начала, и что значенію $s=-\infty$ соотвѣтствуетъ вторая асимптотическая точка кривой, симметричная съ первою точкою. *(Ред.)*

III. — ПРИКОСНОВЕНІЕ ПЛОСКИХЪ КРИВЫХЪ.

211. Порядокъ прикосновенія. — Пусть будутъ C и C' двѣ плоскія кривыя, касающіяся другъ друга въ точкѣ A. Установимъ между точками обѣихъ кривыхъ такое соотвѣтствіе, чтобы когда точка m кривой C, перемѣщаясь, приходитъ въ A, вмѣстѣ съ нею приходитъ въ A и соотвѣтствующая ей точка m' кривой C'. Примемъ за главное безконечно малое дугу Am, или, — что равносильно этому, — хорду Am, и опредѣлимъ сначала, какое соотвѣтствіе должно установить между точками m и m', чтобы порядокъ малости отрѣзка mm' относительно Am былъ возможно болѣе высокимъ. Отнесемъ обѣ кривыя къ системѣ прямоугольныхъ или косоугольныхъ осей координатъ, такъ чтобы ось Oy не была параллельна общей касательной AT. Пусть будутъ

Черт. 46.



$$y=f(x), \qquad (C)$$
$$Y=F(x) \qquad (C')$$

уравненія обѣихъ кривыхъ, и (x_0, y_0) — координаты точки A. Координаты точки m будутъ $[x_0+h, f(x_0+h)]$, а координаты точки m' будутъ $[x_0+k, F(x_0+k)]$, причемъ k есть нѣкоторая функція отъ h, опредѣляющая характеръ соотвѣтствія между точками обѣихъ кривыхъ и стремящаяся къ нулю вмѣстѣ съ h. Замѣтимъ, что при такомъ выборѣ оси Oy мы можемъ замѣнить главное безконечно малое Am черезъ $h=ap$ (черт. 46), такъ какъ при неограниченномъ приближеніи точки m къ точкѣ A отношеніе $\frac{ap}{Am}$ стремится къ нѣкоторому конечному предѣлу, отличному отъ нуля.

Предположимъ, что при нѣкоторомъ опредѣленномъ соотвѣтствіи между точками m и m' отрѣзокъ mm' относительно h будетъ безконечно малымъ $(r+1)$-го порядка; тогда $\overline{mm'}^2$ будетъ безконечно малымъ $(2r+2)$-го порядка. Обозначая черезъ θ уголъ между осями, будемъ имѣть

$$\overline{mm'}^2=[F(x_0+k)-f(x_0+h)+(k-h)\cos\theta]^2+(k-h)^2\sin^2\theta;$$

отсюда слѣдуетъ, что каждая изъ разностей $(k-h)$ и

$F(x_0+k)-f(x_0+h)$ должна быть по крайней мѣрѣ безконечно малою $(r+1)$-го порядка, т.-е. должно быть

$$k=h+\alpha h^{r+1}, \quad F(x_0+k)-f(x_0+h)=\beta h^{r+1},$$

причемъ α и β суть функціи отъ h, остающіяся конечными, когда h стремится къ нулю. Послѣднюю формулу мы можемъ представить въ видѣ

$$F(x_0+h+\alpha h^{r+1})-f(x_0+h)=\beta h^{r+1}.$$

Если мы разложимъ выраженіе $F(x_0+h+\alpha h^{r+1})$ по степенямъ α, то часть, зависящая отъ α, будетъ безконечно малою по крайней мѣрѣ $(r+1)$-го порядка. Отсюда слѣдуетъ, что разность

$$\Delta=F(x_0+h)-f(x_0+h)$$

есть безконечно малое по крайней мѣрѣ $(r+1)$-го порядка, но порядокъ ея малости можетъ быть и выше. Эта разность Δ представляетъ разстояніе mn между двумя точками кривыхъ C и C', лежащими на прямой, параллельной оси Oy. Такъ какъ замѣною точки m' точкою n можно только увеличить порядокъ малости отрѣзка mm', то отсюда слѣдуетъ, что порядокъ малости разстоянія между соотвѣтствующими точками обѣихъ кривыхъ будетъ всего выше въ томъ случаѣ, когда соотвѣтствующія точки m и m' лежатъ на прямой, параллельной оси Oy. Если этотъ порядокъ равенъ $(r+1)$, то говорятъ, что обѣ кривыя имѣютъ въ точкѣ A прикосновеніе r-го порядка.

Примѣчаніе. — По поводу этого опредѣленія можно замѣтить слѣдующее. Очевидно, что осью Oy можетъ служить любая прямая, не параллельная общей касательной AT. Отсюда слѣдуетъ, что при вычисленіи порядка прикосновенія двухъ кривыхъ можно считать соотвѣтственными точки обѣихъ кривыхъ, лежащія на одной прямой, параллельной произвольной прямой D, лишь бы направленіе этой прямой D отличалось отъ направленія касательной AT; изъ предыдущаго доказательства видно, что полученный порядокъ малости не зависитъ отъ направленія прямой D. Въ послѣднемъ легко убѣдиться непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что черезъ точку m кривой C проведены прямыя mm' и mn (черт. 46)

по двумъ опредѣленнымъ направленіямъ, не параллельнымъ касательной AT. Изъ треугольника $mm'n$ имѣемъ

$$\frac{mm'}{mn} = \frac{\sin \overset{\frown}{mnm'}}{\sin \overset{\frown}{mm'n}}.$$

Когда точка m приближается къ A, то углы $\overset{\frown}{mnm'}$, $\overset{\frown}{mm'n}$ имѣютъ предѣлы, отличные отъ 0 и π, такъ какъ хорда $m'n$ имѣетъ предѣломъ касательную AT; слѣдовательно, порядокъ отрѣзка mm' одинаковъ съ порядкомъ отрѣзка mn. Отсюда также слѣдуетъ, что каковъ бы ни былъ законъ соотвѣтствія между точками m' и m, mm' не можетъ быть безконечно малымъ порядка высшаго, чѣмъ порядокъ безконечно малаго mn, такъ какъ числитель $\sin \overset{\frown}{mnm'}$ имѣетъ конечный предѣлъ, отличный отъ нуля.

Мы брали за главное безконечно малое дугу Am или хорду Am; но мы получили бы тотъ же самый результатъ, взявъ за главное безконечно малое дугу An кривой C', такъ какъ хорды Am и An одинаковаго порядка малости.

Если кривыя C и C' имѣютъ прикосновеніе r-го порядка, то между точками m, m' можно установить безчисленными способами соотвѣтствіе такъ, чтобы mm' было безконечно малымъ $(r+1)$-го порядка; для этого нужно только взять $k=h+\alpha h^{s+1}$, гдѣ $s \geqq r$, и α есть функція отъ h, сохраняющая конечное значеніе при $h=0$. Если же $s<r$, то mm' будетъ только $(s+1)$-го порядка.

212. Аналитическій методъ. — Какъ видно изъ предыдущаго, для того чтобы получить порядокъ прикосновенія кривыхъ C, C', нужно вычислить порядокъ малости разности

$$Y-y=F(x_0+h)-f(x_0+h)$$

относительно h. Такъ какъ кривыя касаются между собою въ точкѣ A, то мы имѣемъ $F(x_0)=f(x_0)$, $F'(x_0)=f'(x)$; но можетъ случиться, что при $x=x_0$ будутъ равны между собою и нѣкоторыя производныя высшихъ порядковъ отъ обѣихъ функцій. Разсмотримъ общій случай. Предположимъ, что мы имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} F(x_0)=f(x_0) \quad F'(x_0)=f'(x_0), \\ F''(x_0)=f''(x_0), \quad \ldots, \quad F^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0), \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

и пусть ближайшія слѣдующія производныя $F^{(n+1)}(x_0)$, $f^{(n+1)}(x_0)$

будутъ не равны между собою. Примѣняя формулу Тэлора къ функціямъ $F(x)$ и $f(x)$, получимъ

$$Y=F(x_0)+\frac{h}{1}F'(x_0)+\ldots$$
$$+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}F^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}[F^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon],$$
$$y=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\ldots$$
$$+\frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}[f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon'],$$

гдѣ, ε, ε' — безконечно малыя; вычитая, будемъ имѣть

$$Y-y=\frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}[F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon-\varepsilon']. \quad (24)$$

Такимъ образомъ, порядокъ прикосновенія обѣихъ кривыхъ равенъ порядку тѣхъ наивысшихъ производныхъ отъ функцій $f(x)$ и $F(x)$, которыя вмѣстѣ со всѣми предыдущими производными попарно равны между собою при $x=x_0$.

Изъ условій (23), которыя были даны Лагранжемъ, видно также, что $x=x_0$ есть кратный корень $(n+1)$-го порядка уравненія $F(x)=f(x)$. Но корни этого уравненія опредѣляютъ абсциссы общихъ точекъ обѣихъ кривыхъ C, C'; слѣдовательно, можно сказать, что у кривыхъ, имѣющихъ прикосновеніе n-го порядка, $(n+1)$ изъ ихъ точекъ пересѣченія сливаются въ одну точку.

Изъ формулы (24) видно, что разность $Y-y$ мѣняетъ знакъ вмѣстѣ съ h при n четномъ и не мѣняетъ знака при n нечетномъ. Такимъ образомъ, кривыя, имѣющія прикосновеніе нечетнаго порядка, не перекрещиваются въ точкѣ прикосновенія, а кривыя, имѣющія прикосновеніе четнаго порядка, въ точкѣ прикосновенія перекрещиваются. Нетрудно видѣть, почему это будетъ такъ. Разсмотримъ, напримѣръ, кривую C', пересѣкающую кривую C въ трехъ точкахъ, близкихъ къ точкѣ A; если мы будемъ непрерывно измѣнять кривую C' такъ, чтобы всѣ три точки пересѣченія наконецъ совпали съ точкою A, то въ своемъ предѣльномъ положеніи кривая C' будетъ имѣть прикосновеніе второго порядка съ кривою C, и, построивъ чертежъ, легко видѣть, что обѣ кривыя будутъ перекрещиваться въ точкѣ A. Очевидно, что такое же разсужденіе примѣнимо и во всѣхъ другихъ случаяхъ.

Если, какъ это и будетъ въ общемъ случаѣ, уравненія обѣихъ кривыхъ не рѣшены относительно y и Y, то, пользуясь правилами для вычисленія производныхъ отъ неявныхъ функцій, можно составить необходимыя условія, при которыхъ двѣ кривыя будутъ имѣть прикосновеніе n-го порядка; такимъ образомъ, эта задача не представляетъ никакихъ особыхъ трудностей. Мы разсмотримъ только нѣсколько частныхъ случаевъ, встрѣчающихся наиболѣе часто. Предположимъ, что координаты точекъ каждой изъ двухъ кривыхъ выражены въ функціи перемѣннаго параметра

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= \varphi(t); \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

$$\left.\begin{aligned} X &= f(u), \\ Y &= \psi(u), \end{aligned}\right\} \qquad (C')$$

гдѣ x и X суть одинаковыя функціи отъ t и u. Пусть при нѣкоторомъ частномъ значеніи t_0 мы имѣемъ

$$\psi(t_0)=\varphi(t_0), \quad \psi'(t_0)=\varphi'(t_0),$$

такъ что обѣ кривыя касаются другъ друга въ точкѣ A съ координатами $f(t_0)$, $\varphi(t_0)$. Предположимъ, что здѣсь $f'(t_0)$ не равно нулю; тогда общая касательная къ обѣимъ кривымъ въ точкѣ A не будетъ параллельна оси Oy, и мы получимъ точки обѣихъ кривыхъ, имѣющія одну и ту же абсциссу, полагая $u=t$. Съ другой стороны, такъ какъ разность $x-x_0$ перваго порядка относительно $t-t_0$, то задача приводится подобно предыдущему къ вычисленію порядка малости разности $\psi(t)-\varphi(t)$ относительно $t-t_0$. Слѣдовательно, чтобы кривыя C, C' имѣли прикосновеніе не ниже n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\psi(t_0)=\varphi(t_0), \quad \psi'(t_0)=\varphi'(t_0), \quad \ldots, \quad \psi^{(n)}(t_0)=\varphi^{(n)}(t_0); \qquad (25)$$

если при этомъ производныя $\psi^{(n+1)}(t_0)$ и $\varphi^{(n+1)}(t_0)$ не равны между собою, то прикосновеніе будетъ какъ разъ n-го порядка.

Разсмотримъ еще тотъ случай, когда кривая C представлена двумя уравненіями

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \qquad (26)$$

тогда какъ кривая C' дана уравненіемъ $F(x, y)=0$. Этотъ случай можно привести къ предыдущему. Замѣнимъ въ $F(x, y)$ перемѣнное x черезъ $f(t)$; пусть будетъ $y=\psi(t)$ неявная функція, опредѣляемая соотношеніемъ

$$F[f(t), \psi(t)]=0. \qquad (27)$$

Отсюда видно, что мы можемъ принять, что кривая C' представлена системою двухъ уравненій

$$x=f(t), \quad y=\psi(t). \tag{28}$$

Чтобы кривыя C, C' имѣли въ точкѣ A, соотвѣтствующей значенію t_0 параметра, прикосновеніе n-го порядка, необходимо, чтобы удовлетворялись найденныя выше соотношенія (25). Но производныя различныхъ порядковъ отъ неявной функціи $\psi(t)$ получаются изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}f'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}\psi'(t)=0,\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}[f'(t)]^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}f'(t)\psi'(t)\\
&\qquad+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}[\psi'(t)]^2+\frac{\partial F}{\partial x}f''(t)+\frac{\partial F}{\partial y}\psi''(t)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^n F}{\partial x^n}[f'(t)]^n+\ldots+\frac{\partial F}{\partial y}\psi^{(n)}(t)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Полагая въ этихъ формулахъ $t=t_0$, $x=f(t_0)$, $\psi(t_0)=\varphi(t_0)$, $\psi'(t_0)=\varphi'(t_0)$, ..., $\psi^{(n)}(t_0)=\varphi^{(n)}(t_0)$, мы будемъ имѣть необходимыя условія того, чтобы прикосновеніе кривыхъ C, C' было n-го порядка. Эти условія можно выразить слѣдующимъ образомъ.

Положимъ

$$\mathfrak{F}(t)=F[f(t),\ \varphi(t)].$$

Чтобы данныя кривыя имѣли въ точкѣ $t=t_0$ прикосновеніе не ниже n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\mathfrak{F}(t_0)=0, \quad \mathfrak{F}'(t_0)=0, \ldots, \quad \mathfrak{F}^{(n)}(t_0)=0. \tag{30}$$

Корнями уравненія $\mathfrak{F}(t_0)=0$ служатъ значенія параметра t, соотвѣтствующія точкамъ пересѣченія обѣихъ кривыхъ. Поэтому предыдущія условія (30) показываютъ, что значеніе $t=t_0$ есть $(n+1)$-кратный корень уравненія $\mathfrak{F}(t_0)=0$, т.-е. что $(n+1)$ точекъ пересѣченія разсматриваемыхъ кривыхъ сливаются въ одну точку.

213. Соприкасающіяся кривыя.—Если дана нѣкоторая опредѣленная кривая C и другая кривая C', зависящая отъ $(n+1)$ параметровъ $a, b, c, \ldots, l$ и представляемая уравненіемъ

$$F(x, y, a, b, c, \ldots, l)=0,$$

то, вообще, возможно выбрать значенія этихъ $(n+1)$ параметровъ такимъ образомъ, чтобы въ нѣкоторой заранѣе данной точкѣ кривой C кривая C' имѣла съ кривою C прикосновеніе n-го порядка. Пусть будутъ $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ уравненія кривой C. Чтобы кривыя C, C' имѣли въ точкѣ $t=t_0$ прикосновеніе n-го порядка, должны удовлетворяться условія (30), гдѣ

$$\mathfrak{F}(t)=F[f(t), \varphi(t), a, b, c, \ldots, l].$$

Когда значеніе t_0 параметра дано, то изъ $(n+1)$ уравненій (30) можно опредѣлить значенія $(n+1)$ параметровъ a, b, $c, \ldots, l$. Полученная такимъ образомъ кривая C' называется соприкасающеюся съ кривою C.

Примѣнимъ эту теорію къ простѣйшимъ линіямъ. Уравненіе прямой $y=ax+b$ зависитъ отъ двухъ параметровъ a и b; слѣдовательно, соприкасающаяся прямая имѣетъ съ данною кривою C, вообще, прикосновеніе перваго порядка. Если $y=f(x)$ есть уравненіе кривой C, то параметры a и b должны удовлетворять соотношеніямъ

$$f(x_0)=ax_0+b, \quad f'(x_0)=a;$$

внося полученныя значенія для a и b въ уравненіе прямой, мы получимъ уравненіе касательной, какъ этого и слѣдовало ожидать. Уравненіе окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0 \qquad (32)$$

зависитъ отъ трехъ параметровъ a, b, R; слѣдовательно, соприкасающаяся окружность имѣетъ, вообще, прикосновеніе второго порядка. Пусть будетъ $y=f(x)$ уравненіе данной кривой; мы получимъ значенія a, b, R изъ условій, выражающихъ, что окружность встрѣчаетъ эту кривую въ трехъ сливающихся точкахъ. Эти условія даютъ вмѣстѣ съ уравненіемъ (32) еще два уравненія

$$x-a+(y-b)y'=0, \quad 1+y'^2+(y-b)y''=0. \qquad (33)$$

Значенія a и b, получающіяся изъ уравненій (33), тождественны съ координатами центра кривизны (§ 205); такимъ образомъ, соприкасающійся кругъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и кругъ кривизны. Такъ какъ прикосновеніе будетъ второго порядка, то отсюда слѣдуетъ, что кругъ кривизны плоской кривой пересѣкаетъ эту кривую въ точкѣ прикосновенія.

Всѣ эти результаты можно было предвидѣть. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ координаты центра кривизны зависятъ только

отъ x, y, y', y'', то двѣ кривыя, имѣющія прикосновеніе второго порядка, имѣютъ и общій центръ кривизны. Но центръ кривизны соприкасающагося круга есть, очевидно, центръ самого круга; слѣдовательно, кругъ кривизны тождественъ съ соприкасающимся кругомъ, такъ какъ послѣдній имѣетъ съ кривою прикосновенія второго порядка. Съ другой стороны, разсмотримъ два круга кривизны для двухъ близкихъ между собою точекъ кривой; разность радіусовъ, равная длинѣ дуги развертки между двумя центрами кривизны, будетъ больше разстоянія между центрами. Слѣдовательно, одинъ изъ двухъ круговъ расположенъ внутри другого, а этого не могло бы быть, если бы вблизи точки прикосновенія эти круги были расположены или оба внутри, или оба внѣ кривой C. Слѣдовательно, они должны пересѣкать кривую C.

Однако на плоской кривой могутъ быть нѣкоторыя особыя точки, въ которыхъ соприкасающійся кругъ не пересѣкаетъ кривую; это замѣчаніе связано съ однимъ общимъ свойствомъ соприкасающихся кривыхъ. Если намъ дана кривая C', зависящая отъ $(n+1)$ параметровъ, то къ $(n+1)$ уравненіямъ (30) мы можемъ присоединить еще новое уравненіе

$$\mathfrak{F}^{(n+1)}(t_0)=0,$$

если только будемъ разсматривать t_0, какъ новое неизвѣстное, которое нужно опредѣлить вмѣстѣ съ параметрами $a, b, c, \ldots, l$. Отсюда видно, что на плоской кривой C, вообще, есть такія точки, въ которыхъ прикосновеніе съ соприкасающеюся кривою C' будетъ $(n+1)$-го порядка. Такъ, напримѣръ, есть точки, въ которыхъ касательная имѣетъ съ кривою прикосновеніе второго порядка; это — точки перегиба, для которыхъ $y''=0$. Чтобы получить точки кривой, въ которыхъ соприкасающійся кругъ имѣетъ прикосновеніе третьяго порядка, нужно продифференцировать послѣднее изъ уравненій (33); это даетъ

$$3y'y''+(y-b)y'''=0;$$

исключая $y-b$ изъ этого уравненія и изъ уравненія (33), будемъ имѣть условіе

$$(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0. \qquad (34)$$

Точки, удовлетворяющія этому условію, суть тѣ, для которыхъ $\frac{dR}{dx}=0$, т.-е. въ которыхъ радіусъ кривизны имѣетъ maximum или minimum. Напримѣръ, у эллипса такими точками будутъ его вершины, у циклоиды — тѣ точки, въ которыхъ касательная параллельна основанію.

214. На соприкасающуюся кривую можно смотрѣть, какъ на предѣльное положеніе кривой C', встрѣчающей кривую C въ $(n+1)$ безконечно близкихъ точкахъ, когда всѣ эти точки слились въ одну. Разсмотримъ, напримѣръ, семейство кривыхъ, зависящихъ отъ трехъ параметровъ a, b, c; пусть будутъ t_0+h_1, t_0+h_2, t_0+h_3 значенія параметра t, близкія къ значенію t_0. Значенія параметровъ a, b, c для кривой C', встрѣчающей кривую C въ трехъ точкахъ, соотвѣтствующихъ этимъ значеніямъ параметра t, опредѣляются изъ трехъ уравненій

$$\mathfrak{F}(t_0+h_1)=0, \quad \mathfrak{F}(t_0+h_2)=0, \quad \mathfrak{F}(t_0+h_3)=0. \qquad (35)$$

Вычитая первое уравненіе изъ каждаго изъ двухъ остальныхъ и примѣняя къ разностямъ формулу конечныхъ приращеній, мы получимъ равносильную систему уравненій

$$\mathfrak{F}(t_0+h_1)=0, \quad \mathfrak{F}'(t_0+k_1)=0, \quad \mathfrak{F}'(t_0+k_2)=0, \qquad (36)$$

гдѣ k_1 заключается между h_1 и h_2, а k_2 — между h_1 и h_3. Далѣе, вычитая второе уравненіе изъ третьяго и примѣняя къ разности формулу конечныхъ приращеній, мы придемъ къ новой системѣ

$$\mathfrak{F}(t_0+h_1)=0, \quad \mathfrak{F}'(t_0+k_1)=0, \quad \mathfrak{F}''(t_0+l_1)=0, \qquad (37)$$

гдѣ l_1 заключается между k_1 и k_2. Когда h_1, h_2, h_3 стремятся къ нулю, то будутъ стремиться къ нулю и k_1, k_2, l_1, и уравненія (37) въ предѣлѣ обращаются въ

$$\mathfrak{F}(t_0)=0, \quad \mathfrak{F}'(t_0)=0, \quad \mathfrak{F}''(t_0)=0,$$

а это тѣ самыя уравненія, которыя опредѣляютъ соприкасающуюся кривую. Доказательство остается такимъ же для всякаго числа параметровъ. Мы можемъ также опредѣлить соприкасающуюся кривую, какъ предѣльное положеніе кривой C', касающейся кривой C въ p точкахъ и пересѣкающей эту кривую въ q другихъ точкахъ (гдѣ $2p+q=n+1$), когда эти $p+q$ точекъ сливаются въ одну.

Напримѣръ, соприкасающійся кругъ есть предѣльное положеніе круга, проходящаго черезъ три точки кривой C, безконечно близкія къ точкѣ прикосновенія; вмѣстѣ съ тѣмъ соприкасающійся кругъ есть также предѣльное положеніе круга, касающагося въ данной точкѣ кривой C и проходящаго черезъ другую точку этой кривой, безконечно близкую къ первой.

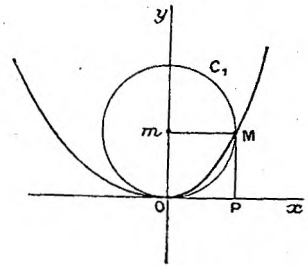
Остановимся нѣсколько на этомъ послѣднемъ свойствѣ, которое легко провѣрить. Примемъ за начало координатъ данную точку кривой, за ось Ox — касательную къ кривой, и за положительное направленіе оси Oy то направленіе нормали, которое

обращено къ центру кривизны. Въ началѣ координатъ мы будемъ имѣть $y'=0$; слѣдовательно, $R=\frac{1}{y''}$, и по формулѣ Тэлора получимъ

$$y=x^2\left(\frac{1}{2R}+\varepsilon\right),$$

гдѣ ε безконечно мало вмѣстѣ съ x. Отсюда слѣдуетъ, что R есть предѣлъ выраженія $\frac{x^2}{2y}=\frac{\overline{OP}^2}{2PM}$, когда точка M приближается къ точкѣ O. Съ другой стороны, пусть будетъ R_1 радіусъ круга C_1, касающагося оси Ox въ началѣ координатъ и проходящаго черезъ точку M. Мы имѣемъ

Черт. 47.



$$\overline{OP}^2=\overline{Mm}^2=PM(2R_1-PM),$$

или

$$\frac{\overline{OP}^2}{2PM}=R_1-\frac{PM}{2};$$

слѣдовательно, предѣлъ радіуса R_1 дѣйствительно равенъ радіусу кривизны R.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Примѣнить общія формулы къ разысканію развертокъ эллипса, гиперболы и параболы.

2. Доказать, что радіусъ кривизны коническаго сѣченія пропорціоналенъ кубу отрѣзка нормали, заключающагося между точкою пересѣченія нормали съ кривою и точкою встрѣчи нормали съ одною изъ главныхъ осей.

3. Доказать, что радіусъ кривизны параболы равенъ удвоенному отрѣзку нормали, заключающемуся между точкою пересѣченія нормали съ параболою и точкою встрѣчи нормали съ директрисою.

4. Пусть будутъ F и F' фокусы эллипса, M — какая-нибудь точка этого эллипса, MN — нормаль и N — точка встрѣчи нормали съ фокальною осью. Если изъ точки N проведемъ къ MN перпендикуляръ NK и изъ точки пересѣченія K этого перпендикуляра съ радіусомъ векторомъ MF возставимъ къ MF перпендикуляръ KO, то точка пересѣченія O перпендикуляра KO съ нормалью MN есть центръ кривизны эллипса для точки M.

5. Предыдущее построеніе не пригодно для тѣхъ вершинъ эллипса, которыя лежатъ на фокальной оси. Доказать правильность для этого случая слѣдующаго построенія. Пусть будутъ AOA' — большая ось и BOB' — малая ось. Построимъ на OA и OB прямоугольникъ $OAEB$ и опустимъ изъ вершины E перпендикуляръ на AB; точки C и D пересѣченія этого перпендикуляра съ осями эллипса будутъ центрами кривизны для вершинъ A и B.

6. Доказать, что развертка логариѳмической спирали $\rho=ae^{m\omega}$ есть спираль, равная первой.

7. Кривая, описываемая точкою окружности, катящейся безъ скольженія по нѣкоторой неподвижной окружности, называется эпициклоидою или гипоциклоидою. Доказать, что развертка такой кривой есть подобная ей кривая.

8. Пусть будетъ AB дуга кривой, на которой нѣтъ ни особыхъ точекъ, ни точекъ перегиба. Отложимъ на нормали въ каждой точкѣ m этой дуги по обѣ стороны отъ точки m длины mm_1, mm_2, равныя нѣкоторой данной длинѣ l. Когда точка m описываетъ дугу AB, точки m_1, m_2 будутъ описывать соотвѣтственно дуги A_1B_1, A_2B_2. Доказать слѣдующія соотношенія: $S_1=S-l\theta$, $S_2=S+l\theta$, гдѣ S, S_1, S_2 — длины дугъ AB, A_1B_1, A_2B_2, и θ — уголъ между нормалями въ точкахъ A и B. При этомъ предполагается, что дуга A_1B_1, расположенная съ той стороны дуги AB, гдѣ лежитъ развертка кривой AB, не встрѣчаетъ этой развертки.

9. Найти такую кривую C, чтобы радіусъ кривизны ρ въ каждой точкѣ M этой кривой и длина дуги $s=AM$, отсчитываемая отъ нѣкоторой опредѣленной точки A этой кривой, удовлетворяли соотношенію $as=\rho^2+a^2$, гдѣ a — данная длина.

10. Пусть будетъ C данная кривая третьяго порядка, имѣющая двойную точку въ точкѣ O. Стороны прямого угла MON, вращающагося около точки O, встрѣчаютъ кривую C соотвѣтственно въ точкахъ M и N. Найти огибающую прямой MN. Разсмотрѣть, въ частности, тѣ случаи, когда уравненіе кривой C будетъ $\lambda y^2=x^3$, и $x^3+y^3=\mu xy$.

11. Найти тѣ точки, въ которыхъ кривая, представляемая уравненіями

$$x=a(n\omega-\sin\omega), \qquad y=a(n-\cos\omega),$$

имѣетъ съ соприкасающимся кругомъ прикосновеніе выше второго порядка.

12. Пусть будутъ m, m_1, m_2 три близкихъ между собою точки нѣкоторой плоской кривой. Найти предѣльное значеніе радіуса круга, описаннаго около треугольника, образованнаго касательными въ точкахъ m, m_1, m_2, когда всѣ эти три точки совпадаютъ между собою.

13. Доказать, что если замкнутая кривая, безъ точекъ перегиба, имѣетъ замкнутую развертку, то полная длина этой развертки равна удвоенной разности между суммою значеній maxima радіусовъ кривизны и суммою значеній minima радіусовъ кривизны для всѣхъ точекъ первой кривой.

14. Проведемъ изъ каждой точки данной кривой отрѣзокъ постоянной длины, образующій съ нормалью къ кривой постоянный уголъ. Доказать, что каждая нормаль, проведенная къ геометрическому мѣсту концовъ этихъ отрѣзковъ, проходитъ черезъ соотвѣтствующій центръ кривизны данной кривой.

15. Пусть будутъ r радіусъ векторъ, проведенный изъ даннаго полюса въ одну изъ точекъ какой-нибудь плоской кривой, и p — разстояніе отъ полюса до касательной къ кривой въ этой точкѣ; доказать, что радіусъ кривизны R выражается формулою $R=\pm r\dfrac{dr}{dp}$.

16. Доказать, что мѣсто фокусовъ параболъ, имѣющихъ съ данною кривою въ данной точкѣ прикосновеніе второго порядка, есть окружность.

17. Найти мѣсто центровъ эллипсовъ съ даннымъ направленіемъ осей, имѣющихъ съ данною кривою въ данной точкѣ прикосновеніе второго порядка.

ГЛАВА XI.

Кривыя двойной кривизны.

I. — СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ.

215. Опредѣленіе и уравненіе. — Пусть будетъ M точка кривой двойной кривизны Γ, и MT — касательная въ этой точкѣ. Проведемъ плоскость черезъ прямую MT и черезъ нѣкоторую точку M' кривой Γ, безконечно близкую къ точку M. Когда точка M' неограниченно приближается къ точкѣ M, то эта плоскость будетъ, вообще, стремиться къ нѣкоторому опредѣленному положенію; эта предѣльная плоскость называется соприкасающеюся плоскостью кривой Γ въ точкѣ M.

Выведемъ уравненіе соприкасающейся плоскости. Пусть будутъ

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t) \tag{1}$$

выраженія координатъ точекъ кривой Γ въ функціи параметра t; пусть точкамъ M и M' соотвѣтствуютъ значенія t и $t+h$ этого параметра. Уравненіе плоскости MTM' будетъ

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

причемъ коэффиціенты A, B, C должны удовлетворять соотношеніямъ

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0, \tag{2}$$

$$A[f(t+h)-f(t)]+B[\varphi(t+h)-\varphi(t)]+C[\psi(t+h)-\psi(t)]=0. \tag{3}$$

Замѣняя въ соотношеніи (3) выраженія $f(t+h)$, $\varphi(t+h)$, $\psi(t+h)$ ихъ разложеніями по формулѣ Тэлора, получимъ

$$A\left\{hf'(t)+\frac{h^2}{1.2}[f''(t)+\varepsilon_1]\right\}+B\left\{h\varphi'(t)+\frac{h^2}{1.2}[\varphi''(t)+\varepsilon_2]\right\}+\ldots=0;$$

вычитая отсюда соотношеніе (2), умноженное на h, и раздѣ-

ливъ результатъ на $\frac{h^2}{2}$, мы получимъ систему, равносильную системѣ уравненій (2) и (3),

$$A f'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0,$$
$$A[f''(t)+\varepsilon_1]+B[\varphi''(t)+\varepsilon_2]+C[\psi''(t)+\varepsilon_3]=0,$$

гдѣ ε_1, ε_2, ε_3 безконечно малы вмѣстѣ съ h. При приближеніи h къ нулю послѣднее соотношеніе обращается въ

$$A f''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0. \qquad (4)$$

Слѣдовательно, уравненіе соприкасающейся плоскости будетъ

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \qquad (5)$$

причемъ коэффиціенты A, B, C должны удовлетворять соотношеніямъ

$$\left.\begin{aligned} A\,dx+B\,dy+C\,dz&=0,\\ A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Исключая изъ (5) и (6) коэффиціенты A, B, C, мы можемъ представить уравненіе соприкасающейся плоскости въ видѣ

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0.$$

Изъ всѣхъ плоскостей, проходящихъ черезъ касательную къ кривой, соприкасающаяся плоскость есть та, къ которой кривая всего тѣснѣе примыкаетъ. Разсмотримъ сначала какую-нибудь другую плоскость, проходящую черезъ касательную прямую; эта плоскость представится уравненіемъ (5), въ которомъ коэффиціенты A, B, C уже не удовлетворяютъ уравненію (4). Пусть будетъ $F(t)$ результатъ подстановки выраженій $f(t+h)$, $\varphi(t+h)$, $\psi(t+h)$ вмѣсто текущихъ координатъ X, Y, Z въ лѣвую часть уравненія (5); мы будемъ имѣть

$$F(t)=\frac{h^2}{1\cdot 2}[Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)+\eta],$$

гдѣ η безконечно мало вмѣстѣ съ h. Слѣдовательно, разстояніе какой-нибудь точки кривой Γ, близкой къ точкѣ M, отъ разсматриваемой плоскости есть безконечно малое второго порядка; кромѣ того, такъ какъ $F(t)$ при достаточно малыхъ значеніяхъ h сохраняетъ постоянный знакъ, то отсюда ясно,

что вблизи точки прикосновенія кривая Γ расположена вся по одну сторону касательной плоскости.

Иначе будетъ для соприкасающейся плоскости. Для нея мы имѣемъ $Af''+B\varphi''+C\psi''=0$, и чтобы получить выраженіе для $F(t)$, нужно продолжить разложеніе координатъ точекъ кривой Γ до членовъ третьяго порядка относительно h. Послѣ подстановки будемъ имѣть

$$F(t)=\frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{A\,d^3x+B\,d^3y+C\,d^3z}{dt^3}+\eta\right).$$

Отсюда видно, что разстояніе точки кривой Γ отъ соприкасающейся плоскости есть безконечно малое третьяго порядка; сверхъ того, такъ какъ $F(t)$ мѣняетъ знакъ вмѣстѣ съ h, то отсюда слѣдуетъ, что кривая двойной кривизны пересѣкаетъ соприкасающуюся плоскость въ точкѣ прикосновенія. Эти свойства выдѣляютъ соприкасающуюся плоскость изъ всѣхъ другихъ плоскостей, проходящихъ черезъ касательную прямую.

216. Стаціонарная соприкасающаяся плоскость. — Предыдущія заключенія теряютъ силу въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты A, B, C соприкасающейся плоскости удовлетворяютъ соотношенію

$$A\,d^3x+B\,d^3y+C\,d^3z=0. \qquad (7)$$

Въ этомъ случаѣ нужно продолжить разложеніе координатъ до членовъ четвертаго порядка, и мы получимъ результатъ вида

$$F(t)=\frac{h^4}{1.2.3.4}\left(\frac{A\,d^4x+B\,d^4y+C\,d^4z}{dt^4}+\eta\right).$$

Въ точкахъ, удовлетворяющихъ соотношенію (7), соприкасающаяся плоскость называется стаціонарною соприкасающеюся плоскостью. Если $A\,d^4x+B\,d^4y+C\,d^4z$ не равно нулю, — какъ это и будетъ имѣть мѣсто въ общемъ случаѣ, — то $F(t)$ не мѣняетъ знака вмѣстѣ съ h, и кривая не пересѣкаетъ стаціонарной соприкасающейся плоскости. Кромѣ того, разстояніе отъ точки кривой до стаціонарной соприкасающейся плоскости будетъ безконечно малымъ уже не третьяго, а четвертаго порядка. Если бы мы имѣли $A\,d^4x+B\,d^4y+C\,d^4z=0$, то нужно было бы продолжить разложеніе до членовъ пятаго порядка, и т. д..

Исключая A, B, C изъ соотношеній (6) и (7), мы получимъ уравненіе

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Корнями этого уравненія служатъ значенія t, соотвѣтствующія тѣмъ точкамъ кривой Γ, въ которыхъ соприкасающаяся плоскость стаціонарна. Такимъ образомъ, на каждой кривой двойной кривизны есть, вообще, нѣкоторое число точекъ, обладающихъ этимъ свойствомъ.

Посмотримъ, нѣтъ ли такихъ кривыхъ, для которыхъ всѣ соприкасающіяся плоскости были бы стаціонарными. Выражаясь болѣе точно, найдемъ всѣ функціи x, y, z перемѣннаго t, непрерывныя вмѣстѣ съ ихъ производными до третьяго порядка, подъ тѣмъ условіемъ, чтобы при измѣненіи t между предѣлами a и b $(a<b)$ предыдущій опредѣлитель Δ былъ тождественно равенъ нулю.

Предположимъ сначала, что одинъ изъ миноровъ опредѣлителя Δ относительно элементовъ третьей строки, напримѣръ, $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ не обращается въ нуль въ промежуткѣ (a, b). Изъ соотношеній

$$\begin{aligned} dz &= C_1\,dx + C_2\,dy, \\ d^2z &= C_1 d^2x + C_2 d^2y \end{aligned} \qquad (9)$$

мы найдемъ для C_1 и C_2 функціи отъ t, непрерывныя въ этомъ промежуткѣ. Такъ какъ $\Delta = 0$, то эти функціи удовлетворяютъ также соотношенію

$$d^3z = C_1\,d^3x + C_2\,d^3y. \qquad (10)$$

Дифференцируя уравненія (9) и принимая во вниманіе формулу (10), мы получимъ новыя уравненія

$$dC_1\,dx + dC_2\,dy = 0, \quad dC_1\,d^2x + dC_2\,d^2y = 0,$$

откуда будемъ имѣть $dC_1 = dC_2 = 0$. Слѣдовательно, коэффиціенты C_1, C_2 постоянны, и, интегрируя первое изъ уравненій (9), получимъ

$$z = C_1x + C_2y + C_3,$$

гдѣ C_3 — новое постоянное. Отсюда слѣдуетъ, что кривая Γ — плоская.

Если при нѣкоторомъ значеніи c параметра t, заключающемся между a и b, опредѣлитель $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ обращается въ нуль, то предыдущее разсужденіе не примѣнимо, такъ какъ при этомъ значеніи c параметра выраженія для C_1 и C_2 обращаются въ безконечность или дѣлаются неопредѣленными. Предположимъ, для опредѣленности, что въ промежуткѣ $(a,\ b)$ опредѣлитель $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ обращается въ нуль только одинъ разъ при $t=c$, и что при этомъ значеніи параметра аналогичный опредѣлитель $dx\,d^2z - dz\,d^2x$ не равенъ нулю. Изъ предыдущаго разсужденія слѣдуетъ, что всѣ точки кривой Γ, соотвѣтствующія значеніямъ параметра t въ промежуткѣ отъ a до c, лежатъ въ нѣкоторой одной плоскости P, и что всѣ точки кривой, соотвѣтствующія значеніямъ параметра отъ c до b, лежатъ въ нѣкоторой одной плоскости Q. Съ другой стороны, такъ какъ при $t=c$ миноръ $dx\,d^2z - dz\,d^2x$ не равенъ нулю, то можно выбрать настолько малое число h, чтобы этотъ миноръ не обращался въ нуль при измѣненіи t отъ $c-h$ до $c+h$. Слѣдовательно, всѣ точки кривой Γ, соотвѣтствующія значеніямъ параметра t отъ $c-h$ до $c+h$, также лежатъ въ нѣкоторой одной плоскости R. Такъ какъ эта плоскость R должна имѣть безконечное множество общихъ точекъ съ плоскостями P и Q, то эти три плоскости совпадаютъ между собою.

Обобщая это разсужденіе, мы найдемъ, что если опредѣлители

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x, \quad dx\,d^2z - dz\,d^2x, \quad dy\,d^2z - dz\,d^2y$$

не обращаются одновременно въ нуль въ промежуткѣ $(a,\ b)$, то всѣ точки кривой Γ лежатъ въ одной плоскости. Если же эти опредѣлители обращаются одновременно въ нуль, то можетъ случиться, что кривая Γ состоитъ изъ нѣсколькихъ дугъ плоскихъ кривыхъ, лежащихъ въ различныхъ плоскостяхъ и соединяющихся между собою въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ уравненіе соприкасающейся плоскости принимаетъ неопредѣленный видъ*).

Если три предыдущихъ минора въ нѣкоторомъ промежуткѣ тождественно равны нулю, то линія Γ есть прямая линія или состоитъ изъ отрѣзковъ прямыхъ линій. Напримѣръ, если $\frac{dx}{dt}$ не обращается въ нуль въ промежуткѣ $(a,\ b)$, то мы можемъ написать

$$\frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{(dx)^2} = 0, \qquad \frac{d^2z\,dx - dz\,d^2x}{(dx)^2} = 0,$$

откуда

$$dy = C_1\,dx, \qquad dz = C_2\,dx,$$

гдѣ C_1 и C_2 — постоянныя. Интегрируя еще разъ, получимъ

$$y = C_1 x + C'_1, \qquad z = C_2 x + C'_2;$$

отсюда слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ Γ есть прямая линія.

---

*) Въ первый разъ этотъ особый случай, повидимому, былъ указанъ Пеано (Peano). Очевидно, что онъ имѣетъ исключительно аналитическій интересъ.

217. Стаціонарныя касательныя. — Предыдущія изслѣдованія приводятъ насъ къ изученію на кривой двойной кривизны нѣкоторыхъ особыхъ точекъ, которыхъ мы еще не разсматривали. Это тѣ точки, для которыхъ имѣютъ мѣсто равенства

$$\frac{d^3x}{dx}=\frac{d^2y}{dy}=\frac{d^3z}{dz}. \qquad (11)$$

Касательная къ кривой въ такой точкѣ называется стаціонарною касательною. Пользуясь выраженіемъ разстоянія отъ точки до прямой, легко доказать, что разстояніе отъ какой-нибудь точки кривой Γ до касательной въ безконечно близкой точкѣ, которое будетъ, вообще, безконечно малымъ второго порядка, для стаціонарной касательной будетъ безконечно малымъ третьяго порядка. Если кривая Γ обращается въ плоскую кривую, то стаціонарными касательными будутъ касательныя въ точкахъ перегиба. Изъ разсужденій предыдущихъ параграфовъ слѣдуетъ, что единственная линія, всѣ касательныя которой стаціонарны, есть прямая.

Въ каждой точкѣ, въ которой касательная стаціонарна, мы имѣемъ $\Delta=0$, и уравненіе соприкасающейся плоскости принимаетъ неопредѣленный видъ. Но эта неопредѣленность — только кажущаяся. Если мы повторимъ для этого случая вычисленія, сдѣланныя въ началѣ § 215, продолживъ разложеніе координатъ точки M' до членовъ третьяго порядка, и воспользуемся соотношеніями (11), то найдемъ, что уравненіе плоскости, проходящей черезъ касательную въ точкѣ M и черезъ безконечно близкую точку M', можетъ быть представлено въ видѣ

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f'''(t)+\varepsilon_1 & \varphi'''(t)+\varepsilon_2 & \psi'''(t)+\varepsilon_3 \end{vmatrix}=0,$$

гдѣ ε_1, ε_2, ε_3 стремятся къ нулю одновременно съ h. Такимъ образомъ, эта плоскость стремится къ вполнѣ опредѣленному предѣльному положенію, и мы получимъ уравненіе соприкасающейся плоскости, замѣняя второе изъ условій (6) слѣдующимъ

$$Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z=0.$$

Если бы имѣли также

$$\frac{d^3x}{dx}=\frac{d^3y}{dy}=\frac{d^3z}{dz},$$

то нужно было бы замѣнить второе изъ соотношеній (6) соотношеніемъ

$$A\,d^qx+B\,d^qy+C\,d^qz=0,$$

гдѣ q есть наименьшее цѣлое число, при которомъ предыдущее соотношеніе отлично отъ соотношенія $A\,dx+B\,dy+C\,dz=0$. Мы предоставляемъ читателю доказать это предложеніе и изслѣдовать для этихъ случаевъ положеніе кривой относительно соприкасающейся плоскости.

Въ общемъ случаѣ, для стаціонарной касательной не имѣетъ мѣста соотношеніе

$$A\,d^4x+B\,d^4y+C\,d^4z=0;$$

въ такой особой точкѣ каждая касательная плоскость пересѣкается съ кривою, кромѣ соприкасающейся плоскости, которая съ кривою не пересѣкается.

218. Приложеніе къ нѣкоторымъ кривымъ. — Разсмотримъ кривыя двойной кривизны Γ, удовлетворяющія соотношенію вида

$$x\,dy - y\,dx = K\,dz, \tag{12}$$

гдѣ K — данное постоянное. Изъ этого соотношенія получимъ

$$\left.\begin{aligned} x\,d^2y - y\,d^2x &= K\,d^2z, \\ x\,d^3y - y\,d^3x + dx\,d^2y - dy\,d^2x &= K\,d^3z. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Найдемъ соприкасающіяся плоскости къ кривой Γ, проходящія черезъ данную точку (a, b, c) пространства. Координаты точки прикосновенія (x, y, z) должны удовлетворять уравненію

$$\begin{vmatrix} a-x & b-y & c-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0;$$

на основаніи соотношеній (12) и (13) это уравненіе обращается въ

$$ay - bx + K(c-z) = 0. \tag{14}$$

Слѣдовательно, точки прикосновенія соприкасающейся плоскости съ кривою Γ суть точки пересѣченія этой кривой съ плоскостью, проходящею черезъ точку (a, b, c) и представляемую уравненіемъ (14).

Замѣняя dz, d^2z, d^3z ихъ значеніями изъ (12) и (13), мы можемъ представить уравненіе $\Delta = 0$, опредѣляющее тѣ точки кривой, въ которыхъ соприкасающаяся плоскость стаціонарна, въ видѣ

$$\Delta = \frac{1}{K}\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = 0;$$

слѣдовательно, для этихъ точекъ мы имѣемъ

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2y}{dy} = \frac{y\,d^2x - x\,d^2y}{y\,dx - x\,dy} = \frac{d^2z}{dz};$$

отсюда видно, что касательная въ этихъ точкахъ также стаціонарна.

Легко получить нѣсколько кривыхъ двойной кривизны, удовлетворяющихъ соотношенію (12). Напримѣръ, можно положить

$$x = At^m, \quad y = Bt^n, \quad z = Ct^{m+n},$$

гдѣ A, B, C, m, n — постоянныя. Простѣйшими кривыми этого рода будутъ кривая двойной кривизны третьяго порядка $x = t$, $x = t^2$, $z = t^3$, и кривая двойной кривизны четвертаго порядка $x = t$, $y = t^3$, $z = t^4$. Круговая винтовая линія

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = Kt$$

удовлетворяетъ тому же условію.

Чтобы получить всѣ кривыя двойной кривизны, удовлетворяющія соотношенію (12), представимъ это соотношеніе въ видѣ

$$d(xy - Kz) = 2y\,dx.$$

Полагая

$$x = f(t), \quad xy - Kz = \varphi(t),$$

получимъ изъ предыдущаго соотношенія $2y\,f'(t) = \varphi'(t)$. Рѣшивъ эти три

уравненія относительно x, y, z, будемъ имѣть общія выраженія координатъ въ функціи перемѣннаго параметра

$$x=f(t), \quad y=\frac{\varphi'(t)}{2f'(t)}, \quad Kz=\frac{f(t)\varphi'(t)}{2f'(t)}-\varphi(t). \tag{15}$$

Эти формулы зависятъ отъ двухъ произвольныхъ функцій f и φ; но ясно, что, не нарушая общности, мы можемъ дать одной изъ этихъ функцій произвольный частный видъ, напримѣръ, положить $f(t)=t$.

II — ОГИБАЮЩІЯ ПОВЕРХНОСТИ.

Прежде чѣмъ перейти къ дальнѣйшему разсмотрѣнію кривыхъ двойной кривизны, мы остановимся нѣсколько на теоріи огибающихъ поверхностей.

219. Поверхности съ однимъ параметромъ. — Пусть будетъ

$$f(x, y, z, a)=0 \tag{16}$$

уравненіе поверхности S, зависящей отъ произвольнаго параметра a. Если существуетъ нѣкоторая поверхность E, касающаяся каждой изъ поверхностей S вдоль нѣкоторой кривой C, то эта поверхность E называется *огибающею* поверхностей S, а линія прикосновенія C поверхностей S и E — *характеристикою*.

Такимъ образомъ, чтобы узнать, имѣютъ ли данныя поверхности S огибающую, нужно изслѣдовать, можно ли опредѣлить на каждой изъ поверхностей S такую кривую C, чтобы мѣсто всѣхъ этихъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ параметра, касалось каждой поверхности S вдоль соотвѣтствующей кривой C. Пусть будутъ (x, y, z) координаты какой-нибудь точки M характеристики. Если эта точка не есть особая точка поверхности S, то уравненіе касательной плоскости къ этой поверхности въ точкѣ M будетъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial f}{\partial z}(Z-z)=0.$$

Съ другой стороны, вдоль огибающей поверхности E количества x, y, z, a будутъ функціями двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, удовлетворяющими уравненію (16), и между ихъ дифференціалами будетъ имѣть мѣсто соотношеніе

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial a}da=0 \tag{17}$$

Чтобы касательная плоскость къ поверхности E была тождественна съ касательною плоскостью къ поверхности S, необходимо и достаточно, чтобы между дифференціалами dx, dy, dz существовало соотношеніе

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0.$$

Сравнивая это условіе съ (17), получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0. \tag{18}$$

Такими же пріемами, какъ и въ случаѣ плоскихъ кривыхъ (§ 201), можно доказать, что, обратно, уравненіе $R(x, y, z)=0$, получающееся отъ исключенія параметра a изъ двухъ уравненій (16) и (18), представляетъ или огибающую поверхностей S, или же мѣсто особыхъ точекъ этихъ поверхностей. Характеристика C, представляемая уравненіями (16) и (18), есть также предѣльное положеніе линіи пересѣченія поверхности S съ безконечно близкою поверхностью того же семейства.

220. Поверхности, зависящія отъ двухъ параметровъ. — Разсмотримъ теперь уравненіе

$$f(x, y, z, a, b)=0, \tag{19}$$

представляющее поверхности S, зависящія отъ двухъ параметровъ a и b. Вообще, не существуетъ такой поверхности, которая касалась бы каждой поверхности разсматриваемаго семейства вдоль нѣкоторой кривой. Въ самомъ дѣлѣ, если мы установимъ между параметрами a и b нѣкоторое соотношеніе $b=\varphi(a)$, то семейство поверхностей (19) обратится въ семейство поверхностей, зависящихъ уже только отъ одного параметра, и характеристика этого семейства будетъ представлена уравненіемъ (19) и уравненіемъ

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a)=0, \tag{20}$$

гдѣ b связано съ a соотношеніемъ $b=\varphi(a)$. Эта характеристика зависитъ, вообще, отъ произвольной функціи $\varphi(a)$, такъ что на каждой поверхности S есть безчисленное множество характеристикъ; слѣдовательно, съ измѣненіемъ a и b эти характеристики не образуютъ, вообще, одной поверхности. Будемъ теперь искать, существуетъ ли такая поверхность E, которая касается поверхности S не вдоль кривой, а только въ одной

или нѣсколькихъ точкахъ. Если такая поверхность существуетъ, то координаты (x, y, z) точки прикосновенія поверхности S съ о г и б а ю щ е ю E будутъ функціями двухъ перемѣнныхъ параметровъ a и b, удовлетворяющими соотношенію (19); слѣдовательно, при перемѣщеніи по поверхности E ихъ дифференціалы dx, dy, dz удовлетворяютъ соотношенію

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0. \qquad (21)$$

Чтобы поверхность E, представляющая мѣсто точекъ (x, y, z), касалась поверхности S, необходимо, кромѣ того, чтобы было

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0.$$

Принимая во вниманіе соотношеніе (21), получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0.$$

Такъ какъ a и b — перемѣнныя независимыя, то координаты (x, y, z) точки прикосновенія должны одновременно удовлетворять уравненіямъ

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial b}=0. \qquad (22)$$

Слѣдовательно, мы получимъ уравненіе огибающей поверхности, исключивъ a и b изъ трехъ уравненій (19) и (22). Дѣйствительно, приведенное разсужденіе показываетъ, что полученная такимъ образомъ поверхность касается поверхности S, если только значенія (x, y, z), удовлетворяющія уравненіямъ (19) и (22), не удовлетворяютъ одновременно уравненіямъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Слѣдовательно, получающаяся поверхность будетъ или огибающею поверхностей S, или же мѣстомъ ихъ особыхъ точекъ.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ огибающія поверхности двухъ разныхъ видовъ смотря по тому, зависятъ ли огибаемыя поверхности отъ одного или отъ двухъ параметровъ. Напримѣръ, касательная плоскость къ сферѣ или къ гиперболоиду зависитъ отъ двухъ параметровъ, и она касается поверхности только въ одной точкѣ. Напротивъ, касательная плоскость къ конусу или къ цилиндру зависитъ только отъ одного перемѣннаго параметра, но зато касается своей огибающей поверхности вдоль цѣлой образующей.

221. Разгибающіяся поверхности. — Если мы имѣемъ семейство плоскостей, зависящихъ отъ одного перемѣннаго параметра, то поверхность, огибающая плоскости этого семейства, называется разгибающеюся поверхностью. Пусть будетъ

$$z = \alpha x + y f(\alpha) + \varphi(\alpha) \qquad (23)$$

уравненіе перемѣнной плоскости P, α — перемѣнный параметръ, и $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ — нѣкоторыя функціи этого параметра. Характеристика плоскости P представится уравненіемъ (23) и уравненіемъ

$$x + y f'(\alpha) + \varphi'(\alpha) = 0, \qquad (24)$$

которое получимъ, дифференцируя уравненіе (23) по α. Отсюда видно, что въ нашемъ случаѣ характеристика есть нѣкоторая прямая линія G; слѣдовательно, разгибающаяся поверхность есть поверхность линейчатая. Докажемъ, что всѣ прямыя G касаются нѣкоторой кривой двойной кривизны. Для этого продифференцируемъ (24) по α; получающееся уравненіе

$$y f''(\alpha) + \varphi''(\alpha) = 0 \qquad (25)$$

опредѣляетъ на характеристикѣ G нѣкоторую точку M. При измѣненіи параметра α мѣстомъ точекъ M будетъ нѣкоторая кривая двойной кривизны Γ, касательною къ которой служитъ прямая G. Въ самомъ дѣлѣ, кривая Γ представляется тремя уравненіями (23), (24), (25), изъ которыхъ мы можемъ выразить координаты x, y, z въ функціи параметра α. Дифференцируя два первыхъ изъ этихъ уравненій и принимая во вниманіе послѣднее, получимъ

$$dz = \alpha\, dx + f(\alpha) dy, \quad dx + f'(\alpha) dy = 0. \qquad (26)$$

Но тѣ же соотношенія (26) мы получимъ и для характеристики G, дифференцируя уравненія (23) и (24) при α постоянномъ. Отсюда слѣдуетъ, что касательная къ кривой Γ параллельна характеристикѣ G; кромѣ того, обѣ эти прямыя имѣютъ общую точку M; слѣдовательно, онѣ между собою тождественны.

Соприкасающеюся плоскостью къ кривой Γ будетъ сама плоскость P. Для доказательства этого предложенія достаточно показать, что дифференціалы перваго и второго порядка отъ x, y, z по α удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$dz = \alpha\, dx + f(\alpha)\, dy,$$
$$d^2z = \alpha\, d^2x + f(\alpha)\, d^2y.$$

Первое изъ этихъ соотношеній уже было выведено; это — первое изъ уравненій (26). Дифференцируя его снова по α, получимъ

$$d^2z = \alpha d^2x + f(\alpha)d^2y + [dx + f'(\alpha)dy]d\alpha;$$

принимая во вниманіе второе уравненіе (26), мы отсюда придемъ ко второму искомому соотношенію.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что всякую разгибающуюся поверхность можно опредѣлить, какъ мѣсто касательныхъ къ нѣкоторой кривой двойной кривизны Γ. Въ видѣ исключенія, эта кривая Γ можетъ обратиться въ точку на конечномъ или безконечномъ разстояніи; тогда разгибающаяся поверхность обращается въ конусъ или цилиндръ. Это будетъ, если $f''(\alpha) = 0$.

Обратно, мѣсто касательныхъ къ каждой кривой двойной кривизны Γ есть разгибающаяся поверхность. Пусть будутъ

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

уравненія кривой Γ. Соприкасающаяся плоскость этой кривой

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

зависитъ только отъ одного перемѣннаго параметра t. Покажемъ, что характеристика этой плоскости есть касательная прямая къ кривой Γ. Эта характеристика есть линія пересѣченія соприкасающейся плоскости съ плоскостью

$$dA(X-x) + dB(Y-y) + dC(Z-z) = 0,$$

которая также проходитъ черезъ точку (x, y, z). Чтобы доказать, что эта линія совпадаетъ съ касательною прямою къ кривой Γ, достаточно показать, что

$$\begin{aligned} A\,dx + B\,dy + C\,dz &= 0, \\ dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz &= 0. \end{aligned}$$

Первое изъ этихъ соотношеній есть одно изъ соотношеній (6) (§ 215), опредѣляющихъ коэффиціенты A, B, C; второе мы получимъ, дифференцируя первое и принимая во вниманіе вторую изъ формулъ (6)

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0.$$

Этотъ способъ образованія разгибающихся поверхностей даетъ довольно ясное представленіе о формѣ этихъ поверхностей. Пусть будетъ AB дуга кривой двойной кривизны.

Проведемъ въ каждой точкѣ M дуги AB касательную и разсмотримъ только ту изъ двухъ частей касательныхъ, считая отъ точки прикосновенія, которая соотвѣтствуетъ одному изъ двухъ противоположныхъ направленій на этой касательной, напримѣръ, направленію отъ A до B. Мѣсто этихъ полупрямыхъ есть часть поверхности или полость S_1, ограниченная дугою AB и двумя касательными въ точкахъ A и B, простирающимися въ одну сторону въ безконечность. Если мы возьмемъ такимъ же образомъ остальныя части касательныхъ, то получимъ другую полость S_2, соединяющуюся съ S_1 вдоль дуги AB. Для наблюдателя, помѣщающагося надъ кривою, обѣ полости разгибающейся поверхности будутъ казаться отчасти закрывающими одна другую. Ясно, что всякая плоскость, проходящая черезъ какую-нибудь точку O дуги AB, будетъ пересѣкать обѣ полости S_1 и S_2 разгибающейся поверхности по двумъ вѣтвямъ кривой, сходящимся въ точкѣ O и образующимъ здѣсь точку возврата. Вслѣдствіе этого кривая двойной кривизны Γ называется ребромъ возврата разгибающейся поверхности.

Въ этомъ свойствѣ также легко убѣдиться вычисленіемъ. Примемъ точку O за начало координатъ, сѣкущую плоскость — за плоскость xOy, касательную прямую — за ось Oz, и соприкасающуюся плоскость — за плоскость xOz. Если мы примемъ z за независимое перемѣнное, то разложенія координатъ x, y точки кривой Γ будутъ имѣть видъ

$$x = a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \qquad y = b_3 z^3 + \ldots,$$

такъ какъ въ началѣ координатъ должно быть

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dy}{dz} = \frac{d^2y}{dz^2} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненія касательной прямой къ кривой Γ въ точкѣ, близкой къ началу координатъ, будутъ

$$\frac{X - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \ldots}{2a_2 z + \ldots} = \frac{Y - b_3 z^3 - \ldots}{3b_3 z^2 + \ldots} = Z - z.$$

Полагая $Z = 0$, мы получимъ координаты X, Y точки пересѣченія касательной прямой съ сѣкущею плоскостью. Разложенія этихъ координатъ начинаются соотвѣтственно членомъ съ z^2 и членомъ съ z^3. Слѣдовательно, кривая Γ имѣетъ въ началѣ координатъ точку возврата.

Примѣръ. — Примемъ за ребро возврата кривую двойной кривизны третьяго порядка $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. Уравненіе соприкасающейся плоскости къ этой кривой будетъ

$$t^3 - 3t^2 X + 3tY - Z = 0. \qquad (27)$$

Изъ опредѣленія огибающихъ поверхностей слѣдуетъ, что мы получимъ уравненіе разгибающейся поверхности, выразивъ, что уравненіе (27), разсматриваемое, какъ уравненіе по t, имѣетъ двойной корень, т.-е. исключивъ t изъ двухъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} t^2-2tX+Y&=0,\\ Xt^2-2tY+Z&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Результатъ исключенія будетъ

$$(XY-Z)^2-4(X^2-Y)(Y^2-XZ)=0;$$

такимъ образомъ, искомая разгибающаяся поверхность — четвертаго порядка.

Замѣтимъ, что уравненія (28) представляютъ касательную къ данной кривой третьяго порядка.

222. Дифференціальное уравненіе разгибающихся поверхностей. — Пусть будетъ $z=F(x, y)$ уравненіе разгибающейся поверхности. Функція $F(x, y)$ удовлетворяетъ уравненію $s^2-rt=0$, гдѣ r, s, t, представляютъ, какъ обыкновенно, частныя производныя второго порядка отъ функціи $F(x, y)$ (§ 18).

Въ самомъ дѣлѣ, касательная плоскость къ этой поверхности, представляемая уравненіемъ

$$Z=pX+qY+z-px-qy,$$

должна зависѣть только отъ одного перемѣннаго параметра; слѣдовательно, изъ трехъ количествъ p, q, $z-px-qy$ произвольно только одно и, въ частности, между количествами p и q должно быть нѣкоторое соотношеніе $f(p, q)=0$. Отсюда слѣдуетъ, что опредѣлитель Якоби $\dfrac{D(p, q)}{D(x, y)}=rt-s^2$ долженъ быть тождественно равенъ нулю.

Обратно, если мы имѣемъ $rt-s^2=0$, то p и q связаны, по крайней мѣрѣ, однимъ соотношеніемъ. Если этихъ соотношеній будетъ два, то p и q — постоянныя, $p=a$, $q=b$, и функція $F(x, y)$ имѣетъ видъ $ax+by+c$; слѣдовательно, искомая поверхность есть плоскость. Если же между p и q есть только одно соотношеніе, то его можно представить въ видѣ $q=\varphi(p)$, гдѣ p не есть постоянное. Но мы имѣемъ также

$$\frac{D(z-px-qy, p)}{D(x, y)}=y(rt-s^2),$$

откуда слѣдуетъ, что если $rt-s^2=0$, то $z-px-qy$ есть также нѣкоторая функція $\psi(p)$ отъ p. Такимъ образомъ, неизвѣстная функція $z=F(x, y)$ и ея частныя производныя p и q удовлетворяютъ двумъ соотношеніямъ

$$q=\varphi(p), \quad z-px-\varphi(p)y=\psi(p)$$

Дифференцируя второе изъ нихъ по x и y, получимъ

$$[x+y\varphi'(p)]+\psi'(p)\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad [x+y\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

Такъ какъ p — не постоянное, то должно быть

$$x+y\varphi'(p)+\psi'(p)=0.$$

Слѣдовательно, мы получимъ уравненіе искомой поверхности, исключая p изъ соотношеній

$$z=px+y\varphi(p)+\psi(p), \quad x+y\varphi'(p)+\psi'(p)=0.$$

Но это исключеніе даетъ огибающую поверхность плоскости, представляемой первымъ изъ предыдущихъ уравненій, если въ немъ будемъ разсматривать p, какъ перемѣнный параметръ.

223. Огибающая семейства кривыхъ двойной кривизны. — Семейство кривыхъ двойной кривизны, зависящее отъ одного перемѣннаго параметра, вообще, не имѣетъ огибающей. Разсмотримъ сначала семейство прямыхъ

$$x=az+p, \quad y=bz+q, \tag{29}$$

гдѣ a, b, p, q — данныя функціи перемѣннаго параметра α. Найдемъ, при какомъ условіи каждая прямая этого семейства будетъ касаться нѣкоторой кривой двойной кривизны Γ. Пусть будетъ $z=\varphi(\alpha)$ координата z точки M, въ которой прямая D разсматриваемаго семейства касается огибающей I. Эта кривая Γ будетъ представлена уравненіями (29) и уравненіемъ $z=\varphi(\alpha)$, и угловые коэффиціенты касательной къ этой кривой будутъ имѣть слѣдующія выраженія

$$\frac{dx}{d\alpha}=a\varphi'(\alpha)+a'\varphi(\alpha)+p',$$

$$\frac{dy}{d\alpha}=b\varphi'(\alpha)+b'\varphi(\alpha)+q', \quad \frac{dz}{d\alpha}=\varphi'(\alpha),$$

гдѣ a', b', p', q' — производныя отъ a, b, p, q по α. Для того чтобы этою касательною была сама прямая D, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\frac{dx}{d\alpha}=a\frac{dz}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\alpha}=b\frac{dz}{d\alpha},$$

т.-е.

$$a'\varphi(\alpha)+p'=0, \quad b'\varphi(\alpha)+q'=0.$$

Такимъ образомъ, неизвѣстная функція $\varphi(\alpha)$ должна удовлетворять двумъ различнымъ соотношеніямъ; слѣдовательно,

разсматриваемое семейство прямыхъ будетъ имѣть огибающую только въ томъ случаѣ, если эти соотношенія будутъ совмѣстимы, т.-е. если

$$a'q' - b'p' = 0.$$

Если это условіе удовлетворяется, то мы получимъ огибающую взявъ $\varphi(\alpha) = -\frac{p'}{a'} = -\frac{q'}{b'}$.

Это разсужденіе легко обобщить. Разсмотримъ семейство кривыхъ двойной кривизны C, зависящее отъ перемѣннаго параметра α; пусть будутъ

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \Phi(x, y, z, \alpha) = 0 \tag{30}$$

уравненія этого семейства. Если кривыя C касаются нѣкоторой кривой Γ, то координаты (x, y, z) точки M, въ которой огибающая Γ касается одной изъ кривыхъ C, соотвѣтствующей нѣкоторому опредѣленному значенію α параметра, будутъ функціями отъ α, удовлетворяющими двумъ уравненіямъ (30) и, кромѣ того, еще двумъ другимъ уравненіямъ. Пусть будутъ dx, dy, dz дифференціалы, соотвѣтствующіе перемѣщенію точки M вдоль кривой C; такъ какъ на кривой C параметръ α остается постояннымъ, то между этими дифференціалами будутъ имѣть мѣсто соотношенія

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz = 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Съ другой стороны, пусть будутъ δx, δy, δz, $\delta\alpha$ дифференціалы отъ x, y, z, α, соотвѣтствующіе перемѣщенію точки M вдоль кривой Γ. Эти дифференціалы удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Необходимыми и достаточными условіями того, чтобы кривыя C и Γ касались между собою, будутъ

$$\frac{dx}{\delta x} = \frac{dy}{\delta y} = \frac{dz}{\delta z};$$

отсюда, принимая во вниманіе соотношенія (31) и (32), получимъ

$$\frac{dF}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = 0.$$

Слѣдовательно, координаты (x, y, z) точки прикосновенія должны удовлетворять уравненіямъ

$$F=0, \quad \Phi=0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}=0. \tag{33}$$

Такимъ образомъ, для того чтобы кривыя C имѣли огибающую, необходимо, чтобы при всякомъ значеніи параметра α четыре предыдущихъ уравненія были совмѣстимы. Обратно, если уравненія (33) имѣютъ при всякомъ α общее рѣшеніе относительно x, y, z, то изъ предыдущаго слѣдуетъ, что кривая Γ, описываемая точкою (x, y, z), касается въ каждой изъ своихъ точекъ соотвѣтствующей кривой C. При этомъ, однако, предполагается, что точка съ координатами (x, y, z) не есть особая точка кривой C, т.-е. что отношенія дифференціаловъ dx, dy, dz дѣйствительно опредѣляются уравненіями (31).

Примѣчаніе. — Если кривыя C представляютъ характеристики семейства поверхностей $F(x, y, z, \alpha)=0$, зависящихъ отъ одного параметра, то четыре уравненія (33) приводятся только къ тремъ различнымъ уравненіямъ

$$F=0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}=0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}=0. \tag{34}$$

Слѣдовательно, характеристики семейства поверхностей, зависящихъ отъ одного параметра, всегда имѣютъ огибающую, представляемую уравненіями (34). Это предложеніе есть обобщеніе теоремы, доказанной выше для образующихъ развигающейся поверхности (§ 221).

Уравненія перемѣнной прямой представляются иногда въ видѣ

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \tag{35}$$

гдѣ x_0, y_0, z_0, a, b, c — функціи перемѣннаго параметра α. Легко найти прямымъ путемъ, при какомъ условіи эта прямая имѣетъ огибающую. Обозначимъ черезъ l общее значеніе предыдущихъ отношеній; выраженія координатъ любой точки этой прямой будутъ

$$x=x_0+l\,a, \quad y=y_0+l\,b, \quad z=z_0+l\,c.$$

Посмотримъ, нельзя ли принять l за такую функцію отъ α, чтобы подвижная прямая (35) оставалась касательною прямою во всѣхъ точкахъ кривой, описываемой точкою (x, y, z). Для этого должно быть

$$\frac{x'_0+a'l}{a}=\frac{y'_0+b'l}{b}=\frac{z'_0+c'l}{c}. \tag{36}$$

Обозначая черезъ m общее значеніе отношеній (36) и исключая l и m изъ получающихся трехъ линейныхъ уравненій, мы придемъ къ уравненію

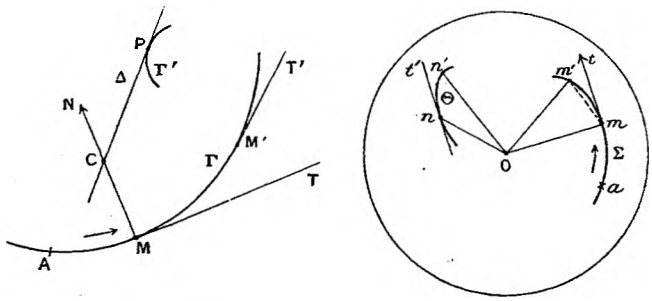
$$\begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0. \qquad (37)$$

Если условіе (37) удовлетворяется, то соотношенія (36) опредѣляютъ l, а, слѣдовательно, и огибающую.

III. — КРИВИЗНА И КРУЧЕНІЕ КРИВЫХЪ ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ.

224. Сферическая индикатриса. — Выберемъ на кривой двойной кривизны Γ нѣкоторое опредѣленное направленіе движенія, которое примемъ за положительное, и обозначимъ черезъ s длину дуги AM кривой, отсчитываемую отъ нѣкоторой начальной точки A до какой-нибудь точки M и взятую со знакомъ + или со знакомъ — въ зависимости отъ того, совпадаетъ ли направленіе отъ A до M съ положительнымъ направленіемъ, или эти два направленія противоположны. Пусть будетъ MT положительное направленіе касательной прямой въ точкѣ M, т.-е. направленіе въ сторону возрастанія дугъ. Если черезъ какую-нибудь точку O пространства мы проведемъ прямыя, параллельныя этимъ касательнымъ, то получимъ конусъ S, который называется направляющимъ конусомъ разгибающейся поверхности, образованной касательными къ кривой Γ. Опишемъ изъ точки O, какъ изъ центра, сферу радіусомъ, равнымъ единицѣ, и пусть будетъ Σ линія пересѣченія этой сферы съ направляющимъ конусомъ. Кривая Σ называется сферическою индикатрисою кривой Γ.

Черт. 48.



Точки этихъ двухъ кривыхъ находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи; каждой точкѣ M кривой Γ соотвѣтствуетъ на кривой Σ опредѣленная точка m, въ которой прямая, параллельная направленію MT, пересѣкаетъ сферу. Когда точка M описываетъ кривую Γ въ положительномъ направленіи, точка m

описываетъ кривую Σ въ нѣкоторомъ направленіи, которое мы примемъ за положительное направленіе на кривой Σ, такъ чтобы соотвѣтствующія дуги s и σ обѣихъ кривыхъ возрастали одновременно (черт. 48).

Очевидно, что при перемѣщеніи центра O сферы вся кривая Σ перемѣстится такимъ же образомъ; поэтому въ послѣдующемъ мы будемъ предполагать, что центръ O совпадаетъ съ началомъ координатъ. Точно также, если мы измѣнимъ положительное направленіе на кривой Γ, то кривая Σ замѣнится новою кривою, симметричною съ прежнею относительно точки O; но должно замѣтить, что положительное направленіе mt касательной прямой къ кривой Σ не зависитъ отъ того, какое изъ двухъ направленій на кривой Γ принято за положительное.

Докажемъ, что плоскость, касающаяся конуса вдоль образующей Om, параллельна соприкасающейся плоскости къ кривой Γ въ точкѣ M. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ

$$AX+BY+CZ=0$$

уравненіе плоскости Omm', причемъ центръ O сферы принятъ за начало координатъ. Эта плоскость параллельна касательнымъ къ кривой Γ въ точкахъ M и M'; слѣдовательно, если точкамъ M и M' соотвѣтствуютъ значенія t и $t+h$ параметра, то должно быть

$$Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)=0, \qquad (38)$$

$$Af'(t+h)+B\varphi'(t+h)+C\psi'(t+h)=0. \qquad (39)$$

Уравненіе (39) можно замѣнить слѣдующимъ

$$A\,\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}+B\,\frac{\varphi'(t+h)-\varphi'(t)}{h}+C\,\frac{\psi'(t+h)-\psi'(t)}{h}=0;$$

но при приближеніи h къ нулю послѣднее уравненіе обращается въ

$$Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)=0. \qquad (40)$$

Уравненія (38) и (40), къ которымъ мы пришли, — тѣ же, какими опредѣляются коэффиціенты A, B, C въ уравненіи соприкасающейся плоскости (§ 215).

225. Радіусъ кривизны. — Пусть будетъ ω уголъ между положительными направленіями MT, $M'T'$ касательныхъ въ двухъ близкихъ между собою точкахъ M, M' кривой Γ. Предѣлъ, къ которому стремится частное $\frac{\omega}{\text{arc } MM'}$, при неограниченномъ

приближеніи точки M' къ точкѣ M называется, какъ и въ случаѣ плоскихъ кривыхъ, кривизною кривой Γ въ точкѣ M. Количество, обратное кривизнѣ, т.-е. равное предѣлу частнаго $\frac{\text{arc } MM'}{\omega}$, называется радіусомъ кривизны. Радіусъ кривизны можно опредѣлить иначе, какъ предѣлъ отношенія безконечно малыхъ дугъ MM' и mm'; въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\frac{\text{arc } MM'}{\omega} = \frac{\text{arc } MM'}{\text{arc } mm'} \cdot \frac{\text{arc } mm'}{\overline{mm'}} \cdot \frac{\overline{mm'}}{\omega},$$

а при приближеніи m' къ m каждое изъ отношеній $\frac{\text{arc } mm'}{\overline{mm'}}$, $\frac{\overline{mm'}}{\omega}$ имѣютъ предѣломъ единицу. Такъ какъ дуги $s = MM$, и $\sigma = mm'$ измѣняются въ одинаковомъ направленіи, то мы имѣемъ

$$R = \frac{ds}{d\sigma}. \tag{41}$$

Пусть будутъ

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t) \tag{42}$$

уравненія кривой Γ, причемъ точка O взята за начало координатъ. Тогда координатами (α, β, γ) точки m будутъ направляющіе косинусы касательной MT

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Отсюда имѣемъ

$$d\alpha = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^2}, \quad d\beta = \frac{ds\, d^2y - dy\, d^2s}{ds^2}, \quad d\gamma = \frac{ds\, d^2z - dz\, d^2s}{ds^2},$$

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{(ds\, d^2x - dx\, d^2s)^2 + (ds\, d^2y - dy\, d^2s)^2 + (ds\, d^2z - dz\, d^2s)^2}{ds^4}.$$

Возводя въ квадратъ и принимая во вниманіе выраженія для ds^2 и $ds\, d^2s$, получимъ

$$d\sigma^2 = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z)^2}{ds^4}.$$

Вводя обозначенія

$$\left.\begin{aligned} A &= dy\, d^2z - dz\, d^2y, \quad B = dz\, d^2x - dx\, d^2z, \\ C &= dx\, d^2y - dy\, d^2x, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

которыми мы далѣе будемъ пользоваться, и примѣняя тоже-

ство Лагранжа (§ 131), мы можемъ представить предыдущее выраженіе въ видѣ

$$d\sigma^2=\frac{A^2+B^2+C^2}{ds^4}.$$

При этомъ, формула (41) для радіуса кривизны обращается въ

$$R^2=\frac{ds^6}{A^2+B^2+C^2}. \qquad (44)$$

Мы видимъ, что R^2 есть раціональная функція отъ $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$. Самый радіусъ кривизны имѣетъ ирраціональное выраженіе, но онъ разсматривается, какъ количество, существенно положительное.

Примѣчаніе. — Если за независимое перемѣнное взята длина дуги s кривой Γ, то функціи $f(s)$, $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ будутъ удовлетворять уравненію

$$f'^2(s)+\varphi'^2(s)+\psi'(s)=1.$$

Далѣе мы имѣемъ

$$\left.\begin{array}{ccc} \alpha=f'(s), & \beta=\varphi'(s), & \gamma=\psi'(s), \\ d\alpha=f''(s)\,ds, & d\beta=\varphi''(s)\,ds, & d\gamma=\psi''(s)\,ds, \\ d\sigma^2=\{[f''(s)]^2+[\varphi''(s)]^2+[\psi''(s)]^2\}ds^2, & & \end{array}\right\} \qquad (45)$$

и выраженіе для радіуса кривизны принимаетъ особенно простой видъ

$$\frac{1}{R^2}=[f''(s)]^2+[\varphi''(s)]^2+[\psi''(s)]^2. \qquad (44')$$

226. Главная нормаль. Центръ кривизны. — Проведемъ черезъ точку M кривой Γ прямую, параллельную касательной прямой mt къ кривой Σ въ точкѣ m, и разсмотримъ на этой прямой направленіе MN, параллельное положительному направленію mt. Полученная такимъ образомъ прямая называется главною нормалью кривой Γ; это та нормаль, которая лежитъ въ соприкасающейся плоскости, такъ какъ mt перпендикулярно къ Om, и плоскость Omt параллельна соприкасающейся плоскости (§ 224). Направленіе MN называется положительнымъ направленіемъ главной нормали. Это есть вполнѣ опредѣленное направленіе, такъ какъ направленіе касательной mt не зависитъ отъ направленія, выбраннаго на кривой Γ (§ 224). Ниже мы увидимъ, какъ можно опредѣлить это направленіе, не пользуясь индикатрисою.

Отложимъ на направленіи MN, начиная отъ точки M, длину MC, равную радіусу кривизны; полученная такимъ

образомъ точка C называется центромъ кривизны кривой Γ въ точкѣ M, а кругъ, описанный въ соприкасающейся плоскости изъ точки C, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ MC, называется кругомъ кривизны. Пусть будутъ α', β', γ' направляющіе косинусы главной нормали. Координаты x_1, y_1, z_1 центра кривизны будутъ равны

$$x_1 = x + R\alpha', \quad y_1 = y + R\beta', \quad z_1 = z + R\gamma'.$$

Но мы имѣемъ

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{d\sigma} = R\frac{d\alpha}{ds} = R\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3},$$

и такія же формулы имѣютъ мѣсто для β' и γ'. Замѣняя въ формулѣ для x_1 количество α' его значеніемъ, получимъ

$$x_1 = x + R^2\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3}.$$

Коэффиціентъ при R^2 можно иначе представить въ видѣ

$$\frac{ds^2\,d^2x - dx\,ds\,d^2s}{ds^4} = \frac{d^2x\,(dx^2+dy^2+dz^2) - dx\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)}{ds^4},$$

или, вводя коэффиціенты A, B, C,

$$\frac{B\,dz - C\,dy}{ds^4}.$$

Значенія для y_1 и z_1 получатся круговою подстановкою изъ значенія для x_1, и такимъ образомъ мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + R^2\frac{Bdz - Cdy}{ds^4},\\ y_1 &= y + R^2\frac{Cdx - Adz}{ds^4},\\ z_1 &= z + R^2\frac{Ady - Bdx}{ds^4}. \end{aligned}\right| \qquad (46)$$

Эти выраженія для x_1, y_1, z_1 раціональны относительно x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''.

Проведемъ черезъ точку M плоскость Q, перпендикулярную къ MN; эта плоскость пройдетъ черезъ касательную MT и не пересѣчетъ въ точкѣ M кривой Γ (§ 215). Покажемъ, что центръ кривизны и всѣ точки кривой Γ, близкія къ точкѣ M, лежатъ по одну сторону этой плоскости Q. Чтобы это доказать, примемъ за независимое перемѣнное длину дуги s кривой Γ, от-

считываемую отъ точки M. Для координатъ X, Y, Z точки M', близкой къ M, мы будемъ имѣть выраженія

$$X=x+\frac{s}{1}\frac{dx}{ds}+\frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\varepsilon\right),$$

и соотвѣтствующія выраженія для координатъ Y и Z. Но такъ какъ за независимое перемѣнное принято s, то

$$\frac{dx}{ds}=\alpha,\quad \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\alpha}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{R}\alpha',$$

и формула для X принимаетъ видъ

$$X=x+\alpha s+\left(\frac{\alpha'}{R}+\varepsilon\right)\frac{s^2}{1\cdot 2}.$$

Замѣняя въ лѣвой части уравненія плоскости Q

$$\alpha'(X-x)+\beta'(Y-y)+\gamma'(Z-z)=0$$

текущія координаты X, Y, Z приведенными выше разложеніями координатъ точки M', получимъ

$$\frac{s}{1}(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')+\frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{R}+\eta\right)=\frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{R}+\eta\right),$$

гдѣ η безконечно мало одновременно съ s; но это количество положительно при всѣхъ значеніяхъ s, близкихъ къ нулю. Точно также, замѣняя X, Y, Z координатами $x+R\alpha'$, $y+R\beta'$, $z+R\gamma'$ центра кривизны, мы найдемъ, что результатъ подстановки будетъ равенъ R, т.-е. количеству, существенно полотельному. Такимъ образомъ, всѣ точки кривой Γ, близкія къ M, а также и центръ кривизны, лежатъ по одну сторону касательной плоскости, и, слѣдовательно, теорема доказана.

227. Полярная прямая. Полярная поверхность. — Перпендикуляръ Δ къ соприкасающейся плоскости, проведенный черезъ центръ кривизны, называется полярною прямою. Эта прямая есть характеристика плоскости, нормальной къ кривой Γ. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что линія пересѣченія двухъ нормальныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ двѣ близкія точки M и M'кривой Γ, есть прямая D, перпендикулярная къ касательнымъ MT и $M'T'$, а, слѣдовательно, и къ плоскости mOm'. Когда точка M' приближается къ точкѣ M, то въ предѣлѣ плоскость mOm' дѣлается параллельною соприкасающейся плоскости, и, слѣдовательно, прямая D въ предѣлѣ обращается въ прямую, перпендикулярную къ соприкасающейся плоскости.

Чтобы доказать, что эта прямая проходитъ черезъ центръ кривизны, примемъ за независимое перемѣнное длину дуги s кривой Γ. Уравненіе нормальной плоскости будетъ

$$\alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)=0. \qquad (47)$$

Характеристика нормальной плоскости опредѣлится уравненіями (47) и (48)

$$\frac{\alpha'}{R}(X-x)+\frac{\beta'}{R}(Y-y)+\frac{\gamma'}{R}(Z-z)-1=0. \qquad (48)$$

Уравненіе (48) представляетъ плоскость, перпендикулярную къ главной нормали и проходящую черезъ центръ кривизны. Слѣдовательно, линія пересѣченія этихъ двухъ плоскостей есть полярная прямая.

Линейчатая поверхность, образуемая полярными прямыми, называется полярною поверхностью. Какъ видно изъ предыдущаго, полярная поверхность есть въ то же время разгибающаяся поверхность, огибающая нормальныхъ плоскостей къ кривой Γ. Если кривая Γ плоская, то полярная поверхность есть цилиндръ, имѣющій своимъ перпендикулярнымъ сѣченіемъ развертку кривой Γ. Въ этомъ частномъ случаѣ всѣ предыдущія свойства вполнѣ очевидны.

228. Кручeніе. — Замѣняя въ опредѣленіи кривизны касательную плоскость соприкасающеюся плоскостью, мы придемъ къ новому геометрическому элементу, который служитъ мѣрою той скорости, съ какою вращается соприкасающаяся плоскость, когда точка M движется по кривой Γ. Пусть будетъ ω' уголъ между двумя соприкасающимися плоскостями въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ M и M'. Предѣлъ частнаго $\dfrac{\omega'}{\text{arc}\,MM'}$ при неограниченномъ приближеніи точки M' къ точкѣ M называется крученіемъ кривой въ точкѣ M. Количество, обратное крученію, называется радіусомъ кручeнія.

Прямая, проходящая черезъ точку M и перпендикулярная къ соприкасающейся плоскости, называется бинормалью. Выберемъ на бинормали положительное направленіе (какое изъ двухъ направленій мы примемъ за положительное, это мы установимъ далѣе), и обозначимъ черезъ $\alpha'', \beta'', \gamma''$ соотвѣтствующіе ему направляющіе косинусы. Прямая, проходящая черезъ начало координатъ и параллельная этому направленію, пересѣчетъ сферу съ радіусомъ, рав-

нымъ единицѣ, въ нѣкоторой точкѣ n, которую мы будемъ считать соотвѣтствующею точкѣ M кривой Γ (черт. 48). Мѣстомъ точекъ n будетъ нѣкоторая сферическая кривая Θ, и, какъ и выше, легко доказать, что радіусъ кручения T можно также опредѣлить, какъ предѣлъ отношенія соотвѣтствующихъ безконечно малыхъ дугъ arc MM', arc nn' кривыхъ Γ и Θ. Такимъ образомъ, мы имѣемъ

$$T^2=\frac{ds^2}{d\tau^2},$$

гдѣ τ обозначаетъ длину дуги кривой Θ.

Координатами точки n будутъ α'', β'', γ'', т.-е. (§ 215)

$$\alpha''=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \beta''=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \gamma''=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

причемъ во всѣхъ трехъ формулахъ корень долженъ быть взятъ съ одинаковымъ знакомъ. Изъ этихъ формулъ мы получимъ $d\alpha''$, $d\beta''$, $d\gamma''$; напримѣръ,

$$d\alpha''=\pm\frac{(A^2+B^2+C^2)\,dA-A(A\,dA+B\,dB+C\,dC)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Такъ какъ $d\tau^2=d\alpha''^2+d\beta''^2+d\gamma''^2$, то изъ предыдущаго будемъ имѣть

$$d\tau^2=\frac{(A^2+B^2+C^2)(dA^2+dB^2+dC^2)-(A\,dA+B\,dB+C\,dC)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2},$$

или, на основаніи тожества Лагранжа (§ 131),

$$d\tau^2=\frac{(B\,dC-C\,dB)^2+(C\,dA-A\,dC)^2+(A\,dB-B\,dA)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

Числитель этого выраженія можно упростить, пользуясь соотношеніями

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,$$
$$dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0;$$

изъ нихъ мы имѣемъ

$$\frac{dx}{B\,dC-C\,dB}=\frac{dy}{C\,dA-A\,dC}=\frac{dz}{A\,dB-B\,dA}=\frac{1}{K},\qquad(49)$$

гдѣ черезъ $\frac{1}{K}$ обозначено общее значеніе этихъ отношеній Отсюда получаемъ

$$d\tau^2=\frac{K^2\,ds^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

Что касается значенія K, то изъ перваго отношенія будемъ имѣть на основаніи формулъ (43) (§ 225)

$$K=\frac{(dz\,d^2x-dx\,d^2z)(dx\,d^3y-dy\,d^3x)-(dx\,d^2y-dy\,d^2x)(dz\,d^3x-dx\,d^3z)}{dx}$$
$$=dz\,d^2x\,d^3y-dx\,d^2z\,d^3y+dx\,d^2y\,d^3z-dy\,d^2x\,d^3z+dy\,d^2z\,d^3x-dz\,d^2y\,d^3x.$$

Правая часть этого выраженія есть не что иное, какъ развернутый опредѣлитель Δ [§ 216, (8)]. Такимъ образомъ, мы имѣемъ

$$d\tau=\pm\frac{\Delta ds}{A^2+B^2+C^2},$$

и, слѣдовательно,

$$T=\pm\frac{A^2+B^2+C^2}{\Delta}. \qquad (50)$$

Если мы будемъ разсматривать радіусъ кручения T, подобно радіусу кривизны R, какъ количество существенно положительное, то для T нужно брать абсолютное значеніе правой части выраженія (50). Но полученное выраженіе (50) раціонально относительно x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', а потому естественно брать въ правой части формулы (50) всегда одинъ и тотъ же знакъ, т.-е. разсматривать радіусъ кручения, какъ длину, взятую съ опредѣленнымъ знакомъ. При этомъ оказывается, что въ зависимости отъ того, будетъ ли для точки M радіусъ кручения имѣть положительное или отрицательное значеніе, кривая Γ вблизи точки M будетъ имѣть двоякое расположеніе.

Такъ какъ теперь знакъ T зависитъ только отъ знака Δ, то разсмотримъ, какъ мѣняется видъ кривой Γ вблизи точки M въ зависимости отъ знака опредѣлителя Δ. Предположимъ, что трехгранный уголъ $Oxyz$ расположенъ такимъ образомъ, что для наблюдателя, стоящаго на плоскости xOy въ точкѣ O со стороны положительныхъ z, вращеніе отъ положительнаго направленія Ox къ положительному направленію оси Oy кажется совершающимся на 90^0 справа налѣво.

Выберемъ теперь на бинормали положительное направленіе MN_b такимъ образомъ, чтобы трехгранный уголъ MT, MN, MN_b) имѣлъ то же расположеніе реберъ, какъ и трехгранный уголъ $Oxyz$*). Тогда, если мы будемъ перемѣщать непрерывно кривую Γ такъ, чтобы точка M пришла въ O, касательная MT совпала съ положительнымъ направленіемъ оси Ox, и главная нормаль MN — съ положительнымъ напра-

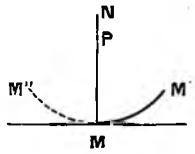
*) Трехгранный уголъ, образованный касательною, нормалью и бинормалью, называется основнымъ трехграннымъ угломъ для данной точки кривой. *(Ред.)*

вленіемъ оси Oy, то MN_0 совпадетъ съ положительнымъ направленіемъ оси Oz. При этомъ движеніи абсолютное значеніе радіуса кручения T остается неизмѣннымъ; поэтому опредѣлитель Δ не можетъ обратиться въ нуль и, слѣдовательно, не мѣняетъ знака*). Предположимъ, что кривая Γ отнесена къ этой новой системѣ координатъ, и что значеніе параметра $t=0$ соотвѣтствуетъ началу координатъ. Выраженія координатъ точки, близкой къ началу, будутъ

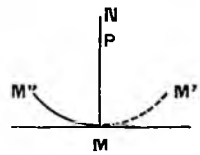
$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 t + t^2(a_2+\varepsilon),\\ y &= b_2 t^2 + t^3(b_3+\varepsilon'),\\ z &= t^3(c_3+\varepsilon''), \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

гдѣ ε, ε', ε'' безконечно малы вмѣстѣ съ t; въ самомъ дѣлѣ, при $t=0$ при такомъ выборѣ осей должно быть $dy=dz=d^2z=0$. Мы можемъ предположить, что $a_1>0$, такъ какъ въ противномъ случаѣ достаточно замѣнить t черезъ $-t$, чтобы a_1 измѣнилось въ $-a_1$; количество b_2 — положительно, такъ какъ при значеніяхъ t, близкихъ къ нулю, y должно быть положительно; наконецъ, c_3 можетъ быть какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ. Но при $t=0$ мы имѣемъ $\Delta = 12 a_1 b_2 c_3\, dt^6$, такъ что знакъ опредѣлителя Δ одинаковъ со знакомъ количества c_3. Поэтому нужно различать два случая въ зависимости отъ знака c_3. Если $c_3>0$, то x и z отрицательны при измѣненіи t отъ $-h$ до 0, и положительны при измѣненіи t отъ 0 до $+h$, гдѣ h очень малое положительное число. Въ такомъ случаѣ

Черт. 49*a*.



Черт. 49*b*.



наблюдатель, стоящій на соприкасающейся плоскости въ точкѣ M и обращенный лицомъ къ центру кривизны P, увидѣлъ бы дугу MM' вправо отъ себя надъ соприкасающеюся плоскостью, а дугу MM'' влѣво подъ соприкасающеюся плоскостью (черт. 49*a*); слѣдовательно, это — п р а в а я кривая (dextrorsum). Если бы было $c_3<0$, то расположеніе кривой было бы обратнымъ (черт. 49*b*), и кривая была бы л ѣ в о ю (sinistrorsum). При этомъ безразлично, на которой изъ двухъ сторонъ соприкасающейся плоскости будетъ стоять наблюдатель. Видъ правой кривой имѣетъ штопоръ;

*) Впрочемъ, легко доказать непосредственнымъ вычисленіемъ, что при переходѣ отъ одной системы прямоугольныхъ осей къ другой системѣ прямоугольныхъ осей знакъ опредѣлителя Δ не мѣняется.

изъ вьющихся растеній бобъ имѣетъ видъ правой кривой, а хмель — лѣвой*). Эти два расположенія кривой существенно различны. Напримѣръ, двѣ винтовыя линіи съ одинаковымъ ходомъ, начерченныя на двухъ круглыхъ цилиндрахъ съ одинаковымъ радіусомъ, наложимы одна на другую, если онѣ обѣ правыя или обѣ лѣвыя; если же одна правая, а другая лѣвая, то одна изъ нихъ наложима на винтовую линію, симметричную съ другою относительно какой-либо плоскости.

Въ послѣдующемъ мы будемъ писать формулу радіуса кручения T въ видѣ

$$T = -\frac{A^2+B^2+C^2}{A}. \qquad (52)$$

Кривая будетъ лѣвою въ тѣхъ точкахъ, гдѣ T положительно, и правою въ тѣхъ точкахъ, гдѣ T отрицательно. Если бы трехгранный уголъ имѣлъ обратное расположеніе, то и предыдущее правило нужно было бы замѣнить обратнымъ.

229. Формулы Френе.—Каждая точка M кривой Γ представляетъ вершину прямого трехграннаго угла, образованнаго касательною, главною нормалью и бинормалью и расположеннаго одинаково съ трехграннымъ угломъ $Oxyz$ (см. стр. 514). Положительное направленіе главной нормали—вполнѣ опредѣленное (§ 226); напротивъ, положительное направленіе касательной можетъ быть взято произвольно и, въ свою очередь, опредѣляетъ собою положительное направленіе бинормали. Дифференціалы отъ девяти направляющихъ косинусовъ (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ этихъ трехъ прямыхъ выражаются весьма просто черезъ R, T и черезъ самые косинусы при помощи формулъ, данныхъ Френе (Frenet)**). Мы уже вывели (§ 226, стр. 510) формулы для $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta'}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{R}. \qquad (53)$$

Направляющіе косинусы положительнаго направленія бинормали будутъ

$$\alpha''=\varepsilon\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \beta''=\varepsilon\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \gamma''=\varepsilon\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

гдѣ

$$\varepsilon=\pm 1.$$

*) Въ подлинникѣ авторъ даетъ опредѣленіе правыхъ и лѣвыхъ кривыхъ, обратное общепринятому. Поэтому въ этомъ мѣстѣ перевода изложеніе автора замѣнено другимъ, соотвѣтствующимъ обычному опредѣленію кривыхъ обоего рода. *(Ред.)*

**) Nouvelles Annales de Mathématiques, 1864; стр. 284.

Такъ какъ трехгранный уголъ (MT, MN, MN_b) расположенъ одинаково съ угломъ $Oxyz$, то должно быть

$$\alpha' = \beta''\gamma - \beta\gamma'',$$

или

$$\alpha' = \varepsilon \frac{B\gamma - C\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Съ другой стороны, формулу для $d\alpha''$ можно представить въ видѣ

$$d\alpha'' = \varepsilon \frac{B(BdA - AdB) + C(CdA - AdC)}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}},$$

или, принимая во вниманіе соотношенія (49) и значеніе количества K,

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \varepsilon\Delta \frac{C\beta - B\gamma}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\alpha'\Delta}{A^2+B^2+C^2}.$$

Коэффиціентъ при α' есть не что иное, какъ $\frac{1}{T}$ [формула (52)]; вычисляя такимъ же образомъ $\frac{d\beta''}{ds}$, $\frac{d\gamma''}{ds}$, получимъ*)

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \quad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \quad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}; \tag{54}$$

эти формулы сходны съ формулами (53).

Чтобы получить $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$, продифференцируемъ извѣстныя намъ соотношенія

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$$
$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$
$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0;$$

замѣняя $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\alpha''$, $d\beta''$, $d\gamma''$ ихъ значеніями изъ (53) и (54), будемъ имѣть

$$\alpha'\,d\alpha' + \beta'\,d\beta' + \gamma'\,d\gamma' = 0,$$
$$\alpha\,d\alpha' + \beta\,d\beta' + \gamma\,d\gamma' + \frac{ds}{R} = 0,$$
$$\alpha''d\alpha' + \beta''d\beta' + \gamma''d\gamma' + \frac{ds}{T} = 0.$$

---

*) Если бы мы взяли формулу кручения въ видѣ $\frac{1}{T} = \frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2}$, то формулы Френе нужно было бы написать въ видѣ $d\alpha'' = -\frac{\alpha'\,ds}{T}$, ...

Рѣшая эти уравненія по $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$, получимъ

$$\frac{d\alpha'}{ds}=-\frac{\alpha}{R}-\frac{\alpha''}{T},\quad \frac{d\beta'}{ds}=-\frac{\beta}{R}-\frac{\beta''}{T},\quad \frac{d\gamma'}{ds}=-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma''}{T}. \qquad (55)$$

Формулы (53), (54), (55) суть искомыя формулы Френе.

Примѣчаніе. — Изъ формулъ (54) видно, что касательная къ сферической кривой Θ, описанной точкою n съ координатами α'', β'', γ'', параллельна главной нормали. Это можно доказать и геометрически. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ конусъ S', вершина котораго лежитъ въ точкѣ O, а направляющею линіею служитъ кривая Θ. Образующая On этого конуса перпендикулярна къ плоскости, касающейся конуса S вдоль образующей Om (§ 228), и, слѣдовательно, конусъ S' есть дополнительный конусъ къ конусу S. Но, какъ извѣстно, свойства дополнительныхъ конусовъ взаимны, такъ что, обратно, образующая Om конуса S перпендикулярна къ плоскости, касающейся конуса S' вдоль On. Такъ какъ касательная mt къ кривой Σ перпендикулярна къ прямымъ Om и On, то она перпендикулярна къ плоскости mOn. По той же причинѣ касательная nt' къ кривой Θ перпендикулярна къ плоскости mOn. Слѣдовательно, прямыя mt и nt' параллельны.

230. Разложенія координатъ x, y, z по степенямъ s. — Если даны двѣ функціи независимаго перемѣннаго s, $R=\varphi(s)$, $T=\psi(s)$, изъ которыхъ первая положительна, то существуетъ кривая двойной кривизны Γ, вполнѣ опредѣленная по своему виду, но не по положенію въ пространствѣ, у которой радіусъ кривизны и радіусъ крученія выражаются этими двумя формулами въ функціи длины ея дуги, отсчитываемой отъ нѣкоторой точки этой кривой. Строгое доказательство этого предложенія можетъ быть дано лишь послѣ теоріи дифференціальныхъ уравненій. Мы здѣсь только покажемъ, какимъ образомъ можно найти разложенія координатъ точки искомой кривой по степенямъ s, предполагая, что эти разложенія возможны.

Примемъ за оси координатъ касательную, главную нормаль и бинормаль въ точкѣ O, и будемъ отсчитывать длину дуги этой кривой, начиная отъ точки O. Выраженія координатъ точки кривой, близкой къ началу координатъ, будутъ

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{s}{1}\left(\frac{dx}{ds}\right)_0+\frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0+\frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0+\cdots,\\ y&=\frac{s}{1}\left(\frac{dy}{ds}\right)_0+\frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0+\frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0+\cdots,\\ z&=\frac{s}{1}\left(\frac{dz}{ds}\right)_0+\frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0+\frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0+\cdots. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Но мы имѣемъ

$$\frac{dx}{ds}=\alpha, \quad \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'}{R},$$

и, дифференцируя еще разъ,

$$\frac{d^3x}{ds^3}=-\frac{\alpha'}{R^2}\frac{dR}{ds}-\frac{1}{R}\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right).$$

Вообще, послѣдовательное примѣненіе формулъ Френе дастъ для $\frac{d^nx}{ds^n}$ выраженіе вида

$$\frac{d^nx}{ds^n}=L_n\alpha+M_n\alpha'+P_n\alpha'',$$

гдѣ L_n, M_n, P_n — извѣстныя функціи отъ R, T и отъ ихъ производныхъ по s различныхъ порядковъ. Такимъ же образомъ, замѣняя α, α', α'' соотвѣтственно черезъ β, β', β'' и γ, γ', γ'', мы получимъ производныя отъ y и z. Но въ началѣ координатъ должно быть $\alpha_0=1$, $\beta_0=0$, $\gamma_0=0$, $\alpha'_0=0$, $\beta'_0=1$, $\gamma'_0=0$, $\alpha''_0=0$, $\beta''_0=0$, $\gamma''_0=1$; поэтому, ограничиваясь въ формулахъ (56) тремя первыми членами, мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{s}{1}-\frac{s^3}{6R^2}+\dots,\\ y&=\frac{s^2}{2R}-\frac{s^3}{6R^2}\frac{dR}{ds}+\dots,\\ z&=-\frac{s^3}{6RT}+\dots, \end{aligned}\right\} \qquad (56')$$

причемъ дальнѣйшіе члены будутъ выше третьей степени. Понятно, что въ формулахъ (56′) R, T, $\frac{dR}{ds}$, ... должны быть замѣнены ихъ значеніями при $s=0$.

Съ помощью этихъ формулъ легко вычислить главныя части нѣкоторыхъ безконечно малыхъ. Такъ, разстояніе отъ какой-нибудь точки кривой до соприкасающейся плоскости въ безконечно близкой точкѣ той же кривой есть безконечно малое третьяго порядка, и его главная часть равна $-\frac{s^3}{6RT}$. Разстояніе отъ точки кривой до оси Ox, т.-е. до касательной, есть безконечно малое второго порядка, и его главная часть равна $\frac{s^2}{2R}$ (ср. § 214). Вычислимъ еще длину безконечно малой хорды c. Мы имѣемъ

$$c^2=x^2+y^2+z^2=s^2-\frac{s^4}{12R^2}+\dots,$$

причемъ дальнѣйшіе члены будутъ выше четвертой степени. Отсюда слѣдуетъ

$$c = s\left(1 - \frac{s^2}{12R^2} + \ldots\right)^{\frac{1}{2}} = s\left(1 - \frac{s^2}{24R^2} + \ldots\right);$$

такимъ образомъ, разность $s - c$ есть безконечно малое третьяго порядка, и его главная часть равна $\frac{s^3}{24R^2}$.

Точно также можно доказать, что кратчайшее разстояніе между касательными въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ кривой есть безконечно малое третьяго порядка, главная часть котораго равна $\frac{s^3}{12RT}$. Эта теорема принадлежитъ Буке (Bouquet).

231. Развертывающія и развертки. — Кривая Γ_1 называется развертывающею кривой Γ, если касательныя къ кривой Γ входятъ въ составъ нормалей къ кривой Γ_1; обратно, кривая Γ называется разверткою кривой Γ_1. Очевидно, что всѣ развертывающія кривой Γ лежатъ на разгибающейся поверхности, ребромъ возврата которой служитъ кривая Γ, и пересѣкаютъ ортогонально образующія этой поверхности.

Пусть будутъ (x, y, z) координаты какой-нибудь точки M кривой Γ, $\alpha\ \beta, \gamma$ — направляющіе косинусы касательной къ кривой Γ, и l — длина отрѣзка MM_1 между точкою M и точкою M_1, въ которой развертывающая пересѣкаетъ касательную къ развертк̀ѣ въ точкѣ M. Координаты точки M_1 будутъ

$$x_1 = x + l\alpha, \quad y_1 = y + l\beta, \quad z_1 = z + l\gamma,$$

откуда

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx + l\,d\alpha + \alpha\,dl, \\ dy_1 &= dy + l\,d\beta + \beta\,dl, \\ dz_1 &= dz + l\,d\gamma + \gamma\,dl. \end{aligned}$$

Чтобы кривая, описываемая точкою M_1, была нормальна къ MM_1, необходимо и достаточно, чтобы было $\alpha\,dx_1 + \beta\,dy_1 + \gamma\,dz_1 = 0$, т.-е.

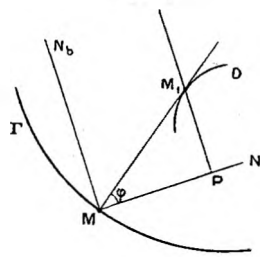
$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz + dl + l(\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma) = 0,$$

или $ds + dl = 0$. Слѣдовательно, развертывающія кривой двойной кривизны Γ получаются такимъ же построеніемъ, какъ и развертывающія плоской кривой (§ 206).

Найдемъ теперь всѣ различныя развертки данной кривой двойной кривизны Γ. Для этого, очевидно, нужно соединить

всѣ нормали къ кривой Γ въ такія семейства, чтобы нормали каждаго семейства образовали разгибающуюся поверхность (черт. 50).

Черт. 50.



Пусть будетъ D одна изъ развертокъ, φ — уголъ между нормалью MM_1 и главною нормалью MN въ точкѣ M кривой Γ, l — отрѣзокъ MP между точкою M и проекціею P точки M_1 на главную нормаль. Координаты (x_1, y_1, z_1) точки M_1 будутъ имѣть выраженія

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + l\alpha' + l\alpha'' \operatorname{tg}\varphi, \\ y_1 &= y + l\beta' + l\beta'' \operatorname{tg}\varphi, \\ z_1 &= z + l\gamma' + l\gamma'' \operatorname{tg}\varphi; \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

мы получимъ эти выраженія, проектируя ломаную линію MPM_1 послѣдовательно на три оси координатъ. Такъ какъ касательною прямою къ кривой, описываемой точкою M_1, должна быть сама прямая MM_1, то мы должны имѣть

$$\frac{dx_1}{x_1 - x} = \frac{dy_1}{y_1 - y} = \frac{dz_1}{z_1 - z}.$$

Обозначимъ черезъ K общее значеніе этихъ отношеній. Замѣняя въ условіи $dx_1 = K(x_1 - x)$ количества x_1 и dx_1 ихъ значеніями изъ (57) и пользуясь формулами Френе, получимъ

$$\alpha\, ds\left(1 - \frac{l}{R}\right) + \alpha'\left(dl + l \operatorname{tg}\varphi \frac{ds}{T} - Kl\right) + \alpha''\left[d(l \operatorname{tg}\varphi) - \frac{l\, ds}{T} - Kl \operatorname{tg}\varphi\right] = 0.$$

Условія $dy_1 = K(y_1 - y)$ и $dz_1 = K(z_1 - z)$ приведутъ къ двумъ такимъ же соотношеніямъ, которыя получатся изъ предыдущаго замѣною $\alpha, \alpha', \alpha''$ соотвѣтственно черезъ β, β', β'' и $\gamma, \gamma', \gamma''$. Такъ какъ опредѣлитель изъ девяти косинусовъ $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots$ отличенъ отъ нуля (онъ равенъ единицѣ), то три предыдущихъ соотношенія равносильны соотношеніямъ

$$\left.\begin{aligned} &\left(1 - \frac{l}{R}\right) ds = 0, \\ &dl + l \operatorname{tg}\varphi \frac{ds}{T} = Kl, \\ &d(l \operatorname{tg}\varphi) - \frac{l\, ds}{T} = Kl \operatorname{tg}\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Изъ перваго имѣемъ $l = R$; это показываетъ, что точка P есть центръ кривизны, и прямая PM_1 — полярная прямая. Слѣдо-

вательно, всѣ развертки кривой Γ лежатъ на полярной поверхности. Чтобы закончить нахожденіе этихъ развертокъ, исключимъ K изъ двухъ послѣднихъ уравненій (58), замѣнивъ въ нихъ предварительно l черезъ R; послѣ приведеній останется $ds = T\,d\varphi$. Слѣдовательно, мы получимъ уголъ φ посредствомъ квадратуры

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^s \frac{ds}{T}. \qquad (59)$$

Если мы разсмотримъ два различныхъ значенія угла φ, соотвѣтствующихъ двумъ различнымъ значеніямъ постояннаго φ_0, то разность этихъ двухъ значеній угла φ будетъ оставаться постоянною вдоль кривой Γ. Отсюда слѣдуетъ, что двѣ нормали кривой Γ, касающіяся двухъ различныхъ развертокъ, пересѣкаются подъ постояннымъ угломъ. Если извѣстно одно какое-нибудь семейство нормалей кривой Γ, образующихъ разгибающуюся поверхность, то мы получимъ всѣ другія разгибающіяся поверхности, образованныя нормалями кривой Γ, если повернемъ всѣ нормали перваго семейства на произвольный, но постоянный уголъ около точекъ, въ которыхъ онѣ пересѣкаютъ кривую Γ.

Примѣчаніе I. — Если кривая Γ — плоская, то T равно безконечности, и формула (59) даетъ $\varphi = \varphi_0$. Развертка, соотвѣтствующая значенію $\varphi_0 = 0$, есть разсмотрѣнная выше (§ 206) плоская развертка, представляющая въ то же время мѣсто центровъ кривизны кривой Γ. Кромѣ этой развертки есть еще безчисленное множество другихъ развертокъ; всѣ онѣ расположены на цилиндрѣ, перпендикулярнымъ сѣченіемъ котораго служитъ обыкновенная развертка, и представляютъ кривыя двойной кривизны, называемыя винтовыми линіями; эти линіи будутъ нами разсмотрѣны въ слѣдующемъ параграфѣ. Это — единственный случай, когда мѣсто центровъ кривизны кривой есть въ то же время ея развертка. Въ самомъ дѣлѣ, для этого должно быть $\varphi = 0$; но для того чтобы уравненіе (59) удовлетворялось при $\varphi = 0$, необходимо, чтобы T было безконечно велико, т.-е. чтобы было $\Delta = 0$. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ кривая Γ должна быть плоскою (§ 216).

Примѣчаніе II. — Если кривая D есть развертка кривой Γ, то, обратно, кривая Γ есть развертывающая кривой D. Слѣдовательно, обозначая черезъ s_1 дугу развертки, отсчитываемую въ надлежащемъ направленіи, имѣемъ

$$ds_1 = d(MM_1);$$

такимъ образомъ, всѣ развертки кривой суть спрямляемыя кривыя*).

232. Винтовыя линіи. — Пусть будетъ C какая-нибудь плоская кривая; если мы отложимъ отъ каждой точки m этой кривой на перпендикулярѣ къ плоскости кривой C длину mM, пропорціональную длинѣ дуги кривой C, отсчитываемой отъ нѣкоторой постоянной точки A, то получимъ кривую двойной кривизны Γ, представляющую мѣсто точекъ M. Эта кривая двойной кривизны Γ называется винтовою линіею. Примемъ за плоскость xOy плоскость кривой C, и пусть будутъ

$$x=f(\sigma), \quad y=\varphi(\sigma)$$

выраженія координатъ какой-нибудь точки m кривой C въ функціи длины ея дуги σ. Координаты соотвѣтствующей точки M кривой Γ будутъ

$$x=f(\sigma), \quad y=\varphi(\sigma), \quad z=K\sigma, \tag{60}$$

гдѣ K — постоянный множитель, причемъ функціи f и φ удовлетворяютъ соотношенію $f'^2+\varphi'^2=1$. Обозначая черезъ s длину дуги кривой Γ, изъ формулъ (60) имѣемъ

$$ds^2=(f'^2+\varphi'^2+K^2)\,d\sigma^2=(1+K^2)\,d\sigma^2,$$

и, слѣдовательно, $s=\sigma\sqrt{1+K^2}+H$ гдѣ H—постоянное. Если мы условимся отсчитывать длины дугъ s и σ отъ одной и той же точки A кривой C, то будемъ имѣть $H=0$, и $s=\sigma\sqrt{1+K^2}$. Направляющіе косинусы касательной къ кривой Γ будутъ

$$\alpha=\frac{f'(\sigma)}{\sqrt{1+K^2}}, \quad \beta=\frac{\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1+K^2}}, \quad \gamma=\frac{K}{\sqrt{1+K^2}}. \tag{61}$$

Такъ какъ γ не зависитъ отъ σ, то касательныя къ винтовой линіи образуютъ съ осью Oz постоянный уголъ. Это свойство — характеристическое для винтовой линіи. Всякая кривая, касательныя къ которой образуютъ съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ направленіемъ постоянный уголъ, есть винтовая линія. Для доказательства этого предложенія примемъ за ось Oz прямую, параллельную этому направленію, и пусть будетъ C проекція искомой кривой Γ на плоскость xOy. Уравненія кривой Γ всегда можно представить въ видѣ

$$x=f(\sigma), \quad y=\varphi(\sigma), \quad z=\psi(\sigma), \tag{62}$$

гдѣ функціи f и φ удовлетворяютъ соотношенію $f'^2+\varphi'^2=1$; для этого нужно только принять за независимое перемѣнное длину дуги σ кривой C. Отсюда имѣемъ

$$\gamma=\frac{dz}{ds}=\frac{\psi'(\sigma)}{\sqrt{f'^2+\varphi'^2+\psi'^2}}=\frac{\psi'}{\sqrt{1+\psi'^2}}.$$

---

*) Т.-е. кривыя, у которыхъ длина дуги можетъ быть выражена при помощи функцій, предполагаемыхъ извѣстными. *(Ред.)*

Для того чтобы γ было постоянно, необходимо и достаточно, чтобы было постоянно ψ', откуда слѣдуетъ, что $\psi(\sigma)$ должно быть вида $K\sigma+z_0$. Если мы перенесемъ начало координатъ въ точку $x=0$, $y=0$, $z=z_0$, то получимъ для кривой Γ уравненіе (60).

Такъ какъ для винтовой линіи γ — постоянно, то изъ формулы $\frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma'}{R}$ слѣдуетъ $\gamma'=0$. Слѣдовательно, главная нормаль винтовой линіи перпендикулярна къ образующимъ цилиндра; такъ какъ, кромѣ того, главная нормаль перпендикулярна къ касательной къ винтовой линіи, то она совпадаетъ съ нормалью къ цилиндру, и соприкасающаяся плоскость будетъ нормальна къ поверхности цилиндра. Бинормаль винтовой линіи лежитъ въ касательной плоскости къ цилиндру и перпендикулярна къ касательной къ винтовой линіи; отсюда слѣдуетъ, что бинормаль также образуетъ съ Oz постоянный уголъ.

Такъ какъ $\gamma'=0$, то изъ формулы $\frac{d\gamma'}{ds}=-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma''}{T}$ имѣемъ $\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}=0$; такимъ образомъ, для винтовой линіи отношеніе $\frac{T}{R}$ постоянно.

Каждое изъ этихъ свойствъ характеризуетъ винтовую линію. Докажемъ, напримѣръ, что всякая кривая, для которой отношеніе $\frac{T}{R}$ постоянно, есть винтовая линія (Ж. Бертранъ).

Изъ формулъ Френе имѣемъ

$$\frac{d\alpha}{d\alpha''}=\frac{d\beta}{d\beta''}=\frac{d\gamma}{d\gamma''}=\frac{T}{R}=\frac{1}{H};$$

если H постоянно, то, интегрируя, получимъ

$$\alpha''=H\alpha-A,\quad \beta''=H\beta-B,\quad \gamma''=H\gamma-C,$$

гдѣ A, B, C — новыя постоянныя. Складывая эти уравненія, предварительно умноживъ ихъ на α, β, γ, получимъ

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=H;$$

это уравненіе можно иначе представить въ видѣ

$$\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{H}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Но $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ суть направляющіе косинусы нѣкоторой прямой Δ, и предыдущее соотношеніе показываетъ, что касательная къ искомой кривой образуетъ съ этимъ направленіемъ постоянный уголъ; слѣдовательно, искомая кривая есть винтовая линія.

Вычислимъ еще радіусъ кривизны винтовой линіи. Принимая во вниманіе найденныя выше значенія (61) для α, β, имѣемъ

$$\frac{\alpha'}{R}=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{1+K^2}f''(\sigma),\qquad \frac{\beta'}{R}=\frac{1}{1+K^2}\varphi''(\sigma),$$

и, такъ какъ $\gamma'=0$,

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{(1+K^2)^2}[f''^2(\sigma)+\varphi''^2(\sigma)]. \tag{63}$$

Слѣдовательно, отношеніе $\frac{1+K^2}{R}$ не зависитъ отъ K. Но легко видѣть, что при $K=0$ это отношеніе равно обратному значенію $\frac{1}{r}$ радіуса кривизны перпендикулярнаго сѣченія (§ 205, примѣчаніе). Такимъ образомъ, формулу (63) можно также представить въ видѣ $R=r(1+K^2)$; отсюда видно, что радіусъ кривизны винтовой линіи находится въ постоянномъ отношеніи къ радіусу кривизны кривой C.

Отсюда легко получить всѣ кривыя, для которыхъ R и T постоянны. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $\frac{T}{R}$ — постоянно, то, по теоремѣ Бертрана, искомыя кривыя суть винтовыя линіи. Далѣе, такъ какъ R постоянно, то постояненъ также и радіусъ кривизны r кривой C. Слѣдовательно, эта кривая C есть окружность, и искомая кривая есть винтовая линія, проведенная на круглomъ цилиндрѣ. Это предложеніе принадлежитъ Пюизё (Puiseux)*).

233. Кривыя Бертрана. — Главныя нормали каждой плоской кривой служатъ вмѣстѣ съ тѣмъ главными нормалями къ безчисленному множеству другихъ плоскихъ кривыхъ, параллельныхъ первой. Бертранъ поставилъ задачу о разысканіи всѣхъ кривыхъ двойной кривизны, для каждой изъ которыхъ главныя нормали были бы въ то же время главными нормалями нѣкоторой другой кривой двойной кривизны. Предположимъ, что координаты x, y, z точекъ искомой кривой Γ выражены въ функціи длины s ея дуги. Отложимъ на каждой главной нормали къ кривой Γ отрѣзокъ длины l, и пусть будутъ X, Y, Z координаты конечной точки этого отрѣзка; мы будемъ имѣть

$$X=x+l\alpha', \quad Y=y+l\beta', \quad Z=z+l\gamma'. \tag{64}$$

Для того чтобы главная нормаль къ кривой Γ была въ то же время главною нормалью къ кривой Γ', описываемой точкою (X, Y, Z), очевидно, необходимо и достаточно, чтобы имѣли мѣсто соотношенія

$$\alpha' dX+\beta' dY+\gamma' dZ=0,$$
$$\alpha'(dY\,d^2Z-dZ\,d^2Y)+\beta'(dZ\,d^2X-dX\,d^2Z)+\gamma'(dX\,d^2Y-dY\,d^2X)=0**).$$

Изъ перваго соотношенія слѣдуетъ $dl=0$; это показываетъ, что длина l должна быть постоянною. Замѣняя затѣмъ во второмъ соотношеніи dX, d^2X, dY, ... ихъ значеніями, выведенными изъ формулъ Френе и изъ формулъ, получающихся отъ ихъ дифференцированія, послѣ приведенія получимъ

$$\frac{1}{T}\,d\left(1-\frac{l}{R}\right)=\left(1-\frac{l}{R}\right)d\left(\frac{1}{T}\right);$$

---

*) Въ этомъ доказательствѣ предполагается, что дѣло идетъ о дѣйствительныхъ кривыхъ, такъ какъ выше предполагалось, что $A^2+B^2+C^2$ не равно нулю (см. диссертацію Ліона (Lyon), Sur les courbes à torsion constante, 1890).

**) Послѣднее уравненіе выражаетъ, что главная нормаль съ направляющими косинусами α', β', γ' перпендикулярна къ бинормали кривой Γ' (ср. § 225, форм. 43). (*Ред.*).

интегрируя это уравненіе, будемъ имѣть

$$\frac{l}{R}+\frac{l'}{T}=1, \tag{65}$$

гдѣ l' — новое постоянное. Слѣдовательно, искомыя кривыя суть тѣ, для которыхъ существуетъ линейное соотношеніе между кривизною и крученіемъ. Очевидно, что это условіе и достаточно, причемъ длина l дается самимъ соотношеніемъ (65).

Одинъ замѣчательный частный случай этихъ кривыхъ, именно, тотъ, когда радіусъ кривизны постояненъ, былъ уже раньше разсмотрѣнъ Монжемъ. Въ этомъ случаѣ соотношеніе (65) обращается въ $l=R$, и, слѣдовательно, кривая Γ', представляемая уравненіями (64), есть мѣсто центровъ кривизны кривой Γ. Предполагая $l=R=$постоянному, изъ уравненій (64) имѣемъ

$$dX=-\frac{R}{T}\alpha''\,ds,\quad dY=-\frac{R}{T}\beta''\,ds,\quad dZ=-\frac{R}{T}\gamma''ds;$$

эти формулы показываютъ, что касательная къ кривой Γ' есть полярная прямая кривой Γ. Радіусъ кривизны R' кривой Γ' будетъ равенъ

$$R'^2=\frac{dX^2+dY^2+dZ^2}{d\alpha''^2+d\beta''^2+d\gamma''^2}=R^2.$$

Слѣдовательно, радіусъ кривизны R' кривой Γ' также постояненъ и равенъ R. Кромѣ того, легко видѣть, что связь между кривыми Γ и Γ' взаимна; каждая изъ нихъ есть ребро возврата полярной поверхности другой. Всѣ эти свойства легко провѣрить непосредственно на частномъ случаѣ круглаго винта.

Примѣчаніе. — Не трудно получить общія формулы, представляющія всѣ кривыя двойной кривизны, радіусъ кривизны которыхъ имѣетъ постоянное значеніе. Пусть будетъ R данный постоянный радіусъ, и пусть будутъ α, β, γ нѣкоторыя функціи перемѣннаго параметра, удовлетворяющія соотношенію $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Уравненія

$$X=R\int\alpha\,d\sigma,\quad Y=R\int\beta\,d\sigma,\quad Z=R\int\gamma\,d\sigma, \tag{66}$$

гдѣ $d\sigma=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}$, представляютъ искомую кривую, и легко доказать, что мы получаемъ такимъ образомъ всѣ кривыя, обладающія требуемымъ свойствомъ. Въ самомъ дѣлѣ, α, β, γ суть не что иное, какъ направляющіе косинусы касательной къ кривой, представляемой уравненіями (66), а σ — длина дуги сферической индикатрисы (§ 225).

IV. — ПРИКОСНОВЕНІЕ КРИВЫХЪ ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ. — ПРИКОСНОВЕНІЕ КРИВЫХЪ И ПОВЕРХНОСТЕЙ.

234. Прикосновеніе кривыхъ.—Порядокъ прикосновенія кривыхъ двойной кривизны опредѣляется такимъ же образомъ, какъ и порядокъ прикосновенія плоскихъ кривыхъ. Разсмотримъ двѣ кривыя двойной кривизны Γ, Γ', касающіяся между

собою въ точкѣ A. Пусть будетъ M точка кривой Γ, близкая къ точкѣ A, и пусть точкѣ M кривой Γ соотвѣтствуетъ нѣкоторая точка M' кривой Γ' такимъ образомъ, что точки M' и M вмѣстѣ приближаются къ точкѣ A. Найдемъ наивысшій возможный порядокъ малости безконечно малаго разстоянія MM' относительно дуги AM, разсматриваемой, какъ главное безконечно малое. Если этотъ наивысшій порядокъ будетъ равенъ $(n+1)$, то мы будемъ говорить, что кривыя Γ и Γ' въ точкѣ A имѣютъ прикосновеніе n-го порядка.

Отнесемъ обѣ кривыя къ системѣ прямоугольныхъ осей*), причемъ возьмемъ плоскость yOz не параллельна общей касательной къ обѣимъ кривымъ къ точкѣ A, и предположимъ сначала, что уравненія этихъ кривыхъ имѣютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} y&=f(x),\\ z&=\varphi(x),\end{aligned}\right\}\quad(\Gamma) \qquad\qquad \left.\begin{aligned} Y&=F(x),\\ Z&=\Phi(x).\end{aligned}\right\}\quad(\Gamma')$$

Пусть будутъ (x_0, y_0, z_0) координаты точки прикосновенія A. Координаты точекъ M, M' будутъ соотвѣтственно равны

$$[x_0+h,\ f(x_0+h),\ \varphi(x_0+h)],\quad [x_0+k,\ F(x_0+k),\ \Phi(x_0+k)],$$

гдѣ k есть нѣкоторая функція отъ h, зависящая отъ принятаго закона соотвѣтствія между точками кривыхъ Γ и Γ' и обращающаяся въ нуль вмѣстѣ съ h. Какъ и въ случаѣ плоскихъ кривыхъ (§ 211), за главное безконечно малое вмѣсто длины дуги AM можно принять h. Для того чтобы разстояніе MM' было безконечно малымъ $(n+1)$-го порядка, необходимо, чтобы каждая изъ разностей

$$k-h,\quad F(x_0+k)-f(x_0+h),\quad \Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h)$$

была безконечно малою, по крайней мѣрѣ, $(n+1)$-го порядка. Слѣдовательно, должно быть

$$k-h=\alpha h^{n+1},\qquad F(x_0+k)-f(x_0+h)=\beta h^{n+1},$$
$$\Phi(x_0+k)-\varphi(x_0+h)=\gamma h^{n+1},$$

гдѣ при приближеніи h къ нулю количества α, β, γ остаются конечными**). Замѣняя въ двухъ послѣднихъ уравненіяхъ k

*) Пользуясь формулою для разстоянія между двумя точками въ косоугольныхъ координатахъ, легко доказать, что здѣсь въ этомъ предположеніи нѣтъ необходимости.

**) Т.-е. не обращаются въ безконечность; однако два изъ нихъ могутъ обращаться въ нуль. (*Ред.*)

его значеніемъ $h+\alpha h^{n+1}$, полученнымъ изъ перваго уравненія, будемъ имѣть

$$F(x_0+h+\alpha h^{n+1})-f(x_0+h)=\beta h^{n+1},$$
$$\Phi(x_0+h+\alpha h^{n+1})-\varphi(x_0+h)=\gamma h^{n+1}.$$

Разлагая $F(x_0+h+\alpha h^{n+1})$ и $\Phi(x_0+h+\alpha h^{n+1})$ въ ряды по формулѣ Тэлора, найдемъ, что всѣ члены, содержащіе α, имѣютъ множителемъ h^{n+1}; слѣдовательно, для того чтобы разстояніе MM' было безконечно малымъ $(n+1)$-го порядка, необходимо, чтобы каждая изъ разностей

$$F(x_0+h)-f(x_0+h), \quad \Phi(x_0+h)-\varphi(x_0+h)$$

была безконечно малою, по крайней мѣрѣ, $(n+1)$-го порядка. Отсюда слѣдуетъ, что если разстояніе MM' будетъ безконечно малымъ $(n+1)$-го порядка, то разстояніе MN между точками M и N обѣихъ кривыхъ съ общею абсциссою x_0+h будетъ безконечно малымъ не ниже $(n+1)$-го порядка. Слѣдовательно, мы получимъ наивысшій порядокъ малости, считая соотвѣтствующими тѣ точки обѣихъ кривыхъ, которыя имѣютъ одну и ту же абсциссу.

Легко найти этотъ наивысшій порядокъ прикосновенія. Такъ какъ въ точкѣ A кривыя касаются между собою, то мы имѣемъ

$$f(x_0)=F(x_0), \quad f'(x_0)=F'(x_0), \quad \varphi(x_0)=\Phi(x_0), \quad \varphi'(x_0)=\Phi'(x_0).$$

Предположимъ, для общности, что, кромѣ того,

$$f''(x_0)=F''(x_0), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x_0)=F^{(n)}(x_0),$$
$$\varphi''(x_0)=\Phi''(x_0), \quad \ldots, \quad \varphi^{(n)}(x_0)=\Phi^{(n)}(x_0),$$

но что, по крайней мѣрѣ, одна изъ разностей

$$F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0), \quad \Phi^{(n+1)}(x_0)-\varphi^{(n+1)}(x_0)$$

не равна нулю. Въ этомъ случаѣ разстояніе MM' будетъ безконечно малымъ $(n+1)$-го порядка, и прикосновеніе будетъ n-го порядка. Этотъ результатъ можно выразить слѣдующимъ образомъ. Чтобы найти порядокъ прикосновенія кривыхъ Γ и Γ', нужно разсмотрѣть проекціи (C, C') и (C_1, C'_1) этихъ кривыхъ на плоскости xOy и xOz, вычислить порядокъ прикосновенія C съ C', C_1 съ C'_1 и взять меньшее изъ этихъ двухъ чиселъ.

Если кривыя Γ, Γ' представлены уравненіями

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t), \qquad (\Gamma)$$
$$X=f(u), \quad Y=\Phi(u), \quad Z=\Psi(u), \qquad (\Gamma')$$

то, для того чтобы эти кривыя касались между собою въ точкѣ $u=t=t_0$, должно быть

$$\Phi(t_0)=\varphi(t_0), \quad \Phi'(t_0)=\varphi'(t_0), \quad \Psi(t_0)=\psi(t_0), \quad \Psi'(t_0)=\psi'(t_0).$$

Если мы предположимъ, что $f'(t_0)$ не равно нулю, то касательная въ точкѣ прикосновенія не будетъ параллельна плоскости yOz, и точки обѣихъ кривыхъ, имѣющія общую абсциссу, будутъ соотвѣтствовать одному и тому же значенію параметра t. Слѣдовательно, чтобы прикосновеніе было n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы разности $\Phi(t)-\varphi(t)$ и $\Psi(t)-\psi(t)$ были относительно $t-t_0$ безконечно малыми $(n+1)$ порядка, т.-е. чтобы было

$$\Phi'(t_0)=\varphi'(t_0), \quad \ldots, \quad \Phi^{(n)}(t_0)=\varphi^{(n)}(t_0),$$
$$\Psi'(t_0)=\psi'(t_0), \quad \ldots, \quad \Psi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0),$$

но чтобы, по крайней мѣрѣ, одна изъ разностей

$$\Phi^{(n+1)}(t_0)-\varphi^{(n+1)}(t_0), \quad \Psi^{(n+1)}(t_0)-\psi^{(n+1)}(t_0)$$

не была равна нулю.

Случай, когда кривая Γ представлена уравненіями

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t), \qquad (67)$$

а кривая Γ' двумя не рѣшенными уравненіями

$$F(x, y, z)=0, \quad F_1(x, y, z)=0,$$

легко приводится къ предыдущему. Повторяя разсужденія § 212, не трудно доказать, что, для того чтобы въ какой-нибудь точкѣ кривой Γ, соотвѣтствующей значенію t_0 параметра, разсматриваемыя кривыя имѣли прикосновеніе n-го порядка, должно быть

$$\left.\begin{array}{llll} \mathfrak{F}(t_0)=0, & \mathfrak{F}'(t_0)=0, & \ldots, & \mathfrak{F}^{(n)}(t_0)=0, \\ \mathfrak{F}_1(t_0)=0, & \mathfrak{F}'_1(t_0)=0, & \ldots, & \mathfrak{F}_1^{(n)}(t_0)=0, \end{array}\right\} \qquad (68)$$

гдѣ

$$\mathfrak{F}(t)=F[f(t), \varphi(t), \psi(t)], \quad \mathfrak{F}_1(t)=F_1[f(t), \varphi(t), \psi(t)].$$

235. Соприкасающіяся кривыя.—Пусть будетъ Γ данная кривая, уравненія которой имѣютъ видъ (67); съ другой стороны, разсмотримъ семейство кривыхъ Γ', зависящее отъ $2n+2$ параметровъ $a, b, c, \ldots, l$ и представляемое уравненіями

$$F(x, y, z, a, b, c, \ldots, l)=0, \quad F_1(x, y, z, a, b, c, \ldots, l)=0. \qquad (69)$$

Вообще, можно выбрать значенія этихъ $2n+2$ параметровъ такимъ образомъ, чтобы соотвѣтствующая кривая Γ' этого семейства имѣла съ кривою Γ въ данной точкѣ прикосновеніе n-го порядка. Полученная такимъ образомъ кривая называется соприкасающеюся съ кривою Γ. Уравненіями, опредѣляющими значенія параметровъ $a, b, c, \ldots, l$, будутъ тѣ же данныя выше уравненія (68). Но должно замѣтить, что эти уравненія будутъ совмѣстимы только въ томъ случаѣ, если каждая изъ функцій F и F_1 содержитъ, по крайней мѣрѣ, $(n+1)$ параметровъ. Напримѣръ, если кривыя Γ' будутъ плоскими, то одно изъ уравненій (69) содержитъ только три параметра: слѣдовательно, въ точкѣ, взятой произвольно на кривой двойной кривизны, плоская кривая не можетъ имѣть съ кривою двойной кривизны прикосновенія выше второго порядка.

Примѣнимъ эту теорію къ простѣйшимъ линіямъ: къ прямой и къ окружности. Уравненія прямой содержатъ четыре параметра; слѣдовательно, соприкасающаяся прямая имѣетъ, вообще, съ кривою прикосновеніе только перваго порядка. Легко доказать, что соприкасающаяся прямая совпадаетъ съ касательною къ кривой Γ'. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ уравненія прямой въ видѣ

$$x=az+p, \quad y=bz+q;$$

для точки прикосновенія (x_0, y_0, z_0) съ кривою Γ уравненія (68) обращаются въ

$$x=az_0+p, \quad x'_0=az'_0, \quad y_0=bz_0+q, \quad y'_0=bz'_0,$$

откуда имѣемъ

$$a=\frac{x'_0}{z'_0}, \quad b=\frac{y'_0}{z'_0}, \quad p=x_0-\frac{x'_0}{z'_0}z_0, \quad q=y_0-\frac{y'_0}{z'_0}z_0,$$

и мы приходимъ къ уравненіямъ касательной. Для того чтобы касательная имѣла съ кривою прикосновеніе второго порядка, должно быть $x''_0=az''_0$, $y''_0=bz''_0$, и, слѣдовательно,

$$\frac{x''_0}{x'_0}=\frac{y''_0}{y'_0}=\frac{z''_0}{z'_0};$$

точки, въ которыхъ это имѣетъ мѣсто, были нами разсмотрѣны выше (§ 217).

Въ пространствѣ уравненія окружности содержатъ шесть параметровъ; слѣдовательно, соприкасающаяся окружность имѣетъ съ кривою Γ прикосновеніе второго порядка. Представимъ уравненія окружности въ видѣ

$$F(x, y, z)=A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0,$$
$$F_1(x, y, z)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0,$$

причемъ перемѣнными параметрами будутъ a, b, c, R и отношенія двухъ изъ коэффиціентовъ A, B, C къ третьему. Уравненія, опредѣляющія значенія этихъ параметровъ, будутъ

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0,$$
$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0,$$
$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}=0,$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0,$$
$$(x-a)\frac{dx}{dt}+(y-b)\frac{dy}{dt}+(z-c)\frac{dz}{dt}=0,$$
$$(x-a)\frac{d^2x}{dt^2}+(y-b)\frac{d^2y}{dt^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=0,$$

гдѣ x, y, z должны быть замѣнены соотвѣтственно черезъ $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$. Второе и третье изъ этихъ уравненій показываютъ, что плоскость соприкасающагося круга совпадаетъ съ соприкасающеюся плоскостью къ кривой Γ. Что касается двухъ послѣднихъ уравненій, то, разсматривая въ нихъ a, b, c, какъ текущія координаты, видимъ, что они представляютъ линію пересѣченія нормальной плоскости къ кривой Γ въ точкѣ (x, y, z) съ нормальною плоскостью въ точкѣ, безконечно близкой къ точкѣ (x, y, z), т.-е. полярную прямую. Слѣдовательно, центръ соприкасающагося круга лежитъ въ точкѣ пересѣченія соприкасающейся плоскости съ полярною прямою. Такимъ образомъ, соприкасающійся кругъ совпадаетъ съ кругомъ кривизны, какъ это и можно было предвидѣть; въ самомъ дѣлѣ, кривыя, имѣющія прикосновеніе второго порядка, имѣютъ и общій кругъ кривизны, такъ какъ значенія производныхъ y', z', y'', z'' для обѣихъ кривыхъ одинаковы.

236. Прикосновеніе кривой съ поверхностью. — Разсмотримъ поверхность S и кривую Γ, касающуюся этой поверхности въ какой-нибудь точкѣ A. Пусть точкѣ M этой кривой, близкой къ точкѣ A, соотвѣтствуетъ нѣкоторая точка M' поверхности такимъ образомъ, что обѣ точки M и M' вмѣстѣ приближаются къ точкѣ A. Найдемъ сначала, какимъ образомъ нужно выбрать точки M и M', чтобы порядокъ малости разстоянія MM' относительно длины дуги AM былъ возможно выше. Выберемъ такую систему прямоугольныхъ осей координатъ, чтобы касательная къ кривой Γ въ точкѣ A не была параллельна плоскости yOz, и чтобы касательная плоскость къ поверхности S въ точкѣ A не была параллельна оси Oz.

Пусть будутъ (x_0, y_0, z_0) координаты точки A, $Z=F(x, y)$ — уравненіе поверхности S, $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$ — уравненія кривой Γ, и предположимъ, что при нѣкоторомъ законѣ соотвѣтствія между точками M и M' разстояніе MM' будетъ безконечно малымъ $(n+1)$-го порядка. Координаты (x, y, z) точки M будутъ $[x=x_0+h, y=f(x_0+h), z=\varphi(x_0+h)]$; обозначимъ черезъ X, Y, $Z=F(X, Y)$ координаты точки M'. Для того чтобы разстояніе MM' было относительно длины дуги AM или, что то же, относительно h безконечно малымъ $(n+1)$-го порядка, необходимо, чтобы каждая изъ разностей $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ была безконечно малою, по крайней мѣрѣ, $(n+1)$-го порядка. Слѣдовательно, должно быть

$$X-x=\alpha h^{n+1}, \qquad Y-y=\beta h^{n+1}, \qquad Z-z=\gamma h^{n+1},$$

гдѣ α, β, γ остаются конечными при $h=0$. Отсюда имѣемъ

$$F(x+\alpha h^{n+1}, y+\beta h^{n+1})-z=\gamma h^{n+1}.$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что разность $F(x, y)-z$ сама должна быть безконечно малою, по крайней мѣрѣ, $(n+1)$-го порядка. Это показываетъ, что если мы будемъ считать соотвѣтствующею точкѣ M кривой Γ ту точку N поверхности S, въ которой прямая, проходящая черезъ M и параллельная оси Oz, пересѣкаетъ эту поверхность, то порядокъ малости разстоянія MN будетъ не ниже порядка малости разстоянія MM'. Слѣдовательно, мы получимъ порядокъ прикосновенія кривой и поверхности, если найдемъ порядокъ малости разстоянія MN относительно длины дуги AM или, что то же, относительно h. Иначе можно сказать, что порядокъ прикосновенія кривой и поверхности есть порядокъ прикосновенія кривой Γ съ кривою Γ', представляющею линію пересѣченія поверхности S съ цилиндромъ, проектирующимъ кривую Γ на плоскость xOy параллельно оси Oz. (При этомъ, очевидно, что за направленіе оси Oz мы можемъ принять любое направленіе, не параллельное касательной плоскости.)

Уравненія кривой Γ' будутъ

$$y=f(x), \qquad Z=F[x, f(x)]=\Phi(x);$$

по предположенію, мы имѣемъ,

$$\Phi(x_0)=\varphi(x_0), \qquad \Phi'(x_0)=\varphi'(x_0).$$

если, кромѣ того, будетъ

$$\Phi''(x_0)=\varphi''(x_0),\ \ldots,\quad \Phi^{(n)}(x_0)=\varphi^{(n)}(x_0),\quad \Phi^{(n+1)}(x_0)\neq\varphi^{(n+1)}(x_0),$$

то кривая и поверхность будутъ имѣть прикосновеніе n-го порядка. Такъ какъ уравненіе $\Phi(x)=\varphi(x)$ даетъ абсциссы точекъ пересѣченія кривой съ поверхностью, то предыдущія условія прикосновенія n-го порядка показываютъ также, что $(n+1)$ точекъ пересѣченія кривой съ поверхностью сливаются въ одну точку A.

Разсмотримъ еще тотъ случай, когда кривая Γ представлена уравненіями $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$, а поверхность S—уравненіемъ $F(x, y, z)=0$. Здѣсь опредѣленная выше кривая Γ' представится уравненіями $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\pi(t)$, гдѣ функція $\pi(t)$ опредѣляется соотношеніемъ

$$F[f(t), \varphi(t), \pi(t)]=0.$$

Чтобы кривыя Γ и Γ' имѣли прикосновеніе n-го порядка, необходимо, чтобы разность $\pi(t)-\psi(t)$ была относительно $t-t_0$ безконечно малою $(n+1)$-го порядка, т.-е. чтобы было

$$\pi(t_0)=\psi(t_0),\quad \pi'(t_0)=\psi'(t_0),\quad \ldots,\quad \pi^{(n)}(t_0)=\psi^{(n)}(t_0).$$

Вводя, какъ выше (§ 234), функцію $\mathfrak{F}(t)$, мы можемъ представить эти условія въ видѣ

$$\mathfrak{F}(t_0)=0,\quad \mathfrak{F}'(t_0)=0,\quad \ldots,\quad \mathfrak{F}^{(n)}(t_0)=0.$$

Эти условія выражаютъ, что $(n+1)$ точекъ пересѣченія поверхности съ кривою слились въ одну точку прикосновенія.

Если уравненіе поверхности S зависитъ отъ $(n+1)$ параметровъ $a, b, c, \ldots, l$, то можно выбрать значенія этихъ параметровъ такимъ образомъ, чтобы эта поверхность имѣла съ данною кривою въ данной точкѣ прикосновеніе n-го порядка. Полученная такимъ образомъ поверхность называется **соприкасающеюся поверхностью**.

Въ случаѣ плоскости мы имѣемъ три параметра; эти параметры опредѣлятся слѣдующими уравненіями

$$\begin{aligned} Af(t)+B\varphi(t)+C\psi(t)+D&=0,\\ Af'(t)+B\varphi'(t)+C\psi'(t)&=0,\\ Af''(t)+B\varphi''(t)+C\psi''(t)&=0. \end{aligned}$$

Мы получили тѣ же самыя уравненія, которыми опредѣлялась соприкасающаяся плоскость (§ 215); очевидно, что прикосно-

веніе будетъ, вообще, второго порядка. Чтобы порядокъ прикосновенія былъ выше второго, должно быть

$$Af'''(t)+B\varphi'''(t)+C\psi'''(t)=0,$$

т.-е. соприкасающаяся плоскость должна быть стаціонарною.

237. Соприкасающійся шаръ. Уравненіе шара зависитъ отъ четырехъ параметровъ; слѣдовательно, соприкасающійся шаръ имѣетъ съ кривою Γ прикосновеніе третьяго порядка. Предположимъ для упрощенія вычисленій, что координаты x, y, z точекъ кривой Γ выражены въ функціи длины s ея дуги. Для того чтобы шаръ радіуса ρ съ центромъ въ точкѣ (a, b, c) имѣлъ съ кривою Γ въ данной точкѣ этой кривой прикосновеніе третьяго порядка, должно быть

$$\mathfrak{F}(s)=0,\quad \mathfrak{F}'(s)=0,\quad \mathfrak{F}''(s)=0,\quad \mathfrak{F}'''(s)=0,$$

гдѣ

$$\mathfrak{F}(s)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\rho^2,$$

причемъ предполагается, что x, y, z выражены въ функціи отъ s. Раскрывая три послѣднихъ уравненія и примѣняя формулы Френе, получимъ

$$\mathfrak{F}'(s)=(x-a)\alpha+(y-b)\beta+(z-c)\gamma=0,$$

$$\mathfrak{F}''(s)=(x-a)\frac{\alpha'}{R}+(y-b)\frac{\beta'}{R}+(z-c)\frac{\gamma'}{R}+1=0,$$

$$\mathfrak{F}'''(s)=-\frac{x-a}{R}\left(\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T}\right)-\frac{y-b}{R}\left(\frac{\beta}{R}+\frac{\beta''}{T}\right)-\frac{z-c}{R}\left(\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T}\right)$$
$$-\frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\left[(x-a)\alpha'+(y-b)\beta'+(z-c)\gamma'\right]=0.$$

Эти уравненія опредѣляютъ a, b, c. Разсматривая въ первомъ изъ нихъ a, b, c, какъ текущія координаты, мы видимъ, что первое уравненіе представляетъ нормальную плоскость къ кривой Γ въ точкѣ (x, y, z), а два послѣднихъ уравненія получаются изъ перваго дифференцированіемъ по перемѣнному параметру s. Слѣдовательно, центръ соприкасающагося шара совпадаетъ съ точкою прикосновенія полярной прямой съ своею огибающею. Чтобы рѣшить эти три уравненія, замѣтимъ, что, принимая во вниманіе два первыхъ уравненія, мы можемъ представить послѣднее уравненіе въ видѣ

$$(x-a)\alpha''+(y-b)\beta''+(z-c)\gamma''=T\frac{dR}{ds}.$$

Отсюда легко получимъ

$$a=x+R\alpha'-T\frac{dR}{ds}\alpha'',$$

$$b=y+R\beta'-T\frac{dR}{ds}\beta'',$$

$$c=z+R\gamma'-T\frac{dR}{ds}\gamma''.$$

Радіусъ соприкасающагося шара будетъ равенъ

$$\rho^2=R^2+T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Если R постоянно, то центръ соприкасающагося шара совпадаетъ съ центромъ кривизны, что согласно съ результатомъ, полученнымъ выше (§ 233).

238. Прямыя, соприкасающіяся съ данною поверхностью. — Если уравненія кривой C зависятъ отъ $(n+2)$ перемѣнныхъ параметровъ, то можно выбрать значенія этихъ параметровъ такимъ образомъ, чтобы эта кривая имѣла съ данною поверхностью S въ данной точкѣ M прикосновеніе n-го порядка. Въ самомъ дѣлѣ, если мы выразимъ, что кривая C проходитъ черезъ точку M и встрѣчаетъ въ этой точкѣ поверхность S въ $(n+1)$ слившихся точкахъ, то получимъ для опредѣленія значенія этихъ параметровъ всего $(n+2)$ уравненій. Напримѣръ, уравненія прямой зависятъ отъ четырехъ параметровъ; слѣдовательно, черезъ каждую точку поверхности проходятъ одна или нѣсколько прямыхъ, имѣющихъ съ поверхностью прикосновеніе второго порядка. Чтобы найти эти прямыя, примемъ разсматриваемую точку M поверхности S за начало координатъ, и предположимъ, что ось Oz не лежитъ въ касательной плоскости къ поверхности S въ точкѣ M. Пусть будетъ $z=F(x, y)$ уравненіе поверхности S относительно этой системы осей. Такъ какъ искомая прямая, очевидно, проходитъ черезъ начало координатъ, то ея уравненія будутъ имѣть видъ

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\rho.$$

Уравненіе $c\rho=F(a\rho, b\rho)$ должно имѣть $\rho=0$ тройнымъ корнемъ; слѣдовательно, должно быть

$$c=ap+bq,$$
$$0=a^2r+2abs+b^2t,$$

гдѣ p, q, r, s, t представляютъ значенія производныхъ перваго и второго порядковъ отъ $F(x, y)$ при $x=y=0$. Первое изъ этихъ соотношеній показываетъ, что искомая прямая лежитъ въ касательной плоскости къ поверхности, что очевидно a priori. Мы видимъ, далѣе, что отношеніе $\frac{b}{a}$ опредѣляется изъ уравненія второй степени, корни котораго будутъ дѣйствительны, если $s^2-rt>0$. Такимъ образомъ, черезъ каждую точку поверхности проходятъ двѣ и только двѣ прямыхъ, имѣющихъ съ поверхностью прикосновеніе второго порядка; эти прямыя будутъ дѣйствительными или мнимыми въ зависимости отъ знака s^2-rt. Мы встрѣтимся съ этими прямыми въ слѣдующей главѣ при разсмотрѣніи кривизны поверхностей.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Найти въ конечномъ видѣ уравненія развертокъ кривой, пересѣкающей подъ постояннымъ угломъ прямолинейныя образующія прямого круглаго конуса. Изслѣдовать полученныя рѣшенія.

2. Существуютъ ли такія кривыя двойной кривизны Γ, чтобы точки пересѣченія данной плоскости P съ касательною, съ главною нормалью и съ бинормалью въ каждой точкѣ этой кривой были вершинами равносторонняго треугольника?

3. Пусть будетъ Γ ребро возврата поверхности, огибающей семейство сферъ (т.-е. Γ есть огибающая характеристическихъ окружностей этого семейства). Доказать, что кривая, представляющая мѣсто центровъ перемѣнной сферы, лежитъ на полярной поверхности кривой Γ. Обратное предложеніе.

4. Пусть будетъ Γ данная кривая двойной кривизны, M — точка кривой Γ, и O — данная точка пространства. Проведемъ черезъ точку O прямую, параллельную полярной прямой кривой Γ для точки M, и отложимъ на ней длину ON, равную радіусу кривизны кривой Γ въ точкѣ M. Доказать, что соотвѣтственные линейные элементы кривой Γ', описываемой точкою N, и кривой Γ'', мѣстомъ центровъ кривизны кривой Γ, равны и взаимно перпендикулярны; кромѣ того, радіусы кривизны въ соотвѣтственныхъ точкахъ кривыхъ Γ' и Γ'' равны между собою. [Руке (Rouquet).]

5. Доказать, что если радіусъ шара, соприкасающагося съ кривою двойной кривизны Γ, имѣетъ постоянную длину a, то или кривая Γ лежитъ на шарѣ радіуса, равнаго a, или радіусъ кривизны кривой Γ постояненъ и равенъ a.

6. Доказать, что для того чтобы мѣстомъ центровъ кривизны винтовой линіи, проведенной на нѣкоторомъ цилиндрѣ, была другая винтовая линія, проведенная на цилиндрѣ съ образующими, параллельными образующимъ перваго цилиндра, необходимо и достаточно, чтобы перпендикулярнымъ сѣченіемъ этого второго цилиндра была окружность

или логариѳмическая спираль. Въ послѣднемъ случаѣ обѣ винтовыя линіи лежатъ на круглыхъ конусахъ, имѣющихъ общую ось и общую вершину.

[Тиссо (Tissot), Nouvelles Annales, т. XI; 1852.]

7*. Если двѣ кривыя двойной кривизны имѣютъ общія главныя нормали, то соприкасающіяся плоскости къ обѣимъ кривымъ въ точкахъ пересѣченія этихъ кривыхъ съ одною и тою же нормалью образуютъ постоянный уголъ. Эти двѣ точки и центры кривизны обѣихъ кривыхъ образуютъ систему четырехъ точекъ, ангармоническое отношеніе которыхъ постоянно. Произведеніе радіусовъ кручения обѣихъ кривыхъ въ соотвѣтственныхъ точкахъ также постоянно.

[П. Серре, Мангеймъ (Mannheim), Шелль (Schell).]

8*. Пусть будутъ x, y, z прямолинейныя координаты точекъ кривой двойной кривизны, и s — длина дуги этой кривой. Кривая Γ_0, представляемая уравненіями

$$x_0 = \int \alpha'' \, ds, \quad y_0 = \int \beta'' \, ds, \quad z_0 = \int \gamma'' \, ds,$$

гдѣ x_0, y_0, z_0 — текущія координаты, называется дополнительною кривою (courbe adjointe), а кривыя, представляемыя уравненіями

$$X = x \cos \theta + x_0 \sin \theta, \quad Y = y \cos \theta + y_0 \sin \theta, \quad Z = z \cos \theta + z_0 \sin \theta,$$

гдѣ X, Y, Z — текущія координаты, называются присоединенными кривыми (courbes associées). Найти для этихъ кривыхъ расположеніе основного трехграннаго угла (§ 228), а также радіусы кривизны и кручения.

Если кривизна кривой Γ постоянна, то кривая Γ_0 имѣетъ постоянное кручение, и присоединенными кривыми будутъ кривыя Бертрана (§ 233). Вывести отсюда общія уравненія этихъ послѣднихъ.

9. Пусть будутъ Γ и Γ' кривыя двойной кривизны, касающіяся между собою въ точкѣ A. Отложимъ на этихъ кривыхъ, начиная отъ точки A, въ одинаковомъ направленіи двѣ безконечно малыхъ дуги AM и AM'. Найти предѣльное положеніе прямой MM'. [Коши.]

10. Для того чтобы прямая, неизмѣнно связанная съ основнымъ трехграннымъ угломъ кривой двойной кривизны Γ и проходящая черезъ вершину этого угла, образовала разгибающуюся поверхность, необходимо, чтобы эта прямая совпадала съ касательною, за исключеніемъ того случая, когда кривая Γ есть винтовая линія. Въ послѣднемъ случаѣ существуетъ безчисленное множество прямыхъ, обладающихъ требуемымъ свойствомъ.

Для кривой Бертрана существуютъ два гиперболическихъ параболоида, неизмѣнно связанныхъ съ основнымъ трехграннымъ угломъ, всѣ прямолинейныя образующія которыхъ образуютъ разгибающіяся поверхности.

[Чезаро (Cesaro), Rivista di Matematica, т. II, 1892; стр. 155.]

11*. Для того чтобы главныя нормали кривой двойной кривизны были бинормалями другой кривой двойной кривизны, между радіусомъ кривизны и радіусомъ кручения первой кривой должно существовать соотношеніе вида

$$A\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}\right) = \frac{B}{R},$$

гдѣ A и B — постоянныя.

[Мангеймъ, Comptes rendus, 1877.]

[Случаи, когда прямая, проходящая черезъ точку кривой двойной кривизны и неразрывно связанная съ основнымъ трехграннымъ угломъ, остается во все время движенія главною нормалью или бинормалью другой кривой двойной кривизны, были изучены Пелле (Pellet), (Comptes rendus, май 1887), Чезаро (Nouvelles Annales, 1888, стр. 147), Балитраномъ (Balitrand) (Mathesis, 1894, стр. 159).]

12. Доказать, что если соприкасающаяся плоскость кривой двойной кривизны Γ постоянно касается одной и той же сферы съ центромъ O, то 1) плоскость, проходящая черезъ касательную къ кривой Γ и перпендикулярная къ главной нормали, проходитъ черезъ точку O, 2) отношеніе радіуса кривизны къ радіусу кручения есть линейная функція длины дуги кривой Γ. Обратныя теоремы.

ГЛАВА XII.

Поверхности.

I. — КРИВИЗНА КРИВЫХЪ, ПРОВЕДЕННЫХЪ НА ПОВЕРХНОСТИ.

239. Основная формула. Теорема Менье. — Чтобы изслѣдовать кривизну поверхности въ какой-нибудь обыкновенной ея точкѣ M, отнесемъ эту поверхность къ системѣ прямоугольныхъ осей координатъ, причемъ предположимъ, что ось Oz не параллельна касательной плоскости въ точкѣ M. Если поверхность аналитическая, то она представится уравненіемъ вида

$$z = F(x, y), \qquad (1)$$

причемъ вблизи разсматриваемой точки $M(x_0, y_0, z_0)$ функція $F(x, y)$ разлагается въ цѣлый рядъ, расположенный по степенямъ $x - x_0$ и $y - y_0$. Но для справедливости послѣдующихъ разсужденій нѣтъ необходимости, чтобы поверхность была аналитическою. Мы предположимъ только, что функція $F(x, y)$ и ея частныя производныя перваго и второго порядковъ, которыя мы обозначимъ, слѣдуя Монжу, черезъ p, q, r, s, t, непрерывны вблизи значеній x_0, y_0.

Изъ уравненія касательной плоскости видно, что направляющіе косинусы нормали къ поверхности пропорціональны количествамъ p, q, -1. Если мы примемъ за положительное направленіе нормали то, которое образуетъ острый уголъ съ осью Oz, то направляющіе косинусы λ, μ, ν нормали опредѣлятся однозначно формулами

$$\lambda = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mu = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \qquad (2)$$

Пусть будетъ C кривая, лежащая на поверхности и проходящая черезъ точку M; координаты точекъ этой кривой

будутъ функціями нѣкотораго перемѣннаго параметра, тождественно удовлетворяющими уравненію (1); слѣдовательно, ихъ дифференціалы удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$dz = p\,dx + q\,dy, \tag{3}$$

$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + 2s\,dxdy + t\,dy^2. \tag{4}$$

Первое изъ этихъ соотношеній показываетъ, что касательная прямая къ кривой C лежитъ въ касательной плоскости къ поверхности. Чтобы истолковать геометрически второе соотношеніе, выразимъ дифференціалы черезъ элементы, имѣющіе геометрическое значеніе. Принимая за независимое перемѣнное длину σ дуги кривой C, имѣемъ

$$\frac{dx}{d\sigma} = \alpha, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \beta, \quad \frac{dz}{d\sigma} = \gamma, \quad \frac{d^2x}{d\sigma^2} = \frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d^2y}{d\sigma^2} = \frac{\beta'}{R}, \quad \frac{d^2z}{d\sigma^2} = \frac{\gamma'}{R},$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', R$ имѣютъ обычное значеніе (§ 229). Подставивъ эти значенія въ формулу (4) и раздѣливъ ее на $\sqrt{1+p^2+q^2}$, получимъ

$$\frac{\gamma' - p\alpha' - q\beta'}{R\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

на основаніи формулы (2), это выраженіе можно представить въ видѣ

$$\frac{\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma'}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Но числитель $\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma'$ есть не что иное, какъ косинусъ угла θ между направленіемъ главной нормали кривой C и положительнымъ направленіемъ нормали къ поверхности; такимъ образомъ, мы получаемъ основную формулу

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{5}$$

Эта формула совершенно равносильна формулѣ (4); поэтому изъ нея можно вывести всѣ свойства, касающіяся кривизны кривыхъ, расположенныхъ на поверхности. Такъ какъ въ этой формулѣ радіусъ кривизны R и корень $\sqrt{1+p^2+q^2}$ суть количества существенно положительныя, то знакъ $\cos\theta$ одинаковъ со знакомъ $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$, т.-е. знакъ этого послѣдняго количества показываетъ, будетъ ли уголъ θ острымъ или тупымъ.

Разсмотримъ сначала всѣ кривыя, которыя проходятъ на поверхности S черезъ какую-нибудь точку M этой поверхности и имѣютъ въ этой точкѣ общую соприкасающуюся плос-

кость (отличную отъ касательной плоскости къ поверхности). Всѣ эти кривыя имѣютъ общую касательную прямую, именно, прямую пересѣченія ихъ общей соприкасающейся плоскости съ касательною плоскостью къ поверхности. Слѣдовательно, для всѣхъ этихъ кривыхъ направляющіе косинусы α, β, γ одинаковы. Далѣе, направленіе главной нормали каждой кривой совпадаетъ съ однимъ изъ двухъ направленій перпендикуляра къ касательной прямой, проведеннаго въ общей соприкасающейся плоскости разсматриваемыхъ кривыхъ. Пусть будетъ ω уголъ между нормалью къ поверхности и однимъ изъ этихъ двухъ направленій; тогда должно быть или $\theta=\omega$, или $\theta=\pi-\omega$. Но, какъ мы видѣли, уголъ θ будетъ острымъ или тупымъ въ зависимости отъ знака количества $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$; поэтому для всѣхъ разсматриваемыхъ кривыхъ направленіе главной нормали будетъ одно и то же. Далѣе, такъ какъ для всѣхъ разсматриваемыхъ кривыхъ значеніе угла θ одинаково, то формула (5) показываетъ, что всѣ эти кривыя имѣютъ общій радіусъ кривизны, и, слѣдовательно, всѣ кривыя, проведенныя на поверхности черезъ какую-нибудь точку M и имѣющія въ этой точкѣ общую соприкасающуюся плоскость, имѣютъ также и общій центръ кривизны.

Отсюда слѣдуетъ, что мы можемъ ограничиться изученіемъ кривизны плоскихъ сѣченій, проведенныхъ на поверхности. Разсмотримъ сначала, какъ измѣняется кривизна различныхъ плоскихъ сѣченій, образованныхъ на поверхности плоскостями, проходящими черезъ общую касательную прямую MT. Не нарушая общности, мы можемъ предположить, что для этой касательной прямой количество $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$ положительно, такъ какъ достаточно измѣнить положительное направленіе оси Oz, чтобы r, s, t перемѣнили знаки. Слѣдовательно, для всѣхъ этихъ сѣченій мы будемъ имѣть $\cos\theta>0$, и уголъ θ будетъ острымъ. Пусть будетъ R_1 радіусъ кривизны сѣченія, образованнаго нормальною плоскостью, проходящею черезъ MT; въ этомъ случаѣ уголъ θ равенъ нулю, и мы имѣемъ

$$\frac{1}{R_1}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Сравнивая эту формулу съ формулою (5) для радіуса кривизны наклоннаго сѣченія, образующаго съ нормальнымъ сѣченіемъ уголъ θ, находимъ

$$\frac{1}{R_1}=\frac{\cos\theta}{R}, \tag{6}$$

или $R=R_1\cos\theta$. Эта формула показываетъ, что центръ кривизны наклоннаго сѣченія есть проекція на сѣкущую плоскость центра кривизны нормальнаго сѣченія, проведеннаго черезъ ту же касательную прямую. Эта теорема принадлежитъ Менье (Meusnier).

Вслѣдствіе теоремы Менье изученіе кривизны наклоннаго сѣченія приводится къ изученію кривизны нормальныхъ сѣченій. Прежде чѣмъ перейти къ изложенію результатовъ, полученныхъ по этому вопросу Эйлеромъ, замѣтимъ сначала, что для нормальнаго сѣченія формула (5) принимаетъ два различныхъ вида въ зависимости отъ знака количества $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$. Во избѣжаніе этого неудобства, условимся обозначать въ дальнѣйшемъ черезъ R радіусъ кривизны, взятый со знакомъ + или — въ зависимости отъ того, совпадаетъ ли направленіе отъ точки M къ центру кривизны съ положительнымъ направленіемъ нормали къ поверхности, или эти два направленія противоположны. Тогда радіусъ кривизны R представится въ обоихъ случаяхъ формулою

$$\frac{1}{R}=\frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad (7)$$

которая вмѣстѣ съ тѣмъ уже вполнѣ опредѣляетъ и положеніе центра кривизны.

Изъ формулы (7) не трудно составить представленіе о томъ, какъ расположена поверхность вблизи точки прикосновенія относительно своей касательной плоскости. Если $s^2-rt<0$, то при вращеніи сѣкущей плоскости около нормали трехчленъ $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$ сохраняетъ постоянный знакъ, именно общій знакъ r и t. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ центры кривизны всѣхъ нормальныхъ сѣченій находятся по одну сторону касательной плоскости, и, слѣдовательно, всѣ нормальныя сѣченія будутъ также расположены по одну сторону касательной плоскости. Въ этомъ случаѣ поверхность называется выпуклою въ разсматриваемой точкѣ, а самая точка называется эллиптическою. Напротивъ, если $s^2-rt>0$, то при двухъ положеніяхъ сѣкущей плоскости трехчленъ $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$ обращается въ нуль, причемъ соотвѣтствующія нормальныя сѣченія имѣютъ въ разсматриваемой точкѣ точку перегиба. Когда сѣкущая плоскость проходитъ въ томъ изъ двугранныхъ угловъ, образованныхъ двумя упомянутыми нормальными сѣченіями, гдѣ R положительно, то соотвѣтствующее нормальное сѣченіе будетъ расположено надъ касательною плоскостью; если же сѣкущая

плоскость проходитъ въ дополнительномъ двугранномъ углѣ, то R отрицательно, и соотвѣтствующее нормальное сѣченіе расположено подъ касательною плоскостью. Слѣдовательно, вблизи точки прикосновенія поверхность пересѣкаетъ касательную плоскость. Въ этомъ случаѣ поверхность называется поверхностью сѣдлообразною, а соотвѣтствующая точка называется гиперболическою. Наконецъ, если $s^2-rt=0$, то всѣ нормальныя сѣченія расположены по одну сторону касательной плоскости, кромѣ одного, имѣющаго безконечно большой радіусъ кривизны и, вообще, пересѣкающаго касательную плоскость вблизи точки прикосновенія. Такая точка поверхности называется параболическою точкою.

Всѣ эти выводы легко провѣрить непосредственно, разсматривая разность $u=z-z'$ между значеніями координаты z для точки поверхности, близкой къ точкѣ $M(x_0, y_0, z_0)$, и для точки плоскости, касательной къ поверхности въ точкѣ M, причемъ обѣ точки проектируются въ одну и ту же точку (x, y) плоскости xOy. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$z'=p(x-x_0)+q(y-y_0),$$

и, слѣдовательно, для точки прикосновенія

$$\frac{du}{dx}=p-\frac{dz'}{dx}=0, \qquad \frac{du}{dy}=0,$$

и

$$\frac{d^2u}{dx^2}=r, \qquad \frac{d^2u}{dx\,dy}=s, \qquad \frac{d^2u}{dy^2}=t.$$

Если $s^2-rt<0$, то u будетъ имѣть въ точкѣ M maximum или minimum (§ 56), и такъ какъ въ этой точкѣ u равно нулю, то вблизи точки M u сохраняетъ постоянный знакъ; напротивъ, если $s^2-rt>0$, то u не имѣетъ въ точкѣ M ни maximum'а, ни minimum'а, и, слѣдовательно, вблизи точки M u не имѣетъ всюду одинаковаго знака.

240. Теоремы Эйлера. Индикатриса. — Чтобы изслѣдовать измѣненіе радіуса кривизны нормальнаго сѣченія, примемъ разсматриваемую точку поверхности за начало координатъ и касательную плоскость къ поверхности въ этой точкѣ за плоскость xOy. При такомъ выборѣ осей мы имѣемъ $p=q=0$, и формула (7) обращается въ

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi+2s\cos\varphi\sin\varphi+t\sin^2\varphi, \qquad (8)$$

гдѣ φ есть уголъ между осью Ox и линіею пересѣченія сѣку-

щей плоскости съ плоскостью xOy. Приравнивая нулю производную отъ правой части уравненія (8), мы найдемъ, что R будетъ имѣть maximum или minimum для двухъ взаимно перпендикулярныхъ направленій. Для болѣе подробнаго изслѣдованія измѣненія радіуса кривизны R во всѣхъ возможныхъ частныхъ случаяхъ, выгодно воспользоваться слѣдующимъ геометрическимъ представленіемъ. Отложимъ на линіи пересѣченія сѣкущей плоскости съ плоскостью xOy длину Om, равную корню квадратному изъ абсолютнаго значенія соотвѣтствующаго радіуса кривизны. При вращеніи сѣкущей плоскости вокругъ нормали точка m опишетъ нѣкоторую кривую, называемую индикатрисою, и очевидно, что изъ разсмотрѣнія этой кривой мы получимъ наглядное представленіе о ходѣ измѣненія радіуса кривизны нормальнаго сѣченія.

Разсмотримъ три возможныхъ случая.

1) $s^2-rt<0$. Въ этомъ случаѣ радіусъ кривизны R сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ; предположимъ, что R положительно. Выраженія координатъ точки m будутъ $\xi=\sqrt{R}\cos\varphi$, $\eta=\sqrt{R}\sin\varphi$, и, слѣдовательно, уравненіе индикатрисы будетъ имѣть видъ

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=1. \qquad (9)$$

Это — уравненіе эллипса съ центромъ въ началѣ координатъ. Отсюда видно, что R будетъ имѣть maximum, когда слѣдъ сѣкущей плоскости совпадаетъ съ большою осью эллипса, и — minimum, когда слѣдъ сѣкущей плоскости совпадаетъ съ малою осью, и что двѣ сѣкущія плоскости, слѣды которыхъ равно наклонены къ осямъ индикатрисы, даютъ для радіуса кривизны R равныя значенія. Нормальныя сѣченія, проходящія черезъ оси индикатрисы, наэываются главными нормальными сѣченіями, а соотвѣтствующіе радіусы кривизны — главными радіусами кривизны. Если мы примемъ за оси Ox и Oy оси индикатрисы, то будемъ имѣть $s=0$, и формула (8) обратится въ

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi+t\sin^2\varphi.$$

Главные радіусы кривизны R_1 и R_2 получатся, если мы положимъ $\varphi=0$ или $\varphi=\frac{\pi}{2}$; отсюда находимъ $\frac{1}{R_1}=r$, $\frac{1}{R_2}=t$, и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \qquad (10)$$

2) $s^2-rt>0$. Въ этомъ случаѣ нормальныя сѣченія, соотвѣтствующія значеніямъ угла φ, удовлетворяющимъ уравненію

$$r\cos^2\varphi+2s\cos\varphi\sin\varphi+t\sin^2\varphi=0,$$

имѣютъ безконечно большіе радіусы кривизны. Пусть будутъ L'_1OL_1, L'_2OL_2 слѣды этихъ нормальныхъ сѣченій на плоскости xOy. Предположимъ, что когда слѣдъ сѣкущей плоскости проходитъ въ углѣ L_1OL_2, то предыдущій трехчленъ положителенъ. Обозначая, какъ и въ первомъ случаѣ, черезъ ξ и η координаты точки m, мы найдемъ, что соотвѣтствующая часть индикатрисы представится уравненіемъ

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=1.$$

Это — уравненіе гиперболы, для которой асимптотами служатъ прямыя L'_1OL_1 и L'_2OL_2; но если слѣдъ сѣкущей плоскости проходитъ въ углѣ L'_2OL_1, то мы будемъ имѣть $R<0$, и, чтобы получить соотвѣтствующую часть индикатрисы, должно положить

$$\xi=\sqrt{-R}\cos\varphi,\qquad \eta=\sqrt{-R}\sin\varphi.$$

Мы получимъ уравненіе гиперболы

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=-1,$$

сопряженной съ первою. При помощи этихъ двухъ сопряженныхъ гиперболъ можно составить представленіе о ходѣ измѣненія радіуса кривизны нормальнаго сѣченія. Принявъ за оси координатъ главныя оси обѣихъ гиперболъ, мы найдемъ, что общая формула (8) и въ этомъ случаѣ можетъ быть представлена въ видѣ (10), гдѣ R_1 и R_2 обозначаютъ главные радіусы кривизны, и изъ которыхъ одинъ положителенъ, а другой отрицателенъ.

3) $s^2-rt=0$. Въ этомъ случаѣ радіусъ кривизны R сохраняетъ постоянный знакъ, напримѣръ, знакъ $+$. Индикатриса представится и въ этомъ случаѣ уравненіемъ (9), но такъ какъ здѣсь эта кривая принадлежитъ къ параболамъ и вмѣстѣ съ тѣмъ имѣетъ центръ въ началѣ координатъ, то она можетъ быть только парою параллельныхъ прямыхъ. Принявъ за ось Oy прямую, параллельную этимъ обѣимъ прямымъ, мы будемъ имѣть въ этой системѣ осей $s=0$, $t=0$, и общая формула (8) приметъ видъ

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\varphi,$$

или

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}.$$

Эту формулу можно также разсматривать, какъ предѣльный случай формулы (10), когда одинъ изъ главныхъ радіусовъ кривизны R_2 обращается въ безконечность.

Формулы Эйлера можно также вывести, и не пользуясь формулою (5). Принявъ разсматриваемую точку поверхности за начало координатъ, а касательную плоскость—за плоскость xOy, и продолжая разложеніе z по формулѣ Тэлора до членовъ третьяго порядка, мы можемъ написать

$$z=\frac{rx^2+2sxy+ty^2}{1.2}+\dots,$$

гдѣ опущенные члены — не ниже третьяго порядка. Чтобы получить радіусъ кривизны сѣченія, образованнаго плоскостью $y=x\operatorname{tg}\varphi$, сдѣлаемъ сначала преобразованіе координатъ

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\qquad y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,$$

и положимъ затѣмъ $y'=0$. Мы получимъ разложеніе z по степенямъ x

$$z=\frac{r\cos^2\varphi+2s\sin\varphi\cos\varphi+t\sin^2\varphi}{1.2}x'^2+\dots,$$

и, воспользовавшись замѣчаніемъ § 214, придемъ къ формулѣ (8).

Примѣчаніе.— Линія пересѣченія поверхности съ своею касательною плоскостью имѣетъ уравненіе

$$0=rx^2+2sxy+ty^2+\varphi_3(x,y)+\dots.$$

Эта кривая имѣетъ двойную точку въ началѣ координатъ, и касательныя въ этой двойной точкѣ суть асимптотическія касательныя. Вообще, если двѣ поверхности S, S_1 касаются въ началѣ координатъ плоскости xOy, то проекція линіи пересѣченія этихъ поверхностей на плоскость xOy представится уравненіемъ

$$0=(r-r_1)x^2+2(s-s_1)xy+(t-t_1)y^2+\dots,$$

гдѣ r_1, s_1, t_1 относятся къ поверхности S_1, а r, s, t—къ поверхности S. Характеръ двойной точки зависитъ отъ знака выраженія $(s-s_1)^2-(r-r_1)(t-t_1)$; если это количество равно нулю, то кривая пересѣченія имѣетъ, вообще, въ началѣ координатъ точку возврата.

Такимъ образомъ, въ каждой точкѣ поверхности есть четыре замѣчательныхъ положенія касательной прямой: двѣ взаимно перпендикулярныхъ касательныхъ, для которыхъ радіусъ кривизны R будетъ maximum или minimum, и двѣ асимптотическихъ или главныхъ касательныхъ, для которыхъ R равно безконечности. Послѣднія касательныя мы получимъ, приравнивая нулю трехчленъ $r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2$ (см. § 238)*).

*) Слѣдуетъ обратить вниманіе на различіе между главными направленіями въ точкѣ поверхности и главными касательными въ этой точкѣ. Главныя направленія суть направленія осей индикатрисы; для нихъ R есть maximum или minimum. Главныя касательныя суть асимптоты индикатрисы; для нихъ $R=\infty$.

(Ред.).

241. Главные радіусы кривизны. — Посмотримъ теперь, какимъ образомъ можно опредѣлить главныя нормальныя сѣченія и главные радіусы кривизны въ любой системѣ прямоугольныхъ осей координатъ.

Каждому значенію R соотвѣтствуютъ, вообще, два нормальныхъ сѣченія, радіусы кривизны которыхъ имѣютъ это значеніе R. Исключеніе составляютъ только тѣ случаи, когда R равно одному изъ главныхъ радіусовъ кривизны; такое значеніе R принадлежитъ только одному сѣченію, — именно, соотвѣтствующему главному нормальному сѣченію. Чтобы найти нормальныя сѣченія, радіусъ кривизны которыхъ имѣетъ данное значеніе R, мы имѣемъ три уравненія для α, β, γ

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2, \quad \gamma = p\alpha + q\beta, \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1.$$

Изъ этихъ уравненій легко составить однородное уравненіе нулевой степени относительно α и β

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = \frac{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+(p\alpha+q\beta)^2}; \tag{11}$$

положивъ $R = D\sqrt{1+p^2+q^2}$, мы получимъ уравненіе, опредѣляющее отношеніе $\frac{\beta}{\alpha}$,

$$\alpha^2(1+p^2-rD)+2\alpha\beta(pq-sD)+\beta^2(1+q^2-tD)=0.$$

Если это уравненіе имѣетъ двойной корень, то этотъ корень обращаетъ въ нуль обѣ частныя производныя перваго порядка по α и β отъ лѣвой части этого уравненія

$$\left.\begin{aligned} \alpha(1+p^2-rD)+\beta(pq-sD)&=0,\\ \alpha(pq-sD)+\beta(1+q^2-tD)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Исключая изъ уравненій (12) α, β и замѣняя D его значеніемъ, мы получимъ уравненіе, опредѣляющее главные радіусы кривизны,

$$\left.\begin{aligned}(rt-s^2)R^2 - \sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]R\\ +(1+p^2+q^2)^2=0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Если же мы исключимъ изъ уравненій (12) D, то получимъ уравненіе второй степени, опредѣляющее линіи пересѣченія главныхъ нормальныхъ сѣченій съ касательною плоскостью,

$$\left.\begin{aligned}&\alpha^2[(1+p^2)s-pqr]\\ &+\alpha\beta[(1+p^2)t-(1+q^2)r]+\beta^2[pqt-(1+q^2)s]=0.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

По самому существу задачи, корни уравненій (13) и (14) всегда дѣйствительны; это легко провѣрить непосредственнымъ вычисленіемъ.

Чтобы уравненіе (13) имѣло равные корни, индикатриса должна быть окружностью; тогда всѣ нормальныя сѣченія будутъ имѣть одинаковый радіусъ кривизны. Въ этомъ случаѣ правая часть уравненія (11) не должна зависѣть отъ отношенія $\frac{\beta}{\alpha}$; слѣдовательно, должно быть

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}. \qquad (15)$$

Точки, удовлетворяющія этому условію, называются точками округленія. Для этихъ точекъ уравненіе (14) обращается въ тожество, такъ какъ здѣсь всякій діаметръ окружности есть и ея ось.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно опредѣлить главныя нормальныя сѣченія поверхности изъ геометрическихъ соображеній. Напримѣръ, если у поверхности S есть плоскость симметріи, проходящая черезъ точку M этой поверхности, то прямая пересѣченія этой плоскости съ касательною плоскостью въ точкѣ M есть, очевидно, ось индикатрисы, и сѣченіе поверхности плоскостью симметріи есть одно изъ главныхъ нормальныхъ сѣченій. Такъ, въ каждой точкѣ поверхности вращенія меридіанъ есть одно изъ главныхъ нормальныхъ сѣченій; слѣдовательно, плоскость второго главнаго нормальнаго сѣченія проходитъ черезъ нормаль къ поверхности и касается параллели. Но центръ кривизны одного изъ наклонныхъ сѣченій, проходящихъ черезъ касательную прямую къ параллели, извѣстенъ, именно, центръ самой параллели. По теоремѣ Менье, отсюда слѣдуетъ, что центръ кривизны второго главнаго сѣченія лежитъ въ точкѣ пересѣченія нормали съ осью поверхности.

Въ каждой точкѣ разгибающейся поверхности мы имѣемъ $s^2-rt=0$, и индикатриса состоитъ изъ пары параллельныхъ прямыхъ. Въ этомъ случаѣ одно изъ главныхъ сѣченій совпадаетъ съ образующею, и соотвѣтствующій радіусъ кривизны безконечно великъ. Плоскость второго главнаго сѣченія перпендикулярна къ образующей. Всѣ точки разгибающейся поверхности — параболическія, и это единственныя поверхности, обладающія этимъ свойствомъ (§ 222).

Если неразгибающаяся поверхность въ нѣкоторыхъ точкахъ выпуклая, а въ другихъ — сѣдлообразная, то эта поверхность имѣетъ, вообще, цѣлую линію параболическихъ точекъ,

отдѣляющую области, гдѣ s^2-rt положительно, отъ областей, гдѣ s^2-rt отрицательно. Напримѣръ, на торѣ такими линіями будутъ двѣ крайнія параллели.

На выпуклой поверхности существуетъ, вообще, только нѣсколько отдѣльныхъ точекъ округленія. Докажемъ, что единственная дѣйствительная поверхность, всѣ точки которой суть точки округленія, есть сфера. Обозначимъ черезъ λ, μ, ν направляющіе косинусы нормали къ поверхности; дифференцируя формулы (2), получимъ

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{pqs-(1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{pqt-(1+q^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{pqr-(1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{pqs-(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

или, по формуламъ (15),

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\mu}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

Первое соотношеніе показываетъ, что λ не зависитъ отъ x, второе, — что μ не зависитъ отъ y; слѣдовательно, общее значеніе производныхъ $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$ не зависитъ ни отъ x, ни отъ y, т.-е. оно равно нѣкоторому постоянному $\frac{1}{a}$. Отсюда слѣдуетъ

$$\lambda=\frac{x-x_0}{a},\quad \mu=\frac{y-y_0}{a},\quad \nu=\frac{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}{a},$$
$$p=-\frac{\lambda}{\nu}=-\frac{x-x_0}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}},$$
$$q=-\frac{\mu}{\nu}=-\frac{y-y_0}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}.$$

Интегрируя два послѣднихъ уравненія, находимъ

$$z=z_0+\sqrt{a^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2},$$

а это — уравненіе сферы. Точно такъ же можно было бы доказать, что если $\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$, то поверхность есть плоскость. Кромѣ этихъ рѣшеній, уравненія (15) имѣютъ еще безчисленное множество мнимыхъ рѣшеній, удовлетворяющихъ уравненію $1+p^2+q^2=0$; въ этомъ можно убѣдиться, дифференцируя это послѣднее соотношеніе по x и по y.

II. — АСИМПТОТИЧЕСКІЯ ЛИНІИ. — СОПРЯЖЕННЫЯ ЛИНІИ.

242. Опредѣленіе и свойства асимптотическихъ линій. — Какъ мы видѣли, въ каждой гиперболической точкѣ поверхности существуютъ двѣ касательныхъ, для которыхъ соотвѣтствующія нормальныя сѣченія имѣютъ безконечно большой радіусъ кривизны; это — асимптоты индикатрисы. Линіи, лежащія на данной поверхности и касающіяся въ каждой изъ своихъ точекъ одной изъ этихъ асимптотъ, называются асимптотическими линіями поверхности. При перемѣщеніи точки вдоль кривой, лежащей на поверхности, дифференціалы dx, dy, dz пропорціональны направляющимъ косинусамъ α, β, γ касательной. Для асимптотической касательной мы имѣемъ $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0$, и, слѣдовательно, вдоль асимптотической линіи должно быть

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \qquad (16)$$

Рѣшая уравненіе поверхности относительно z и замѣняя r, s, t ихъ значеніями въ функціи перемѣнныхъ x, y, мы получимъ изъ уравненія (16) два значенія для $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_2(x, y). \qquad (17)$$

Ниже мы увидимъ, что каждое изъ этихъ уравненій имѣетъ безконечное множество интеграловъ, но что каждая пара значеній (x_0, y_0) опредѣляетъ, вообще, одинъ и только одинъ интегралъ. Слѣдовательно, черезъ каждую точку поверхности проходятъ, вообще, двѣ и только двѣ асимптотическихъ линіи; ихъ совокупность образуетъ двойную систему линій на поверхности.

Асимптотическія линіи можно также опредѣлить чисто геометрически на основаніи слѣдующаго ихъ свойства. Асимптотическая линія поверхности есть такая линія, въ каждой точкѣ которой соприкасающаяся плоскость совпадаетъ съ касательною плоскостью къ поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы соприкасающаяся плоскость совпадала съ касательною плоскостью, необходимо и достаточно, чтобы одновременно было (§ 215)

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y = 0.$$

Первое уравненіе удовлетворяется для всякой кривой, лежащей на поверхности; дифференцируя его, получимъ

$$d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y - dp\,dx - dq\,dy = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что второе изъ предыдущихъ уравненій равносильно слѣдующему уравненію, содержащему только дифференціалы перваго порядка,

$$dp\,dx + dq\,dy = 0. \qquad (18)$$

Но уравненіе (18) тождественно съ уравненіемъ (16), откуда и слѣдуетъ справедливость нашего предложенія. Не трудно видѣть, почему эти два опредѣленія асимптотическихъ линій равносильны. Такъ какъ радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія, касающагося асимптоты индикатрисы, равенъ безконечности, то, по теоремѣ Менье, равенъ безконечности и радіусъ кривизны асимптотической линіи, если только соприкасающаяся плоскость не будетъ перпендикулярна къ нормали къ поверхности; въ послѣднемъ случаѣ формула Менье принимаетъ неопредѣленный видъ. Слѣдовательно, соприкасающаяся плоскость асимптотической линіи должна совпадать съ касательною плоскостью къ поверхности всякій разъ, какъ радіусъ ея кривизны не равенъ постоянно безконечности; но въ послѣднемъ случаѣ мы получили бы прямую линію, соприкасающаяся плоскость которой неопредѣленна. Изъ этого опредѣленія асимптотическихъ линій слѣдуетъ, что асимптотическія линіи сохраняются при всякомъ гомографическомъ преобразованіи. Очевидно также, что дифференціальное уравненіе асимптотическихъ линій имѣетъ одинаковый видъ въ прямоугольныхъ и въ косоугольныхъ осяхъ координатъ, такъ какъ уравненіе соприкасающейся плоскости въ обоихъ случаяхъ одинаково.

Асимптотическія линіи существуютъ, конечно, только на поверхностяхъ сѣдлообразныхъ. Но если поверхность аналитическая, то, каковъ бы ни былъ знакъ количества $s^2 - rt$, дифференціальное уравненіе (16) имѣетъ всегда безчисленное множество интеграловъ, дѣйствительныхъ или мнимыхъ. Поэтому мы будемъ говорить, что аналитическая выпуклая поверхность имѣетъ двѣ системы мнимыхъ асимптотическихъ линій. Такъ, асимптотическими линіями однополостнаго гиперболоида будутъ двѣ системы прямолинейныхъ образующихъ; для эллипсоида или шара эти образующія — мнимыя, но онѣ также удовлетворяютъ дифференціальному уравненію асимптотическихъ линій.

Примѣръ. — Найдемъ асимптотическія линіи поверхности

$$z=x^m y^n.$$

Мы имѣемъ

$$r=m(m-1)x^{m-2}y^n, \quad s=mnx^{m-1}y^{n-1}, \quad t=n(n-1)x^m y^{n-2},$$

и дифференціальное уравненіе (16) принимаетъ видъ

$$m(m-1)\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right)^2+2mn\left(\frac{y\,dx}{x\,dy}\right)+n(n-1)=0.$$

Рѣшая это уравненіе, получимъ для отношенія $\frac{y\,dx}{x\,dy}$ два значенія h_1 и h_2. Слѣдовательно, асимптотическими линіями будутъ линіи поверхности, проектирующіяся на плоскость xOy по кривымъ

$$y^{h_1}=C_1 x, \quad y^{h_2}=C_2 x.$$

243. Дифференціальное уравненіе асимптотическихъ линій въ криволинейныхъ координатахъ. — Предположимъ, что координаты точекъ поверхности выражены въ функціи перемѣнныхъ параметровъ u, v

$$x=f(u, v), \quad y=\varphi(u, v), \quad z=\psi(u, v). \tag{19}$$

Воспользуемся вторымъ опредѣленіемъ асимптотическихъ линій для вывода ихъ дифференціальнаго уравненія. Напишемъ уравненіе касательной плоскости къ поверхности

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0; \tag{20}$$

коэффиціенты A, B, C должны удовлетворять уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial f}{\partial u}+B\frac{\partial \varphi}{\partial u}+C\frac{\partial \psi}{\partial u}=0,\\ A\frac{\partial f}{\partial v}+B\frac{\partial \varphi}{\partial v}+C\frac{\partial \psi}{\partial v}=0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

которыя опредѣляютъ отношенія двухъ изъ коэффиціентовъ A, B, C къ третьему (§ 39). Такъ какъ соприкасающаяся плоскость асимптотической линіи совпадаетъ съ касательною плоскостью къ поверхности, то эти коэффиціенты должны также удовлетворять уравненіямъ

$$\begin{aligned} A\,dx &+B\,dy &+C\,dz=0,\\ A\,d^2x&+B\,d^2y&+C\,d^2z=0. \end{aligned}$$

Первое изъ этихъ уравненій удовлетворяется тождественно. Дифференцируя его, мы видимъ, что второе уравненіе можетъ быть замѣнено слѣдующимъ

$$dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0. \tag{22}$$

Уравненіе (22) есть искомое дифференціальное уравненіе асимптотическихъ линій. Если, напримѣръ, мы положимъ въ формулахъ (21) $C=-1$, то A и B представятъ соотвѣтственно частныя производныя p и q отъ z по x и y, и уравненіе (22) совпадетъ съ уравненіемъ (18).

Примѣры. — Разсмотримъ, напримѣръ, коноидъ $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Уравненіе $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ равносильно уравненіямъ $x=u$, $y=uv$, $z=\varphi(v)$, и соотношенія (21) обращаются въ

$$A+Bv=0, \quad Bu+C\varphi'(v)=0.$$

Этимъ уравненіямъ можно удовлетворить, принимая $C=-u$, $A=-v\varphi'(v)$, $B=\varphi'(v)$, и дифференціальное уравненіе (22) принимаетъ видъ

$$u\,\varphi''(v)\,dv^2-2\,\varphi'(v)\,du\,dv=0.$$

Одно изъ рѣшеній этого уравненія есть $v=\text{const}$; изъ него получимъ прямолинейныя образующія. Раздѣливъ уравненіе на dv, получимъ

$$\frac{\varphi''(v)\,dv}{\varphi'(v)}=\frac{2\,du}{u};$$

отсюда имѣемъ

$$u^2=K\varphi'(v).$$

Слѣдовательно, асимптотическія линіи второй системы проектируются на плоскость xOy по кривымъ

$$x^2=K\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Разсмотримъ еще поверхности, указанныя Жаме (Jamet); ихъ уравненіе можетъ быть приведено къ виду

$$x\,f\left(\frac{y}{x}\right)=F(z).$$

Принявъ за независимыя перемѣнныя z и $\frac{y}{x}=u$, мы получимъ дифференціальное уравненіе асимптотическихъ линій въ видѣ

$$\sqrt{\frac{F''(z)}{F(z)}}\,dz=\pm\sqrt{\frac{f''(u)}{f(u)}}\,du,$$

откуда каждая изъ системъ асимптотическихъ линій можетъ быть найдена одною квадратурою.

Геликоидъ есть поверхность, представляемая уравненіями

$$x=\varrho\cos\omega, \quad y=\varrho\sin\omega, \quad z=f(\varrho)+h\omega.$$

Предоставляемъ читателю доказать, что дифференціальное уравненіе асимптотическихъ линій геликоида будетъ

$$\varrho f''(\varrho)\,d\varrho^2-2\,h\,d\omega\,d\varrho+\varrho^2 f'(\varrho)\,d\omega^2=0,$$

откуда ω получается при помощи квадратуры.

244. Асимптотическія линіи линейчатыхъ поверхностей. — Исключая коэффиціенты A, B, C изъ уравненія (21) и изъ уравненія

$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0,$$

мы получимъ общее дифференціальное уравненіе асимптотическихъ линій

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0. \qquad (23)$$

Это уравненіе не содержитъ дифференціаловъ второго порядка d^2u и d^2v. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$d^2x=\frac{\partial f}{\partial u}\,d^2u+\frac{\partial f}{\partial v}\,d^2v+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,du^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,dv^2,$$

и такія же выраженія имѣютъ мѣсто для d^2y, d^2z. Вычитая изъ третьей строки опредѣлителя (23) первую строку, умноженную на d^2u, и вторую, умноженную на d^2v, получимъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & & \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,du^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,dv^2 & & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая этотъ опредѣлитель по элементамъ третьей строки и располагая по степенямъ du и dv, мы представимъ его въ видѣ

$$D\,du^2+2\,D'\,du\,dv+D''\,dv^2=0, \qquad (24)$$

гдѣ черезъ D, D', D'' обозначены опредѣлители

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix},$$

$$D''=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}. \qquad (25)$$

Примѣнимъ эти формулы къ линейчатымъ поверхностямъ. Уравненія всякой линейчатой поверхности могутъ быть представлены въ видѣ

$$x=x_0+\alpha u, \quad y=y_0+\beta u, \quad z=z_0+\gamma u,$$

гдѣ x_0, y_0, z_0, α, β, γ — функціи второго перемѣннаго параметра v. При $u=0$ и при измѣненіи v, точка (x_0, y_0, z_0) описываетъ нѣкоторую кривую Γ поверхности; съ другой стороны, при v постоянномъ и при измѣненіи u, точка (x, y, z) описываетъ прямолинейную образующую поверхности, и перемѣнное u пропорціонально разстоянію точки (x, y, z) отъ точки (x_0, y_0, z_0), въ которой разсматриваемая образующая пересѣкаетъ кривую Γ. Изъ формулъ (25) очевидно, что здѣсь $D=0$, D' не зависитъ отъ u, и D'' есть многочленъ второй степени по u,

$$D''=\begin{vmatrix} \alpha & \dots \\ x'_0+\alpha' u & \dots \\ x''_0+\alpha'' u & \dots \end{vmatrix}.$$

Такъ какъ въ уравненіе (24) dv входитъ множителемъ, то одна система асимптотическихъ линій состоитъ изъ прямолинейныхъ образующихъ $v=\text{const}$.. Раздѣливъ лѣвую часть уравненія (24) на dv, мы получимъ дифференціальное уравненіе второй системы асимптотическихъ линій

$$\frac{du}{dv}+Lu^2+Mu+N=0, \tag{26}$$

гдѣ L, M, N — функціи перемѣнаго v. Уравненія этого вида обладаютъ замѣчательными свойствами, которыя будутъ указаны позднѣе. Такъ, напримѣръ, мы увидимъ, что ангармоническое отношеніе какихъ-нибудь четырехъ интеграловъ уравненія (26) постоянно. Отсюда слѣдуетъ, что ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ пересѣченія прямолинейной образующей съ четырьмя асимптотическими линіями второй системы постоянно; это даетъ возможность найти всѣ асимптотическія линіи второй системы, если три изъ нихъ извѣстны. Мы увидимъ также, что если извѣстенъ одинъ или два интеграла уравненія (26), то можно найти всѣ другіе интегралы соотвѣтственно двумя или одною квадратурою. Если всѣ прямолинейныя образующія поверхности встрѣчаютъ нѣкоторую прямую, то эта прямая есть одна изъ асимптотическихъ линій второй системы, и, слѣдовательно, всѣ другія асимптотическія линіи второй системы можно

найти двумя квадратурами. Если поверхность имѣетъ двѣ прямолинейныхъ направляющихъ, то извѣстны двѣ асимптотическія линіи второй системы, и для опредѣленія остальныхъ нужно будетъ выполнить одну квадратуру. Но въ этомъ случаѣ рѣшеніе еще болѣе упрощается. Въ самомъ дѣлѣ, если намъ дана линейчатая поверхность, имѣющая двѣ прямолинейныхъ направляющихъ, то эту поверхность можно преобразовать гомографически такимъ образомъ, чтобы одна изъ этихъ направляющихъ обратилась въ безконечно удаленную прямую; тогда разсматриваемая поверхность обратится въ коноидъ, а мы видѣли выше (§ 243), что асимптотическія линіи коноида получаются безъ квадратуръ*).

245. Сопряженныя линіи. — Двѣ прямыя, проходящія черезъ точку поверхности S и представляющія два сопряженныхъ діаметра индикатрисы въ этой точкѣ, называются сопряженными касательными къ поверхности въ этой точкѣ. Очевидно, что каждой прямой, касательной къ поверхности, соотвѣтствуетъ сопряженная касательная прямая; касательная совпадаетъ со своею сопряженною, если она есть главная касательная, и притомъ только въ этомъ случаѣ. Пусть будетъ $z=F(x, y)$ уравненіе поверхности S. Угловые коэффиціенты μ проекцій главныхъ касательныхъ на плоскость xOy удовлетворяютъ уравненію (§ 240)

$$r+2s\mu+t\mu^2=0.$$

Пусть будутъ m и m' угловые коэффиціенты проекцій двухъ сопряженныхъ касательныхъ на плоскость xOy. Для того чтобы проекціи сопряженныхъ касательныхъ дѣлили гармонически проекціи главныхъ касательныхъ, должно быть**)

$$r+s(m+m')+tmm'=0. \qquad (27)$$

---

*) Въ коноидѣ, разсмотрѣнномъ въ § 243, прямолинейная направляющая (ось коноида) была перпендикулярна къ образующимъ; однако, легко видѣть, что уравненіе асимптотическихъ линій будетъ имѣть такой же видъ и въ томъ случаѣ, когда прямолинейная направляющая будетъ наклонена къ образующимъ подъ любымъ угломъ. *(Ред.)*

**) (Ср. § 112). Если мы имѣемъ кривую второго порядка $ax^2+2bxy+cy^2+2cx+2fy+g=0$, то угловые коэффиціенты m, m' двухъ ея сопряженныхъ діаметровъ удовлетворяютъ уравненію $a+b(m+m')+cmm'=0$, а угловой коэффиціентъ μ асимптоты — уравненію $a+2b\mu+c\mu^2=0$. *(Ред.)*

Если на поверхности S дана какая-нибудь кривая C, то огибающая касательныхъ плоскостей къ поверхности S въ точкахъ кривой C есть разгибающаяся поверхность, касающаяся поверхности S по кривой C. Въ каждой точкѣ M кривой C образующая этой разгибающейся поверхности есть касательная прямая къ поверхности S, сопряженная съ прямою, касающеюся кривой C.

Въ самомъ дѣлѣ, вдоль кривой C количества x, y, z, p, q суть функціи нѣкотораго перемѣннаго параметра α. Образующая нашей разгибающейся поверхности опредѣляется системою двухъ уравненій

$$Z-z-p(X-x)-q(Y-y)=0,$$
$$-dz+p\,dx+q\,dy-dp(X-x)-dq(Y-y)=0,$$

изъ которыхъ послѣднее обращается въ

$$\frac{Y-y}{X-x}=-\frac{dp}{dq}=-\frac{r\,dx+s\,dy}{s\,dx+t\,dy}.$$

Пусть будетъ m угловой коэффиціентъ проекціи касательной къ кривой C, m' — угловой коэффиціентъ проекціи образующей. Но мы имѣемъ

$$\frac{dy}{dx}=m,\quad \frac{Y-y}{X-x}=m',$$

и поэтому послѣднее соотношеніе тождественно съ соотношеніемъ (27). Такимъ образомъ теорема доказана.

Два семейства кривыхъ на поверхности, изъ которыхъ каждое зависитъ отъ одного перемѣннаго параметра, образуютъ сопряженную сѣть, если касательныя къ двумъ кривымъ обоихъ семействъ, проходящимъ черезъ любую точку поверхности, будутъ въ этой точкѣ сопряженными. Очевидно, что на каждой поверхности существуетъ безчисленное множество сопряженныхъ сѣтей, такъ какъ одно семейство кривыхъ можетъ быть взято произвольно, и тогда второе семейство опредѣлится изъ дифференціальнаго уравненія перваго порядка.

Пусть дана поверхность, представляемая уравненіями (19); найдемъ, при какихъ условіяхъ линіи $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$ образуютъ сопряженную сѣть. При перемѣщеніи касательной плоскости къ поверхности вдоль кривой $v=\text{const.}$ характеристика (§ 221) этой касательной плоскости представится уравненіями

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$
$$\frac{\partial A}{\partial u}(X-x)+\frac{\partial B}{\partial u}(Y-y)+\frac{\partial C}{\partial u}(Z-z)=0.$$

Для того чтобы эта прямая совпадала съ касательною къ кривой $u=\text{const.}$, направляющіе параметры которой равны $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$A\frac{\partial x}{\partial v}+B\frac{\partial y}{\partial v}+C\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$
$$\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

Дифференцируя первое соотношеніе по u, мы найдемъ, что второе соотношеніе можно замѣнить слѣдующимъ

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0. \qquad (28)$$

Исключая A, B, C изъ уравненій (21) и (28), мы получимъ искомое необходимое и достаточное условіе

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}=0.$$

Эти условія показываютъ, что x, y, z представляютъ собою три интеграла уравненія вида

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=M\frac{\partial\theta}{\partial u}+N\frac{\partial\theta}{\partial v}, \qquad (29)$$

гдѣ M и N — произвольныя функціи отъ u и v. Такимъ образомъ, достаточно знать три различныхъ интеграла какого-нибудь уравненія вида (29), чтобы имѣть уравненіе поверхности, отнесенной къ сопряженной системѣ. Напримѣръ, если мы примемъ $M=N=0$, то всякій интегралъ уравненія (29) будетъ равенъ суммѣ функціи отъ u и функціи отъ v; слѣдовательно, на всякой поверхности, представляемой уравненіями

$$x=f(u)+f_1(v),\quad y=\varphi(u)+\varphi_1(v),\quad z=\psi(u)+\psi_1(v), \qquad (30)$$

кривыя (u) и (v) образуютъ сопряженную сѣть.

Поверхности вида (30) называются поверхностями переноса. Каждая такая поверхность можетъ быть образована двумя различными способами поступательнымъ движеніемъ нѣкоторой неизмѣняемой кривой Γ, одна изъ точекъ которой описываетъ нѣкоторую другую кривую Γ'. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ четыре точки M_0, M_1, M_2, M, соотвѣтствующія значеніямъ (u_0, v_0), (u, v_0), (u_0, v), (u, v) параметровъ u и v. На основаніи формулъ (30), эти точки будутъ вершинами параллелограмма*). Если, оставляя v_0 постояннымъ, мы будемъ

*) Поэтому, при переходѣ u_0 въ u отрѣзокъ M_0M_2 перемѣщается поступательно въ положеніе M_1M, и точно также при переходѣ v_0 въ v отрѣзокъ M_0M_1 перемѣщается поступательно въ положеніе M_2M. *(Ред.)*

измѣнять u, то точка M_1 опишетъ нѣкоторую кривую Γ поверхности; точно также, если при постоянномъ u_0 мы будемъ измѣнять v, то точка M_2 опишетъ нѣкоторую другую кривую Γ' поверхности. Слѣдовательно, эта поверхность можетъ быть образована какъ поступательнымъ движеніемъ кривой Γ, причемъ точка M_2 описываетъ кривую Γ', такъ и поступательнымъ движеніемъ кривой Γ', причемъ точка M_1 описываетъ кривую Γ. Изъ самаго способа образованія такихъ поверхностей очевидно, что оба семейства кривыхъ—сопряженныя; въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ, касательныя прямыя, проведенныя къ различнымъ положеніямъ кривой Γ' въ тѣхъ точкахъ, гдѣ эта кривая перссѣкаетъ кривую Γ, образуютъ цилиндръ, описанный около поверхности вдоль кривой Γ; слѣдовательно, касательныя къ кривымъ Γ и Γ' — сопряженныя.

III. — ЛИНІИ КРИВИЗНЫ.

246. Опредѣленіе и свойства. — Линія, лежащая на поверхности S, называется линіею кривизны этой поверхности, если нормали къ поверхности, проведенныя въ различныхъ точкахъ этой линіи, образуютъ разгибающуюся поверхность. Пусть будетъ $z=f(x, y)$ уравненіе поверхности въ прямоугольныхъ координатахъ. Уравненія нормали будутъ

$$\left.\begin{aligned} X &= -pZ+(x+pz),\\ Y &= -qZ+(y+qz). \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Для того чтобы эта прямая образовала разгибающуюся поверхность, необходимо и достаточно, чтобы уравненія (§ 223)

$$\left.\begin{aligned} -Z\,dp+d(x+pz)&=0,\\ -Z\,dq+d(y+qz)&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

удовлетворялись однимъ и тѣмъ же значеніемъ Z, т.-е. чтобы было

$$\frac{d(x+pz)}{dp}=\frac{d(y+qz)}{dq},$$

или, по упрощеніи,

$$\frac{dx+p\,dz}{dp}=\frac{dy+q\,dz}{dq}.$$

Замѣняя dz, dp, dq ихъ значеніями, мы можемъ представить это уравненіе въ видѣ

$$\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy}. \qquad (33)$$

Отсюда получаются два значенія для $\frac{dy}{dx}$; если поверхность S — дѣйствительная, то эти значенія всегда дѣйствительны и различны. Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя dx и dy соотвѣтственно черезъ α и β, мы получимъ найденное выше [§ 241, ур. (14)] уравненіе, опредѣляющее слѣды главныхъ нормальныхъ сѣченій на касательной плоскости. Слѣдовательно, касательныя прямыя къ линіямъ кривизны, проходящимъ черезъ какую-нибудь точку поверхности, совпадаютъ съ осями индикатрисы. Изъ теоріи дифференціальныхъ уравненій слѣдуетъ, что черезъ каждую обыкновенную точку поверхности, за исключеніемъ точекъ округленія, проходитъ одна и только одна линія кривизны, касающаяся каждой изъ осей индикатрисы. Если поверхность дѣйствительная, то эти линіи всегда дѣйствительны; онѣ образуютъ на поверхности сѣть, одновременно ортогональную и сопряженную.

Примѣръ. — Найдемъ линіи кривизны параболоида $z=\frac{xy}{a}$. Мы имѣемъ

$$p=\frac{y}{a},\quad q=\frac{x}{a},\quad r=t=0,\quad s=\frac{1}{a};$$

дифференціальное уравненіе (33) обращается въ

$$(a^2+y^2)\,dx^2=(a^2+x^2)\,dy^2.$$

Отсюда имѣемъ

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\pm\frac{dy}{\sqrt{y^2+a^2}}=0.$$

Взявъ, напримѣръ, передъ обоими корнями знакъ $+$, мы получимъ слѣдующій общій интегралъ предыдущаго дифференціальнаго уравненія

$$(x+\sqrt{x^2+a^2})\,(y+\sqrt{y^2+a^2})=C;$$

этотъ интегралъ даетъ одну изъ системъ линій кривизны. Полагая

$$\lambda=x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2} \qquad (34)$$

и пользуясь тожествомъ

$$(x\sqrt{y^2+a^2}+y\sqrt{x^2+a^2})^2+a^4=[xy+\sqrt{(x^2+a^2)\,(y^2+a^2)}]^2,$$

мы можемъ представить предыдущій интегралъ въ видѣ

$$\lambda+\sqrt{\lambda^2+a^4}=C.$$

Отсюда слѣдуетъ, что проекціи одной изъ двухъ системъ линій кривизны могутъ быть также представлены уравненіемъ (34), гдѣ λ обозна-

чаетъ произвольное постоянное. Точно также мы нашли бы, что уравненіе линій кривизны другой системы будетъ

$$x\sqrt{y^2+a^2}-y\sqrt{x^2+a^2}=\mu. \qquad (35)$$

Пользуясь уравненіемъ параболоида $xy=az$, мы можемъ представить уравненія (34) и (35) въ видѣ

$$\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=C, \quad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=C'.$$

Но выраженія $\sqrt{x^2+z^2}$ и $\sqrt{y^2+z^2}$ представляютъ разстоянія точки (x, y, z) соотвѣтственно отъ осей Oy и Ox; слѣдовательно, линіи кривизны параболоида суть такія кривыя, для которыхъ сумма или разность разстояній каждой ихъ точки отъ осей Ox и Oy постоянна.

247. Развертка поверхности. — Пусть будетъ C линія кривизны поверхности S. Когда точка M описываетъ кривую C, нормаль къ поверхности MN остается касательною къ нѣкоторой кривой Γ. Обозначимъ черезъ A точку прикосновенія линій MN и Γ, и пусть будутъ (X, Y, Z) координаты этой точки. Координата Z опредѣляется любымъ изъ уравненій (32), причемъ эти оба уравненія приводятся къ одному, такъ какъ C есть линія кривизны. Мы можемъ представить уравненія (32) въ видѣ

$$Z-z=\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy}.$$

Умножая числителей и знаменателей обѣихъ дробей соотвѣтственно на dx и dy, получимъ, по свойству равныхъ отношеній,

$$Z-z=\frac{dx^2+dy^2+(p\,dx+q\,dy)^2}{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}.$$

Но dx, dy, dz пропорціональны направляющимъ косинусамъ α, β, γ касательной къ линіи кривизны, и мы имѣемъ

$$Z-z=\frac{1}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}.$$

Сравнивая эту формулу съ формулою (7) (стр. 542), дающею алгебраическое значеніе радіуса кривизны R нормальнаго сѣченія, касательнаго къ линіи кривизны, мы видимъ, что предыдущее соотношеніе можно представить въ видѣ

$$Z-z=\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=R\nu, \qquad (36)$$

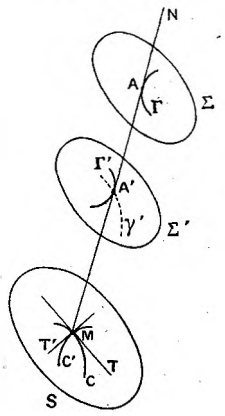
гдѣ ν есть косинусъ остраго угла, образуемаго положительнымъ направленіемъ нормали къ поверхности съ осью Oz. Но, съ другой стороны, $z+R\nu$ представляетъ координату z_1 центра кривизны этого нормальнаго сѣченія (§ 226). Такимъ образомъ, формула (36) показываетъ, что точка прикосновенія A нормали MN съ ея огибающею Γ совпадаетъ съ центромъ кривизны главнаго нормальнаго сѣченія, касающагося линіи C въ точкѣ M. Такимъ образомъ, кривая Γ есть геометрическое мѣсто этихъ центровъ кривизны. Если мы разсмотримъ всѣ линіи кривизны одного семейства съ C, то мѣстомъ соотвѣтствующихъ кривыхъ Γ будетъ нѣкоторая поверхность Σ, для которой всѣ нормали поверхности S будутъ касательными. Въ самомъ дѣлѣ, каждая нормаль, напримѣръ, нормаль MN, касается въ точкѣ A одной изъ кривыхъ Γ, а всѣ кривыя Γ лежатъ на поверхности Σ.

Разсмотримъ теперь линію кривизны C' другого семейства, проходящую черезъ точку M и пересѣкающую ортогонально первую линію C. Нормали къ поверхности S вдоль кривой C' также будутъ касательными къ нѣкоторой кривой Γ', представляющей мѣсто центровъ кривизны нормальныхъ сѣченій поверхности S, касающихся кривой C'. Мѣстомъ этихъ кривыхъ Γ', соотвѣтствующихъ всѣмъ линіямъ кривизны одного семейства съ C', будетъ нѣкоторая поверхность Σ', для которой, какъ и для Σ, всѣ нормали поверхности S будутъ касательными. Поверхности Σ, Σ', вообще, аналитически не различны, а составляютъ двѣ полости одной поверхности, представляемой неразложимымъ уравненіемъ.

Нормаль MN поверхности S касается полостей Σ, Σ' въ двухъ главныхъ центрахъ кривизны A и A' поверхности S въ точкѣ M. Легко найти касательныя плоскости къ этимъ двумъ полостямъ въ точкахъ A и A' (черт. 51). Когда точка M описываетъ кривую C, нормаль MN образуетъ разгибающуюся поверхность D, для которой кривая Γ служитъ ребромъ возврата. Съ другой стороны, точка прикосновенія A' этой нормали MN съ поверхностью Σ' описываетъ нѣкоторую кривую γ', отличную отъ Γ', такъ какъ прямая MN не можетъ оставаться одновременно касательною къ двумъ кривымъ Γ и Γ'. Слѣдовательно, разгибающаяся поверхность D и поверхность Σ' касаются между собою въ точкѣ A', и, слѣдовательно, касательная плоскость къ поверхности Σ' въ точкѣ A' касается разгибающейся поверхности D вдоль прямой MN; такимъ образомъ, искомою касательною плоскостью будетъ плоскость MNT, проходящая

черезъ нормаль MN и черезъ касательную прямую къ кривой C. Точно такъ же можно убѣдиться, что касательною плоскостью къ поверхности Σ въ точкѣ A будетъ плоскость NMT', проходящая черезъ касательную прямую ко второй линіи кривизны C'.

Черт. 51.



Такъ какъ касательныя прямыя къ кривымъ C и C', какъ оси индикатрисы, взаимно перпендикулярны, то обѣ плоскости NMT и NMT' взаимно перпендикулярны. Это приводитъ къ слѣдующему важному свойству развертокъ. Проведемъ изъ какой-нибудь точки O пространства нормаль OM къ поверхности S, и пусть будутъ A и A' главные центры кривизны поверхности S, лежащіе на этой нормали. Касательныя плоскости въ точкахъ A и A' къ обѣимъ полостямъ Σ, Σ' развертки взаимно перпендикулярны. Такъ какъ эти плоскости проходятъ черезъ точку O, то ясно, что для наблюдателя, смотрящаго изъ любой точки O пространства, обѣ полости развертки поверхности S будутъ казаться пересѣкающимися подъ прямымъ угломъ. Обратное предложеніе будетъ доказано ниже.

248. Формулы Родрига. — Если λ, μ, ν обозначаютъ направляющіе косинусы нормали къ поверхности, а R — одинъ изъ главныхъ радіусовъ кривизны, то координаты соотвѣтствующаго центра кривизны будутъ (§ 226)

$$X=x+R\lambda, \quad Y=y+R\mu, \quad Z=z+R\nu. \tag{37}$$

Когда точка (x, y, z) описываетъ линію кривизны, касательную къ тому нормальному сѣченію, радіусъ кривизны котораго равенъ R, то, какъ мы видѣли, соотвѣтствующій центръ кривизны описываетъ нѣкоторую кривую Γ, касающуюся нормали MN къ поверхности S. Слѣдовательно, должно быть

$$\frac{dX}{\lambda}=\frac{dY}{\mu}=\frac{dZ}{\nu};$$

замѣняя X, Y, Z ихъ значеніями изъ (37), имѣемъ

$$\frac{dx+R\,d\lambda}{\lambda}=\frac{dy+R\,d\mu}{\mu}=\frac{dz+R\,d\nu}{\nu}.$$

Общее значеніе этихъ отношеній равно нулю; въ самомъ дѣлѣ, умножая числителя и знаменателя перваго отношенія на λ, второго — на μ, и третьяго — на ν и складывая числители и знаменатели получившихся отношеній, мы получимъ отношеніе, равное предыдущимъ, у котораго знаменатель равенъ единицѣ, тогда какъ числитель

$$\lambda\,dx+\mu\,dy+\nu\,dz+R\,(\lambda\,d\lambda+\mu\,d\mu+\nu\,d\nu)$$

тождественно равенъ нулю. Такимъ образомъ, мы получаемъ формулы Родрига (Olinde Rodrigues)

$$dx+R\,d\lambda=0,\quad dy+R\,d\mu=0,\quad dz+R\,d\nu=0; \tag{38}$$

эти формулы имѣютъ большое значеніе въ теоріи поверхностей. Должно замѣтить, что формулы (38) примѣнимы конечно только къ перемѣщенію точки (x, y, z) по линіи кривизны.

249. Уравненіе линій кривизны въ криволинейныхъ координатахъ. — Если прямоугольныя координаты x, y, z точекъ поверхности выражены въ функціи двухъ перемѣнныхъ параметровъ u и v, то уравненія нормали къ поверхности будутъ имѣть видъ

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C},$$

гдѣ A, B, C опредѣляются соотношеніями (21). Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ того, чтобы эта прямая образовала разгибающуюся поверхность, будетъ (§ 223)

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix}=0. \tag{39}$$

Замѣняя здѣсь x, y, z, A, B, C ихъ выраженіями черезъ перемѣнныя u и v, мы получимъ дифференціальное уравненіе линій кривизны въ криволинейныхъ координатахъ.

Найдемъ, напримѣръ, линіи кривизны геликоида

$$z=a\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x};$$

мы можемъ положить

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=a\theta.$$

Коэффиціенты A, B, C должны удовлетворять соотношеніямъ

$$-A\rho\sin\theta+B\rho\cos\theta+Ca=0,\quad A\cos\theta+B\sin\theta=0.$$

Полагая $C=\rho$, получимъ $A=a\sin\theta$, $B=-a\cos\theta$. Въ этомъ случаѣ

дифференціальное уравненіе (39), послѣ раскрытія опредѣлителя и приведенія подобныхъ членовъ, обращается въ

$$d\varrho^2-(\varrho^2+a^2)\,d\theta^2=0.$$

Отсюда имѣемъ

$$d\theta=\pm\frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2+a^2}};$$

взявъ передъ корнемъ, напримѣръ, знакъ +, получимъ послѣ интегрированія

$$\varrho+\sqrt{\varrho^2+a^2}=ae^{\theta-\theta_0},$$

или

$$\varrho=\frac{a}{2}\left[e^{\theta-\theta_0}-e^{-(\theta-\theta_0)}\right].$$

Проекціи полученныхъ линій кривизны на плоскость xOy будутъ имѣть видъ спиралей, которыя нетрудно построить.

Пользуясь тѣмъ же самымъ способомъ, можно составить уравненіе второй степени, опредѣляющее главные радіусы кривизны поверхности. Сохраняя за буквами A, B, C, λ, μ, ν прежнія значенія, имѣемъ

$$\lambda=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \mu=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \nu=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

причемъ за положительное направленіе нормали къ поверхности мы примемъ то, которое опредѣляется послѣдними формулами. Обозначимъ черезъ R главный радіусъ кривизны, взятый съ его знакомъ; тогда координаты соотвѣтствующаго центра кривизны будутъ

$$X=x+\varrho A,\quad Y=y+\varrho B,\quad Z=z+\varrho C,$$

гдѣ ϱ опредѣляется соотношеніемъ

$$R=\varrho\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Когда точка (x, y, z) описываетъ линію кривизны, касающуюся главнаго нормальнаго сѣченія, радіусъ кривизны котораго равенъ R, то, какъ мы знаемъ, точка (X, Y, Z) описываетъ нѣкоторую кривую Γ, касающуюся нормалей къ поверхности, проведенныхъ вдоль линіи кривизны. Слѣдовательно, должно быть

$$\frac{dx+\varrho\,dA+A\,d\varrho}{A}=\frac{dy+\varrho\,dB+B\,d\varrho}{B}=\frac{dz+\varrho\,dC+C\,d\varrho}{C};$$

отсюда, обозначая черезъ $d\varrho + K$ общее значеніе этихъ отношеній, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} dx + \varrho\, dA - AK &= 0, \\ dy + \varrho\, dB - BK &= 0, \\ dz + \varrho\, dC - CK &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Исключая изъ этихъ уравненій ϱ и K, мы получимъ уравненіе (39) линій кривизны. Но если мы замѣнимъ dx, dy, dz, dA, dB, dC соотвѣтственно черезъ

$$\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv, \quad \ldots, \quad \frac{\partial C}{\partial u}\,du + \frac{\partial C}{\partial v}\,dv$$

и исключимъ изъ уравненій (40) du, dv и K, то получимъ для ϱ слѣдующее уравненіе

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \varrho \dfrac{\partial A}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} + \varrho \dfrac{\partial A}{\partial v} & A \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} + \varrho \dfrac{\partial B}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} + \varrho \dfrac{\partial B}{\partial v} & B \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} + \varrho \dfrac{\partial C}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} + \varrho \dfrac{\partial C}{\partial v} & C \end{vmatrix} = 0. \qquad (41)$$

Замѣняя здѣсь ϱ черезъ $-\dfrac{R}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, мы получимъ уравненіе второй степени, опредѣляющее главные радіусы кривизны.

Пользуясь уравненіями (39) и (41), мы можемъ отвѣтить на нѣкоторые вопросы, которыми мы уже занимались выше. Такъ, для того чтобы точка поверхности была параболическою, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціентъ при ϱ^2 въ уравненіи (41) былъ равенъ нулю; чтобы точка поверхности была точкою округленія, необходимо, чтобы уравненіе (39) удовлетворялось тождественно при всякомъ du и dv.

Въ видѣ приложенія предыдущихъ формулъ, опредѣлимъ главные радіусы кривизны прямого геликоида съ направляющею плоскостью. Измѣняя нѣсколько прежнія обозначенія, имѣемъ въ этомъ случаѣ

$$\begin{aligned} x &= u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av, \\ A &= a\sin v, \quad B = -a\cos v, \quad C = u, \end{aligned}$$

и уравненіе (41) обращается въ

$$a^2\varrho^2 = a^2 + u^2,$$

откуда $R = \pm\dfrac{a^2+u^2}{a}$. Слѣдовательно, главные радіусы кривизны прямого геликоида равны и противоположны.

250. Теорема Іоахимсталя. — Для нѣкоторыхъ поверхностей линіи кривизны можно опредѣлить изъ геометрическихъ соображеній. Такъ, очевидно, что линіями кривизны поверхности вращенія будутъ меридіаны и параллели этой поверхности, такъ какъ эти кривыя касаются въ каждой своей точкѣ одной изъ осей индикатрисы. Это легко провѣрить замѣтивъ, что нормали къ поверхности вдоль меридіана образуютъ плоскость, а нормали къ поверхности вдоль параллели образуютъ круглый конусъ, т.-е. въ обоихъ случаяхъ нормали образуютъ разгибающіяся поверхности.

У разгибающейся поверхности одно семейство линій кривизны состоитъ изъ образующихъ. Другое семейство состоитъ изъ ортогональныхъ траекторій этихъ образующихъ, т.-е. изъ развертывающихъ ребра возврата (§ 231). Эти линіи могутъ быть получены одною квадратурою. Если извѣстна одна изъ развертывающихъ, то всѣ остальныя линіи кривизны этого семейства можно получить изъ нея безъ всякой квадратуры. Всѣ эти результаты легко провѣрить непосредственнымъ вычисленіемъ.

Теорія развертокъ кривой двойной кривизны привела Іоахимсталя (Ioachimsthal) къ важной теоремѣ, имѣющей въ этой теоріи обширное примѣненіе. Пусть двѣ поверхности S и S' пересѣкаются по нѣкоторой линіи C, служащей линіею кривизны для каждой изъ этихъ поверхностей. Нормали MN и MN' къ поверхностямъ S и S' вдоль кривой C образуютъ двѣ разгибающихся поверхности. Но каждая изъ прямыхъ MN и MN' нормальна къ кривой C. Отсюда, по § 231, слѣдуетъ, что *если двѣ поверхности имѣютъ общую линію кривизны, то вдоль этой линіи онѣ пересѣкаются подъ постояннымъ угломъ.*

Обратно, *если двѣ поверхности пересѣкаются подъ постояннымъ угломъ, и если линія пересѣченія есть линія кривизны для одной изъ этихъ поверхностей, то она будетъ также линіею кривизны и для другой.* Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что если семейство нормалей кривой двойной кривизны C образуетъ разгибающуюся поверхность, то семейство нормалей, которое получимъ, поворачивая каждую изъ этихъ нормалей на постоянный уголъ, въ нормальной плоскости къ кривой C также образуетъ разгибающуюся поверхность.

Всякая плоская или сферическая кривая есть линія кривизны плоскости или сферы. Отсюда, по теоремѣ Іоахимсталя, слѣдуетъ, что, *для того чтобы плоская или сфериче-*

ская кривая, расположенная на поверхности, была линіею кривизны этой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы поверхность пересѣкала по этой линіи плоскость или сферу подъ постояннымъ угломъ.

251. Теорема Дюпена. — Мы уже неоднократно встрѣчались съ тройными ортогональными системами поверхностей (§§43, 146). Теорія такихъ системъ исходитъ изъ замѣчательной теоремы Дюпена (Dupin), которую мы здѣсь докажемъ.

Если даны три семейства поверхностей, образующихъ тройную ортогональную систему, то линія пересѣченія каждыхъ двухъ поверхностей различныхъ семействъ будетъ линіею кривизны для каждой изъ этихъ поверхностей.

При доказательствѣ этой теоремы мы воспользуемся слѣдующимъ замѣчаніемъ. Пусть будетъ $F(x, y, z)=0$ уравненіе поверхности, касающейся плоскости xOy; въ началѣ координатъ, при $x=y=z=0$, мы будемъ имѣть $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, тогда какъ $\frac{\partial F}{\partial z}$ не будетъ равно нулю, если только, какъ мы и будемъ предполагать, начало координатъ не есть особая точка поверхности.

Для того чтобы оси Ox и Oy совпадали съ осями индикатрисы, необходимо и достаточно, чтобы въ началѣ координатъ было $s=0$. Но значеніе второй производной $s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ опредѣляется изъ уравненія

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}q+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}p+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}pq+\frac{\partial F}{\partial z}s=0.$$

Такъ какъ въ началѣ координатъ p и q равны нулю, то необходимымъ и достаточнымъ условіемъ того, чтобы s было также равно нулю, будетъ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=0. \qquad (42)$$

Пусть теперь будутъ

$$F_1(x, y, z)=\varrho_1, \quad F_2(x, y, z)=\varrho_2, \quad F_3(x, y, z)=\varrho_3$$

уравненія трехъ семействъ тройной ортогональной системы поверхностей. Функціи F_1, F_2, F_3 должны удовлетворять соотношенію

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial z}=0, \qquad (43)$$

а также двумъ другимъ соотношеніямъ, которыя получаются изъ (43) круговою перестановкою указателей 1, 2, 3.

Черезъ каждую точку M пространства проходитъ по одной поверхности каждаго изъ семействъ тройной системы, и касательныя прямыя къ линіямъ пересѣченія этихъ поверхностей, взятыхъ попарно, образуютъ прямой трехгранный уголъ. Чтобы доказать теорему Дюпена, достаточно показать, что каждая изъ этихъ прямыхъ служитъ одною изъ осей индикатрисы для каждой изъ обѣихъ поверхностей, которыхъ она касается.

Примемъ точку M за начало координатъ, а ребра вышеупомянутаго трехграннаго угла — за оси координатъ; тогда три поверхности системы, проходящія черезъ начало координатъ, будутъ касаться соотвѣтственно трехъ плоскостей координатъ. Слѣдовательно, при $x=y=z=0$ мы будемъ имѣть

$$\begin{array}{lll} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0=0, & \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0=0, & \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0 \gtrless 0, \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0 \gtrless 0, & \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0=0, & \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_0=0, \\ \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)_0=0, & \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)_0 \gtrless 0, & \left(\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)_0=0. \end{array}$$

Чтобы оси Ox и Oy были осями индикатрисы поверхности $F_1(x, y, z)=0$, должно быть въ началѣ координатъ $\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y}\right)=0$. Дифференцируя соотношеніе (43) по y и опуская члены, обращающіеся въ началѣ координатъ въ нуль, получимъ

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\,\partial z}\right)_0=0;$$

это равенство можно представить иначе въ видѣ

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0}+\frac{\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\,\partial z}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0}=0. \qquad (44)$$

Изъ соотношеній, аналогичныхъ (43), можно такимъ же образомъ вывести еще два другихъ соотношенія, которыя получаются изъ (44) круговою перестановкою буквъ x, y, z и указателей 1, 2, 3,

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\,\partial z}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0}+\frac{\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial z\,\partial x}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)_0}=0, \quad \frac{\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial z\,\partial x}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)_0}+\frac{\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y}\right)_0}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_0}=0. \qquad (45)$$

Изъ условій (44) и (45) непосредственно слѣдуетъ

$$\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\,\partial z}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial z\,\partial x}\right)_0 = 0,$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Весьма замѣчательный примѣръ тройной ортогональной системы представляютъ собою софокусныя поверхности второго порядка (§ 147); по всей вѣроятности, разсмотрѣніе этихъ поверхностей и привело Дюпена къ общей теоремѣ. Изъ теоремы Дюпена слѣдуетъ, что линіи кривизны эллипсоида или гиперболоида (которыя еще ранѣе были опредѣлены Монжемъ) суть линіи пересѣченія этой поверхности съ софокусными поверхностями второго порядка.

Параболоиды, представляемые уравненіемъ

$$\frac{y^2}{p-\lambda} + \frac{z^2}{q-\lambda} = 2x - \lambda,$$

гдѣ λ — перемѣнный параметръ, также образуютъ тройную ортогональную систему; отсюда можно получить линіи кривизны параболоида. Упомянемъ еще приведенную выше (§ 246) тройную ортогональную систему

$$\frac{xy}{z} = \alpha, \quad \sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{y^2+z^2} = \beta, \quad \sqrt{x^2+z^2} - \sqrt{y^2+z^2} = \gamma.$$

Разысканіе тройныхъ ортогональныхъ системъ составляетъ одну изъ наиболѣе интересныхъ и наиболѣе трудныхъ задачъ Дифференціальной Геометріи. Этому вопросу посвящено очень много изслѣдованій, результаты которыхъ собраны Дарбу въ его книгѣ*). Любая поверхность S входитъ въ составъ безконечнаго множества тройныхъ ортогональныхъ системъ. Одна изъ этихъ системъ состоитъ изъ поверхностей, параллельныхъ поверхности S, и изъ двухъ семействъ разгибающихся поверхностей, образованныхъ нормалями къ поверхности S вдоль линій кривизны этой поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ O какая-нибудь точка нормали MN къ поверхности S въ точкѣ M, MT и MT' — касательныя прямыя къ двумъ линіямъ кривизны C, C', проходящимъ черезъ точку M. Касательная плоскость къ поверхности, параллельной поверхности S и проходящей черезъ точку O, будетъ па-

*) Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes; 1898.

раллельна касательной плоскости къ поверхности S въ точкѣ M; касательными плоскостями къ разгибающимся поверхностямъ, образованнымъ нормалями къ поверхности S вдоль кривой C и вдоль кривой C', будутъ служить соотвѣтственно плоскости NMT и NMT'. Но эти три плоскости попарно взаимно перпендикулярны, что и доказываетъ, что разсматриваемая система будетъ тройною ортогональною.

При помощи преобразованія обратными радіусами векторами изъ каждой тройной ортогональной системы можно получить безконечное множество другихъ аналогичныхъ системъ, такъ какъ это преобразованіе сохраняетъ величину угловъ. Такъ какъ мы только что видѣли, что всякая поверхность является членомъ нѣкоторой тройной ортогональной системы, то отсюда слѣдуетъ, что при всякомъ преобразованіи обратными радіусами векторами линіи кривизны первоначальной поверхности преобразуются въ линіи кривизны новой поверхности. Это легко провѣрить непосредственно.

252. Приложеніе къ нѣкоторымъ семействамъ поверхностей. — Найдено много поверхностей, линіи кривизны которыхъ удовлетворяютъ опредѣленнымъ геометрическимъ условіямъ. Мы приведемъ здѣсь нѣсколько наиболѣе простыхъ результатовъ этихъ изысканій.

Найдемъ всѣ поверхности, для которыхъ одною изъ системъ линій кривизны были бы окружности. По теоремѣ Іоахимсталя, плоскость каждой изъ этихъ окружностей должна пересѣкать поверхность подъ постояннымъ угломъ. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ нормали къ поверхности вдоль окружности C этой системы должны пересѣкать ось окружности (т.-е. перпендикуляръ, проведенный къ плоскости окружности черезъ ея центръ) въ одной точкѣ O. Сфера, описанная изъ точки O и проходящая черезъ окружность C, касается поверхности вдоль C; слѣдовательно, разсматриваемая поверхность есть огибающая сферъ, зависящихъ отъ одного перемѣннаго параметра. Обратно, всякая поверхность, огибающая семейство сферъ, представляетъ рѣшеніе задачи, такъ какъ характеристики этого семейства, которыя будутъ окружностями, составляютъ, очевидно, одно изъ семействъ линій кривизны.

Поверхности вращенія представляютъ, очевидно, частный случай поверхностей этого рода. Другой интересный частный случай представляютъ трубчатыя поверхности (surfaces canaux), т.-е. поверхности, огибающія сферу съ постояннымъ радіусомъ R, центръ которой описываетъ нѣкоторую произвольную кривую Γ. Характеристиками этого семейства сферъ будутъ окружности съ радіусомъ R, центръ которыхъ описываетъ кривую Γ и плоскость которыхъ остается нормальною къ кривой Γ. Нормали къ поверхности будутъ также нормалями и къ кривой Γ; слѣдовательно, линіями кривизны второй системы будутъ линіи пересѣченія поверхности съ разгибающимися поверхностями, образованными нормалями къ кривой Γ.

Если, кромѣ первой, и вторая система линій кривизны поверхности будетъ состоять изъ окружностей, то, на основаніи предыдущаго, эту поверхность можно разсматривать, какъ огибающую любого изъ двухъ семействъ сферъ, зависящихъ отъ одного перемѣннаго параметра. Пусть будутъ S_1, S_2, S_3 сферы одного и того же семейства, C_1, C_2, C_3 — соотвѣтствующія характеристики, и M_1, M_2, M_3 — точки пересѣченія характеристикъ C_1, C_2, C_3 съ линіею кривизны C' второй системы. Сфера S', касающаяся поверхности во всѣхъ точкахъ окружности C', касается также и трехъ сферъ S_1, S_2, S_3 соотвѣтственно въ точкахъ M_1, M_2, M_3. Слѣдовательно, *искомая поверхность есть огибающая перемѣнной сферы, касающейся трехъ постоянныхъ сферъ*. Эта поверхность извѣстна подъ именемъ *циклиды Дюпена*. Мангеймъ далъ изящное доказательство того, что циклиду Дюпена можно получить изъ тора преобразованіемъ обратными радіусами векторами. Пусть будетъ γ окружность, ортогональная къ тремъ сферамъ S_1, S_2, S_3. Послѣ преобразованія обратными радіусами векторами съ полюсомъ въ какой-нибудь точкѣ окружности γ, эта окружность обратится въ прямую OO', а сферы S_1, S_2, S_3 обратятся соотвѣтственно въ сферы Σ_1, Σ_2, Σ_3, ортогональныя къ прямой OO'; слѣдовательно, центры преобразованныхъ сферъ будутъ лежать на прямой OO'. Пусть будутъ C_1', C_3', C_3' сѣченія этихъ сферъ плоскостью, проходящею черезъ OO', C' — окружность, касающаяся окружностей C_1', C_2', C_3', и Σ' — сфера, имѣющая C' большимъ кругомъ. Ясно, что при вращеніи фигуры вокругъ прямой OO' сфера Σ' остается касательною къ тремъ сферамъ Σ_1, Σ_2, Σ_3, и огибающею поверхностью сферы Σ' будетъ торъ, имѣющій меридіаномъ окружность C'.

Опредѣлимъ, далѣе, поверхности, у которыхъ однимъ изъ семействъ линій кривизны были бы плоскія кривыя, расположенныя въ параллельныхъ плоскостяхъ. Примемъ за плоскость xOy плоскость, параллельную плоскостямъ линій кривизны, и пусть будетъ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=F(\alpha,\ z)$$

уравненіе касательной къ плоскому сѣченію, образованному на поверхности плоскостью, параллельною плоскости xOy. $F(\alpha,z)$ есть функція двухъ перемѣнныхъ α и z, видъ которой зависитъ отъ вида разсматриваемой поверхности. Такъ какъ самое сѣченіе представляетъ огибающую касательныхъ къ нему прямыхъ, то мы получимъ координаты x, y точекъ поверхности, присоединяя къ предыдущему уравненію соотношеніе

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=\frac{\partial F}{\partial\alpha}.$$

Слѣдовательно, выраженія координатъ x, y, z будутъ

$$x=F\cos\alpha-\frac{\partial F}{\partial\alpha}\sin\alpha,\quad y=F\sin\alpha+\frac{\partial F}{\partial\alpha}\cos\alpha,\quad z=z. \qquad (46)$$

Выбирая соотвѣтствующимъ образомъ функцію $F(\alpha,\ z)$, можно всякую поверхность представить уравненіями вида (46); исключеніе представляютъ только линейчатыя поверхности, для которыхъ направляющею плоскостью служитъ плоскость $z=0$.

Легко вывести, что коэффиціенты A, B, C касательной плоскости къ поверхности будутъ

$$A=\cos\alpha,\quad B=\sin\alpha,\quad C=-\frac{\partial F}{\partial z};$$

слѣдовательно, косинусъ угла, образуемаго нормалью къ поверхности съ осью Oz, будетъ

$$\nu=\frac{-F'_z}{\sqrt{1+F'^2_z}}.$$

По теоремѣ Іоахимсталя, для того чтобы сѣченія поверхности плоскостями, параллельными плоскости xOy, были линіями кривизны этой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы эти плоскости пересѣкали поверхность подъ постояннымъ угломъ, т.-е. чтобы ν не зависѣло отъ α. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $F'_z(\alpha, z)$ зависѣло только отъ перемѣннаго z; слѣдовательно, $F(\alpha, z)$ должно имѣть видъ

$$F(\alpha, z)=\varphi(z)+\psi(\alpha),$$

причемъ φ и ψ — произвольны. Вставляя найденное выраженіе функціи $F(\alpha, z)$ въ уравненія (46), мы получимъ самыя общія уравненія искомыхъ поверхностей

$$\left.\begin{aligned} x&=\psi(\alpha)\cos\alpha-\psi'(\alpha)\sin\alpha+\varphi(z)\cos\alpha,\\ y&=\psi(\alpha)\sin\alpha+\psi'(\alpha)\cos\alpha+\varphi(z)\sin\alpha,\\ z&=z. \end{aligned}\right\}\qquad(47)$$

Эти поверхности могутъ быть образованы слѣдующимъ образомъ. Если разсматривать въ двухъ первыхъ уравненіяхъ (47) z, какъ постоянное, а α, — какъ перемѣнное, то эти уравненія представляютъ семейство кривыхъ, по которымъ проектируются на плоскость $z=0$ сѣченія поверхности плоскостями, параллельными плоскости xOy; но всѣ эти кривыя параллельны кривой, которую получимъ, положивъ въ двухъ первыхъ уравненіяхъ (47) $\varphi(z)=0$. Отсюда получается для разсматриваемыхъ поверхностей слѣдующее построеніе: возьмемъ въ плоскости $z=0$ произвольную кривую и проведемъ въ этой плоскости кривыя, къ ней параллельныя; затѣмъ перемѣстимъ всѣ эти кривыя параллельно оси Oz на различныя разстоянія по какому-нибудь произвольному закону. Тогда всѣ эти кривыя образуютъ въ своихъ новыхъ положеніяхъ поверхность, представляющую самое общее рѣшеніе задачи.

Легко видѣть, что предыдущій способъ построенія можно замѣнить слѣдующимъ. Искомыя поверхности могутъ быть образованы плоскою кривою произвольнаго вида, плоскость которой катится безъ скольженія по поверхности цилиндра съ произвольнымъ основаніемъ. Слѣдовательно, это лѣпныя поверхности (surfaces moulures). Въ этомъ легко убѣдиться изъ формулъ (47), разсматривая кривыя $\alpha=\text{const.}$. Здѣсь оба семейства линій кривизны состоятъ изъ плоскихъ кривыхъ $z=\text{const.}$ и $\alpha=\text{const.}$.

II. — СЕМЕЙСТВА ПРЯМЫХЪ ЛИНІЙ.

Положеніе прямой въ пространствѣ зависитъ отъ четырехъ перемѣнныхъ параметровъ. Слѣдовательно, въ зависимости отъ числа данныхъ соотношеній между этими четырьмя параметрами можно разсматривать совокупность прямыхъ линій, зависящихъ отъ одного, отъ двухъ и отъ трехъ перемѣнныхъ параметровъ. Перемѣнная прямая, зависящая отъ одного перемѣннаго параметра, образуетъ линейчатую поверхность. Семейство прямыхъ, зависящихъ отъ двухъ различныхъ перемѣнныхъ параметровъ, называется конгруэнціею прямыхъ. Наконецъ, комплексомъ прямыхъ называется всякое семейство прямыхъ, зависящихъ отъ трехъ параметровъ.

253. Линейчатыя поверхности. — Пусть будутъ въ системѣ прямоугольныхъ координатъ

$$x=az+p, \quad y=bz+q \tag{48}$$

уравненія перемѣнной прямой G, гдѣ a, b, p, q — функціи одного-перемѣннаго параметра u. Посмотримъ, какъ измѣняется положеніе касательной плоскости къ поверхности S, образованной прямою G, когда точка прикосновенія M перемѣщается вдоль прямолинейной образующей G. Уравненія (48), вмѣстѣ съ уравненіемъ $z=z$, даютъ выраженія координатъ точекъ поверхности S въ функціи независимыхъ параметровъ z и u; слѣдовательно, по § 39, уравненіе касательной плоскости P къ поверхности S въ точкѣ $M(x, y, z)$ будетъ

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ a & b & 1 \\ a'z+p' & b'z+q' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

гдѣ a', b', p', q' обозначаютъ производныя отъ a, b, p, q по u. Замѣняя x черезъ $az+p$, y черезъ $bz+q$ и раскрывая опредѣлитель, получимъ

$$(b'z+q')(X-aZ-p)-(a'z+p')(Y-bZ-q)=0. \tag{49}$$

Изъ уравненія (49) прежде всего видно, что касательная плоскость къ поверхности всегда проходитъ черезъ образующую G, что можно было видѣть заранѣе; кромѣ того, отсюда видно, что при перемѣщеніи точки прикосновенія M вдоль образую-

щей касательная плоскость вращается вокругъ этой образующей за исключеніемъ того случая, когда отношеніе $\frac{a'z+p'}{b'z+q'}$ не зависитъ отъ z, т.-е. когда $a'q'-b'p'=0$; этотъ частный случай мы пока выдѣлимъ изъ разсмотрѣнія. Такъ какъ послѣднее отношеніе первой степени относительно z, то всякая плоскость, проходящая черезъ образующую, касается поверхности въ одной и только въ одной точкѣ этой образующей. Когда точка прикосновенія удаляется вдоль образующей въ безконечность, то касательная плоскость P стремится къ нѣкоторому предѣльному положенію P', которое называется касательною плоскостью въ безконечно удаленной точкѣ образующей. Уравненіе плоскости P' будетъ

$$b'(X-aZ-p)-a'(Y-bZ-q)=0. \qquad (50)$$

Пусть будетъ ω уголъ между этою плоскостью P' и касательною плоскостью P къ поверхности въ точкѣ $M(x, y, z)$ той же образующей. Направляющіе косинусы (α, β, γ) и $(\alpha', \beta', \gamma')$ нормалей къ плоскостямъ P и P' соотвѣтственно пропорціональны количествамъ

$$b', \quad -a', \quad a'b-ab'$$

и

$$b'z+q', \quad -(a'z+p'), \quad b(a'z+p')-a(b'z+q');$$

слѣдовательно,

$$\cos\omega=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=\frac{Az+B}{\sqrt{A}\sqrt{Az^2+2Bz+C}},$$

гдѣ

$$A=a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2,$$
$$B=a'p'+b'q'+(ab'-ba')(aq'-bp'),$$
$$C=p'^2+q'^2+(aq'-bp')^2.$$

Вычисляя $\operatorname{tg}\omega$ и примѣняя тожество Лагранжа (§ 131), получимъ послѣ приведенія

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{\sqrt{AC-B^2}}{Az+B}=\frac{(a'q'-b'p')\sqrt{1+a^2+b^2}}{Az+B}. \qquad (51)$$

Изъ формулы (51) видно, что предѣльная касательная плоскость P' перпендикулярна къ касательной плоскости P_1 въ нѣкоторой точкѣ O_1 на образующей G; координата z_1 этой точки равна

$$z_1=-\frac{B}{A}=-\frac{a'p'+b'q'+(ab'-ba')(aq'-bp')}{a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2}. \qquad (52)$$

Точка O_1 называется центральною точкою образующей G, а касательная плоскость P_1 въ точкѣ O_1 называется центральною плоскостью. Такъ какъ уголъ θ между касательною плоскостью въ какой-нибудь точкѣ M образующей и центральною плоскостью P_1 равенъ $\frac{\pi}{2}-\omega$, то формула (51) можетъ быть замѣнена слѣдующею

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{A(z-z_1)}{\sqrt{AC-B^2}}=\frac{[a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2](z-z_1)}{(a'q'-b'p')\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Пусть будетъ ϱ разстояніе центральной точки O_1 отъ точки M прикосновенія касательной плоскости, взятое со знакомъ + или — въ зависимости отъ того, образуетъ ли направленіе O_1M съ осью Oz острый или тупой уголъ. Мы будемъ имѣть $\varrho=(z-z_1)\sqrt{1+a^2+b^2}$, и предыдущую формулу можно представить въ видѣ

$$\operatorname{tg}\theta=k\varrho, \tag{53}$$

гдѣ

$$k=\frac{a'^2+b'^2+(ab'-ba')^2}{(a'q'-b'p')(1+a^2+b^2)}; \tag{54}$$

множитель k называется параметромъ распредѣленія линейчатой поверхности. Формулою (53) выражается весьма просто законъ вращенія касательной плоскости вокругъ образующей; въ нее входятъ только элементы, имѣющіе геометрическое значеніе; въ самомъ дѣлѣ, ниже мы увидимъ, какъ можно опредѣлить геометрически параметръ k.

Эта формула представляетъ, однако, нѣкоторую неопредѣленность, такъ какъ непосредственно не видно, въ какомъ направленіи должно отсчитывать уголъ θ; другими словами, неизвѣстно, въ какомъ направленіи вращается касательная плоскость вокругъ образующей, когда точка прикосновенія перемѣщается вдоль этой образующей.

Это направленіе вращенія вполнѣ опредѣляется знакомъ параметра k. Чтобы это себѣ уяснить, вообразимъ наблюдателя, лежащаго вдоль образующей G. При перемѣщеніи точки прикосновенія M вдоль образующей въ направленіи отъ ногъ къ головѣ наблюдателя, послѣдній будетъ видѣть, что касательная плоскость вращается или слѣва направо, или справа налѣво. Нетрудно сообразить, что опредѣленное такимъ образомъ направленіе вращенія сохранится и въ томъ случаѣ, когда наблюдатель перемѣнитъ положеніе такъ, что ноги его будутъ находиться въ томъ мѣстѣ, гдѣ была прежде голова, и обратно. Два гипер-

болическихъ параболоида, имѣющихъ общую образующую и симметричныхъ относительно плоскости, проходящей черезъ эту образующую, даютъ ясное представленіе объ этихъ двухъ различныхъ расположеніяхъ. Перемѣстимъ теперь непрерывнымъ движеніемъ координатныя оси такимъ образомъ, чтобы начало координатъ совпало съ центральною точкою O_1, ось Oz — съ образующею G, и плоскость xOz — съ центральною плоскостью P_1. Ясно, что выраженіе (54) параметра распредѣленія сохранитъ при этомъ свое значеніе*), и формула (53) обращается для новой системы осей въ

$$\operatorname{tg}\theta = kz, \qquad (53)'$$

гдѣ θ обозначаетъ уголъ между касательною плоскостью и плоскостью $y=0$, отсчитываемый въ надлежащемъ направленіи. При значеніи u_0 параметра, соотвѣтствующемъ оси Oz, мы должны имѣть $a=b=p=q=0$; при этомъ уравненіе касательной плоскости (49) обращается въ

$$(b'z+q')\,X-(a'z+p')\,Y=0.$$

Чтобы начало координатъ было центральною точкою, а плоскость xOz — центральною плоскостью, должно быть $a'=0$, $q'=0$; слѣдовательно, уравненіе касательной плоскости принимаетъ видъ $Y=\frac{b'z}{p'}X$, причемъ формула (54) даетъ $k=-\frac{b'}{p'}$. Отсюда видно, что въ формулѣ (53)′ за положительное направленіе отсчета угла θ нужно принимать направленіе вращенія отъ оси Oy къ оси Ox. Если оси координатъ имѣютъ такое же расположеніе, какъ выше въ § 228, то наблюдатель, лежащій вдоль оси Oz, будетъ видѣть, что касательная плоскость поворачивается слѣва направо, если k положительно, и справа налѣво, если k отрицательно.

Мѣсто центральныхъ точекъ всѣхъ образующихъ линейчатой поверхности называется линіею сжатія (ligne de striction), или горловою линіею. Координаты точекъ этой линіи выражаются въ функціи параметра u уравненіями (48) и (52).

Примѣчаніе. — Если для данной образующей мы имѣемъ $a'q'=b'p'$, то касательныя плоскости къ поверхности во всѣхъ точкахъ этой образующей совпадаютъ между собою. Если послѣднее соотношеніе имѣетъ мѣсто для всѣхъ образующихъ, т.-е. при всѣхъ значеніяхъ параметра u, то линейчатая поверх-

*) Это видно изъ формулы (53), гдѣ θ и ρ имѣютъ геометрическое значеніе, не зависящее отъ выбора системы координатъ.

(Ред.)

ность есть разгибающаяся поверхность (§ 223). Въ послѣднемъ случаѣ нетрудно придти къ результатамъ, полученнымъ въ § 223. Въ самомъ дѣлѣ, если a' и b' не равны одновременно нулю, то касательныя плоскости къ поверхности во всѣхъ точкахъ образующей G совпадаютъ между собою; но въ точкѣ $z=-\frac{p'}{a'}=-\frac{q'}{b'}$, т.-е. въ точкѣ прикосновенія образующей съ ея огибающею уравненіе касательной плоскости дѣлается неопредѣленнымъ. Принимая во вниманіе соотношеніе $a'q'=b'p'$, легко доказать, что значеніе z_1, опредѣляемою формулою (52), тождественно съ значеніемъ $z=-\frac{p'}{a'}=-\frac{q'}{b'}$. Слѣдовательно, для разгибающейся поверхности линія сжатія совпадаетъ съ ребромъ возврата. Что касается параметра распредѣленія, то для разгибающейся поверхности онъ равенъ безконечности.

Если для каждой образующей $a'=b'=0$, то поверхность есть цилиндръ; въ этомъ случаѣ центральная точка — неопредѣленна.

254. Геометрическое опредѣленіе параметра распредѣленія. — Центральную точку и параметръ распредѣленія можно опредѣлить еще иначе. Разсмотримъ вмѣстѣ съ G сосѣднюю образующую G_1, соотвѣтствующую значенію параметра $u+h$. Уравненія образующей G_1 будутъ

$$x=(a+\Delta a)\,z+p+\Delta p,\quad y=(b+\Delta b)\,z+q+\Delta q. \qquad (55)$$

Пусть будетъ δ кратчайшее разстояніе между обѣими прямыми G и G_1, α — уголъ между этими прямыми, и X, Y, Z — координаты точки пересѣченія образующей G съ общимъ перпендикуляромъ къ обѣимъ образующимъ. По извѣстнымъ формуламъ аналитической геометріи имѣемъ

$$Z=-\frac{\Delta a\,\Delta q+\Delta b\,\Delta p+(a\,\Delta b-b\,\Delta a)[(a+\Delta a)\,\Delta q-(b+\Delta b)\,\Delta p]}{(\Delta a)^2+(\Delta b)^2+(a\,\Delta b-b\,\Delta a)^2},$$

$$\delta=\frac{\Delta a\,\Delta q-\Delta b\,\Delta p}{\sqrt{(\Delta a)^2+(\Delta b)^2+(a\,\Delta b-b\,\Delta a)^2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{(\Delta a)^2+(\Delta b)^2+(a\Delta b-b\Delta a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+1}\,\sqrt{(a+\Delta a)^2+(b+\Delta b)^2+1}}.$$

При приближеніи h къ нулю Z обращается въ предѣлѣ въ найденное выше выраженіе (52) для z_1, а $\frac{\sin\alpha}{\delta}$ даетъ въ предѣлѣ k. Слѣдовательно, центральная точка есть предѣльное положеніе основанія общаго перпендикуляра къ образую-

щимъ G и G_1, а параметръ распредѣленія равенъ предѣлу отношенія $\frac{\sin\alpha}{\delta}$.

Замѣнимъ въ выраженіи для δ количества Δa, Δb, Δp, Δq ихъ разложеніями по степенямъ h

$$\Delta a = ha' + \frac{h^2}{1.2}a'' + \ldots,$$

и ему подобными для Δb, Δp, Δq. Тогда числитель выраженія для δ будетъ равенъ

$$\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p = h^2(a'q' - b'p') + \frac{h^3}{2}(a''q' + a'q'' - b''p' - b'p'') + \ldots,$$

тогда какъ знаменатель будетъ всегда первой степени относительно h. Мы видимъ, что δ есть, вообще, безконечно малое перваго порядка, за исключеніемъ случая разгибающихся поверхностей, когда мы имѣемъ $a'q' - b'p' = 0$. Но коэффиціентъ при $\frac{h^3}{2}$ есть производная отъ $a'q' - b'p'$; слѣдовательно, въ случаѣ разгибающихся поверхностей этотъ коэффиціентъ также равенъ нулю, и потому для разгибающейся поверхности кратчайшее разстояніе между двумя безконечно близкими образующими будетъ безконечно малымъ не второго, а третьяго порядка (§ 230). Это замѣчаніе принадлежитъ Буке, который, кромѣ того, доказалъ, что если для какой-нибудь поверхности это разстояніе представляетъ безконечно малое четвертаго порядка, то оно должно равняться нулю; это будетъ только въ томъ случаѣ, когда разсматриваемыя прямыя линіи или касаются плоской кривой, или образуютъ коническую поверхность. Чтобы въ этомъ убѣдиться, нужно только продолжить разложеніе выраженія $\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p$ до членовъ четвертаго порядка.

255. Конгруэнціи. Фокальныя поверхности. — Всякая совокупность прямыхъ

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \tag{56}$$

гдѣ a, b, p, q зависятъ отъ двухъ перемѣнныхъ параметровъ α и β, называется конгруэнціею прямыхъ. Вообще, черезъ каждую точку пространства проходитъ нѣсколько линій конгруэнціи, такъ какъ при данныхъ значеніяхъ x, y, z мы имѣемъ для опредѣленія α и β два уравненія (56). Если между параметрами α и β мы установимъ нѣкоторое соотношеніе, то перемѣнная прямая G, представляемая уравненіями (56), образуетъ линейчатую поверхность, которая, вообще, не будетъ разги-

бающеюся. Для того чтобы эта поверхность была разгибающеюся, должно быть, какъ мы видѣли,

$$da\,dq - db\,dp = 0;$$

замѣняя здѣсь da черезъ $\frac{\partial a}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta}d\beta, \ldots$, получимъ

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta}d\beta\right)\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial q}{\partial \beta}d\beta\right)\\ &-\left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta}d\beta\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial p}{\partial \beta}d\beta\right) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Изъ этого уравненія второй степени относительно $\frac{d\beta}{d\alpha}$ мы получимъ, вообще, два различныхъ рѣшенія для $\frac{d\beta}{d\alpha}$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \psi_1(\alpha, \beta), \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \psi_2(\alpha, \beta). \qquad (58)$$

При нѣкоторыхъ весьма общихъ условіяхъ, которыя мы укажемъ впослѣдствіи и которыя мы будемъ предполагать здѣсь выполненными, каждому изъ уравненій (58) можно удовлетворить, принявъ за β одну изъ безчисленнаго множества нѣкоторыхъ опредѣленныхъ функцій отъ α; при этомъ каждое изъ этихъ уравненій имѣетъ одинъ и только одинъ интегралъ, принимающій при $\alpha = \alpha_0$ данное значеніе β_0. Слѣдовательно, каждая прямая G конгруэнціи принадлежитъ двумъ разгибающимся поверхностямъ, всѣ образующія которыхъ будутъ прямыми этой же конгруэнціи. Пусть будутъ Γ и Γ' ребра возврата этихъ двухъ разгибающихся поверхностей, A и A' — точки прикосновенія прямой G къ Γ и къ Γ'. Эти точки A и A' называются фокальными точками образующей. Ихъ можно найти слѣдующимъ образомъ, не интегрируя уравненія (57), опредѣляющаго разгибающіяся поверхности конгруэнціи. Координата z каждой изъ этихъ точекъ должна одновременно удовлетворять двумъ соотношеніямъ

$$z\,da + dp = 0, \quad z\,db + dq = 0^*);$$

замѣняя здѣсь da, db, dp, dq ихъ выраженіями, получимъ

$$z\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta}d\beta\right) + \frac{\partial p}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial p}{\partial \beta}d\beta = 0,$$

$$z\left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta}d\beta\right) + \frac{\partial q}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial q}{\partial \beta}d\beta = 0.$$

*) Такъ какъ прямая (56) касается кривой Γ въ точкѣ A, то для перемѣщенія по кривой Γ имѣемъ

$$dx = a\,dz, \quad dy = b\,dz. \qquad (Ред.)$$

Исключая изъ этихъ уравненій z, мы придемъ къ уравненію (57); но если мы исключимъ изъ нихъ $\frac{d\beta}{d\alpha}$, то получимъ уравненіе второй степени, опредѣляющее обѣ фокальныя точки,

$$\left(z\frac{\partial a}{\partial \alpha}+\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)\left(z\frac{\partial b}{\partial \beta}+\frac{\partial q}{\partial \beta}\right)-\left(z\frac{\partial a}{\partial \beta}+\frac{\partial p}{\partial \beta}\right)\left(z\frac{\partial b}{\partial \alpha}+\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)=0. \quad (59)$$

Мѣсто фокальныхъ точекъ A и A' образуетъ двѣ поверхности Σ и Σ', уравненіе которыхъ получимъ, исключая α и β изъ уравненій (56) и (59). Эти поверхности не будутъ, вообще, аналитически различными, а образуютъ двѣ полости одной и той же поверхности; эта поверхность называется фокальною поверхностью. Легко видѣть, что фокальная поверхность есть мѣсто реберъ возврата разгибающихся поверхностей конгруэнціи. Въ самомъ дѣлѣ, по самому опредѣленію кривой Γ очевидно, что касательная прямая къ этой кривой въ какой-нибудь ея точкѣ a принадлежитъ къ конгруэнціи; слѣдовательно, точка a есть одна изъ фокальныхъ точекъ этой прямой. Очевидно, что каждая прямая конгруэнціи касается обѣихъ полостей Σ и Σ' фокальной поверхности, такъ какъ такая прямая касается двухъ кривыхъ Γ и Γ', расположенныхъ на этихъ полостяхъ.

Примѣняя разсужденія § 247, легко найти касательныя плоскости къ полостямъ Σ и Σ' фокальной поверхности въ точкахъ A и A' (черт. 51). Предположимъ, напримѣръ, что прямая G, перемѣщаясь, остается касательною къ кривой Γ; при этомъ она остается также касательною и къ полости Σ', и ея точка прикосновенія съ Σ' описываетъ нѣкоторую кривую γ', которая необходимо отлична отъ кривой Γ'. Слѣдовательно, разгибающаяся поверхность, образованная прямою G, будетъ касаться въ точкѣ A' полости Σ'; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ касательныя плоскости къ обѣимъ поверхностямъ имѣютъ общими прямую G и общую касательную прямую къ кривой γ', то эти касательныя плоскости совпадаютъ между собою. Слѣдовательно, касательною плоскостью къ полости Σ' въ точкѣ A' будетъ соприкасающаяся плоскость къ кривой Γ въ точкѣ A. Точно также можно убѣдиться, что касательною плоскостью въ полости Σ въ точкѣ A будетъ соприкасающаяся плоскость къ кривой Γ' въ точкѣ A'. Эти двѣ плоскости называются фокальными плоскостями конгруэнціи.

Можетъ случиться, что одна изъ двухъ полостей фокальной поверхности обращается въ линію C. Въ этомъ случаѣ прямыя конгруэнціи остаются касательными къ полости Σ и пересѣ-

каются съ линіею C; одно изъ семействъ разгибающихся поверхностей будетъ состоять изъ конусовъ, описанныхъ около поверхности Σ, съ вершинами въ точкахъ линіи C. Если обѣ полости фокальной поверхности обращаются соотвѣтственно въ линіи C и C', то оба семейства разгибающихся поверхностей состоятъ изъ конусовъ, имѣющихъ вершины въ точкахъ одной изъ кривыхъ C, C' и проходящихъ черезъ другую. Если линіи C и C' — прямыя, то конгруэнція называется линейною конгруэнціею.

256. Конгруэнціи нормалей. — Очевидно, что нормали ко всякой поверхности образуютъ конгруэнцію, но обратное предложеніе не вѣрно; не всегда есть поверхность, нормальная ко всѣмъ прямымъ данной конгруэнціи. Въ самомъ дѣлѣ, если мы разсмотримъ конгруэнцію нормалей къ какой-нибудь поверхности S, то двумя полостями фокальной поверхности конгруэнціи будутъ обѣ полости Σ, Σ' развертки поверхности S (§ 247), а мы видѣли, что въ точкахъ A, A' прикосновенія нормали къ обѣимъ полостямъ развертки касательныя плоскости къ полостямъ развертки взаимно перпендикулярны. Послѣднее свойство вполнѣ характеризуетъ конгруэнцію нормалей. Въ самомъ дѣлѣ, найдемъ, при какомъ условіи всѣ прямыя, представляемыя уравненіемъ (56), нормальны къ нѣкоторой поверхности. Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функція $f(\alpha, \beta)$, чтобы поверхность S, представляемая уравненіями

$$x=az+p, \quad y=bz+q, \quad z=f(\alpha, \beta), \tag{60}$$

имѣла нормалями именно прямыя G. Слѣдовательно, мы должны имѣть $adx+bdy+dz=0$, или

$$a\frac{\partial x}{\partial \alpha}+b\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}=0,$$
$$a\frac{\partial x}{\partial \beta}+b\frac{\partial y}{\partial \beta}+\frac{\partial z}{\partial \beta}=0;$$

замѣнивъ въ этихъ уравненіяхъ x черезъ $az+p$, y черезъ $bz+q$, и раздѣливъ ихъ на $\sqrt{a^2+b^2+1}$, получимъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha}(z\sqrt{a^2+b^2+1})+\frac{a\frac{\partial p}{\partial \alpha}+b\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=0,\\ \frac{\partial}{\partial \beta}(z\sqrt{a^2+b^2+1})+\frac{a\frac{\partial p}{\partial \beta}+b\frac{\partial q}{\partial \beta}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=0.\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Для того чтобы эти уравненія были совмѣстимы, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{a\frac{\partial p}{\partial\alpha}+b\frac{\partial q}{\partial\alpha}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{a\frac{\partial p}{\partial\beta}+b\frac{\partial q}{\partial\beta}}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right). \qquad (62)$$

Если условіе (62) удовлетворяется, то изъ уравненій (61) можно опредѣлить z квадратурою. Получающіяся поверхности зависятъ отъ одного произвольнаго постояннаго, входящаго при интеграціи, и образуютъ семейство параллельныхъ поверхностей.

Чтобы выяснить геометрическій смыслъ условія (62), замѣтимъ, что, по самому своему характеру, это соотношеніе не зависитъ ни отъ выбора осей координатъ, ни отъ выбора независимыхъ перемѣныхъ. Примемъ за ось Oz одну изъ прямыхъ конгруэнціи, а за параметры α и β — координаты точки пересѣченія любой прямой конгруэнціи съ плоскостью $z=0$. Мы имѣемъ изъ уравненій (60) $p=\alpha$, $q=\beta$; что касается a и b, то они будутъ функціями перемѣнныхъ α, β, обращающимися въ нуль при $\alpha=\beta=0$. Отсюда слѣдуетъ, что при значеніяхъ $\alpha=0$, $\beta=0$ параметровъ условіе интегрируемости (62) обращается въ $\frac{\partial a}{\partial\beta}=\frac{\partial b}{\partial\alpha}$. Съ другой стороны, уравненіе (57) принимаетъ здѣсь видъ

$$\frac{\partial a}{\partial\beta}d\beta^2+\left(\frac{\partial a}{\partial\alpha}-\frac{\partial b}{\partial\beta}\right)d\alpha\,d\beta-\frac{\partial b}{\partial\alpha}d\alpha^2=0.$$

Если мы замѣнимъ въ этомъ уравненіи α и β соотвѣтственно черезъ x и y, то получимъ уравненіе линій пересѣченія разгибающихся поверхностей конгруэнціи съ плоскостью xOy. Условіе $\frac{\partial a}{\partial\beta}=\frac{\partial b}{\partial\alpha}$ при $\alpha=\beta=0$ показываетъ, что обѣ линіи этого семейства, проходящія черезъ начало координатъ, пересѣкаются въ немъ подъ прямымъ угломъ*). Слѣдовательно, касательныя плоскости къ двумъ разгибающимся поверхностямъ, проходящимъ черезъ ось Oz, взаимно перпендикулярны. Такъ какъ за ось Oz можно принять любую прямую конгруэнціи, то мы

*) Если мы обозначимъ черезъ p_1, p_2 угловые коэффиціенты линій пересѣченія разгибающихся поверхностей конгруэнціи съ плоскостью xOy, вычисленные для начала координатъ, то изъ послѣдняго уравненія получимъ $p_1p_2=-\frac{\partial b}{\partial\alpha}:\frac{\partial a}{\partial\beta}$. При условіи $\frac{\partial a}{\partial\beta}=\frac{\partial b}{\partial\alpha}$ имѣемъ $p_1p_2=-1$, откуда и слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ обѣ линіи пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. *(Ред.)*

получаемъ слѣдующую важную теорему. Для того чтобы прямыя конгруэнціи были нормалями къ нѣкоторой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы фокальныя плоскости, проходящія черезъ каждую прямую конгруэнціи, были взаимно перпендикулярны.

Примѣчаніе. — Если мы примемъ за перемѣнные параметры α и β косинусы угловъ, образуемыхъ прямою съ осями Ox и Oy, то будемъ имѣть

$$a=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},\quad b=\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},\quad \sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}},$$

и уравненія (61) обратятся въ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha\frac{\partial p}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial q}{\partial\alpha}=0,\\ \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)+\alpha\frac{\partial p}{\partial\beta}+\beta\frac{\partial q}{\partial\beta}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(63)$$

Условіе интегрируемости (62) принимаетъ видъ $\frac{\partial q}{\partial\alpha}=\frac{\partial p}{\partial\beta}$, откуда слѣдуетъ, что p и q суть частныя производныя отъ нѣкоторой функціи $F(\alpha, \beta)$,

$$p=\frac{\partial F}{\partial\alpha},\quad q=\frac{\partial F}{\partial\beta},$$

причемъ функція $F(\alpha, \beta)$ получается посредствомъ квадратуры. Найдя F, мы затѣмъ получимъ z, интегрируя уравненіе съ полными дифференціалами

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)=-\left(\alpha\frac{\partial^2F}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2F}{\partial\alpha\partial\beta}\right)d\alpha-\left(\alpha\frac{\partial^2F}{\partial\alpha\partial\beta}+\beta\frac{\partial^2F}{\partial\beta^2}\right)d\beta;$$

отсюда имѣемъ

$$z=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\left(C+F-\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}\right),$$

гдѣ C — произвольное постоянное.

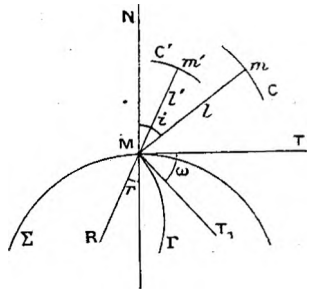
257. Теорема Малюса. — Если свѣтовые лучи, выходящіе изъ какой-нибудь точки, отражаются или преломляются какою-нибудь поверхностью, то послѣ отраженія или преломленія они будутъ нормальны къ нѣкоторому семейству параллельныхъ поверхностей. Эта теорема, принадлежащая Малюсу (Malus), была распространена на случай нѣсколькихъ послѣдовательныхъ отраженій или преломленій Коши, Дюпеномъ, Жергонномъ (Gergonne) и Кетле (Quételet), и мы имѣемъ слѣдующую болѣе общую теорему:

Если свѣтовые лучи нормальны къ какой-нибудь поверхности, то послѣ любого числа отраженій и преломленій они также остаются нормальными къ нѣкоторой поверхности.

Такъ какъ отраженіе лучей можно разсматривать, какъ преломленіе съ показателемъ -1, то достаточно доказать эту теорему только для случая однократнаго преломленія. Пусть будетъ S поверхность,

нормальная къ свѣтовымъ лучамъ, mM — падающій лучъ, встрѣчающій поверхность раздѣла Σ двухъ средъ въ точкѣ M, MR — лучъ преломленный. По закону Декарта (Descartes), падающій лучъ Mm, отраженный лучъ MR и нормаль MN лежатъ въ одной плоскости, и между углами i и r (см. черт. 52) существуетъ соотношеніе $n \sin i = \sin r$. Для опредѣленности, мы предположимъ $n < 1$, какъ это принято на чертежѣ 52. Обозначимъ разстояніе Mm черезъ l и отложимъ на продолженіи преломленнаго луча длину $l' = Mm'$, равную k — кратной длинѣ l, гдѣ k обозначаетъ нѣкоторый постоянный множитель, который мы опредѣлимъ ниже. Геометрическимъ мѣстомъ всѣхъ точекъ m', лежащихъ на различныхъ лучахъ, будетъ нѣкоторая поверхность S'. Докажемъ, что можно выбрать множитель k такимъ образомъ, чтобы преломленный лучъ Mm' былъ нормаленъ къ поверхности S'. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ C какая-нибудь кривая, лежащая на поверхности S. Когда точка m описываетъ кривую C, точка M описываетъ на поверхности Σ нѣкоторую кривую Γ, а соотвѣтствующая точка m' описываетъ на поверхности S' нѣкоторую другую кривую C'. Пусть будутъ s, σ, s' длины дугъ кривыхъ C, Γ, C', измѣряемыя отъ нѣкоторыхъ соотвѣтственныхъ постоянныхъ точекъ на этихъ кривыхъ, и ω — уголъ между касательною MT_1 къ кривой Γ и линіею пересѣченія MT касательной плоскости къ поверхности Σ къ точкѣ M съ нормальною плоскостью къ этой поверхности, проходящею черезъ падающій лучъ Mm; далѣе, пусть будутъ φ и φ' углы касательной MT_1 съ прямыми Mm и Mm'. Чтобы вычислить, напримѣръ, $\cos\varphi$, отложимъ на Mm длину, равную единицѣ, и спроектируемъ ее на прямую MT_1. Для этого мы можемъ сначала проектировать эту длину на MT и затѣмъ проектировать полученную проекцію на MT_1. Поступая точно такъ же съ единицею длины, отложенною на Mm', мы получимъ соотношенія

Черт. 52.



$$\cos\varphi = \sin i \cos\omega, \quad \cos\varphi' = \sin r \cos\omega.$$

Примѣняя къ отрѣзкамъ Mm и Mm' формулу (10′) § 82 для дифференціала отрѣзка прямой, получимъ

$$dl = -d\sigma \cos\omega \sin i,$$
$$dl' = -d\sigma \cos\omega \sin r - ds' \cos\theta,$$

гдѣ θ есть уголъ между прямою $m'M$ и касательною къ кривой C'. Замѣняя dl черезъ kdl', изъ предыдущихъ уравненій будемъ имѣть

$$\cos\omega\, d\sigma (k \sin i - \sin r) = ds' \cos\theta.$$

Если мы положимъ $k = n$, то получимъ

$$ds' \cos\theta = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при $k = n$ лучъ Mm' будетъ нормаленъ къ кривой C', а такъ какъ кривая C' есть произвольная кривая, лежащая на поверхности S', то онъ будетъ нормаленъ и къ самой поверх-

ности S'. Эта поверхность S' называется антикаустикою, или вторичною каустикою. Очевидно, что поверхность S' есть огибающая сферъ, описанныхъ изъ точки M, какъ изъ центра, радіусами, равными n-кратной длинѣ Mm. Такимъ образомъ, мы получаемъ слѣдующую теорему:

Пусть падающіе лучи нормальны къ нѣкоторой поверхности S; будемъ разсматривать эту поверхность, какъ огибающую семейства сферъ, центры которыхъ лежатъ на поверхности раздѣла Σ. Тогда антикаустикою для преломленныхъ лучей будетъ огибающая семейства сферъ съ тѣми же самыми центрами, радіусы которыхъ относятся къ радіусамъ соотвѣтствующихъ сферъ перваго семейства, какъ единица къ показателю преломленія.

Эта огибающая поверхность состоитъ изъ двухъ полостей, соотвѣтствующихъ равнымъ и противоположнымъ по знаку показателямъ преломленія. Вообще, эти двѣ полости не будутъ аналитически различны и представляютъ двѣ полости поверхности, представляемой неразложимымъ уравненіемъ.

258. Комплексы. — Совокупность прямыхъ, зависящихъ отъ трехъ перемѣнныхъ параметровъ, называется комплексомъ прямыхъ. Пусть будутъ

$$x=az+p, \quad y=bz+q \tag{64}$$

уравненія нѣкоторой прямой. Каждое соотношеніе между a, b, p, q

$$F(a, b, p, q)=0 \tag{65}$$

опредѣляетъ нѣкоторый комплексъ прямыхъ, и обратно. Если F есть цѣлый многочленъ по a, b, p, q, то комплексъ называется алгебраическимъ. Прямыя комплекса, проходящія черезъ данную точку (x_0, y_0, z_0), образуютъ конусъ съ вершиною въ точкѣ (x_0, y_0, z_0). Мы получимъ уравненіе этого конуса, исключая a, b, p, q изъ соотношеній (64), (65) и (66)

$$x_0=az_0+p, \quad y_0=bz_0+q; \tag{66}$$

слѣдовательно, уравненіе этого конуса будетъ

$$F\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}, \frac{x_0z-xz_0}{z-z_0}, \frac{y_0z-yz_0}{z-z_0}\right)=0. \tag{67}$$

Въ каждой плоскости лежитъ безконечное множество прямыхъ, принадлежащихъ къ данному комплексу; эти прямыя огибаютъ нѣкоторую кривую, называемую кривою комплекса. Если комплексъ — алгебраическій, то порядокъ конуса комплекса равенъ классу кривой комплекса. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что требуется найти число прямыхъ комплекса, проходящихъ черезъ данную точку A и лежащихъ въ нѣкоторой плоскости P, проходящей черезъ эту точку. Для этого можно поступать двумя способами: можно или пересѣчь плоскостью P тотъ конусъ комплекса, вершина котораго находится въ точкѣ A, или провести черезъ точку A касательныя прямыя, къ кривой комплекса, расположенной въ плоскости P. Такъ

какъ въ обоихъ случаяхъ мы должны получить одно и то же число, то теорема доказана.

Если конусъ комплекса обращается въ плоскость, то комплексъ называется л и н е й н ы м ъ; въ этомъ случаѣ уравненіе (65) будетъ имѣть видъ

$$Aa+Bb+Cp+Dq+E(aq-bp)+F=0. \qquad (68)$$

Мѣстомъ прямыхъ комплекса, проходящихъ черезъ данную точку (x_0, y_0, z_0), будетъ плоскость, представляемая уравненіемъ

$$\left.\begin{aligned} &A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(x_0z-z_0x)\\ &+D(y_0z-z_0y)+E(y_0x-x_0y)+F(z-z_0)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Такъ какъ кривая линейнаго комплекса должна быть перваго класса, то она обращается въ точку, т.-е. всѣ прямыя комплекса, лежащія въ данной плоскости, проходятъ черезъ нѣкоторую точку этой плоскости; эта точка называется п о л ю с о м ъ, или ф о к у с о м ъ. Слѣдовательно, линейный комплексъ устанавливаетъ соотвѣтствіе между точками и плоскостями пространства такимъ образомъ, что каждой точкѣ пространства соотвѣтствуетъ опредѣленная плоскость, проходящая черезъ эту точку, и каждой плоскости соотвѣтствуетъ опредѣленная точка, лежащая въ этой плоскости. Точно также линейнымъ комплексомъ устанавливается соотвѣтствіе и между прямыми въ пространствѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ D прямая, не принадлежащая къ комплексу; далѣе, пусть будутъ F и F' фокусы двухъ плоскостей, проходящихъ черезъ эту прямую, и Δ — прямая $F'F'$. Всякая плоскость, проходящая черезъ прямую Δ, имѣетъ фокусъ въ точкѣ φ пересѣченія этой плоскости съ прямою D, такъ какъ прямыя φF, $\varphi F'$, очевидно, принадлежатъ къ комплексу, такъ какъ проходятъ черезъ фокусы F и F' и лежатъ въ плоскостяхъ, которымъ соотвѣтствуютъ эти фокусы. Отсюда слѣдуетъ, что всякая прямая, пересѣкающая прямыя D и Δ, принадлежитъ къ комплексу, и что фокусъ каждой плоскости, проходящей черезъ прямую D, есть точка пересѣченія этой плоскости съ прямою Δ. Прямыя D и Δ называются с о п р я ж е н н ы м и п р я м ы м и; каждая изъ нихъ есть мѣсто фокусовъ плоскостей, проходящихъ черезъ другую.

Если прямая D обращается въ безконечно удаленную прямую, то плоскости, проходящія черезъ D, будутъ между собою параллельны, и изъ предыдущаго видно, что мѣсто фокусовъ плоскостей, параллельныхъ нѣкоторой данной плоскости, есть прямая линія. Легко было бы убѣдиться, что всегда есть плоскость, обладающая тѣмъ свойствомъ, что мѣсто фокусовъ плоскостей, ей параллельныхъ, есть прямая, къ ней перпендикулярная. Если мы примемъ эту прямую за ось Oz, то каждая плоскость, фокусъ которой лежитъ на оси Oz, должна быть параллельна плоскости xOy. На основаніи уравненія (69) необходимымъ и достаточнымъ условіемъ этого будетъ $A=B=C=D=0$, и уравненіе комплекса принимаетъ слѣдующій простой видъ

$$aq-bp+K=0; \qquad (70)$$

при этомъ плоскость, фокусъ которой лежитъ въ точкѣ (x, y, z), представится уравненіемъ

$$Xy-Yx+K(Z-z)=0, \qquad (71)$$

гдѣ X, Y, Z — текущія координаты.

Въ видѣ примѣра, найдемъ кривыя, которыхъ касательныя принадлежали бы къ предыдущему комплексу. Разсмотримъ одну изъ такихъ кривыхъ. Предположимъ, что координаты x, y, z ея точекъ выражены въ функціи перемѣннаго параметра; уравненія касательной въ какой-нибудь точкѣ этой кривой представятся уравненіями

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}.$$

Для того чтобы эта касательная принадлежала къ комплексу, необходимо и достаточно, чтобы она была расположена въ плоскости (71), имѣющей фокусомъ точку (x, y, z), т.-е. чтобы было

$$x\,dy-y\,dx=K\,dz. \tag{72}$$

Выше (§ 218) мы видѣли, какимъ образомъ можно получить всѣ функціи x, y, z перемѣннаго параметра, удовлетворяющія этому условію; слѣдовательно, мы можемъ найти всѣ кривыя, обладающія требуемымъ свойствомъ.

Выводы, полученные въ § 218, выражаются весьма просто съ точки зрѣнія теоріи комплексовъ. Такъ, напримѣръ, дифференцируя уравненіе (72), получимъ

$$x\,d^2y-y\,d^2x=K\,d^2z; \tag{73}$$

изъ соотношеній (72) и (73) слѣдуетъ, что соприкасающеюся плоскостью въ точкѣ (x, y, z) служитъ плоскость (71). Такимъ образомъ, мы получаемъ слѣдующую теорему:

Если касательныя прямыя къ кривой двойной кривизны принадлежатъ къ линейному комплексу, то соприкасающеюся плоскостью въ каждой точкѣ этой кривой будетъ та плоскость, для которой эта точка служитъ фокусомъ. [Аппель (Appell).]

Предположимъ, что требуется провести черезъ точку O пространства соприкасающіяся плоскости къ нѣкоторой кривой двойной кривизны Γ, касательныя къ которой принадлежатъ къ линейному комплексу. Пусть будетъ M точка прикосновенія одной изъ этихъ плоскостей. На основаніи предыдущей теоремы, прямая MO есть прямая комплекса, и, слѣдовательно, точка M лежитъ въ плоскости, имѣющей фокусомъ точку O. Обратно, если точка M кривой Γ лежитъ въ плоскости, имѣющей фокусомъ точку O, то прямая MO, принадлежащая къ комплексу, лежитъ въ соприкасающейся плоскости къ кривой въ точкѣ M, и эта соприкасающаяся плоскость проходитъ черезъ точку O. Слѣдовательно, искомыми точками прикосновенія будутъ точки пересѣченія кривой Γ съ плоскостью, имѣющей фокусомъ точку O (ср. § 218).

Линейные комплексы встрѣчаются во многихъ геометрическихъ и механическихъ теоріяхъ [см., напримѣръ, докторскія диссертаціи Аппеля и Пикара*)].

*) Annales scientifiques de l'École Normale supérieure; 1876 и 1877.

УПРАЖНЕНІЯ.

1. Найти линіи кривизны разгибающейся поверхности, огибающей семейство плоскостей, представляемыхъ въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіемъ

$$z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+R\sqrt{1+\alpha^2+\varphi^2(\alpha)},$$

гдѣ α — перемѣнный параметръ, $\varphi(\alpha)$ — произвольная функція этого параметра, и R — данное постоянное.

2. Найти, при какихъ условіяхъ прямая $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, гдѣ a, b, α, β — функціи нѣкотораго перемѣннаго параметра, образуетъ разгибающуюся поверхность, у которой линіи кривизны, перпендикулярныя къ образующимъ, расположены на концентрическихъ сферахъ.

3. Найти линіи кривизны поверхности, представляемой въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіемъ

$$e^z=\cos x\cos y.$$

4. Разсмотримъ трехъосный эллипсоидъ, представляемый въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

и сѣченіе E этого эллипсоида плоскостью xOz. Требуется найти для каждой точки M эллипса E: 1) выраженія главныхъ радіусовъ кривизны R_1, R_2 эллипсоида; 2) соотношеніе между R_1 и R_2; 3) мѣсто центровъ кривизны главныхъ сѣченій, когда точка M перемѣщается по эллипсу E.

5. Составить уравненіе второй степени, опредѣляющее главные радіусы кривизны для каждой точки параболоида, представляемаго въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z,$$

и выразить въ функціи перемѣннаго z главные радіусы кривизны въ каждой точкѣ линіи пересѣченія предыдущаго параболоида съ параболоидомъ

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}=2z-\lambda.$$

6. Найти мѣсто центровъ кривизны главныхъ сѣченій параболоида $xy=az$ для различныхъ точекъ оси Ox.

7. Найти уравненіе поверхности, представляющей мѣсто центровъ кривизны сѣченій данной поверхности S плоскостями, проходящими черезъ данную точку M этой поверхности.

8. Пусть будетъ MT касательная прямая въ точкѣ M къ данной поверхности второго порядка, O — центръ кривизны сѣченія этой поверхности какою-нибудь плоскостью, проходящею черезъ MT, и O' — центръ кривизны развертки этого сѣченія. Найти мѣсто точекъ O', когда сѣкущая плоскость вращается вокругъ MT.

9. Найти асимптотическія линіи тора, образованнаго вращеніемъ круга вокругъ одной изъ его касательныхъ.

10. Пусть будетъ C данная кривая въ плоскости zOx прямоугольной системы координатъ. Разсмотримъ поверхность, образованную окружностью, плоскость которой остается параллельною плоскости xOy, центръ которой описываетъ кривую C, а радіусъ измѣняется такимъ образомъ, что окружность постоянно пересѣкается съ осью Oz. Составить дифференціальное уравненіе асимптотическихъ линій этой поверхности, принимая за независимыя перемѣнныя координату z какой-нибудь ея точки и уголъ θ между радіусомъ окружности, проходящимъ черезъ эту точку, и линіею пересѣченія плоскости окружности съ плоскостью zOx. Примѣнить полученные выводы къ случаю, когда кривая C есть парабола, вершиною которой служитъ точка O, а осью — ось Ox.

11. Линейчатая поверхность касается другой линейчатой поверхности во всѣхъ точкахъ прямолинейной образующей Δ этой послѣдней поверхности; кромѣ того, всѣ образующія первой поверхности пересѣкаются съ прямою Δ. Найти асимптотическія линіи первой линейчатой поверхности.

12. Найти на прямомъ геликоидѣ такія линіи, въ каждой точкѣ которыхъ соприкасающаяся плоскость проходитъ черезъ нормаль къ поверхности въ этой точкѣ.

13. Найти асимптотическія линіи линейчатой поверхности, представляемой уравненіями

$$x=(1+u)\cos v,\quad y=(1-u)\sin v,\quad z=u.$$

14*. Доказать, что сѣченія поверхности S плоскостями, проходящими черезъ прямую Δ, и линіи прикосновенія конусовъ, описанныхъ около поверхности S и имѣющихъ вершины въ точкахъ прямой Δ, образуютъ на поверхности S сопряженную сѣть.

[Кенигсъ (Koenigs).]

15*. Если неизмѣняемая прямая движется такимъ образомъ, что три ея точки остаются соотвѣтственно въ трехъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ, то эта прямая остается постоянно нормальною къ нѣкоторому семейству параллельныхъ поверхностей. Одна изъ этихъ поверхностей есть геометрическое мѣсто средины отрѣзка этой прямой между точкою ея пересѣченія съ одною изъ плоскостей координатъ и основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго на эту прямую изъ начала координатъ.

[Дарбу, Comptes rendus, т. XCII, стр. 446; 1881.]

16*. На всякой поверхности есть мнимая линія кривизны, представляющая геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ $1+p^2+q^2=0$.

Для доказательства этого предложенія нужно показать, что дифференціальное уравненіе линій кривизны можетъ быть представлено въ видѣ

$$(dp\,dy-dq\,dx)(1+p^2+q^2)+(p\,dy-q\,dx)(p\,dp+q\,dq)=0.$$

[Дарбу, Annales de l'École normale; 1864.]

ДОПОЛНЕНІЯ.

1. Ирраціональныя числа. — Постепеннымъ обобщеніемъ мы переходимъ въ ариѳметикѣ отъ чиселъ натуральныхъ къ числамъ дробнымъ, къ нулю и къ числамъ относительнымъ (положительнымъ и отрицательнымъ). Но уже операція извлеченія корня приводитъ къ введенію новаго рода чиселъ, чиселъ ирраціональныхъ. Къ этимъ новымъ числамъ мы приходимъ также, примѣняя числа къ измѣренію конкретныхъ величинъ. Если мы имѣемъ, напримѣръ, двѣ соизмѣримыхъ длины A и B, то мѣрою B по отношенію къ A, или отношеніемъ B къ A, называется число $\frac{m}{n}$, представляющее частное чиселъ m и n, показывающихъ содержаніе общей мѣры въ длинахъ B и A. Если A и B — несоизмѣримы, то ихъ отношеніе не можетъ быть преставлено цѣлымъ или дробнымъ числомъ, и является числомъ другого рода — ирраціональнымъ. Хотя несоизмѣримое отношеніе $\frac{B}{A}$ не равно никакому раціональному числу, но существуетъ безчисленное множество раціональныхъ чиселъ, сколь угодно близкихъ къ $\frac{B}{A}$; чтобы получить такое число, достаточно замѣнить B какимъ-нибудь отрѣзкомъ C, отличающимся отъ B менѣе, чѣмъ на любой сколь угодно малый отрѣзокъ δ, но соизмѣримымъ съ A. На этомъ основанъ способъ приближеннаго вычисленія ирраціональныхъ чиселъ, какъ отношеній между несоизмѣримыми величинами, излагаемый въ элементарной геометріи.

Ирраціональныя числа можно также опредѣлить чисто ариѳметически, не прибѣгая къ разсмотрѣнію отношеній между конкретными величинами. Мы изложимъ здѣсь методъ Дедекинда (Dedekind).

Пусть мы какимъ-нибудь способомъ разбили всѣ раціональныя числа на два класса A и B, обладающіе тѣмъ свойствомъ,

что каждое число a класса A менѣе каждаго числа b класса B. Будемъ говорить, что мы этимъ установили въ области раціональныхъ чиселъ нѣкоторое сѣченіе. При этомъ могутъ представиться три случая.

1. Среди чиселъ класса A есть нѣкоторое число L, большее всѣхъ остальныхъ чиселъ того же класса.

2. Среди чиселъ класса B есть нѣкоторое число L, меньшее всѣхъ остальныхъ чиселъ того же класса.

3. Въ классѣ A нѣтъ ни одного числа, большаго всѣхъ остальныхъ чиселъ того же класса, и въ классѣ B нѣтъ ни одного числа, меньшаго всѣхъ остальныхъ чиселъ того же класса.

Въ первыхъ двухъ случаяхъ очевидно, что наше разбіеніе раціональныхъ чиселъ на два класса вполнѣ опредѣляетъ число L, обладающее тѣмъ свойствомъ, что всякое число, меньшее L, принадлежитъ къ классу A, а всякое число, большее L, принадлежитъ къ классу B. Такое число называется иногда само сѣченіемъ и обозначается символомъ (A, B). Въ третьемъ случаѣ не существуетъ раціональнаго числа, обладающаго предыдущими свойствами, но мы будемъ принимать, что и въ этомъ случаѣ наше разбіеніе опредѣляетъ нѣкоторое ирраціональное число L, большее всѣхъ чиселъ класса A и меньшее всѣхъ чиселъ класса B. Это число L опредѣляется такимъ образомъ ариѳметически, какъ нѣкоторое сѣченіе.

Докажемъ, что каждому числу, данному, какъ отношеніе двухъ величинъ, соотвѣтствуетъ нѣкоторое опредѣленное сѣченіе. Для этого будемъ изображать по правиламъ аналитической геометріи каждое число x точкою x' нѣкоторой прямой такъ, чтобы отношеніе $\frac{Ox'}{OK}$, гдѣ OK — единица мѣры, равнялось x. Пусть намъ дано число L. Тогда соотвѣтствующая точка L' на прямой распредѣлитъ всѣ раціональныя точки на два класса A', B', причемъ къ A' мы отнесемъ всѣ раціональныя точки a', лежащія влѣво отъ L', а къ классу B' — всѣ точки b', лежащія вправо отъ L'; если точка L' сама раціональна, то мы отнесемъ ее безразлично къ классу A' или къ классу B'. Очевидно, что при этомъ координата каждой точки a' будетъ меньше координаты каждой точки b', и мы получимъ нѣкоторое сѣченіе, опредѣляющее данное отношеніе L.

Докажемъ, обратно, что каждому данному сѣченію (A, B) соотвѣтствуетъ отношеніе нѣкоторыхъ двухъ отрѣзковъ. Пусть намъ дано сѣченіе (A, B). Разсмотримъ всѣ раціональныя числа a, принадлежащія къ классу A, и всѣ раціональныя числа b, принадлежащія къ классу B, и нанесемъ на прямой всѣ точки a', b', координаты которыхъ суть раціональныя числа a, b. Такъ какъ изъ самаго опредѣленія сѣченія слѣдуетъ, что каждое число a меньше каждаго числа b, то всѣ точки a' будутъ лежать по одну и ту же сторону относительно всѣхъ точекъ b'; напримѣръ, при обычномъ способѣ изображенія всѣ точки a' будутъ лежать лѣвѣе всѣхъ точекъ b'. Распредѣлимъ теперь всѣ точки прямой на два класса A', B' слѣдующимъ образомъ. Къ классу A' отнесемъ всѣ точки a' и всѣ точки, лежащія между точками a', а къ классу B' — всѣ остальныя точки прямой. При дальнѣйшемъ доказательствѣ мы будемъ пользоваться тѣмъ свойствомъ, что точки прямой образуютъ на ней непрерывный рядъ. Это свойство выражается различнымъ образомъ. Мы выразимъ его въ слѣдующей формѣ:

Если всѣ точки прямой распредѣлены на два класса такимъ образомъ, что между каждыми двумя точками одного и того же класса находятся только точки того же класса, то всегда существуетъ одна и только одна пограничная точка, т. е. такая точка, что каждыя двѣ точки, между которыми она лежитъ, принадлежатъ къ различнымъ классамъ.

Очевидно, что предыдущее распредѣленіе точекъ прямой на классы A', B' обладаетъ свойствомъ, требуемымъ этою аксіомою. Поэтому здѣсь существуетъ такая пограничная точка L'; пусть ей соотвѣтствуетъ число L. Если это число раціонально, то оно принадлежитъ или къ классу A, или къ классу B, и мы имѣемъ $a \leqq L < b$, или $a < L \leqq b$; если же число L — ирраціональное, то мы имѣемъ $a < L < b$. Такимъ образомъ, число L, опредѣленное, какъ отношеніе $\frac{OL'}{\overline{OK}}$, можетъ быть также опредѣлено и какъ сѣченіе (A, B). Отсюда слѣдуетъ, что сѣченія опредѣляютъ все непрерывное множество дѣйствительныхъ чиселъ.

2. Сѣченія въ области дѣйствительныхъ чиселъ. — Предположимъ теперь, что множество всѣхъ чиселъ, какъ раціональныхъ, такъ и ирраціональныхъ, разбито на два класса A и B, обладающихъ слѣдующими свойствами:

1. Всякое положительное или отрицательное число принадлежитъ къ одному изъ двухъ классовъ.

2. Любое число класса A меньше любого числа класса B.

Очевидно, что оба класса содержатъ безчисленное множество какъ раціональныхъ, такъ и ирраціональныхъ чиселъ. Покажемъ, что всегда существуетъ число L, обладающее слѣдующими двумя свойствами:

1. Всякое число, меньшее L, принадлежитъ къ классу A.

2. Всякое число, большее L, принадлежитъ къ классу B.

Это число L называется и въ этомъ случаѣ сѣченіемъ и, какъ мы увидимъ, будетъ или раціональнымъ, или ирраціональнымъ. Существованіе числа L есть слѣдствіе самаго понятія ирраціональнаго числа, какъ мы его ввели выше. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ въ обоихъ классахъ A и B только раціональныя числа. При этомъ множество всѣхъ раціональныхъ чиселъ разобьется на два класса (α) и (β), обладающихъ слѣдующими свойствами: 1) всякое раціональное число принадлежитъ къ одному изъ двухъ классовъ; 2) любое раціональное число класса (α) меньше любого раціональнаго числа класса (β). Здѣсь могутъ представиться три случая.

1. Въ классѣ (α) можетъ существовать раціональное число $\frac{p}{q}$, большее всѣхъ раціональныхъ чиселъ того же класса. Тогда это число $\frac{p}{q}$ и будетъ числомъ L. Въ самомъ дѣлѣ, всякое число, меньшее $\frac{p}{q}$, принадлежитъ къ классу A. Всякое число b, большее $\frac{p}{q}$, принадлежитъ къ классу B. Это очевидно, если b — раціонально; если же b ирраціонально, то мы возьмемъ число r, заключающееся между $\frac{p}{q}$ и b. Это раціональное число r принадлежитъ къ классу B; слѣдовательно, принадлежитъ къ классу B и число b.

2. Въ классѣ (β) можетъ существовать раціональное число $\frac{p'}{q'}$, меньшее всѣхъ раціональныхъ чиселъ того же класса. Какъ и въ первомъ случаѣ, можно доказать, что число $\frac{p'}{q'}$ будетъ числомъ L.

3. Наконецъ, можетъ быть, что въ классѣ (α) нѣтъ ни одного раціональнаго числа, бо́льшаго всѣхъ остальныхъ раціональныхъ чиселъ того же класса, и въ классѣ (β) нѣтъ ни одного раціональнаго числа, меньшаго всѣхъ остальныхъ раціональныхъ чиселъ того же класса. Тогда такое разбіеніе раціональныхъ чиселъ на два класса (α) и (β) опредѣляетъ, по предыдущему, нѣкоторое ирраціональное число m, большее всѣхъ раціональныхъ чиселъ класса (α) и меньшее всѣхъ раціональныхъ чиселъ класса (β). Въ этомъ случаѣ числомъ L будетъ именно это число m. Въ самомъ дѣлѣ, всякое раціональное число, меньшее m, будетъ принадлежать къ классу A, и всякое раціональное число, большее m, будетъ принадлежать къ классу B. Возьмемъ теперь какое-нибудь ирраціональное число $m' < m$, и пусть будетъ K раціональное число, заключающееся между m' и m; такъ какъ K принадлежитъ къ классу A, то будетъ принадлежать къ классу A и число m'. Точно такъ же можно было бы доказать, что всякое ирраціональное число, бо́льшее m, принадлежитъ къ классу B.

Самое сѣченіе L можетъ принадлежать какъ къ классу A, такъ и къ классу B. Такъ, въ первомъ случаѣ оно принадлежитъ къ классу A, во второмъ — къ классу B, а въ третьемъ оно можетъ принадлежать или къ классу A, или къ классу B. Мы видимъ здѣсь, что сѣченіе, произведенное въ множествѣ всѣхъ, какъ раціональныхъ, такъ и ирраціональныхъ чиселъ, не даетъ никакихъ новыхъ чиселъ.

3. Наибольшій изъ предѣловъ. — Мы уже нѣсколько разъ употребляли слово множество. Понятіе множества есть одно изъ тѣхъ, сущность которыхъ достаточно пояснить примѣрами. Всякое собраніе конечнаго или безконечнаго числа вещей составляетъ множество; таковы множество цѣлыхъ чиселъ, множество раціональныхъ чиселъ, множество прямыхъ на плоскости, и т. д. Понятіе о множествахъ, ограниченныхъ сверху или снизу, и о верхнихъ и нижнихъ границахъ было выяснено выше (стр. 147). Замѣтимъ только, что множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется просто ограниченнымъ множествомъ.

Пусть будетъ (E) нѣкоторое ограниченное множество. По отношенію къ этому множеству мы можемъ разбить всѣ, какъ положительныя, такъ и отрицательныя числа на два класса A' и B' слѣдующимъ образомъ. Мы будемъ говорить, что число x принадлежитъ къ классу A', если существуетъ безконечно много чиселъ множества (E), большихъ числа x. Въ против-

номъ случаѣ мы будемъ говорить, что число x принадлежитъ къ классу B'. Такъ какъ множество (E) — ограниченное и состоитъ изъ безконечнаго множества чиселъ, то очевидно, что существуютъ числа обоихъ классовъ, и что любое число класса A' меньше любого числа класса B'. Пусть будетъ Λ число, раздѣляющее оба класса A' и B'; слѣдуя Коши, это число называется наибольшимъ изъ предѣловъ множества (E). Пусть будетъ ε произвольное положительное число; по самому опредѣленію числа Λ очевидно, что число $\Lambda+\varepsilon$ принадлежитъ къ классу B', и число $\Lambda-\varepsilon$ къ классу A'. Слѣдовательно, всегда есть безконечно много чиселъ множества (E), заключающихся между $\Lambda-\varepsilon$ и $\Lambda+\varepsilon$, тогда какъ есть только конечное число (или нуль) чиселъ, большихъ $\Lambda+\varepsilon$.

Это число Λ связано съ однимъ важнымъ вопросомъ. Для простоты изложенія будемъ изображать каждое число a точкою съ абсциссою a на прямой $x'x$, и обозначимъ одною и тою же буквою какъ точку оси, такъ и ея абсциссу. Такимъ образомъ, всякому множеству (E) чиселъ соотвѣтствуетъ множество точекъ на прямой, или линейное множество. Точки ограниченнаго множества расположены всѣ на отрѣзкѣ оси конечной длины. Пусть дано линейное множество (E); если вблизи нѣкоторой точки l этого множества есть безконечно много точекъ множества, или, точнѣе, если существуетъ безконечно много точекъ множества, расположенныхъ между $l-\varepsilon$ и $l+\varepsilon$, гдѣ ε — произвольное положительное число, то точка l называется предѣльною точкою или точкою сгущенія.

Всякое ограниченное линейное множество, содержащее безконечно много точекъ, имѣетъ по крайней мѣрѣ одну предѣльную точку.

Въ самомъ дѣлѣ, по основному свойству числа Λ очевидно, что точка съ абсциссою Λ есть предѣльная точка. Кромѣ того, могутъ быть и другія предѣльныя точки; эти предѣльныя точки образуютъ новое множество $(E)'$, которое называется производнымъ множествомъ множества (E). Докажемъ, что верхняя граница M' множества $(E)'$ есть какъ разъ число Λ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ ε произвольное положительное число; существуетъ только конечное число точекъ множества (E), большихъ $M'+\varepsilon$, такъ какъ въ противномъ случаѣ эти точки образовали бы новое множество, наибольшій изъ предѣловъ котораго былъ бы больше M'. Съ другой стороны, такъ какъ есть по крайней мѣрѣ одна предѣльная точка съ абсциссою, большею $M'-\varepsilon$, то необходимо существуетъ безконечно много точекъ множества (E),

большихъ $M'-\varepsilon$. Точно также, нижняя граница m' производнаго множества называется наименьшимъ изъ предѣловъ множества (E).

Существованіе предѣльныхъ точекъ ограниченнаго множества, состоящаго изъ безконечнаго множества точекъ, можетъ быть доказано непосредственно (см. §§ 70, 120). Множество неограниченное, содержащее безконечное множество точекъ, можетъ не имѣть предѣльной точки; таково, напримѣръ, множество всѣхъ цѣлыхъ чиселъ. Но предѣльная точка существуетъ во всякомъ случаѣ, если только на какомъ-нибудь отрѣзкѣ конечной длины находится безконечно много точекъ множества; напримѣръ, множество точекъ, соотвѣтствующихъ числамъ 10^n, гдѣ n принимаетъ всѣ цѣлыя положительныя и отрицательныя значенія, имѣетъ предѣльную точку въ началѣ координатъ.

4. Функціи. — Современное опредѣленіе слова функція принадлежитъ Коши и Риману. Перемѣнное y называется функціею x, $y=f(x)$, если каждому значенію x соотвѣтствуетъ нѣкоторое значеніе y. Пусть будутъ a и b постоянныя числа $(a<b)$; если всякому числу x, заключающемуся между a и b, соотвѣтствуетъ нѣкоторое число y, то говорятъ, что функція $f(x)$ опредѣлена въ промежуткѣ (a, b). Разность $a-b$ называется амплитудою промежутка, числа a и b — предѣлами, или границами. Относительно чиселъ a и b можно сдѣлать нѣсколько допущеній. Мы можемъ разсматривать эти числа, какъ принадлежащія къ промежутку (a, b), который въ этомъ случаѣ называется закрытымъ. Можно также разсматривать одно изъ этихъ чиселъ, или и оба, какъ не принадлежащія къ промежутку (a, b); тогда промежутокъ (a, b) называется открытымъ. Напримѣръ, совокупность значеній x, удовлетворяющихъ условіямъ $0 \leqq x \leqq 1$, образуетъ закрытый промежутокъ; напротивъ, взявъ совокупность значеній x, удовлетворяющихъ условіямъ $0<x<1$ или $0<x\leqq 1$, мы получимъ открытый промежутокъ.

Пусть будетъ (E) совокупность значеній функціи $f(x)$, опредѣленной въ промежуткѣ (a, b); если это множество (E) — ограниченное, то функція $f(x)$ называется ограниченною въ промежуткѣ (a, b). Верхняя и нижняя границы множества (E), M и m, называются также верхними и нижними границами функціи $f(x)$; разность $\Delta=M-m$ называется колебаніемъ функціи въ промежуткѣ

(a, b). Соотношеніе $y=f(x)$ выражаетъ здѣсь зависимость между двумя ограниченными множествами: множествомъ значеній перемѣннаго x и множествомъ значеній функціи y. Напомнимъ, что для того чтобы функція $f(x)$ была ограниченною въ промежуткѣ (a, b), не достаточно, чтобы при всякомъ значеніи x въ этомъ промежуткѣ она имѣла конечное значеніе (§ 69).

Пусть будетъ $f(x)$ функція перемѣннаго x, опредѣленная вблизи нѣкоторой точки x_0, но которая можетъ быть и не опредѣлена въ самой точкѣ x_0. Если для всякаго сколь угодно малаго положительнаго числа ε можно найти такое положительное число η, чтобы было $|f(x)-l|<\varepsilon$ при $0\leqq|x-x_0|<\eta$, то функція $f(x)$ имѣетъ въ точкѣ x_0 предѣлъ l. Функція можетъ имѣть въ какой-нибудь точкѣ опредѣленный предѣлъ, не будучи опредѣленною въ этой точкѣ. Такъ, функціи $\frac{x^2}{x}$, $x\sin\frac{1}{x}$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ имѣютъ въ точкѣ $x=0$ своими предѣлами нуль, а между тѣмъ для значенія $x=0$ всѣ эти функціи остаются неопредѣленными, если только мы не введемъ какого-нибудь дополнительнаго условія, напримѣръ, не потребуемъ, чтобы онѣ сохраняли въ началѣ координатъ непрерывность. Если функція опредѣлена въ какой-нибудь точкѣ, то ея значеніе въ этой точкѣ можетъ и не совпадать съ ея предѣломъ въ этой точкѣ; это будетъ имѣть мѣсто во всякой точкѣ, въ которой функція не будетъ непрерывною.

5. Непрерывныя функціи. Современное опредѣленіе непрерывности, какъ оно изложено въ § 3, принадлежитъ Коши. Для геометровъ, современныхъ Ньютону и Лейбницу, функція была непрерывною, если ее можно было выразить при помощи символовъ привычныхъ дѣйствій, каковы дѣйствія ариѳметическія, тригонометрическія, логариѳмическія. Этотъ родъ непрерывности извѣстенъ подъ именемъ Эйлеровой непрерывности. Въ § 2 указанъ методъ графическаго представленія непрерывной функціи. Но должно замѣтить, что не всякая непрерывная функція допускаетъ такое графическое представленіе. Въ самомъ дѣлѣ, выше было доказано (§ 200), что существуютъ непрерывныя функціи, имѣющія безконечное множество maxima и minima во всякомъ промежуткѣ. Но мы, очевидно, не можемъ вообразить непрерывную линію, имѣющую безконечное множество колебаній между всякими двумя сколь угодно близкими ординатами. Это показываетъ, что графическое представленіе, являясь прекраснымъ сред-

ствомъ при изысканіи свойствъ непрерывныхъ функцій, не достаточно для строгаго доказательства этихъ свойствъ. Поэтому доказательства теоремъ о непрерывныхъ функціяхъ должны быть даны исключительно изъ самаго опредѣленія непрерывности; нѣкоторыя изъ такихъ теоремъ были даны въ § 70.

6. Прерывныя функціи. — Разсмотримъ функцію $f(x)$, ограниченную и опредѣленную въ промежуткѣ (a, b). Выдѣлимъ изъ промежутка (a, b) множество E, и пусть будетъ x_0 одна изъ предѣльныхъ точекъ этого множества. Множеству значеній x, заключающихся въ промежуткѣ $(x_0, x_0+\varepsilon_i;\ \varepsilon_i>0)$, будетъ соотвѣтствовать ограниченное множество значеній функціи съ верхнею границею M_i и нижнею границею m_i. При приближеніи ε_i къ нулю числа M_i и m_i стремятся соотвѣтственно къ нѣкоторымъ предѣламъ M_π и m_π, которые называются верхнимъ и нижнимъ предѣломъ функціи справа отъ точки x_0; ихъ разность $\omega_\pi=M_\pi-m_\pi$ называется колебаніемъ функціи справа отъ точки x_0. Если оба предѣла M_π и m_π между собою равны, то этотъ общій предѣлъ обозначается, слѣдуя Дирикле, черезъ $f(x_0+0)$. Разсматривая промежутки $(x_0,\ x_0-\varepsilon_i;\ \varepsilon_i>0)$, мы точно такъ же придемъ къ опредѣленію верхняго M_λ и нижняго m_λ предѣловъ функціи слѣва отъ точки x_0. Разность $\omega_\lambda=M_\lambda-m_\lambda$ называется колебаніемъ функціи слѣва отъ точки x_0; если M_λ и m_λ между собою равны, то этотъ общій предѣлъ обозначается черезъ $f(x_0-0)$*).

Если въ какой-нибудь точкѣ x_0 будетъ

$$M_\pi=m_\pi=M_\lambda=m_\lambda=f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0),$$

то функція $f(x)$ называется непрерывною въ точкѣ x_0. Всякая функція, которая не будетъ непрерывною въ точкѣ x_0, называется прерывною въ точкѣ x_0, а сама точка x_0 — точкою прерывности.

Предположимъ, что предѣлы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ существуютъ, т.-е. что $\omega_\pi=\omega_\lambda=0$. Если эти оба предѣла $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ между собою равны, то точка x_0 можетъ быть точ-

*) Иногда вмѣсто промежутковъ $(x_0,\ x_0+\varepsilon_i)$ и $(x_0,\ x_0-\varepsilon_i)$ разсматриваются промежутки $(x_0+\varepsilon_i,\ x_0-\varepsilon_i)$. Тогда предѣлы M и m, къ которымъ стремятся верхнія M_i и нижнія m_i границы значеній функціи въ промежуткахъ $(x_0+\varepsilon_i,\ x_0-\varepsilon_i)$ при приближеніи ε_i къ нулю называются верхнимъ и нижнимъ предѣломъ функціи въ точкѣ x_0, а разность $\omega=M-m$ колебаніемъ функціи въ точкѣ x_0.

кою прерывности только въ томъ случаѣ, если этотъ общій предѣлъ отличенъ отъ $f(x_0)$; но въ этомъ случаѣ достаточно было бы перемѣнить значеніе функціи въ точкѣ x_0, чтобы уничтожить прерывность. Такая прерывность называется устранимою или несущественною. Напримѣръ, для функціи $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ мы имѣемъ $f(+0)=+1$, $f(-0)=+1$, $f(0)$—неопредѣленно; но, опредѣляя эту функцію условіями

$$f(x)=\frac{\sin x}{x} \quad \text{при} \quad x\gtrless 0,\ f(0)=+1,$$

мы получимъ функцію, непрерывную въ началѣ координатъ. Но если при всякомъ принятомъ значеніи $f(x_0)$ оба числа $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ между собою различны, то точка x_0 необходимо есть точка существенной прерывности и называется точкою прерывности перваго рода. Если въ точкѣ прерывности перваго рода мы имѣемъ

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

то такая точка называется правильною; замѣтимъ, что послѣднее равенство имѣетъ мѣсто также для всякой точки x_0, въ которой функція непрерывна. Разсмотримъ, напримѣръ, функцію $f(x)$, представляемую суммою сходящагося ряда

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{1-x}{1+x}\right)+\ldots+\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}-\frac{1-x^{n-1}}{1+x^{n-1}}\right)+\ldots;$$

мы имѣемъ

$$f(1+0)=-1, \quad f(1-0)=+1, \quad f(1)=0.$$

Слѣдовательно, функція $f(x)$ прерывна при $x=1$, и точка $x=1$ есть точка прерывности перваго рода, и притомъ правильная. Правильныя точки обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ. Если $f(x)$ имѣетъ въ x_0 правильную точку прерывности, то функція $\varphi(t)$, опредѣляемая равенствомъ

$$\varphi(t)=f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2f(x_0),$$

непрерывна при $t=0$.

Можетъ случиться, что мы будемъ имѣть

$$f(x_0)=f(x_0+0)\gtrless f(x_0-0);$$

такая функція называется непрерывною справа отъ точки x_0, или полунепрерывною вверхъ отъ x_0; если же будетъ $f(x_0)=f(x_0-0)\lesseqgtr f(x_0+0)$, то функція называется непрерывною слѣва отъ x_0, или полунепрерывною внизъ отъ x_0. Какъ примѣръ такихъ функцій, разсмотримъ функціи

$$f(x_0)=x\lim_{n=\infty}\frac{nx^n-1}{nx^n+1},\quad \varphi(x)=\lim_{n=\infty}\frac{x^n-n}{x^n+n};$$

мы имѣемъ

$$f(1-0)=-1,\quad f(1)=f(1+0)=+1;$$
$$\varphi(1-0)=\varphi(1)=-1,\quad \varphi(1+0)=+1.$$

Слѣдовательно, функція $f(x)$ непрерывна справа, а функція $\varphi(x)$ — слѣва отъ $x=1$.

Если, по крайней мѣрѣ, одно изъ колебаній функціи $\omega_\pi, \omega_\lambda$ въ точкѣ x_0 отлично отъ нуля, то точка x_0 называется точкою прерывности второго рода. Замѣтимъ, что въ случаѣ неограниченной функціи колебанія функціи ω_π, ω_λ въ точкѣ x_0, или и предѣлы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ могутъ быть безконечны; въ этомъ случаѣ точка x_0 называется также точкою прерывности второго рода. Разсмотримъ, напримѣръ, функцію $y=\sin\frac{1}{x}$. При приближеніи x къ нулю какъ со стороны положительныхъ x, такъ и со стороны отрицательныхъ x, $\frac{1}{x}$ неограниченно возрастаетъ, и y не стремится ни къ какому предѣлу, хотя и содержится постоянно между -1 и $+1$; слѣдовательно, здѣсь $\omega_\pi=\omega_\lambda=2$. Уравненіе $\sin\frac{1}{x}=A$, гдѣ $|A|<1$, имѣетъ безконечное множество корней, заключающихся между 0 и ε, какъ бы ε ни было мало. Каково бы ни было принятое значеніе для y при $x=0$, для функціи y точка $x=0$ есть точка прерывности второго рода, и мы имѣемъ въ этой точкѣ существенную прерывность.

Въ предыдущихъ примѣрахъ изъ аналитическаго выраженія функціи непосредственно видно, что̀ будетъ съ функціею въ точкѣ прерывности. Но это бываетъ не всегда такъ. Предположимъ, для опредѣленности, что функція $F(x)$ дана своимъ аналитическимъ выраженіемъ для всякаго значенія x, большаго нѣкотораго постояннаго числа a, и пусть требуется узнать, стремится ли $F(x)$ къ предѣлу при приближеніи x къ $+\infty$.

Если аналитическое выраженіе функціи $F(x)$ не позволяетъ это узнать непосредственно, то въ большинствѣ случаевъ можно рѣшить вопросъ, воспользовавшись слѣдующимъ предложеніемъ.

Для того чтобы при приближеніи x къ $+\infty$ функція $F(x)$ стремилась къ нѣкоторому предѣлу, необходимо и достаточно, чтобы разность $F(p)-F(q)$ стремилась къ нулю, когда оба числа p и q неограниченно возрастаютъ независимо другъ отъ друга.

Выражаясь точнѣе, для того чтобы функція $F(x)$ имѣла предѣлъ, необходимо и достаточно, чтобы для всякаго положительнаго числа ε можно было найти такое соотвѣтствующее число A, чтобы абсолютное значеніе разности $F(p)-F(q)$ было меньше ε, когда каждое изъ чиселъ p и q больше или равно A.

Это условіе необходимо. Если $F(x)$ имѣетъ предѣлъ L, то есть такое число A, что при всякомъ значеніи $x \geqq A$ абсолютное значеніе разности $F(x)-L$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Слѣдовательно, если оба числа p и q будутъ больше A, то абсолютное значеніе разности $F(p)-F(q)$ будетъ меньше ε.

Это условіе — достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ послѣдовательность

$$F(a),\quad F(a+1),\ \ldots,\quad F(a+n),\ \ldots,$$

гдѣ n — цѣлое положительное число. Эта послѣдовательность — сходящаяся, такъ какъ при всякомъ положительномъ числѣ k абсолютное значеніе разности $F(a+n+k)-F(a+n)$ будетъ меньше ε, если $a+n$ больше A (§ 156). Слѣдовательно, при неограниченномъ возрастаніи цѣлаго числа n число $F(a+n)$ стремится къ нѣкоторому предѣлу L. Разсмотримъ теперь какое-нибудь число x, и пусть будетъ n такое цѣлое положительное число, что $x \geqq a+n > x-1$. Мы имѣемъ

$$F(x)-L=[F(x)-F(a+n)]+[F(a+n)-L];$$

при неограниченномъ возрастаніи x количество $a+n$ также неограниченно возрастаетъ, и обѣ разности, стоящія въ правой части предыдущаго равенства, стремятся къ нулю; слѣдовательно, $F(x)$ имѣетъ предѣломъ L.

Точно такъ же можно было бы доказать, что для того чтобы функція $F(x)$ стремилась къ предѣлу, когда x стремится къ a, оставаясь, напримѣръ, больше a, необходимо и достаточно, чтобы разность $F(p)-F(q)$ стремилась къ нулю, когда оба числа p и q, оставаясь большими a, независимо одно отъ другого стремятся къ a.

7. Монотонныя функціи. — Функція $f(x)$, опредѣленная въ промежуткѣ (a, b), называется монотонною (monotone) въ этомъ промежуткѣ, если произведеніе

$$(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]$$

сохраняетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ для всякихъ двухъ чиселъ x_1 и x_2, принадлежащихъ къ разсматриваемому промежутку. Функція называется возрастающею, если при всякихъ значеніяхъ x_1 и x_2 это произведеніе положительно или равно нулю; если же при всякихъ значеніяхъ x_1 и x_2 это произведеніе отрицательно или равно нулю, то функція называется убывающею.

Если $x_2>x_1$, то для возрастающей функціи разность $f(x_2)-f(x_1)$ положительна или равна нулю, а для убывающей функціи — отрицательна или равна нулю. Если монотонная функція имѣетъ одно и то же значеніе, какъ при $x=x_1$, такъ и при $x=x_2$, то она сохраняетъ то же самое значеніе во всемъ промежуткѣ (x_1, x_2). Монотонная функція можетъ имѣть въ промежуткѣ (a, b) любое число точекъ прерывности, но всѣ эти точки прерывности будутъ перваго рода. Разсмотримъ, напримѣръ, возрастающую функцію, и пусть будетъ x_0 точка прерывности. Когда ε, оставаясь положительнымъ, стремится къ нулю, то $f(x_0-\varepsilon)$ не можетъ убывать. Сверхъ того, постоянно $f(x_0-\varepsilon)\leqq f(b)$. Слѣдовательно, $f(x_0-\varepsilon)$ имѣетъ предѣлъ $f(x_0-0)$ (§ 1). Точно такъ же можно доказать, что $f(x_0+\varepsilon)$ имѣетъ предѣлъ $f(x_0+0)$. Такъ какъ, кромѣ того, всегда имѣемъ $f(x_0-\varepsilon)\leqq f(x_0+\varepsilon)$, то отсюда слѣдуетъ, что $f(x_0-0)\leqq f(x_0+0)$. Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то тѣмъ самымъ $f(x_0)=f(x_0-0)$, и въ точкѣ x_0 функція непрерывна. Но если $f(x_0-0)$ меньше $f(x_0+0)$, то $f(x_0)$ можетъ быть равно какому угодно числу, заключающемуся между $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$.

Если ограниченная функція имѣетъ въ разсматриваемомъ промежуткѣ (a, b) только конечное число точекъ прерывности, и если этотъ промежутокъ можетъ быть разбитъ на конечное число частичныхъ промежутковъ, въ каждомъ изъ кото-

рыхъ функція будетъ монотонною, то говорятъ, что эта функція удовлетворяетъ въ промежуткѣ (a, b) условіямъ Дирикле (§ 195). Очевидно, что такая функція имѣетъ точки непрерывности только перваго рода.

8. Функціи съ ограниченнымъ измѣненіемъ. — Пусть будетъ $f(x)$ функція, ограниченная въ промежуткѣ (a, b), гдѣ $a<b$. Разобьемъ этотъ промежутокъ на частичные промежутки возрастающими числами $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$,

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots.<x_{n-1}<x_n=b,$$

и положимъ

$$v=|f(x_1)-f(a)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\ldots+|f(b)-f(x_{n-1})|.$$

Такимъ образомъ, каждому разбіенію разсматриваемаго промежутка будетъ соотвѣтствовать такое число $v\geqq 0$. Число v называется измѣненіемъ функціи $f(x)$ для промежутка (a, b). Если множество чиселъ v, соотвѣтствующихъ всѣмъ возможнымъ разбіеніямъ промежутка (a, b), есть ограниченное множество, то функція $f(x)$ называется функціею съ ограниченнымъ измѣненіемъ въ промежуткѣ (a, b). Верхняя граница V чиселъ v называется полнымъ измѣненіемъ функціи $f(x)$ въ этомъ промежуткѣ. Введеніе этого важнаго класса функцій принадлежитъ Жордану.

Очевидно, что всякая монотонная функція есть функція съ ограниченнымъ измѣненіемъ, такъ какъ здѣсь всѣ разности $f(x_i)-f(x_{i-1})$ имѣютъ одинаковый знакъ. Изъ опредѣленія функцій съ ограниченнымъ измѣненіемъ слѣдуетъ также, что сумма двухъ функцій съ ограниченнымъ измѣненіемъ есть также функція съ ограниченнымъ измѣненіемъ. Если $f(x)$ есть функція съ ограниченнымъ измѣненіемъ въ промежуткѣ (a, b), то она будетъ таковою во всякомъ промежуткѣ (a_1, b_1), заключающемся въ первомъ, и, въ частности, въ промежуткѣ (a, x), гдѣ x есть произвольное число, заключающееся между a и b.

Пусть будетъ p сумма тѣхъ изъ разностей $f(x_i)-f(x_{i-1})$, которыя положительны, а $(-n)$ — сумма отрицательныхъ разностей. Очевидно,

$$v=p+n, \quad f(b)-f(a)=p-n,$$

и, слѣдовательно,

$$v=2p+f(a)-f(b), \quad v=2n+f(b)-f(a)$$

Если функція $f(x)$ съ ограниченнымъ измѣненіемъ въ промежуткѣ (a, b), то числа p и n, соотвѣтствующія всевозможнымъ разбіеніямъ этого промежутка, очевидно, образуютъ также два ограниченныхъ множества. Пусть будутъ P и N верхнія границы этихъ множествъ; числа P и N называются полнымъ положительнымъ и полнымъ отрицательнымъ измѣненіемъ функціи въ промежуткѣ (a, b). На основаніи предыдущаго, между числами V, P, N существуютъ соотношенія

$$V=2P+f(a)-f(b), \quad V=2N+f(b)-f(a).$$

Обозначимъ черезъ $V(x)$, $P(x)$, $N(x)$ вышеуказанныя полныя измѣненія функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, x), гдѣ x заключается между a и b. Функціи $V(x)$, $N(x)$, $P(x)$ по самому ихъ опредѣленію необходимо функціи возрастающія; въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что при возрастаніи x функціи $P(x)$ и $N(x)$ не могутъ убывать. Между функціями $f(x)$, $V(x)$, $P(x)$, $N(x)$ при всякомъ x всегда существуютъ два соотношенія

$$V(x)=2P(x)+f(a)-f(x), \quad V(x)=2N(x)+f(x)-f(a),$$

откуда

$$f(x)=f(a)+P(x)-N(x).$$

Такъ какъ обѣ функціи $f(a)+P(x)$ и $N(x)$ — возрастающія, то отсюда слѣдуетъ, что всякая функція съ ограниченнымъ измѣненіемъ есть разность двухъ возрастающихъ функцій. Это свойство можно было бы принять за опредѣленіе функцій съ ограниченнымъ измѣненіемъ; въ самомъ дѣлѣ, разность двухъ возрастающихъ функцій равна суммѣ возрастающей и убывающей функціи, т.-е. суммѣ двухъ функцій съ ограниченнымъ измѣненіемъ. Слѣдовательно, эта сумма сама есть функція съ ограниченнымъ измѣненіемъ.

Если къ обѣимъ возрастающимъ функціямъ $P(x)$, $N(x)$ мы прибавимъ какую-нибудь возрастающую функцію $\varphi(x)$, то получимъ новыя функціи $P_1(x)$, $N_1(x)$, — также возрастающія, и ихъ разность будетъ равна разности первоначальныхъ функцій $P(x)$ и $N(x)$. Такимъ образомъ, всякую функцію съ ограниченнымъ измѣненіемъ можно представить безконечно разнообразно, какъ разность двухъ возрастающихъ функцій. Такъ какъ всякая монотонная функція имѣетъ точки прерывности только перваго рода, то то же имѣетъ мѣсто и по отношенію къ суммѣ двухъ монотонныхъ функцій; слѣдовательно,

всякая функція $f(x)$ съ ограниченнымъ измѣненіемъ имѣетъ точки прерывности только перваго рода.

Какъ примѣръ функціи съ неограниченнымъ измѣненіемъ, разсмотримъ функцію $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, принимая $f(0)=0$. Легко видѣть, что полное измѣненіе этой функціи въ промежуткѣ, заключающемся между значеніями, обратными числамъ $\frac{\pi}{2}$ и $n\pi+\frac{\pi}{2}$, равно $2n$. Слѣдовательно, въ промежуткѣ $\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ эта функція — съ безграничнымъ измѣненіемъ, что слѣдуетъ также и изъ того, что для этой функціи $x=0$ есть точка прерывности второго рода.

Разсмотримъ теперь, въ частности, функцію $f(x)$ съ ограниченнымъ измѣненіемъ въ промежуткѣ (a, b), непрерывную въ этомъ промежуткѣ*). Разобьемъ промежутокъ (a, b) на части точками дѣленія $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, и пусть будетъ v измѣненіе функціи въ разсматриваемомъ промежуткѣ, соотвѣтствующее такому разбіенію.

Если число n неограниченно возрастаетъ такимъ образомъ, что наибольшее значеніе λ разностей $x_i - x_{i-1}$ стремится къ нулю, то число v имѣетъ предѣломъ полное измѣненіе V.

Доказательство этой теоремы основывается на слѣдующемъ замѣчаніи. Предположимъ, что каждый изъ промежутковъ (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots$ разбитъ на болѣе мелкіе промежутки новыми точками дѣленія, и пусть будетъ

$$a, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, \ldots, y_{l-1}, x_2, y_{l+1}, \ldots, b$$

получившаяся новая послѣдовательность. Обозначимъ черезъ v' число, аналогичное b, для этого новаго разбіенія. Мы, очевидно, имѣемъ

$$\begin{aligned}
|f(x_1)-f(a)| &\leqq |f(x_1)-f(y_{k-1})|+\ldots+|f(y_1)-f(a)|,\\
|f(x_2)-f(x_1)| &\leqq |f(x_2)-f(y_{l-1})|+\ldots+|f(y_{k+1})-f(x_1)|,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

и, слѣдовательно, $v \leqq v'$.

---

*) Всякая непрерывная функція не есть непремѣнно функція съ ограниченнымъ измѣненіемъ. Такъ, непрерывная функція Вейерштрасса, приведенная въ § 200, — съ неограниченнымъ измѣненіемъ во всякомъ промежуткѣ, функція $x\sin\frac{1}{x}$ — вблизи начала координатъ.

Пусть будетъ V верхняя граница чиселъ v, и ε — нѣкоторое положительное число. По самому опредѣленію числа V, существуетъ такая послѣдовательность возрастающихъ чиселъ

$$a<a_1<a_2<\ldots<a_{p-1}<b,$$

что число v_0, опредѣляемое равенствомъ

$$v_0=|f(a_1)-f(a)|+|f(a_2)-f(a_1)|+\ldots+|f(b)-f(a_{p-1})|,$$

будетъ больше $V-\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть будетъ λ положительное число, меньшее всѣхъ разностей a_1-a, a_2-a_1, $\ldots$, $b-a_{p-1}$. Разсмотримъ какое-нибудь разбіеніе промежутка (a, b) на частичные промежутки, меньшіе λ, возрастающими числами a, x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1}, b, и пусть будетъ v соотвѣтствующее измѣненіе функціи. Расположимъ теперь всѣ числа x_i и a_j въ возрастающемъ порядкѣ; мы получимъ новое разбіеніе промежутка (a, b), послѣдовательное къ двумъ первымъ, и, на основаніи предыдущаго замѣчанія, соотвѣтствующее этому новому разбіенію измѣненіе функціи v' будетъ не меньше v_0 и v.

Найдемъ верхній предѣлъ разности $v'-v$. Мы можемъ перейти отъ разбіенія, которое даетъ v, къ разбіенію, которое даетъ v', разбивая точками a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{p-1} тѣ промежутки (x_{i-1}, x_i), внутри которыхъ содержится какая-нибудь изъ этихъ точекъ a_k, причемъ очевидно, что въ каждомъ изъ промежутковъ (x_{i-1}, x_i) можетъ заключаться не болѣе одной точки a_k. Полное число промежутковъ (x_{i-1}, x_i), которые можно будетъ разбить такимъ образомъ, самое большее равно $p-1$. Мы имѣемъ

$$v'-v=\Sigma[|f(x_i)-f(a_k)|+|f(a_k)-f(x_{i-1})|-|f(x_i)-f(x_{i-1})|],$$

причемъ знакъ суммы распространяется на всѣ тѣ промежутки (x_{i-1}, x_i), внутри которыхъ содержится одна изъ точекъ a_k. Пусть будетъ ω наибольшее значеніе колебанія функціи $f(x)$ въ каждомъ изъ частичныхъ промежутковъ (a, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$. Очевидно, что разность

$$|f(x_i)-f(a_k)|+|f(a_k)-f(x_{i-1})|-|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

не можетъ быть больше, чѣмъ 2ω, и, слѣдовательно, разность $v'-v$ не можетъ быть больше, чѣмъ $2(p-1)\omega$. Такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна, то можно найти такое положительное число η, чтобы во всякомъ частичномъ промежуткѣ съ ам-

плитудою, меньшею η, колебаніе функціи $f(x)$ было меньше $\frac{\varepsilon}{4(p-1)}$; слѣдовательно, если наибольшее значеніе разностей $x_1-a_1, x_2-x_1, \ldots, b-x_{n-1}$ будетъ меньше η, то мы будемъ имѣть $v'-v<\frac{\varepsilon}{2}$. Сверхъ того, мы можемъ представить разность $V-v$ въ видѣ

$$V-v=V-v_0+(v'-v)-(v'-v_0),$$

и, слѣдовательно, получимъ $V-v<\varepsilon$. Такъ какъ v не можетъ быть больше V, то отсюда слѣдуетъ, что v имѣетъ предѣломъ V.

Пользуясь этою теоремою, можно доказать, что функція $V(x)$, представляющая полное измѣненіе функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, x), есть непрерывная функція отъ x.

Пусть будетъ x_0 значеніе перемѣннаго x, заключающееся между a и b, и $a, y_1, y_2, \ldots, y_n, x_0$ — нѣкоторая послѣдовательность возрастающихъ чиселъ. $V(x_0)$ есть предѣлъ измѣненія v

$$v=|f(y_1)-f(a)|+|f(y_2)-f(y_1)|+\ldots \\ +|f(y_n)-f(y_{n-1})|+|f(x_0)-f(y_n)|.$$

Сумма всѣхъ членовъ, кромѣ послѣдняго, не можетъ быть больше $V(y_n)$; слѣдовательно, она не больше $V(x_0-0)$, такъ какъ $V(x)$ есть возрастающая функція. Такимъ образомъ, мы имѣемъ

$$v\leqq V(x_0-0)+|f(x_0)-f(y_n)|.$$

Такъ какъ функція $f(x)$ непрерывна, то разность $f(x_0)-f(y_n)$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ $|x_0-y_n|$; слѣдовательно, предѣлъ $V(x_0)$ измѣненія v не можетъ быть больше $V(x_0-0)$, а, такъ какъ функція $V(x)$ возрастающая, то необходимо $V(x_0)=V(x_0-0)$.

Чтобы доказать, что точно такъ же $V(x_0)=V(x_0+0)$, положимъ

$$b-x=y, \quad V_1(y)=V(b)-V(x);$$

$V_1(y)$ представляетъ полное измѣненіе функціи $f(b-y)$ въ промежуткѣ $(0, y)$. На основаніи предыдущаго имѣемъ

$$V_1(y_0)=V_1(y_0-0),$$

и, слѣдовательно, $V(x_0)=V(x_0+0)$.

Такъ какъ функціи $V(x)$ и $f(x)$ непрерывны, то будутъ также непрерывными и функціи

$$P(x)=\frac{V(x)+f(x)-f(a)}{2},\quad N(x)=\frac{V(x)-f(x)+f(a)}{2}.$$

Слѣдовательно, **всякая непрерывная функція съ ограниченнымъ измѣненіемъ есть разность двухъ непрерывныхъ возрастающихъ функцій.**

Примѣръ. — Если непрерывная функція $f(x)$ имѣетъ въ нѣкоторомъ промежуткѣ (a, b) только конечное число maxima и minima, то очевидно, что она будетъ въ этомъ промежуткѣ функціею съ ограниченнымъ измѣненіемъ. Разсмотримъ, напримѣръ, функцію $f(x)$, возрастающую отъ a до a_1, затѣмъ убывающую отъ a_1 и a_2, и снова возрастающую отъ a_2 до b. Возьмемъ двѣ функціи $f_1(x)$, $f_2(x)$, опредѣленныя слѣдующимъ образомъ:

1. Въ промежуткѣ (a, a_1): $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=0$;
2. Въ промежуткѣ (a_1, a_2): $f_1(x)=f(a_1)$, $f_2(x)=f(a_1)-f(x)$;
3. Въ промежуткѣ (a_2, b): $\begin{cases} f_1(x)=f(x)-f(a_2)+f(a_1), \\ f_2(x)=f(a_1)-f(a_2). \end{cases}$

Ясно, что обѣ функціи $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и возрастаютъ во всемъ промежуткѣ (a, b), и ихъ разность равна $f(x)$. Точно такъ же можно было бы поступить для разложенія $f(x)$ на разность двухъ непрерывныхъ возрастающихъ функцій и при любомъ числѣ maxima и minima въ промежуткѣ (a, b).

Вообще, пусть будетъ $f(x)$ такая функція, что мы можемъ разбить промежутокъ (a, b) на p частичныхъ промежутковъ, въ каждомъ изъ которыхъ функція будетъ монотонною; кромѣ того, предположимъ, что функція $f(x)$ имѣетъ только конечное число точекъ прерывности, и притомъ правильныхъ. Съ помощью предыдущаго пріема можно представить эту функцію $f(x)$, какъ разность двухъ возрастающихъ функцій, имѣющихъ только правильныя точки прерывности.

9. Обобщеніе понятія производной. — Разсмотрѣніе верхнихъ и нижнихъ предѣловъ функціи справа и слѣва отъ какой-нибудь точки позволяетъ расширить понятіе обыкновенной производной замѣною его понятіемъ **производнаго числа**, существующаго какъ для непрерывныхъ, такъ и для прерывныхъ функцій, вполнѣ опредѣленныхъ вблизи нѣкоторой точки x.

Производными числами функціи $f(x)$ въ точкѣ x называются верхніе и нижніе предѣлы, къ кото-

рымъ стремятся верхнія и нижнія границы значеній отношенія $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при пр'ближеніи h къ нулю какъ со стороны положительныхъ h, такъ и со стороны отрицательныхъ h.

Такимъ образомъ, всякая вполнѣ опредѣленная функція имѣетъ во всякой точкѣ четыре производныхъ числа, конечныхъ или безконечныхъ, равныхъ или неравныхъ. Если два производныхъ числа, соотвѣтствующихъ положительнымъ h, равны между собою, то говорятъ, что функція $f(x)$ имѣетъ производную справа отъ x. Такъ же опредѣляется производная слѣва отъ x. Если всѣ четыре производныхъ числа конечны и между собою равны, то говорятъ, что функція имѣетъ производную въ точкѣ x. Напримѣръ, функція $f(x)$, опредѣляемая равенствами

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x} \text{ при } x\gtrless 0 \quad \text{и} \quad f(0)=0,$$

имѣетъ въ началѣ координатъ производную справа $+1$, и производную слѣва -1.

Если въ нѣкоторомъ промежуткѣ (a, b) производныя числа непрерывной функціи $f(x)$ составляютъ ограниченное множество, то можно доказать, что такая функція удовлетворяетъ въ этомъ промежуткѣ условію

$$|f(x_2)-f(x_1)|<K|x_2-x_1|,$$

гдѣ K — нѣкоторое положительное число, а x_1, x_2 — какія-нибудь числа, содержащіяся въ промежуткѣ (a, b). Это условіе называется условіемъ Липшица (Lipschitz); оно имѣетъ весьма большое значеніе въ теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Точно такъ же можетъ быть обобщена и производная второго порядка. Разсмотримъ отношеніе

$$\frac{\Delta^2 f}{h^2}=\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2};$$

если обыкновенная производная второго порядка существуетъ, то она равна предѣлу этого отношенія при $h=0$; но можетъ случиться, что производной второго порядка не существуетъ, тогда какъ предыдущее отношеніе тѣмъ не менѣе имѣетъ предѣлъ. Этотъ предѣлъ

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2},$$

когда онъ существуетъ, называется обобщенною производною второго порядка (ср. § 13). Шварцу принадлежитъ слѣдующая теорема, имѣющая приложеніе при изученіи тригонометрическихъ рядовъ*).

Если $f(x)$ есть непрерывная функція въ промежуткѣ (a, b) и притомъ такая, что при всякомъ значеніи x въ этомъ промежуткѣ

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=0,$$

то $f(x)$ есть линейная функція перемѣннаго x.

Теорема была бы очевидна, если бы мы допустили, что $f(x)$ имѣетъ въ промежуткѣ (a, b) производныя перваго и второго порядка, но здѣсь мы этого не предполагаемъ.

Разсмотримъ линейную функцію

$$f(a)+\frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)];$$

эта функція равна функціи $f(x)$ при $x=a$ и при $x=b$. Если $f(x)$ не есть линейная функція, то разность

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)]$$

въ промежуткѣ (a, b) не равна постоянно нулю.

Предположимъ, напримѣръ, что $\varphi(c)>0$, гдѣ c есть нѣкоторое число между a и b. Тогда вспомогательная функція

$$\psi(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{b-a}[f(b)-f(a)]+\frac{\alpha^2}{2}(x-a)(x-b)$$

будетъ положительною при $x=c$, если α взято достаточно мало. Кромѣ того, функція $\psi(x)$ равна нулю при $x=a$ и при $x=b$; слѣдовательно, она имѣетъ maximum при нѣкоторомъ значеніи $x=x_1$, заключающемся между a и b. Но, какъ легко видѣть, функція $\psi(x)$ удовлетворяетъ условію

$$\lim_{h=0} \frac{\psi(x+h)+\psi(x-h)-2\psi(x)}{h^2}=\alpha^2.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при достаточно маломъ h не можетъ быть одновременно

$$\psi(x_1+h)-\psi(x_1)\leqq 0, \quad \psi(x_1-h)-\psi(x_1)\leqq 0,$$

*) Лебегъ, Leçons sur les séries trigonométriques; 1896.

и, слѣдовательно, при $x=x_1$ функція $\psi(x)$ не можетъ имѣть maximum. Такимъ образомъ, предположеніе, что разность $\varphi(x)$ не равна нулю во всѣхъ точкахъ промежутка (a, b), приводитъ къ противорѣчію.

10. Непрерывныя кривыя. — Пусть будутъ $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывныя функціи перемѣннаго t; множество точекъ, координаты которыхъ опредѣляются формулами

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t),$$

составляютъ непрерывную кривую Γ. Предположимъ, что непрерывныя функціи $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имѣютъ періодъ ω, т.-е. что при всякомъ t имѣютъ мѣсто равенства

$$f(t+\omega)=f(t), \quad \varphi(t+\omega)=\varphi(t), \quad \psi(t+\omega)=\psi(t);$$

въ этомъ случаѣ достаточно измѣнять t въ любомъ промежуткѣ $(a, a+\omega)$ съ амплитудою ω, чтобы получить всѣ точки кривой Γ; такая кривая Γ называется замкнутою кривою. Очевидно, что мы можемъ предположить ω положительнымъ; кромѣ того, предположимъ, что ω есть наименьшее положительное число, удовлетворяющее тремъ предыдущимъ равенствамъ. Если при двухъ различныхъ значеніяхъ t', t'' мы имѣемъ одновременно

$$f(t')=f(t''), \quad \varphi(t')=\varphi(t''), \quad \psi(t')=\psi(t''),$$

и при томъ разность $t'-t''$ не есть краткое числа ω, то соотвѣтствующая точка кривой Γ называется ея двойною точкою. Если же нельзя найти никакихъ двухъ такихъ значеній t', t'', удовлетворяющихъ предыдущимъ соотношеніямъ, чтобы $t'-t''$ не было кратнымъ числа ω, то кривая Γ не имѣетъ двойной точки. Такимъ же образомъ опредѣляются и кратныя точки высшей кратности. Кривыя, не имѣющія кратныхъ точекъ, называются простыми кривыми или кривыми Жордана. Чтобы примѣнить эти опредѣленія къ плоскимъ кривымъ, достаточно положить $\psi(t)=0$.

Жорданъ строго доказалъ (см. его Cours d'Analyse), что замкнутая простая плоская кривая C раздѣляетъ плоскость на двѣ области, внѣшнюю и внутреннюю, причемъ всякія двѣ точки одной и той-же области могутъ быть соединены ломаною линіею, не пересѣкающею кривой C, тогда какъ всякая непрерывная линія, соединяющая точку внутренней области съ точкою внѣшней области, необходимо пересѣкаетъ кривую C. Замѣтимъ, что обратное предложеніе невѣрно: мно-

жество точекъ, раздѣляющее плоскость на двѣ части, одну — внутреннюю, а другую — внѣшнюю, по отношенію къ этому множеству не опредѣляетъ, вообще, непрерывной кривой. Такимъ образомъ, понятіе аналитической непрерывности не равносильно геометрическому понятію границы области, раздѣляющей плоскость на двѣ отдѣльныхъ области.

Пеано далъ весьма замѣчательный примѣръ плоской кривой, обладающей слѣдующимъ свойствомъ. Можно составить такія непрерывныя функціи $f(t)$ и $\varphi(t)$ перемѣннаго t въ промежуткѣ (0, 1), что при измѣненіи параметра t точка съ координатами $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ совпадетъ послѣдовательно со всѣми точками, лежащими внутри квадрата, сторона котораго равна единицѣ*). Очевидно, что функція, представляющая кривую Пеано, какъ и функція Вейерштрасса, не имѣетъ производной ни въ какой точкѣ.

11. Длина дуги кривой. — Въ § 80 было доказано, что кривая, представляемая уравненіями

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t),$$

гдѣ f, φ, ψ, функціи, непрерывныя въ нѣкоторомъ промежуткѣ (a, b), спрямляема, если функціи $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имѣютъ производныя, непрерывныя въ промежуткѣ (a, b). Эти условія достаточны, но не необходимы. Условія необходимыя и достаточныя были даны Жорданомъ: Для того чтобы кривая C была спрямляемою, необходимо и достаточно, чтобы множество чиселъ L, измѣряющихъ периметры многоугольныхъ линій, вписанныхъ въ C, было ограничено.

Это условіе необходимо. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ L длина многоугольной линіи $P_0 P_1 P_2 \ldots P_n$, вписанной въ кривую C. Предположимъ, что при неограниченномъ возрастаніи n такъ, что maximum λ длинъ сторонъ многоугольной линіи стремится къ нулю, количество L стремится къ предѣлу S. Не можетъ существовать никакой другой многоугольной линіи, вписанной въ C, периметръ которой L' былъ бы больше S. Въ самомъ дѣлѣ, если бы такая линія существовала, то, разбивая каждый изъ промежутковъ на частичные болѣе мелкіе

*) Пеано, Sur une courbe qui remplit une aire plane. (Math. Annalen, т. XXXVI).

Гильбертъ, Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück (Math. Annalen, т. XXXVIII).

промежутки, мы нашли бы, что периметры новыхъ многоугольныхъ линій всѣ больше L' и, слѣдовательно, не могутъ стремиться къ S.

Это условіе достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ S верхняя граница чиселъ L, и пусть будетъ ε какое-нибудь заданное положительное число; существуетъ такая послѣдовательность возрастающихъ чиселъ

$$a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_p=b,$$

что периметръ Λ соотвѣтствующей вписанной многоугольной линіи будетъ больше $S-\frac{\varepsilon}{2}$. Разсмотримъ такую послѣдовательность возрастающихъ чиселъ

$$a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=b,$$

чтобы всѣ промежутки t_i-t_{i-1} были меньше нѣкотораго положительнаго числа η, которое само меньше наименьшей изъ разностей a_1-a_0, a_2-a_1, ..., $b-a_{p-1}$. Пусть будетъ L периметръ соотвѣтствующей вписанной многоугольной линіи. Мы докажемъ, что при достаточно маломъ η будетъ $S-L<\varepsilon$.

Для доказательства расположимъ числа t_i и a_k въ возрастающемъ порядкѣ, и пусть будетъ L' длина вспомогательной многоугольной линіи, получающейся при этомъ новомъ способѣ разбіенія. Число L' будетъ не меньше L и Λ и, слѣдовательно, больше $S-\frac{\varepsilon}{2}$.

Мы можемъ перейти отъ многоугольной линіи съ длиною L къ многоугольной линіи съ длиною L', замѣняя стороны c_i, у которыхъ въ промежуткѣ (t_{i-1}, t_i) заключается точка a_k, двумя другими сторонами треугольника, имѣющаго вершины въ точкахъ, соотвѣтствующихъ значеніямъ t_{i-1}, a_k, t_i. Число такихъ сторонъ c_i самое большее будетъ равно $p-1$. Такъ какъ функціи f, φ, ψ непрерывны, то всегда можно выбрать настолько малое положительное число η, чтобы при $|t'-t''|<\eta$ было

$$\sqrt{[f(t')-f(t'')]^2+[\varphi(t')-\varphi(t'')]^2+[\psi(t')-\psi(t'')]^2}<\frac{\varepsilon}{4(p-1)};$$

мы будемъ имѣть $L'-L<\frac{\varepsilon}{2}$, и, такъ какъ $L'>S-\frac{\varepsilon}{2}$, то $L>S-\varepsilon$. Слѣдовательно, число L имѣетъ предѣломъ S.

Замѣтимъ, что число L не меньше каждаго изъ чиселъ

$$\Sigma|x_i-x_{i-1}|,\quad \Sigma|y_i-y_{i-1}|,\quad \Sigma|z_i-z_{i-1}|.$$

Слѣдовательно, чтобы L было ограниченнымъ, необходимо чтобы функціи $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ были съ ограниченнымъ измѣненіемъ. Эти условія достаточны, такъ какъ, съ другой стороны, мы имѣемъ

$$L \leqq \Sigma |x_i - x_{i-1}| + \Sigma |y_i - y_{i-1}| + \Sigma |z_i - z_{i-1}|.$$

Итакъ, для того чтобы кривая была спрямляемою, необходимо и достаточно, чтобы функціи $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ были съ ограниченнымъ измѣненіемъ.

12. Площадь замкнутой кривой. Будемъ называть многоугольною областью всякую плоскую ограниченную область, границы которой состоятъ изъ конечнаго числа прямолинейныхъ отрѣзковъ; эта область можетъ состоять изъ нѣсколькихъ многоугольниковъ, не имѣющихъ никакой общей точки. Опредѣленіе площади такой многоугольной области извѣстно изъ элементарной геометріи. Разсмотримъ теперь замкнутую простую кривую C, раздѣляющую плоскость на двѣ области, внутреннюю область D и внѣшнюю область. Приписать области D опредѣленную площадь — значитъ, въ сущности, допустить слѣдующій постулатъ:

(I) Существуетъ число и притомъ только одно, большее всякаго числа, измѣряющаго площадь любой многоугольной области, содержащейся въ D, и меньшее всякаго числа, измѣряющаго площадь любой многоугольной области, содержащей въ себѣ D.

Существованіе единственнаго числа, удовлетворяющаго предыдущему условію, можетъ быть строго доказано въ томъ случаѣ, когда кривая C удовлетворяетъ нѣкоторому весьма общему условію, которое всегда удовлетворяется для кривыхъ, которыя обыкновенно разсматриваютъ.

Пусть будетъ P многоугольная область, содержащая D, p — другая многоугольная область, содержащаяся въ D, A и a — соотвѣтствующія площади этихъ обѣихъ областей. Ясно, что каковы бы ни были обѣ многоугольныя площади, мы имѣемъ $A > a$. Слѣдовательно, числа A имѣютъ нижнюю границу $\mathfrak{A}$, и числа a имѣютъ верхнюю границу $\mathfrak{A}'$; сверхъ того, необходимо $\mathfrak{A}' \leqq \mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$, то площадь D называется квадрируемою, и число $\mathfrak{A}$ есть мѣра площади области D*).

*) Это опредѣленіе квадрируемыхъ плоскихъ областей можно распространить на области, опредѣленныя съ большею общностью; см. Бэръ, Leçons sur les théories générales d'Analyse, т. I, стр. 148.

Ясно, что это число — единственное, которое удовлетворяетъ условію (1).

Для того чтобы область D была квадрируемою, необходимо и достаточно, чтобы для всякаго положительнаго числа ε можно было найти такую многоугольную область P, содержащую D, и такую другую многоугольную область p, содержащуюся въ D, чтобы разность $A-a$ площадей областей P и p была меньше ε.

По самомому опредѣленію, условіе необходимо. Оно вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно, такъ какъ разность $A-a$ не можетъ быть меньше разности $\mathfrak{A}-\mathfrak{A}'$. Отсюда слѣдуетъ, что если область D квадрируемая и имѣетъ площадь $\mathfrak{A}$, то всегда можно найти такія двѣ многоугольныя области P и p, одну — содержащую D, а другую — содержащуюся въ D, чтобы разности $A-\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}-a$ были меньше всякаго даннаго положительнаго числа ε. Предыдущее условіе квадрируемости площади D можетъ быть иначе выражено слѣдующимъ образомъ: Необходимо и достаточно, чтобы можно было заключить границу C въ такую многоугольную область, площадь которой была бы меньше всякаго даннаго числа. Въ самомъ дѣлѣ, многоугольная область, содержащая C, есть разность двухъ многоугольныхъ областей, одной — содержащей D, а другой — содержащейся въ D.

Нетрудно доказать, что если область D, граница которой состоитъ изъ нѣсколькихъ замкнутыхъ кривыхъ, можетъ быть разбита на сумму или разность квадрируемыхъ площадей, то область D также квадрируема, и ея площадь равна суммѣ или разности составляющихъ ее площадей. Изъ сказаннаго мы видимъ, что число, измѣряющее площадь области, ограниченной замкнутою кривою, опредѣляется, какъ сѣченіе, сдѣланное въ множествѣ положительныхъ чиселъ. Изъ этого опредѣленія вытекаетъ нѣсколько свойствъ, которыя также могли бы служить опредѣленіями. Разсмотримъ одно изъ нихъ, которое тѣсно примыкаетъ къ обычному понятію площади. Пусть будетъ C замкнутая плоская кривая, ограничивающая квадрируемую область D съ площадью $\mathfrak{A}$. Разобьемъ плоскость на квадраты прямыми, параллельными двумъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, и отстоящими другъ отъ друга на разстояніе ρ. Мы получимъ квадраты трехъ родовъ: 1) квадраты, расположенные внутри D; 2) квадраты внѣшніе, не имѣющіе ни одной общей точки съ D; 3) квадраты смѣшанные, имѣющіе точки и внутри D, и внѣ D. Легко доказать,

что при неограниченномъ уменьшеніи ρ сумма площадей смѣшанныхъ квадратовъ стремится къ нулю. Отсюда слѣдуетъ, что при неограниченномъ уменьшеніи ρ сумма площадей внутреннихъ квадратовъ стремится къ площади D.

13. Теоремы существованія неявныхъ функцій. — Доказательства теоремъ существованія неявныхъ функцій даны въ §§ 20, 25. Мы приведемъ здѣсь новое доказательство Гурса, какъ требующее меньшаго количества ограничительныхъ условій*). Разсмотримъ предварительно слѣдующій частный случай.

Пусть будетъ $f(x, y, z)$ непрерывная функція, имѣющая непрерывную производную $f'_z(x, y, z)$ вблизи системы значеній (x_0, y_0, z_0). Если эта функція $f(x, y, z)$ и ея производная f'_z при этой системѣ значеній равны нулю, то уравненіе

$$z = z_0 + f(x, y, z) \qquad (1)$$

имѣетъ одинъ и только одинъ корень $z=\varphi(x, y)$, стремящійся къ z_0, когда x и y стремятся соотвѣтственно къ x_0 и y_0, и вблизи этой системы значеній функція φ есть непрерывная функція перемѣнныхъ x и y.

Такъ какъ функціи $f(x, y, z)$ и $f'_z(x, y, z)$ равны нулю при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ и непрерывны вблизи этой системы значеній, то мы можемъ выбрать три такихъ положительныхъ числа a, b, c, чтобы функціи $f(x, y, z)$ и $f'_z(x, y, z)$ были непрерывны въ области D, опредѣляемой условіями

$$x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a, \quad y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + b, \quad z_0 - c \leqq z \leqq z_0 + c,$$

и чтобы, кромѣ того, въ области D было

$$|f'_z(x, y, z)| < K, \qquad (2)$$

гдѣ K есть какое-нибудь положительное число, меньшее единицы. Условію (2) всегда можно удовлетворить соотвѣтствующимъ выборомъ чиселъ a, b, c, такъ какъ непрерывная функція f'_z равна нулю при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$.

---

*) Гурса, Sur la théorie des fonctions implicites (Bulletin de la Société mathématique, т. XXXI; 1903).

Для рѣшенія уравненія (1) мы примѣнимъ методъ послѣдовательныхъ приближеній. Положимъ послѣдовательно

$$z_1=z_0+f(x,\ y,\ z_0),\quad z_2=z_0+f(x,\ y,\ z_1),\ \ldots,$$

и, вообще,

$$z_n=z_0+f(x,\ y,\ z_{n-1}),\quad (n=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty). \tag{3}$$

Докажемъ, что если разности $x-x_0$, $y-y_0$ будутъ достаточно малы, то всѣ разности z_n-z_0 по абсолютному значенію будутъ оставаться меньшими c, и, слѣдовательно, предыдущая послѣдовательность операцій можетъ быть продолжена неограниченно. Пусть будетъ z какое-нибудь число, заключающееся между z_0-c и z_0+c; мы можемъ написать

$$f(x,\ y,\ z)=f(x,\ y,\ z_0)+f(x,\ y,\ z)-f(x,\ y,\ z_0),$$

и, слѣдовательно, примѣняя формулу средняго значенія и принимая въ соображеніе условіе (2), получимъ

$$|f(x,\ y,\ z)|\ <\ |f(x,\ y,\ z_0)|+K\,|z-z_0|. \tag{4}$$

Возьмемъ теперь такое положительное число h, чтобы оно было не больше меньшаго изъ чиселъ a, b, и чтобы абсолютное значеніе функціи $f(x,\ y,\ z_0)$ было меньше $(1-K)\,c$, когда точка $(x,\ y)$ остается въ области D', опредѣляемой условіями

$$x_0-h\leqq x\leqq x_0+h,\quad y_0-h\leqq y\leqq y_0+h.$$

Изъ неравенства (4) слѣдуетъ, что будетъ также

$$|f(x,\ y,\ z)|<(1-K)\,c+Kc=c.$$

Такимъ же образомъ послѣдовательно можно убѣдиться, что если точка $(x,\ y)$ остается въ области D', то абсолютныя значенія всѣхъ разностей z_1-z_0, z_2-z_0, $\ldots$, z_n-z_0, $\ldots$ будутъ меньше c. Слѣдовательно, мы получаемъ неограниченную послѣдовательность функцій $z_1(x,\ y)$, $z_2(x,\ y)$, $\ldots$, $z_n(x,\ y)$, опредѣляемыхъ рекуррентнымъ закономъ (3), которыя всѣ непрерывны въ области D' и заключаются между z_0-c и z_0+c. Докажемъ, что при неограниченномъ возрастаніи n функція $z_n(x,\ y)$ стремится къ нѣкоторому предѣлу. Въ самомъ дѣлѣ, изъ соотношеній

$$z_n=z_0+f(x,\ y,\ z_{n-1}),\quad z_{n-1}=z_0+f(x,\ y,\ z_{n-2}),$$

принимая во вниманіе условіе (2), слѣдуетъ

$$|z_n-z_{n-1}|\ <K\,|z_{n-1}-z_{n-2}|,$$

и, слѣдовательно,

$$|z_n - z_{n-1}| < K^{n-1} |z_1 - z_0| < K^{n-1}(1-K)\varepsilon.$$

Такимъ образомъ, рядъ

$$z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots \qquad (5)$$

— равномѣрно сходящійся въ области D' и имѣетъ суммою нѣкоторую функцію $Z(x, y)$, непрерывную въ этой области. Эта функція Z удовлетворяетъ уравненію (1), такъ какъ при неограниченномъ возрастаніи n уравненіе (3) обращается въ предѣлѣ въ

$$Z = z_0 + f(x, y, Z). \qquad (6)$$

Сверхъ того, при $x = x_0$, $y = y_0$ всѣ функціи $z_1, z_2, \ldots$ обращаются въ z_0, и, слѣдовательно, мы будемъ имѣть $Z(x_0, y_0) = z_0$; такимъ образомъ, функція $Z(x, y)$ удовлетворяетъ всѣмъ требуемымъ условіямъ.

$Z(x, y)$ есть единственный корень, удовлетворяющій этимъ условіямъ. Точнѣе, когда точка (x, y) заключается въ области D', уравненіе (1) не имѣетъ никакого другого корня, кромѣ Z, заключающагося между $z_0 - c$ и $z_0 + c$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ Z_1 такой корень; изъ соотношеній

$$Z_1 = z_0 + f(x, y, Z_1), \quad z_n = z_0 + f(x, y, z_{n-1})$$

получаемъ

$$Z_1 - z_n = f(x, y, Z_1) - f(x, y, z_{n-1}),$$

и, слѣдовательно,

$$|Z_1 - z_n| < K |Z_1 - z_{n-1}|.$$

Отсюда будемъ имѣть

$$|Z_1 - z_n| < K^{n-1} |Z_1 - z_1|.$$

Слѣдовательно, при неограниченномъ возрастаніи n разность $Z_1 - z_n$ стремится къ нулю; такимъ образомъ, Z_1 тождественно съ Z. Приведенное здѣсь доказательство не только позволяетъ убѣдиться въ существованіи корня $Z(x, y)$, но и даетъ способъ его вычислить. Такъ какъ абсолютное значеніе разности $z_1 - z_0$ меньше $(1-K)c$, то абсолютное значеніе разности $z_n - z_{n-1}$ будетъ меньше $(1-K)cK^{n-1}$. Отсюда слѣдуетъ, что, ограничивая рядъ (5) членомъ $(z_n - z_{n-1})$, мы допустимъ погрѣшность, абсолютное значеніе которой меньше cK^n.

Отъ этого частнаго случая легко перейти къ общей теоремѣ.

Пусть будетъ $F(x, y, z)$ функція перемѣнныхъ x, y, z, удовлетворяющая слѣдующимъ условіямъ: 1. Функція F непрерывна и имѣетъ непрерывную частную производную F'_z вблизи системы значеній (x_0, y_0, z_0); 2. $F(x_0, y_0, z_0)$ равно нулю, тогда какъ $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ отлично отъ нуля. При этихъ условіяхъ уравненіе

$$F(x, y, z)=0 \tag{7}$$

имѣетъ одинъ и только одинъ корень, стремящійся къ z_0, когда x и y стремятся соотвѣтственно къ x_0, y_0, и этотъ корень есть непрерывная функція перемѣнныхъ x и y вблизи точки (x_0, y_0).

Обозначимъ $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ черезъ m; по предположенію, m отлично отъ нуля, и уравненіе (7) равносильно уравненію

$$z=z_0+\left[z-z_0-\frac{1}{m}F(x, y, z)\right]; \tag{8}$$

но уравненіе (8) имѣетъ видъ уравненія (1), въ которомъ

$$f(x, y, z)=z-z_0-\frac{1}{m}F(x, y, z).$$

Такимъ образомъ, теорема доказана, и очевидно, что разсужденіе не зависитъ отъ числа независимыхъ перемѣнныхъ.

Перейдемъ теперь къ изученію системъ неявныхъ функцій, опредѣляемыхъ совмѣстными уравненіями. Пусть будутъ

$$f_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p), \ldots, \quad f_p(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$$

p функцій $n+p$ перемѣнныхъ x_i, y_k, непрерывныхъ и имѣющихъ непрерывныя частныя производныя $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$ вблизи системы значеній $x_i=x_i^0$ $y_k=y_k^0$. Если, кромѣ того, p функцій f_j и p^2 частныхъ производныхъ $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$ равны нулю при этой системѣ значеній, то p уравненій

$$y_1=y_1^0+f_1, \quad y_2=y_2^0+f_2, \ldots, \quad y_p=y_p^0+f_p \tag{9}$$

имѣютъ одну и только одну систему рѣшеній

$$y_1=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \quad y_p=\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

стремящихся къ значеніямъ $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0$, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ стремятся соотвѣтственно къ x_1^0

$x, \ldots, x_n^0$, и эти рѣшенія суть непрерывныя функціи вблизи этой системы значеній x_1^0, $x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Разсмотримъ, для опредѣленности, два уравненія съ двумя независимыми перемѣнными x, y и двумя функціями u, v и предположимъ $x_0=y_0=u_0=v_0=0$. Этому послѣднему условію всегда можно удовлетворить, замѣняя x, y, u, v соотвѣтственно черезъ x_0+x, y_0+y, u_0+u, v_0+v. Тогда уравненія (10) будутъ имѣть видъ

$$u=f(x, y; u, v), \quad v=\varphi(x, y; u, v), \tag{11}$$

причемъ при $x=y=u=v=0$ функціи f, φ, $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ равны нулю и непрерывны вблизи этой системы значеній. Пусть будутъ a, b, c такія положительныя числа, чтобы шесть предыдущихъ функцій были непрерывны въ области D, опредѣляемой условіями

$$|x| \leqq a, \ |y| \leqq b, \ |u| \leqq c, \ |v| \leqq c,$$

и чтобы, кромѣ того, въ этой области было

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| < K, \ \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| < K, \ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right| < K, \ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right| < K, \tag{12}$$

гдѣ K—какое-нибудь положительное число, меньшее $\frac{1}{2}$. Составимъ, подобно предыдущему, двѣ послѣдовательности функцій

$$\begin{aligned} u_1&=f(x, y; 0, 0), & v_1&=\varphi(x, y; 0, 0), \\ u_2&=f(x, y; u_1, v_1), & v_2&=\varphi(x, y; u_1, v_1), \\ &\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots, \end{aligned}$$

и, вообще,

$$u_n=f(x, y; u_{n-1}, v_{n-1}), \quad v_n=\varphi(x, y; u_{n-1}, v_{n-1}). \tag{13}$$

Если абсолютныя значенія количествъ u_{n-1}, v_{n-1} будутъ меньше c, то, примѣняя формулу средняго значенія къ разностямъ u_n-u_1, v_n-v_1 и принимая во вниманіе условія (12), получимъ

$$|u_n| < |f(x, y; 0, 0)| + 2Kc, \quad |v_n| < \varphi(x, y; 0, 0)| + 2Kc.$$

Выберемъ теперь такое положительное число h, чтобы оно было не больше меньшаго изъ двухъ чиселъ a и b, и чтобы абсолютныя значенія функцій $f(x, y; 0, 0)$ и $\varphi(x, y; 0, 0)$ были меньше $(1-2K)c$, когда абсолютныя значенія перемѣнныхъ x и y не превосходятъ h. Если точка (x, y) остается въ области D', опредѣленной такимъ образомъ, то послѣдо-

вательно можно убѣдиться, что всѣ функціи u_i, v_i будутъ непрерывны и по абсолютному значенію будутъ оставаться меньше c.

Докажемъ, что при неограниченномъ возрастаніи числа n функціи u_n и v_n стремятся къ нѣкоторымъ предѣламъ $U(x, y)$ и $V(x, y)$. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ два ряда

$$\left.\begin{aligned} &u_1+(u_2-u_1)+\ldots+(u_n-u_{n-1})+\ldots,\\ &v_1+(v_2-v_1)+\ldots+(v_n-v_{n-1})+\ldots. \end{aligned}\right\} \qquad (14).$$

Изъ соотношеній (13) получаемъ

$$u_n-u_{n-1}=f(x,\ y;\ u_{n-1},\ v_{n-1})-f(x,\ y;\ u_{n-2},\ v_{n-2}),$$

и, слѣдовательно, на основаніи условій (12),

$$|u_n-u_{n-1}|<K|u_{n-1}-u_{n-2}|+K|v_{n-1}-v_{n-2}|.$$

Очевидно, что такое же неравенство существуетъ для $|v_n-v_{n-1}|$. Обозначая черезъ H_n наибольшее изъ чиселъ $|u_n-u_{n-1}|$ и $|v_n-v_{n-1}|$, имѣемъ

$$H_n<2KH_{n-1},$$

и, слѣдовательно, $H_n<(2K)^{n-1}H_1<(2K)^{n-1}(1-2K)c$.

Отсюда слѣдуетъ, что оба ряда (14) — равномѣрно сходящіеся въ области D' и представляютъ двѣ функціи $U(x, y)$ и $V(x, y)$, непрерывныя въ этой области. Эти функціи U и V удовлетворяютъ уравненіямъ (11), такъ какъ при неограниченномъ возрастаніи числа n соотношенія (13) въ предѣлѣ обращаются въ

$$U=f(x,\ y;\ U,\ V),\quad V=\varphi(x,\ y;\ U,\ V).$$

Какъ и выше, можно было бы доказать, что U и V — единственные корни уравненій (11), удовлетворяющіе требуемымъ условіямъ.

Разсмотримъ наконецъ систему самаго общаго вида

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_p)=0,\ F_2=0,\ \ldots,\ F_p=0. \qquad (15)$$

Предположимъ, что функціи $F_1, \ldots, F_p$ непрерывны и имѣютъ непрерывныя частныя производныя $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$ вблизи системы значеній $x_1^0, \ldots, x_n^0$, $y_1^0, \ldots, y_p^0$, при которыхъ $F_1=0,\ F_2=0,\ \ldots,\ F_p=0$, и что функціональный опредѣлитель

$$\Delta=\frac{D(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_p)}{D(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_p)}$$

при значеніяхъ x_i^0, y_k^0 не равенъ нулю. При этихъ условіяхъ уравненія (15) имѣютъ одну и только одну систему рѣшеній

$$y_1=\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ y_p=\varphi_p(x_1, \ \ldots, \ x_n),$$

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$—непрерывныя функціи перемѣнныхъ $x_1, \ \ldots, \ x_n$, стремящіяся соотвѣтственно къ $y_1^0, \ \ldots, \ y_p^0$, когда перемѣнныя $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$ стремятся къ $x_1^0, \ x_2^0, \ \ldots, \ x_n^0$.

Для упрощенія изложенія замѣнимъ x_i черезъ $x_i^0+x_i$ и y_k черезъ $y_k^0+y_k$, такъ чтобы всѣ начальныя значенія $x_i^0, \ y_k^0$ были равны нулю. Обозначимъ черезъ a_{jk} значеніе производной $\frac{\partial F_j}{\partial y_k}$ при этихъ начальныхъ значеніяхъ. По предположенію, опредѣлитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

отличенъ отъ нуля. Очевидно, что система уравненій (15) равносильна слѣдующей системѣ

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}\,y_1+a_{12}\,y_2+\ldots+a_{1p}\,y_p=a_{11}\,y_1+\ldots+a_{1p}\,y_p-F_1=\psi_1, \\ &a_{21}\,y_2+a_{22}\,y_2+\ldots+a_{2p}\,y_p=a_{21}\,y_1+\ldots+a_{2p}\,y_p-F_2=\psi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a_{p1}\,y_1+a_{p2}\,y_2+\ldots+a_{pp}\,y_p=a_{p1}\,y_1+\ldots+a_{pp}\,y_p-F_p=\psi_p, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

гдѣ при $x_i=0, \ y_k=0$ функціи ψ_j и ихъ частныя производныя равны нулю. Рѣшая систему (16) относительно $y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_p$, что возможно, такъ какъ Δ не равно нулю, мы придемъ къ системѣ вида (9).

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Цифры въ указателѣ соотвѣтствуютъ номерамъ страницъ.

Абелевъ интегралъ 230.
Абель (Abel) 160, 230, 371, 402, 404.
Абданкъ-Абакановичъ (Abdank-Abacanowicz) 210.
Абсолютно сходящійся рядъ 366, 373, 379, 381, 402, 422.
Адамаръ (Hadamard) 403.
Алгебраическій комплексъ 586.
Альфенъ (Halphen) 37.
Амперъ (Ampère) 73, 85.
Амплитуда 597.
Амслеръ (Amsler) 210.
Аналитическая кривая 437, 439;—поверхность 440; — функція 436.
Аналитическое продолженіе 411.
Антикаустика 586.
Аппель (Appell) 588.
Апсидальная поверхность 92.
Арндтъ (Arndt) 380.
Архимедъ 140.
Асимптотическія касательныя 546; — линіи 550, 552, 554.

Балитранъ (Balitrand) 538.
Безконечно малое 22; главное — 22.
Безконечныя значенія подъинтегральныхъ функцій 183; — предѣловъ интегралов 188; — функцій 5, 601.
Бельтрами (Beltrami) 93.
Бернульи Даніилъ (Daniel Bernoulli) 441.
Бертранъ (Bertrand) 68, 86, 139, 210, 361, 524, 525.
Беръ (Baire) 14, 615.
Билинейный ковариантъ 92.
Бинарная кубическая форма 64.
Биномъ Ньютона 109, 419.
Бинормаль 512.
Бонне (Bonnet) 160, 445.
Борда (Borda) 139.
Буке (Bouquet) 520, 579.

Верхній предѣлъ множества 148; — функціи справа, слѣва отъ точки 599; — въ точкѣ 599.
Верхняя граница функціи 597.
Вейерштрассъ (Weierstrass) 8, 431, 453, 455.
Вивіани (Viviani) 301.
Винтовая линія 522, 523; круговая — 495.
Вторичная каустика 466, 586.
Выпуклая поверхность 542.
Высшіе дифференціалы 26, 28, 30.
Высшія производныя 8, 45, 46, 610.

Галилей (Galilei) 474.
Гаро (Haro) 139.
Гауссъ (Gauss) 208, 366.
Геликоидъ 553, 564, 566.
Гессе (Hesse) 63.
Гильбертъ (Hilbert) 179, 613.
Гипербола, ея площадь 228.
Гиперболическіе синусъ, косинусъ 228.
Гипоциклоида 465, 488.
Главная нормаль 509.
Главная часть безконечно малаго 22.
Главное безконечно малое 22.
Главные радіусы кривизны 544, 547, 565; — центры кривизны поверхности 133.
Главныя касательныя 546; — направленія 546; — нормальныя сѣченія 544, 547.
Гольдичъ (Holditsch) 212.

Гомографическія преобразованія 75.
Горловая линія 577.
Граница верхняя, нижняя множества 147, 595; — функціи 597.
Гревсъ (Graves) 174.
Гринъ (Green) 274, 324.
Гурса (Goursat) 39, 50, 74, 94, 617.

Даламберъ (D'Alembert) 136, 306, 352.
Дарбу (Darboux) 8, 147, 570, 590.
Двойная линія 121; — точка 117, 612.
Двойной интегралъ 263, 266, 270; — рядъ 376, 381, 391.
Дедекиндъ (Dedekind) 591.
Dextrorsum (кривая) 515.
Дирикле (Dirichlet) 272, 324, 369, 444, 445.
Дифференцированіе подъ знакомъ интеграла 201, 393; — рядовъ 388.
Дифференціалъ 23; — перваго, второго,... порядковъ 23; полный—25; полный — сложной функціи 28; — произведенія 30.
Дифференціальные биномы 234.
Дифференціальные параметры Бельтрами 93; — параметры Ламе 87.
Дифференціальный инваріантъ Альфена 92.
Длина дуги кривой 169, 172, 613.
Дополнительная кривая 537.
Дуга правильная 438.
Дюбуа-Реймонъ (du-Bois-Beymond) 361.
Дюгамель (Duhamel) 141, 362.
Дюпенъ (Dupin) 568, 584.

Естественное уравненіе 477.

Жаме (Jamet) 553.
Жергоннъ (Gergonne) 584.
Жорданъ (Jordan) 384, 604, 612, 613.

Задача Вивіани 301.
Закрытый промежутокъ 597.
Замѣна перемѣнныхъ 65, 66, 68, 70, 76, 80, 82; — въ двойныхъ интегралахъ 276, 279, 282; — въ криволинейныхъ интегралахъ 195; — въ простыхъ интегралахъ 174; — въ тройныхъ интегралахъ 316.
Замкнутая кривая 612.
Измѣненіе отрѣзка прямой 173.
Измѣненіе функціи полное 604; — полное положительное, отрицательное 605.
Инверсія 72.
Индикатриса 544; сферическая — 506.
Интегралъ неопредѣленный 162; — опредѣленный 155; — Эйлеровъ $B(p, q)$ 293; — Эйлеровъ $\Gamma(a)$ 192.
Интегралы $\frac{1}{2}\int xdy - ydx$ 200;
$\int R(x, \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C})\,dx$ 224;
$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ 247; $\int \cos(ax + b)\ldots dx$ 253; $\int R(x)\,e^{\omega x}\,dx$ 255.
Интегралы Абелевы 230; — гиперэллиптическіе 236, 240, 241; — двойные 263, 266, 270; — Дирикле 324; — кратные 326; — криволинейные 193, 332, 340; — отъ дифференціальныхъ биномовъ 234; — по поверхности 294; — псевдо-эллиптическіе 245, 258; — равномѣрно сходящіеся 394; расширеніе понятія — 183, 188, 190, 291; — тройные 311, 314; — эллиптическіе 236, 240, 241, 242.
Интегральный логариемъ 256.
Интегрированіе по частямъ 177.
Интегрируемыя функціи 155.
Интерполированіе 206; — (методъ Гаусса) 208.
Ирраціональное число 591, 593.

Іоахимсталь (Ioachimstal) 567.

Кардіоида 172.
Касательная плоскость 18, 44, 82, 113.
Касательная прямая 6, 55, 103; стаціонарная — 494.
Касательныя асимптотическія 546; главныя — 546; сопряженныя — 556.
Каустики вторичныя 466, 586.
Квадратура 140, 168, 615 и др.; — гиперболы 228; — параболы 140; — эллипса 198.
Квадрируемая область 615.
Кельвинъ (Kelwin) 91.
Кенигсъ (Koenigs) 590.
Кеплеръ (Kepler) 435.

Кетле (Quételet) 584.
Ковариантъ билинейный 92.
Колебаніе въ промежуткѣ 149, 263, 597; — въ точкѣ 599; — слѣва отъ точки 599; — справа отъ точки 599.
Комплексъ (прямыхъ) 574, 586; алгебраическій — 586; линейный — 587.
Конгруэнція (прямыхъ) 574, 579; линейная — 582; — нормалей 582.
Конечная функція 149.
Коническая точка 120.
Коноидъ 553.
Конусъ 500; — касательныхъ 119, 120; направляющій — 506.
Координаты криволинейныя ортогональныя 86; — полярныя 70, 281; — эллиптическія въ пространствѣ 323; — эллиптическія на плоскости 281.
Корни уравненія 4, 9, 136. 306; общіе — двухъ уравненій 338.
Косинусы направляющіе 172.
Котсъ (Cotes) 208.
Коши (Cauchy) 8, 97, 111, 346, 350, 352, 356, 369, 403, 419, 429, 537, 584, 597, 598.
Кратные интегралы 326; — ряды 382, 391.
Кривыя аналитическія 437, 439; — Бертрана 525, 537; — двойной кривизны 6, 55, 439, 489 и др.; — дополнительныя 537; — Жордана 612; — замкнутыя 612, 615; — лѣвыя 515; — комплекса 586; — непрерывныя 612; — огибаемыя 459, 503; — огибающія 459, 503; — Пеано 613; — плоскія 6, 23, 33, 437, 459 и др.; — подарныя 74; — правыя 515; — присоединенныя 537; — простыя 612; — развертывающія 466, 472, 520; — соприкасающіяся 484, 486, 529; — спрямляемыя 169, 613; — уникурсальныя 230.
Кривизна 467, 507; — кривыхъ на поверхности 539.
Криволинейные интегралы 193, 332, 340.
Круговая винтовая линія 495, 525.
Кругъ кривизны 468, 484, 510.
Крученіе 512.
Кэли (Cayley) 292.
Лагранжъ (Lagrange) 6, 8, 90, 96 207, 433.
Ламе (Lamé) 86, 87, 343.
Лапласъ (Laplace) 79, 90, 435.
Лебегъ (Lebesgue) 453, 611.
Лежандровы интегралы 244, 391.
Лежандръ (Legendre) 36, 73, 74, 83, 181, 244, 422, 465.
Леженъ-Дирикле (Lejeune-Dirichlet) 272, 324, 369, 444, 445.
Лемниската 232, 245.
Лейбницъ (Leibniz) 8, 22.
Ли Софусъ (Sophus Lie) 73.
Линейная конгруэнція 582.
Линейное множество 596.
Линейный комплексъ 587.
Линейчатая поверхность 300, 554, 574.
Линія винтовая 495, 522, 523; — горловая 577; — двойная поверхности 121; — кривизны 559, 564; — сжатія 577; — уровня 273; — цѣпная 230, 475.
Липшицъ (Lipschitz) 610.
Ліонъ (Lyon) 525.
Ліувилль (Liouville) 241.
Логариѳмическіе признаки сходимости 359.
Логариѳмъ 62, 106, 107; интегральный — 256.
Лопиталь (L'Hopital) 12.
Лѣвая кривая 515.
Лѣпная поверхность 573.

Маклоренъ (Maclaurin) 104.
Малюсъ (Malus) 584.
Мангеймъ (Mannheim) 537, 572.
Мансіонъ (Mansion) 216.
Maxima 121, 123, 126, 128, 130, 133.
Менье (Meusnier) 542.
Мертенсъ (Mertens) 374.
Мёрфи (Murphy) 398.
Minima 121, 123, 126, 128, 130, 133.
Многочлены Лежандра 36, 181, 210, 422.
Множество 147, 595; — линейное 596; — неограниченное 597; — ограниченное 595; — ограниченное сверху 147; — ограниченное снизу 147; — производное 596.
Монжъ (Monge) 33.
Монотонная функція 603.

Наибольшій изъ предѣловъ 346, 355, 403, 595.
Наименьшій изъ предѣловъ 597.
Направляющіе косинусы 172.
Начальныя функціи 145, 161.
Невенгловскій (Niewenglowski) 231.
Неограниченное множество 597.
Неопредѣленныя выраженія 12, 102, 113.
Неопредѣленный интегралъ 162, 217 и др.
Непрерывная кривая 612.
Непрерывная функція 3, 8, 13, 146, 150, 261, 453, 455, 598.
Непрерывность 3, 598 и др; — Эйлерова 598.
Несоизмѣримость π^2 260.
Неявная функція 39, 50, 428, 431, 617.
Нижній предѣлъ множества 149; — функціи слѣва, справа отъ точки 598; — функціи въ точкѣ 599.
Нижняя граница функціи 597.
Нормальное сѣченіе поверхности 539, 544.
Нормаль главная 509; — плоской кривой 33.

Область интегрированія 264, 311, 316, 326.
Область квадрируемая 615.
Область сходимости 402.
Обобщеніе производной 609.
Обратная функція 46, 55.
Обращеніе рядовъ 436; — функцій 55, 435.
Объемъ 265, 298, 300.
Обыкновенная точка кривой 437, 439; — поверхности 440.
Огибаемая кривая 459, 503; — прямая 505.
Огибающая кривая 459, 503; — прямой линіи 464, 505; — окружности 465.
Огибающая поверхность 496, 497; — плоскости 499; — сферы 571, 572.
Ограниченная функція 597.
Ограниченное множество 595; — сверху 147; — снизу 147.
Однородная функція 32.
Окружность соприкасающаяся 530.
Опредѣленный интегралъ 155 и др.
Опредѣлитель Якоби 50, 57, 63; — Гессе 63.
Открытый промежутокъ 597.
Осгудъ (Osgood) 158.
Основной трехгранный уголъ 514.
Особая точка кривой 115, 438, 439, 461; — поверхности 44, 118, 497.
Остаточный членъ въ формулѣ Тэлора по Коши 97; — по Лагранжу 96.

Парабола, ея квадратура 140; соприкасающаяся — 99; спрямленіе — 229.
Параболоидъ 113.
Параллельныя кривыя 215; — поверхности 91.
Параметръ распредѣленія 576, 578.
Пеано (Peano) 493, 613.
Пелле (Pellet) 538.
Пенлеве (Painlevé) 94.
Періодъ интеграла 335; — функціи 612.
Петля 337.
Пикаръ (Picard) 340, 588.
Планиметръ Амслера 210.
Плоскія кривыя 6, 23, 33, 437, 459 и др.
Плоскость касательная 18, 44, 82, 113; — нормальная 511; — соприкасающаяся 489; — фокальная 581; — центральная 576.
Площадь гиперболы 228; — кривой 141, 145, 166; — кривой въ полярныхъ координатахъ 198; — кривой замкнутой 195, 615; — параболы 140; — поверхности 285; — эллипса 198.
Поверхности 19, 43, 81, 440, 496 539, и др.; — апсидальныя 92; — выпуклыя 542; — Жаме 553; — линейчатыя 300, 554, 574; — лѣпныя 573; — огибающія 496, 497; — параллельныя 91; — переноса 558; — полярныя 512, 522; — разгибающіяся 86, 499, 502, 548; — соприкасающіяся 533; — сѣдлообразныя 543; — трубчатыя 571; — фокальныя 581.
Подарная кривая 74.
Подкасательная 33.
Поднормаль 33.
Подстановка ряда въ рядъ 415, 425.

Полиномы Лежандра 36, 181, 210, 422.
Полное измѣненіе функціи 604; — положительное 605; — отрицательное 605.
Полный дифференціалъ 25; — сложной функціи 28.
Положительное направленіе главной нормали 509.
Полунепрерывная функція 601.
Полусходящіеся ряды 369.
Полюсы комплекса 587.
Полярная поверхность 512, 522; — прямая 511.
Полярныя координаты 70, 281.
Порядокъ прикосновенія кривыхъ двойной кривизны 526, 529; — кривой съ поверхностью 531; — плоскихъ кривыхъ 478, 480, 483.
Послѣдовательность расходящаяся, сходящаяся 345.
Послѣдующее разбіеніе 154.
Постоянное Эйлера 108.
Правая кривая 515.
Правильная дуга 438; — точка 599.
Предѣлъ 1; — множества верхній 148; — множества нижній 149; — функціи 598; — функціи верхній, нижній, слѣва, справа отъ точки 599; — функціи въ точкѣ 599.
Предѣльная точка 596.
Предѣльныя значенія интегралов 183, 188.
Преобразованія Ампера 85; — гомографическое 75; — Лежандра 74, 83; — обратными радіусами векторами 72; — прикосновенія 73; — точечное 71.
Прерывная функція 4, 203, 599.
Прерывность 4, 203, 599; — несущественная 600; — существенная 600; — устранимая 600.
Приближенное вычисленіе опредѣленныхъ интегралов 204, 206, 208, 210.
Призматоидъ 326.
Признаки сходимости послѣдовательностей 345; — рядовъ: Гаусса 366; — Даламбера 352; — Дюгамеля 362; — Коши 350, 352, 356, 383; — логариѳмическіе 359; — Раабе 362.
Прикосновеніе кривыхъ двойной кривизны 526; — плоскихъ 478, 480; — кривыхъ съ поверхностью 531.
Прингсгеймъ (Pringsheim) 361.
Присоединенная кривая 537.
Производное число 609.
Производныя 5, 8; — второго порядка обобщенная 610; — слѣва отъ точки 610; — справа отъ точки 610; — отъ неявной функціи 42, 45; — отъ цѣлаго ряда 406; частныя — 14, 46.
Промежутокъ закрытый 597; — открытый 597.
Простыя кривыя 612.
Прямой геликоидъ 566.
Прямыя огибаемыя 464, 505; — полярныя 511; — соприкасающіяся съ кривою 530; — соприкасающіяся съ поверхностью 535; — сопряженныя комплекса 587.
Псевдо-эллиптическіе интегралы 245, 258.
Пуанкаре (Poincaré) 413.
Пуассонъ (Poisson) 213, 343.
Пюизё (Puiseux) 525.

Раабе (Raabe) 362.
Равномѣрная сходимость 385.
Равномѣрно непрерывная функція 152, 262.
Радіусъ кривизны кривой двойной кривизны 507; — плоской кривой 67, 71, 468; главные — 544, 547, 565.
Радіусъ кручения 512.
Развертки кривой двойной кривизны 520; — плоской кривой 466, 470; — поверхности 561.
Развертывающая кривая 466, 472, 520.
Разгибающіяся поверхности 86, 499, 502, 548.
Разложеніе въ ряды 95, 99, 104, 111, 345, 441 и др.; — непрерывной функціи 453.
Разложенія e^x 105; $\sin x$ 105; $\cos x$ 105; $\log(1+x)$ 106; $(1+x)^m$ 109; $\arc\sin x$ 110; $\arc\operatorname{tg} x$ 110; $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ 421.
Разности первыя, вторыя, ... 20.
Распространеніе формулы Тэлора 410.

Ребро возврата 501.
Риманъ (Riemann) 147, 369, 597.
Робертсъ Вильямъ (Roberts William) 309.
Родригъ Олиндъ (Rodrigues Olinde) 36, 564.
Ролль (Rolle) 8.
Руке (Rouquet) 536.
Рулетта 216.
Ряды абсолютно сходящіеся 366, 373, 379, 381, 402, 422; — Борда 139; — Гаро 139; — двойные 376, 381, 391; — знакоперемѣнные 366, 379, 383; — знакоположительные отъ 350 до 366, 376, 382; — кратные 382; — Маклорена 104; — полусходящіеся 369; — равномѣрно сходящіеся 385, 388, 391; — съ мнимыми членами 373, 381; — тригонометрическіе 441; — Тэлора 104, 179, 410; — условно сходящіеся 369; — Фурье 449; — цѣлые 401, 404, 406, 415, 419, 422, 424.

Семейства кривыхъ 459, 503; — поверхностей 496, 497.
Серре (Serret) 245, 537.
Симпсонъ (Simpson) 208.
Sinistrorsum (кривая) 515.
Соприкасающаяся окружность 530; — парабола 99; — плоскость 489; стаціонарная — плоскость 491; — поверхность 533; — прямая 484, 530; — сфера 534.
Соприкасающіяся кривыя 483, 486, 529; — прямыя съ поверхностью 535.
Соприкасающійся кругъ 484; — шаръ 534.
Сопряженная сѣть 557.
Сопряженныя касательныя 556; — прямыя комплекса 587.
Спрямленіе лемнискаты 245; — параболы 229; — эллипса 244.
Стаціонарная касательная 494; — соприкасающаяся плоскость 491.
Стильтьесъ (Stieltjes) 12.
Стоксъ (Stokes) 296.
Сумма ряда 348, 373, 377, 379, 381, 387, 404.
Сходимость абсолютная 366, 373, 379, 381, 402, 422; — послѣдовательностей 345; — равномѣрная 385; — рядовъ 348 и сл., 400 и сл..
Сфера 549; соприкасающаяся — 534.
Сферическая индикатриса 506.
Сѣдлообразная поверхность 543.
Сѣть сопряженная 557.
Сѣченіе 592, 593.

Таблица съ двойнымъ входомъ 376, 381.
Таннери (Tannery) 382.
Тиссо (Tissot) 537.
Точки возврата 118; — гиперболическія 543; — двойныя 117, 612; — двойныя уединенныя 117; — коническія 120; — кратныя 612; — обыкновенныя 437, 439, 440; — округленія 548; — особыя 44, 115, 118, 438, 439, 461, 497; — параболическія 543; — правильныя 600; — перегиба 469, 485; — предѣльныя 596; — прерывности 599; — прерывности второго рода 601; — прерывности перваго рода 600; — сгущенія 596; — угловыя 7; — уединенныя поверхности 120; — фокальныя 580; — центральныя 576; — эллиптическія 542.
Трактриса 475.
Трансцендентность e 179.
Тригонометрическіе ряды 441.
Тройные интегралы 311, 314.
Трубчатыя поверхности 571.

Угловая точка 7.
Уединенныя точки кривой 117; — поверхности 120.
Указатели 164.
Ультра-эллиптическіе интегралы 236, 240, 241.
Умноженіе рядовъ 374, 406.
Уравненіе дифференціальное разгибающихся пов. 502; — естественное 477; — Кеплера 435; — Лапласа 79; — потенціала 86.
Усиливающія функціи 412, 424.
Условія Дирикле 444, 604.
Уэль (Houël) 228.

Фаа де Бруно (Faa de Bruno) 38.
Ферма (Fermat) 144.

Фокальная плоскость 581 ; — поверхность конгруэнціи 581; — точка 580.
Фокусы комплекса 587.
Формула бинома 109, 419 ; — Грина 274, 324; — замѣны перемѣнныхъ въ криволинейныхъ интегралахъ 195;— въ простыхъ интегралахъ 175 ; — интерполированія Лагранжа 207 ;— конечныхъ приращеній 9, ея обобщеніе 12, ея распространеніе 18 ;— Котса 208 ; — Лагранжа 433 ; — Лежандра 465 ; — Леженъ-Дирикле 272 ; — Маклорена 104 ; — Остроградскаго 324 ; — приведенія интеграловъ 218, 236, 250 ; — Родрига 564 ; — Симпсона 208 ; — средняго значенія двойн. инт. 265 ; — прост. инт. 159, 160 ; — Стокса 296 ; — Тэлора 96, 104, 179, 410 ; — Уэллиса 252 ; — Френѣ 516.
Форма кубическая бинарная 64.
Франклинъ (Franklin) 269.
Френе (Frenet) 516.
Функціональный опредѣлитель 50, 57, 63.
Функція $B(p, q)$ 293 ; $\Gamma(a)$ 192 ; $\log \Gamma(n+1)$ 305.
Функція 2, 13, 597; — аналитическая 436 ; — Вейерштрасса 455 ; — вполнѣ опредѣленная 2 ; — интегрируемая 155 ; — конечная 149 ; — монотонная 603; — начальная 145, 161 ; — непрерывная многихъ перемѣнныхъ 13, 261 ; — непрерывная одного перемѣннаго 3, 146, 150 453, 455, 598 ; — непрерывная слѣва 601 ; — непрерывная справа 601 ; — непрерывная, не имѣющая производной 8, 455 ; — неявная 39, 50, 428, 431, 617 ; — обратная 46, 55 ; — ограниченная 597 ; — однородная 32 ; — прерывная 4, 203, 599;—равномѣрно непрерывная 152, 262 ; — съ ограниченнымъ измѣненіемъ 604 ; — удовлетворяющая условіямъ Дирикле 444, 604 ; — Липшица 610 ; — усиливающая 412, 424 ; — эллиптическая 244.
Фурье (Fourier) 449.

Характеристика 496, 505.

Центральная плоскость 576 ; — точка 576.
Центры кривизны кривой двойной кривизны 510 ; — кривой плоской 468, 471 ; — поверхности 133.
Циклида Дюпена 572.
Циклоида 473.
Цилиндръ 500.
Цѣлые ряды съ многими перем. 422 ; — съ однимъ перем. 401, 404, 406, 415, 419.
Цѣпная линія 230, 475.

Частныя производныя 14, 46.
Чезаро (Cesáro) 537, 538.
Число ирраціональное 591, 593 ; — производное 609.

Шаль (Chasles) 174.
Шаръ соприкасающійся 534.
Шварціанъ 93.
Шварцъ (Schwarz) 13.
Шелль (Schell) 537.
Шефферъ (Scheffer) 130.
Штейнеръ (Steiner) 216.
Штурмъ (Sturm) 166.

Элементъ линейный 288, 320 ; — объема 319 ; — площади 280 ; — поверхности 288.
Эллипсоидъ, его объемъ 299 ; — поверхность 309.
Эллипсъ, его дуга 244 ; — периметръ 390 ; — площадь 198.
Эллиптическіе интегралы 236, 240, 241, 242.
Эллиптическія координаты 281, 323.
Эпициклоида 488.
Эрмитъ (Hermite) 102, 179, 214, 220, 247.
Эйлерова непрерывность 598.
Эйлерово постоянное 108.
Эйлеровъ интегралъ второго рода 192 ; — перваго рода 294.
Эйлеръ (Euler) 108, 192, 247, 258, 294, 441, 543, 598.

Якоби (Jakobi) 25, 36, 50, 74.
Якобіанъ 50, 57, 63.
Якобіевъ опредѣлитель 50, 57, 63.

ERRATA.

Стран.	*Строка.*		*Напечатано.*	*Должно быть.*
2	14	сверху	относительно	соотвѣтственно
74	1	снизу	partielles (гл. XI)	partielles du premier ordre (гл. XI).
91	12	сверху	$(x-x^2)y''$	$(x-x^3)y''$
99	3	снизу	x^{p_n}	x^{n_p}
397	12	снизу	e^{-x}	$e^{-\alpha x}$
421	12	снизу	$a_0{}^n$.	$a_0{}^m$.
449	13	снизу	Fouier	Fourier

6/0

