ГЕБЕЛЬ

АЛГЕБРА

В. Я. ГЕБЕЛЬ.

СОКРАЩЕННЫЙ КУРСЪ АЛГЕБРЫ

и

СОБРАНІЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

Часть I.

Цѣна 70 коп.

ТЕОРІЯ.

ИЗДАНІЕ ДЕВЯТОЕ

исправленное и дополненное.

1-ое изданіе допущено Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просвѣщенія въ качествѣ руководства въ женскихъ гимназіяхъ, учительскихъ семинаріяхъ и городскихъ училищахъ. Отдѣленіемъ Ученаго Комитета Мин. Нар. Просв. по техн. и профес. образованію одобрено въ качествѣ руководства въ техническихъ училищахъ. Ученымъ Комитетомъ при Свят. Синодѣ допущено въ качествѣ учебнаго пособія въ духовныхъ семинаріяхъ. Учебнымъ Комитетомъ Вѣд. Императрицы Маріи одобрено для женскихъ гимназій и институтовъ.

МОСКВА.—1915.
Типо-Литографія Русскаго Товарищества Печатнаго и Издательскаго дѣла.
Чистые пруды, Мыльниковъ пер., соб. д. Тел. 18-35.

Изъ предисловія къ седьмому изданію.

Предлагаемое руководство предназначается для тѣхъ учебныхъ заведеній въ которыхъ алгебра проходится въ объемѣ меньшемъ курса мужскихъ гимназій.

Въ теченіе ряда лѣтъ авторъ, соображаясь съ требованіями времени и указаніями педагогической печати, постепенно перерабатывалъ, дополнялъ и развивалъ свой курсъ съ цѣлью придать ему бо́льшую полноту и законченность. Такимъ, вполнѣ естественнымъ путемъ, первоначальный объемъ сокращеннаго курса алгебры увеличился почти вдвое.

Въ русской учебной литературѣ въ настоящее время существуетъ довольно большое число полныхъ и сокращенныхъ курсовъ алгебры, такъ что во всякомъ случаѣ ссылаться на недостатокъ того или другого типа учебника уже нельзя. Тѣмъ болѣе ненормальнымъ является тотъ фактъ, что еще во многихъ учебныхъ заведеніяхъ (въ особенности въ женскихъ гимназіяхъ) при прохожденіи алгебры (и надо замѣтить: *только одной алгебры!*) считаютъ возможнымъ обходиться *безъ всякаго печатнаго руководства*. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ книгу замѣняютъ рукописные конспекты и записки, въ большинствѣ же случаевъ почему-то принято довольствоваться одними, кое-какъ записываемыми, объясненіями преподавателя и . . . . . алгебраическимъ задачникомъ. Такое положеніе учебнаго предмета можно назвать только весьма печальнымъ.

Въ средней школѣ необходимо живое слово и руководство преподавателя, но также необходимъ и печатный, доступный пониманію учащихся, учебникъ: одно взаимно дополняетъ другое. Безъ книги, однимъ ученьемъ „со словъ“ нельзя воспитать необходимой въ средней школѣ привычки къ самостоятельнымъ занятіямъ, нельзя повторять курса, нельзя добиться знанія даже элементарныхъ опредѣленій. Такое ученіе воспитываетъ лишь небрежное отношеніе къ учебному предмету, которое не можетъ быть терпимо. Сущность науки, ея идейный духъ остаются невѣдомыми вплоть до окончанія курса, послѣ котораго уже безвозвратно улетучиваются и тѣ жалкіе обрывки знаній, которые остались отъ употребленія задачника съ объясненіями. Механически „набить руку“ въ простыхъ преобразованіяхъ, умѣть коекакъ составить и рѣшить несложное уравненіе — вотъ къ чему, къ несчастію, сводится конечная задача курса алгебры во многихъ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ. Мы имѣемъ здѣсь дѣло съ долголѣтнимъ и упорнымъ предразсудкомъ. L'algèbre n'est pas en faveur dans l'opinion publique. Le vulgaire formule son opinion sur son compte, en disant d'une chose obscure ou inintelligible: c'est de l'algèbre!“ (Bovier — Lapierre. L'algèbre simplifiée). По нашему глубокому убѣжденію, борьба съ этимъ дикимъ и вреднымъ предразсудкомъ является обязанностью каждаго добросовѣстнаго преподавателя.

Предисловіе къ 9-му изданію.

Настоящее изданіе довольно значительно отличается отъ предыдущаго переработкой и дополненіемъ нѣсколькихъ статей. Не останавливаясь на небольшихъ измѣненіяхъ, укажемъ только на наиболѣе существенныя:

1°. Глава объ отрицательныхъ количествахъ расширена съ цѣлью дать болѣе наглядное представленіе о характерѣ этихъ количествъ, а также выяснить необходимость введенія понятія объ алгебраическомъ числѣ.

2°. Измѣнено объясненіе правила знаковъ въ умноженіи. Способъ Коши, страдающій несомнѣнной искусственностью, замѣненъ другимъ болѣе естественнымъ, указаннымъ въ статьѣ г. Орѣшникова (В. Оп. Ф. и Эл. М.).

3°. Введены теоремы о равносильныхъ уравненіяхъ и указаны случаи нарушенія ихъ эквивалентности.

4°. Статьи объ искусственныхъ способахъ рѣшенія системъ уравненій 1-й и 2-й степени увеличены типичными примѣрами.

Изъ небольшихъ измѣненій и дополненій, разсѣянныхъ по разнымъ мѣстамъ учебника, позволимъ указать на изящный выводъ суммы ариѳм. прогрессіи, заимствованный нами изъ очень распространеннаго въ Англіи руководства School Algebra by Paterson.

Въ заключеніе замѣтимъ, что для тѣхъ учебныхъ заведеній, для которыхъ настоящій „Сокращенный курсъ" является недостаточнымъ, одновременно съ нимъ выпускается болѣе подробный „Элементарный курсъ алгебры", содержащій, кромѣ обычныхъ статей курса мужскихъ гимназій, основы ученія о функціяхъ, графическое изображеніе функцій, главныя геометрическія свойства функцій 1-й и 2-й степени, примѣненіе графическаго метода къ рѣшенію и изслѣдованію алгебраическихъ вопросовъ.

9 Сентября
1914.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

Предварительныя понятія.

§ 1. Алгебра, такъ же какъ и ариѳметика, занимается нахожденіемъ рѣшеній различныхъ вопросовъ, относящихся къ числамъ. Но между этими двумя науками есть существенная разница:

1. Алгебра имѣетъ дѣло не съ числами, а съ буквами которыя обозначаютъ какія угодно числа.

2. Въ ариѳметикѣ мы стараемся найти рѣшеніе только *одного* даннаго вопроса съ извѣстными опредѣленными числами; въ алгебрѣ—найти *общее* рѣшеніе всѣхъ вопросовъ одного рода, какія бы числа ни были даны.

Чтобы выяснить, что такое общее рѣшеніе численнаго вопроса, рѣшимъ нѣсколько задачъ.

I. Два путешественника выходятъ въ одно и то же время другъ другу навстрѣчу изъ двухъ городовъ, находящихся на разстояніи 240 верстъ. Первый проходитъ въ день 25 верстъ, второй 35 верстъ. Черезъ сколько дней послѣ своего отправленія они встрѣтятся?

Въ каждый день они приближаются другъ къ другу на $25+35=60$ верстъ; слѣдовательно, они пройдутъ весь раздѣляющій ихъ путь и встрѣтятся черезъ $\frac{240}{60}=4$ дня.

Предположимъ теперь, что требуется рѣшить ту же задачу, но не надъ тремя данными числами 240, 25 и 35 верстъ, а надъ *какими угодно* числами. Это часто дѣлается для того, чтобы рѣшеніе вопроса имѣло болѣе общее значеніе, т.-е. годилось бы для всѣхъ одинаковаго рода задачъ, какія бы цѣлыя или дробныя числа ни были даны. Въ такомъ случаѣ мы уже не можемъ означать данныя величины цифрами, имѣющими одно извѣстное числовое значенiе, а должны пользоваться какими-нибудь другими знаками, подъ которыми можно было бы подразумѣвать *какiя угодно числа.* За такiе знаки берутъ обыкновенно буквы латинской или французской азбуки.

Назовемъ поэтому число верстъ между 2-мя городами черезъ a, число верстъ, проходимыхъ въ день первымъ путешественникомъ, черезъ b, а вторымъ черезъ c.

Рѣшая задачу въ этомъ *общемъ* видѣ, найдемъ, что оба путешественника приближаются другъ къ другу въ каждый день на $b+c$ верстъ и, слѣдовательно, встрѣтятся черезъ столько дней, сколько разъ сумма $b+c$ верстъ заключается въ a верстахъ раздѣляющаго ихъ пути, т.-е. черезъ $\frac{a}{b+c}$ дней. Полученное выраженiе $\frac{a}{b+c}$ представляетъ *общее рѣшенiе* даннаго вопроса. Подставивъ вмѣсто буквъ числа и произведя дѣйствiя, найдемъ прежнiй отвѣтъ: $\frac{240}{25+35}=4$.

Буквенное или *общее* рѣшенiе имѣетъ слѣдующiя выгоды передъ *числовымъ* или *частнымъ* рѣшенiемъ:

1. Оно пригодно не для одной предложенной задачи, но для всѣхъ однородныхъ задачъ, какiя бы числа въ нихъ ни были даны. Напр., если вмѣсто 240, 25 и 35 даны числа 360, 20 и 40, то, подставивъ ихъ въ полученное выраженiе вмѣсто a, b и c, найдемъ, что искомое число дней $=\frac{360}{20+40}=6$. Если $a=163^1/_8$; $b=34^1/_2$; $c=30\frac{3}{4}$, то число дней $=\frac{163\frac{1}{8}}{34\frac{1}{2}+30\frac{3}{4}}=\frac{1305 \cdot 4}{8 \cdot 261}=2\frac{1}{2}$ и такъ далѣе.

2. Изъ буквеннаго выраженiя $\frac{a}{b+c}$ ясно видно, *какiя дѣйствiя* и въ *какомъ порядкѣ* надо совершить надъ данными величинами для полученiя искомаго отвѣта.

3. Легко замѣтить, что при рѣшенiи вопросовъ, подобныхъ данному, имѣетъ существенное значенiе не *именованiе*

предметовъ или понятій, данныхъ въ задачѣ, но *количественная величина* ихъ, а потому прямо переходимъ къ мысли, что нашу задачу можно предложить въ болѣе широкомъ смыслѣ, т.-е. *обобщить*.

Напр., два предмета одновременно начинаютъ двигаться изъ двухъ мѣстъ, находящихся на разстояніи a единицъ длины (какихъ все равно: верстъ, футовъ, метровъ и т. д.). Первый предметъ проходитъ въ каждую *единицу* времени (сутки, часъ, секунду) b, а второй c такихъ единицъ длины. Черезъ сколько единицъ времени они встрѣтятся? Рѣшеніе, очевидно, будетъ прежнее: черезъ $\frac{a}{b+c}$ единицъ времени.

II. Смѣшано 3 сорта чая: 2 фунта по 1,8 руб., 5 ф. по 2 р. и 6 ф. по 2,5 р. за фунтъ. Сколько стоитъ 1 фунтъ смѣси?

Отвѣтъ, какъ легко провѣрить, будетъ: $\frac{28,6}{13}=2,2$ р.

Рѣшимъ эту задачу въ общемъ видѣ: Пусть чаю

1-го	сорта	будетъ	a	фунт.	по	m	руб.	за 1	фунтъ.
2-го	„	„	b	„	„	n	„	„ 1	„
3-го	„	„	c	„	„	p	„	„ 1	„

Стоимость всего чая 1-го сорта будетъ $a.m$ руб., 2-го сорта $b.n$ руб. и 3-го $c.p$ руб. Общая стоимость всего смѣшиваемаго чая$=a.m+b.n+c.p$ руб. Раздѣливъ ее на число всѣхъ фунтовъ, т.-е. на $a+b+c$, получимъ искомую цѣну 1 фунта смѣси $=\frac{a.m+b.n+c.p}{a+b+c}$ руб. Подставивъ въ найденное выраженіе вмѣсто буквъ соотвѣтствующія имъ числа, найдемъ прежній отвѣтъ: $\frac{2.1,8+5.2+6.2,5}{2+5+6}=\frac{28,6}{13}=2,2$ руб. Очевидно, что буквенное выраженіе представляетъ *общее рѣшеніе* всѣхъ такъ называемыхъ задачъ перваго рода на смѣшеніе.

III. Сколько рублей прибыли принесетъ капиталъ въ a рубл., отданный на t мѣсяцевъ по $p\%$ (годовыхъ)?

p рублей получаются со 100 р. за 12 мѣс.; съ 1-го рубля за то же время получимъ въ 100 разъ менѣе, т.-е. $\frac{p}{100}$

руб., а съ a рубл. въ a разъ болѣе, т.-е. $\frac{p.a}{100}$ руб. Прибыль за 1 мѣсяцъ будетъ въ 12 разъ менѣе, т.-е. $\frac{p.a}{100.12}$, а за t мѣсяцевъ въ t разъ болѣе, т.-е. $\frac{p.a.t}{100.12}$ рублей.

Найденное буквенное или *алгебраическое* выраженіе представляетъ *общее рѣшеніе* всѣхъ задачъ на нахожденіе прибыли или процентныхъ денегъ на данный капиталъ, находившійся въ оборотѣ извѣстное время. Полагая $a=3600$; $t=5$; $p=4$ и подставивъ эти числа вмѣсто буквъ, получимъ, что прибыль съ капитала 3600 р., отданнаго на 5 мѣс. по 4%, равна $\frac{5.3600.4}{100.12}=60$ руб., что легко провѣрить непосредственнымъ разсужденіемъ.

Итакъ, *алгебра имѣетъ цѣлью находить общія рѣшенія вопросовъ, относящихся къ числамъ, а также обобщать эти вопросы.*

Кромѣ того, алгебра занимается тѣмъ, *чтобы эти общія рѣшенія представлять въ наиболѣе простомъ и ясномъ видѣ*, и потому учитъ, какъ *преобразовывать* одно буквенное выраженіе въ другое, *тождественное* съ нимъ, т.-е. въ такое, которое остается равнымъ первому при какихъ угодно числахъ [1]).

§ **2. Знаки**. Знаки дѣйствій въ алгебрѣ употребляются тѣ же, какъ и въ ариѳметикѣ, т.-е. $+$ (плюсъ) для сложенія, $-$ (минусъ) для вычитанія, точку $.$ для умноженія, которую, впрочемъ, почти всегда опускаютъ, и двѣ точки : или горизонтальную черту для дѣленія. Такъ что

$a+b$	есть	*сумма*	двухъ количествъ	a и	b
$a-b$	„	*разность*	„	„	„
$a\,.\,b$ или ab	„	*произведеніе*	„	„	„
$a:b$ „ $\frac{a}{b}$	„	*частное*	„	„	„

---

1) Напр., $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$; $a.\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$ и т. д.

Кромѣ того для обозначенія соотношеній между величинами употребляются: знакъ равенства $=$ и знаки неравенства $>$, $<$ и $\neq$.

Знакъ $=$ ставится для обозначенія равенства двухъ величинъ. Напр., если извѣстно, что числовое значеніе a равно числовому значенію суммы b и c, то пишутъ $a=b+c$ (a равно b плюсъ c).

Знаки $>$, $<$ и $\neq$ ставятся для обозначенія неравенства двухъ величинъ.

Если извѣстно, какая изъ двухъ величинъ болѣе другой, то употребляютъ знакъ $>$, обращаемый отверстіемъ къ большей величинѣ, а остріемъ къ меньшей. Напр., $b>c$ (b болѣе c); $k<m+n$ (k менѣе суммы m и n).

Если неизвѣстно, какая изъ двухъ величинъ болѣе другой, то употребляютъ знакъ $\neq$ (перечеркнутое равенство). Напр., $c\neq d$ (c не равно d).

§ **3. Коэффиціентъ**. Произведеніе изъ нѣсколькихъ множителей a, b, c, d, пишется такъ: $abcd$. Если, кромѣ буквенныхъ множителей, есть и численный (все равно, цѣлый или дробный), то онъ ставится обыкновенно впереди и называется *коэффиціентомъ*. Такимъ образомъ,

произведеніе величинъ a, b, c, d, 4 пишутъ такъ: $4abcd$

» » m, n, $\frac{3}{5}$, p » » $\frac{3}{5}mnp$.

Числа 4 и $\frac{3}{5}$ суть коэффиціенты. Очевидно, что $4abcd=abcd+$ $+abcd+abcd+abcd$ и точно такъ же $\frac{3}{5}mnp=\frac{mnp}{5}+\frac{mnp}{5}+\frac{mnp}{5}$.

Итакъ, коэффиціентъ показываетъ, сколько разъ цѣлое алгебраическое выраженіе или извѣстная часть его берется *слагаемымъ*.

Если при алгебраическомъ выраженіи нѣтъ коэффиціента, то должно подразумѣвать, что онъ $=1$, такъ какъ $a=1.a$; $bc=1.bc$ и такъ далѣе.

§ **4. Возвышеніе въ степень**. Кромѣ сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія количествъ въ алгебрѣ изучаются еще нѣкоторыя другія дѣйствія, изъ которыхъ мы разсмотримъ теперь два: возвышенiе количествъ въ степень и извлеченiе изъ нихъ корня.

Возвышенiе или возведенiе количества въ степень есть дѣйствiе, посредствомъ котораго данное количество повторяется множителемъ нѣсколько разъ. *Степенью* называется произведенiе одинаковыхъ множителей, а число, показывающее, сколько разъ количество берется *множителемъ*, называется *показателемъ* степени.

Такимъ образомъ $aa=a^2$ есть возвышенiе во 2-ю степень,
$aaa=a^3$ „ „ „ 3-ю „
$aaaa=a^4$ „ „ „ 4-ю „

Точно такъ же $3.3=3^2=9$; $3.3.3=3^3=27$; $3.3.3.3=3^4=81$; $2^5=32$; $10^3=1000$ и т. д.

Возвышенiе во 2-ю степень называется также возвышенiемъ *въ квадратъ*, а въ 3-ю степень—возвышенiемъ *въ кубъ*. Эти названiя заимствованы изъ геометрiи, такъ какъ возвышенiе во 2-ю степень числа, выражающаго длину стороны квадрата, даетъ числовую величину площади этого квадрата, а возвышенiе въ 3-ю степень числа, выражающаго длину ребра куба, даетъ числовую величину объема этого куба. Если при количествѣ не стоитъ показателя, то оно называется количествомъ 1-й степени, такъ какъ $a=a^1$; $bc=b^1c^1$; $3=3^1$ и т. д.

При возвышенiи въ степень дроби, очевидно, слѣдуетъ возвысить въ степень отдѣльно ея числителя и знаменателя.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5^2}{6^2}=\frac{25}{36};\quad \left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81} \text{ и т. д.}$$

§ **5. Извлеченiе корня.** Извлеченiе корня есть дѣйствiе, въ которомъ по данной степени какого-либо количества находится это количество. Знакъ корня изображается $\sqrt{\ }$. Подъ верхней чертой его пишется такъ называемое *подкоренное количество*, т.-е. данная степень искомаго количества, а надъ нимъ число, называемое *показателемъ корня*, означающее, *какая степень* величины дана.

$\sqrt[2]{49}$ или $\sqrt{49}$ (показатель 2 обыкновенно не пишется) есть корень 2-й степени изъ 49. Подкоренное количество 49 есть 2-я степень искомаго числа. Найти это число и значитъ извлечь корень 2-й степени изъ 49. Искомое число, очевидно, есть 7, такъ какъ $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$.

$\sqrt[3]{64}$ есть корень 3-ей степени изъ 64. Извлечь его, значитъ найти число, 3-я степень котораго равняется 64 (или, иначе, которое, будучи повторено множителемъ 3 раза, дастъ 64). Искомое число $=4$, такъ какъ $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$.

Извлечь $\sqrt[4]{81}$, значитъ найти число, 4-я степень котораго $=81$, или, которое, будучи повторено множителемъ 4 раза, дастъ 81. Искомое число $=3$, такъ какъ $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$.

Такимъ образомъ, корень даннаго количества есть число, которое, будучи повторено множителемъ извѣстное число разъ, равняется данному количеству.

Корень 2-й степени называется обыкновенно *квадратнымъ* корнемъ, а корень 3-й степени—*кубичнымъ* корнемъ.

Итакъ: $\sqrt{49} = 7$, т.-е. квадратный корень изъ 49 равенъ 7.
$\sqrt[3]{64} = 4$ „ кубичный „ „ 64 „ 4.
$\sqrt[4]{81} = 3$ „ корень 4-й степени „ 81 „ 3 и т. д.

Изъ ариѳметики извѣстно, что сложенiе и умноженiе представляютъ *прямыя* дѣйствiя, которымъ соотвѣтствуютъ *обратныя* дѣйствiя: вычитанiе и дѣленiе. Точно такъ же возвышенiе числа въ степень есть прямое дѣйствiе, а извлеченiе корня представляетъ обратное ему дѣйствiе. Въ самомъ дѣлѣ, при возвышенiи въ степень дается *первая* степень количества и требуется опредѣлить его 2-ю, 3-ю, 4-ю и т. д. степень, а при извлеченiи корня, наоборотъ, дается 2-я, 3-я, 4-я и т. д. степень количества и требуется опредѣлить его *первую* степень.

При извлеченiи корней изъ дробей слѣдуетъ извлекать корень отдѣльно изъ числителя и изъ знаменателя:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}, \text{ такъ какъ } \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}; \quad \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5},$$

$$\text{такъ какъ } \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125} \text{ и т. д.}$$

Примѣчанiе. Для практики полезно запомнить квадраты и кубы небольшихъ чиселъ. (См. приложенiе).

§ 6. Одночлены и многочлены. Алгебраическимъ выраженіемъ или *формулой*, какъ мы уже видѣли, называется соединеніе буквъ и чиселъ помощью знаковъ. Алгебраическія выраженія раздѣляются на *одночлены* и *многочлены*.

Одночленъ есть алгебраическое выраженіе, не содержащее знаковъ $+$ или $-$. Напр.,

$$a,\ 3a^2b^4,\ 0{,}7abc^3,\ \frac{5}{11}a\sqrt[3]{m^2n} \text{ — суть одночлены.}$$

Многочленъ есть соединеніе нѣсколькихъ одночленовъ знаками $+$ и $-$. Одночлены, входящіе въ составъ многочлена, называются ***членами*** его. Многочленъ, состоящій изъ двухъ членовъ, называется *двучленомъ* (биномомъ), изъ трехъ членовъ—*трехчленомъ* и т. д.

Напр., $a+b$, $3m^2-\frac{1}{2}bc$ суть двучлены; $a+b+c$, $5m^2-0{,}2n^2+\sqrt[3]{a}$ — трехчлены; $2a+b-3c+5d$—четырехчленъ и т. д.

§ 7. Измѣреніе многочлена и одночлена. Сумма показателей всѣхъ буквъ цѣлаго одночлена называется *измѣреніемъ* его. Такимъ образомъ a, $3m$—суть одночлены *перваго* измѣренія; $5a^2$, bc — *второго* измѣренія; $3ab^4$, $0{,}8cd^2m^2$ — *пятаго* измѣренія и т. д.

Многочленъ, всѣ члены котораго одного измѣренія, называется *однороднымъ*. Измѣреніе каждаго изъ его членовъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и измѣреніе всего многочлена. Напр., выраженіе $a^3-3m^2b+5cd^2+2abc$ есть однородный многочленъ 3-го измѣренія.

§ 8. Выраженія цѣлыя, дробныя, раціональныя, ирраціональныя. Алгебраическое выраженіе, въ которое не входятъ буквенные дѣлители, называется *цѣлымъ*, въ противномъ случаѣ *дробнымъ* или *алгебраической дробью*. Напр., $7a^2b$, $m^2+\frac{2}{3}bc$ — выраженія *цѣлыя*; $\frac{a^3}{b^2}$, $\frac{m+n}{m-n}$ выраженія *дробныя*.

Выраженія, не содержащія корней, назыв. *раціональными*, а содержащія ихъ *ирраціональными* или *радикальными*. Напр., всѣ только что написанныя цѣлыя и дробныя выраженія вмѣстѣ съ тѣмъ и *раціональныя*.

$\sqrt{a}$, $3\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt{mn}$ — выраженія *ирраціональныя* или *радикальныя.*

§ **9. Скобки**. Когда хотятъ показать, что слѣдуетъ произвести извѣстное дѣйствіе надъ двучленомъ, трехчленомъ и вообще многочленомъ, то ихъ заключаютъ въ скобки. Скобки бываютъ трехъ родовъ: $\Bigg(\ \Bigg)$ простыя, $\Bigg[\ \Bigg]$ квадратныя и $\Bigg\{\ \Bigg\}$ фигурныя. Чтобы уяснить значеніе скобокъ, сравнимъ нѣсколько буквенныхъ выраженій.

I. $(a-b)c$; $a-bc$. Въ первомъ случаѣ разность $a-b$ умножается на c, а во второмъ изъ a вычитается произведеніе bc.

II. $[(3a^2+7b)c-2m]:d$; $3a^2+7bc-2m:d$.

Въ первомъ случаѣ: 1) сумма $3a^2+7b$ множится на c; 2) изъ этого произведенія вычитается $2m$ и 3) полученная разность дѣлится на d. Во второмъ случаѣ: изъ суммы $3a^2+7bc$ вычитается частное отъ дѣленія $2m$ на d.

III. $(a+b)\ (a-b)+(m+n)^5$; $a+ba-b+m+n^5$.

Въ 1-мъ случаѣ сумма двухъ количествъ a и b множится на ихъ разность и къ произведенію прибавляется пятая степень суммы количествъ m и n. Во второмъ случаѣ изъ суммы $a+ba$ вычитается b и къ полученной разности прибавляется количество m и пятая степень количества n.

Скобки не ставятся, когда порядокъ дѣйствій ясенъ самъ по себѣ. При этомъ необходимо замѣтить, что если алгебраическое выраженіе *не имѣетъ скобокъ,* то порядокъ дѣйствій при вычисленіи долженъ быть слѣдующій: *сперва производятъ возвышеніе въ степень и извлеченіе корня, затѣмъ умноженіе и дѣленіе и, наконецъ, сложеніе и вычитаніе.*

Напр., въ выраженіи $ab^3+c:d$ надо сперва количество b возвысить въ кубъ и затѣмъ умножить на a, потомъ полученное произведеніе сложить съ частнымъ отъ дѣленія c на d.

Точно такъ же въ выраженіи $m : \sqrt{n} - ac^5$ надо сперва m раздѣлить на квадратный корень изъ n и изъ частнаго вычесть произведеніе a на пятую степень c.

Горизонтальная черта при дѣленіи и извлеченіи корня замѣняетъ собою скобки. Напр., $(a^2+mn):(c-2d)$ пишутъ часто въ такомъ видѣ: $\frac{a^2+mn}{c-2d}$. Корень, напр., квадратный изъ a^2b+3c^4 рѣдко пишутъ въ видѣ $\sqrt{}(a^2b+3c^4)$, но почти всегда $\sqrt{a^2b+3c^4}$. При возвышеніи въ степень одночлена, состоящаго болѣе, чѣмъ изъ 1-ой буквы, слѣдуетъ также заключать его въ скобки. Выраженія $(3a)^2$, $(ab)^3$, $\left(\frac{5}{7}\right)^4$, очевидно, различны отъ выраженій $3a^2, ab^3, \frac{5^4}{7}$ [1]).

Многочленъ, заключенный въ скобки, а также многочленъ, представляющій подкоренное количество [2]), составляетъ какъ бы одно цѣлое и потому принимается за одночленъ. Напр., выраженія $(a+b-c)^3$, $\sqrt{m^2+n^3}$ и т. п. считаются одночленами.

§ **10. Численная величина**. Численной величиной алгебраическаго выраженія называется число, которое получится, если вмѣсто буквъ подставимъ соотвѣтствующія имъ числа и произведемъ дѣйствія, указанныя знаками. Такъ въ § 1 мы нашли числовыя значенія для выраженій: $\frac{a}{b+c}=4$ (при $a=240$; $b=25$; $c=35$); $\frac{pat}{100.12}=60$ (при $p=4$; $a=3600$; $t=5$) и т. д.

Найдемъ еще для примѣра численныя величины двухъ выраженій

1°. $$\frac{3m\sqrt{a^2+b^3}}{4\sqrt{m^2+b+\frac{1}{3}}}, \text{ при } a=1;\ b=2;\ m=\frac{2}{3}.$$

$$\frac{3m\sqrt{a^2+b^3}}{4\sqrt{m^2+b+\frac{1}{3}}}=\frac{3.\frac{2}{3}\sqrt{1^2+2^3}}{4\sqrt{(\frac{2}{3})^2+2+\frac{1}{3}}}=\frac{2\sqrt{1+8}}{4\sqrt{\frac{4}{9}+2\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{9}}{2\sqrt{\frac{25}{9}}}=\frac{3}{2.\frac{5}{3}}=0{,}9.$$

2°. $$m:\sqrt{n}-ac^5 \text{ при } m=200;\ n=4;\ a=3;\ c=2.$$

$$200:\sqrt{4}-3.2^5=200:2-3.32=100-96=4.$$

---

[1]) Объясните эти различія!

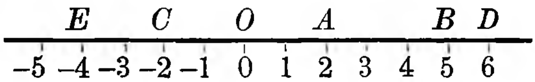
[2]) Такъ какъ черта надъ знакомъ корня замѣняетъ скобки.

Отрицательныя числа.

§ **11.** Для опредѣленія какой-либо величины необходимо прежде всего измѣрить ее, т.-е. сравнить съ другой однородной съ ней величиной, принятой за единицу мѣры. Въ результатѣ такого сравненія или измѣренія получается *ариѳметическое число* цѣлое или дробное, представляющее *размѣръ* данной величины.

Существуетъ, однако, много различныхъ величинъ, для опредѣленія которыхъ ариѳметическое число является *недостаточнымъ*.

Такъ, если возьмемъ нѣкоторую прямую линію и на ней опредѣленную точку O, то ариѳметическія числа, выражающія разстоянія другихъ точекъ A, B, C, D, E,... лежащихъ на этой прямой, отъ точки O будутъ *недостаточны* для опредѣленія положенія этихъ точекъ.



Дѣйствительно, такъ какъ разстоянія отъ точки O могутъ отсчитываться въ *двухъ противоположныхъ направленіяхъ*, а именно влѣво и вправо, то для опредѣленія положенія какой-нибудь точки A, недостаточно сказать, что разстояніе ея отъ точки O равно, напр., 2 дюймамъ, но необходимо еще прибавить *вправо*, т.-е. указать ея направленіе. Точка C тоже находится на разстояніи 2 дюймовъ отъ точки O, но *влѣво*. То же самое можно сказать относительно положенія другихъ точекъ B, E, D...

Итакъ, для опредѣленія положенія точекъ на прямой относительно выбранной постоянной точки O, необходимо знать не только *размѣры* ихъ разстояній отъ этой точки, но и *направленія* этихъ разстояній. Одно направленіе (напр., вправо) принято считать *положительнымъ*, а другое ему противоположное (напр., влѣво) — *отрицательнымъ*. Точно такъ же и числа, выражающія разстоянія по одному направленію, называются *положительными* и обозначаются знакомъ $+$, а числа, выражающія разстоянія по противоположному направленію, называются *отрицательными* и обозначаются знакомъ $-$.

Такимъ образомъ разстоянiе OA обозначается черезъ $+2$, а разстоянiе OC черезъ -2; разстоянiе OB обозначается черезъ $+5$, а разстоянiе OE черезъ -4 и т. д.

Существуетъ очень много величинъ, которыя, подобно указаннымъ въ предыдущемъ примѣрѣ, могутъ принимать *два* значенiя, противоположныя по *смыслу* или по *направленiю*. Напримѣръ: прибыль и убытокъ, имущество и долгъ, выигрышъ и проигрышъ. Величину времени, считая его отъ извѣстнаго даннаго момента, можно понимать въ двухъ противоположныхъ значенiяхъ или направленiяхъ (будущее и прошедшее время). Точно такъ же путь движенiя можно отсчитывать отъ даннаго мѣста въ двухъ противоположныхъ направленiяхъ (впередъ и назадъ, вправо и влѣво, вверхъ и внизъ). Градусы термометра выше нуля (называемаго *точкой замерзанiя воды)* называются градусами *тепла*, а ниже нуля — градусами *холода*.

Одни значенiя этихъ величинъ принято называть *положительными* (прибыль, имущество, выигрышъ, будущее время, направленiе движенiя впередъ, вправо, вверхъ, градусы тепла), а противоположныя имъ значенiя — *отрицательными* (убытокъ, долгъ, проигрышъ, прошедшее время, направленiе назадъ, влѣво, внизъ, градусы холода).

Первыя величины обозначаются положительными числами, а вторыя отрицательными.

§ **12.** Необходимость введенiя отрицательныхъ чиселъ и правилъ дѣйствiй надъ ними заставила расширить понятiе числа, вслѣдствiе чего было введено понятiе объ **алгебраическомъ числѣ или количествѣ**, которое показывало бы не только *размѣръ* (какъ ариѳметическое число), но и *направленiе* величины. *Алгебраическое число или количество* можетъ быть какъ *положительнымъ*, при чемъ передъ нимъ ставятъ или подразумѣваютъ знакъ $+$ (плюсъ), такъ и *отрицательнымъ*, при чемъ передъ нимъ всегда ставятъ знакъ $-$ (минусъ) [1].

---

[1]) Алгебраическiя числа называются также *относительными*, такъ какъ они характеризуютъ отношенiе выражаемыхъ ими количествъ къ одному или противоположному роду величинъ или понятiй, называемыхъ нами положительными и отрицательными.

Границей, отдѣляющей положительныя числа отъ отрицательныхъ, служитъ *нуль*, который не имѣетъ никакого знака.

Совершенно очевидно, что *двѣ равныя* величины, изъ которыхъ одна *положительная*, а другая *отрицательная*, *взаимно уничтожаются*. Напр., 10 руб. имущества и 10 руб. долга, ($+10$ и -10), 5 шаговъ впередъ и 5 шаговъ назадъ ($+5$ и -5) и т. п. взаимно уничтожаются.

§ **13**. *Введеніе понятія объ отрицательныхъ числахъ составляетъ существенное отличіе и преимущество алгебры сравнительно съ ариѳметикой.* При помощи этого понятія значительно обобщаются, какъ рѣшенія вопросовъ, такъ и самые вопросы. Рѣшимъ для примѣра двѣ задачи.

I. Нѣкоторый товаръ былъ купленъ за b рублей, а проданъ за a рублей. Какъ велика полученная прибыль? Отвѣтъ будетъ $a-b$ рублей, независимо отъ того, каковы численныя величины a и b. Разсмотримъ 3 возможныя здѣсь случая:

$$1)\ a>b;\quad 2)\ a=b;\quad 3)\ a<b.$$

Если $a>b$, напр., $a=15$ р.; $b=12$ р.; прибыль $=a-b=$
$=15-12=3$ р. (прибыль *положительная);*

если $a=b$, напр., $a=15$ р., $b=15$ р,, прибыль $=a-b=$
$=15-15=0$ р. (прибыль *нулевая*, т.-е. нѣтъ прибыли);

если $a>b$, напр., $a=15$ р., $b=19$ р., прибыль $=a-b=15-19$.

Третій случай представляетъ невозможную въ ариѳметикѣ задачу, такъ какъ изъ меньшаго числа (15) приходится вычитать большее (19). Однако совершенно ясно, что въ этомъ случаѣ получится не прибыль, а убытокъ въ 4 рубля. Обозначая убытокъ *отрицательнымъ* числомъ, можемъ написать: $15-19=-4$, т.-е. въ этомъ случаѣ слѣдуетъ изъ большаго числа вычесть меньшее и передъ полученной разностью поставить знакъ — (минусъ).

Точно также $10{,}5-26{,}7=-16{,}2$; $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=-\frac{7}{12}$ и т. п.

Поэтому иногда говорятъ, что *отрицательное число есть* *условная разность, полученная при вычитанiи большаго числа изъ меньшаго* [1]).

II. Тѣло подвинулось отъ точки O, лежащей на горизонтальной прямой AB, *направо* на c футовъ и затѣмъ *налѣво* на d футовъ. Въ какомъ разстоянiи тѣло находится теперь отъ точки O [2])?

Отвѣтъ. На разстоянiи $c-d$ футовъ.

При $c>d$, напр., $c=5$ ф.; $d=3$ ф.; $c-d=5-3=2$ ф., т.-е. тѣло находитя на 2 ф. *вправо* отъ точки O.

При $c=d$, напр., $c=5$ ф., $d=5$ ф., $c-d=5-5=0$ ф., т.-е. тѣло возвратилось въ точку O.

При $c<d$, напр., $c=5$ ф., $d=8$ ф., $c-d=5-8=-3$ ф., т.-е. тѣло находится на 3 ф. *влѣво* отъ точки O.

Очевидно, если бы не было введено въ алгебру понятiя объ отрицательныхъ количествахъ, то нельзя было бы пользоваться выведенными рѣшенiями $a-b$, $c-d$ и т. д. во всѣхъ трехъ случаяхъ, а только въ первыхъ двухъ, какъ въ ариѳметикѣ. Но это значило бы почти все равно, что отказаться отъ составленiя общихъ рѣшенiй вопросовъ, такъ какъ при употребленiи буквъ очень часто бываетъ неизвѣстно, какая изъ нихъ означаетъ большее количество и какая меньшее, и, слѣдовательно, всякое выраженiе, содержащее разность надо было бы ограничивать разными условiями, чтобы изъ меньшаго не пришлось вычитать большаго.

§ **14**. **Абсолютной величиной** какого-либо количества называется число единицъ и частей единицы, заключающееся въ этомъ количествѣ, независимо отъ того, положительно оно или отрицательно.

---

[1]) Полученiе отрицательнаго числа можно объяснить слѣдующимъ образомъ; отнимемъ отъ уменьшаемаго все, что можно отъ него отнять, т.-е. 9 единицъ. Остались, слѣдовательно, *невычтенными* 3 единицы. Эти 3 единицы мы и напишемъ со знакомъ минусъ для указанiя невыполненнаго вычитанiя. Такимъ образомъ $9-12=-3$.

Разность -3 сохраняетъ общее свойство разностей, т.-е., если приложить ее къ вычитаемому, то получится уменьшаемое. Дѣйствительно $12+(-3)=9+3+(-3)=9$.

[2]) Учащимся очень рекомендуется сдѣлать чертежъ этой задачи.

Извѣстно, что при одномъ и томъ же уменьшаемомъ остатки будутъ тѣмъ меньше, чѣмъ вычитаемое будетъ больше. Распространивъ это правило и на отрицательныя числа, сдѣлаемъ рядъ такихъ вычитаній: $4-1=3$; $4-2=2$; $4-3=1$; $4-4=0$; $4-5=-1$; $4-6=-2$; $4-7=-3$. Такъ какъ $3>2>1>0>-1>-2>-3$, то заключаемъ:

1) Всякое отрицательное количество меньше нуля.

2) Изъ нѣсколькихъ отрицательныхъ количествъ то большее, котораго абсолютная величина меньше.

Итакъ, въ алгебрѣ, кромѣ ряда положительныхъ чиселъ 1, 2, 3..., которыя идутъ отъ нуля, *увеличиваясь,* разсматривается еще такой же рядъ отрицательныхъ чиселъ: -1, -2, -3..., которыя идутъ отъ нуля, *уменьшаясь*.

Сказанное о числахъ, очевидно, всецѣло примѣняется и къ буквеннымъ выраженіямъ, такъ что при всякомъ выраженіи слѣдуетъ писать или по крайней мѣрѣ [1]) подразумѣвать его знакъ. Поэтому количества m, $3bc$ *положительны*, $-m$, $-3bc$ *отрицательны* и т. д.

§ 15. Приведеніе подобныхъ членовъ. *Подобными членами называются такіе члены, которые или совершенно одинаковы или различаются только коэффиціентами и знаками + и —.* Напр., въ многочленѣ $3a^2b+5abc^2+2a^2b-7abc^2-\frac{1}{2}a^2b$ члены $3a^2b$, $2a^2b$, $-\frac{1}{2}a^2b$ — подобные; точно такъ же $5abc^2$ и $-7abc^2$ — подобные члены. Если въ многочленѣ есть подобные члены, то его можно привести къ простѣйшему виду соединеніемъ подобныхъ членовъ въ одинъ. Такое дѣйствіе называется *приведеніемъ* подобныхъ членовъ. Разсмотримъ встрѣчающіеся здѣсь 2 случая.

I. *Подобные члены имѣютъ одинаковые знаки.* Напримѣръ,

$$3a^2b+2a^2b.$$

Знакъ +, подразумѣваемый передъ $3a^2b$, показываетъ, что слѣдуетъ прибавить $3a^2b$; знакъ + передъ $2a^2b$ показываетъ, что слѣдуетъ прибавить $2a^2b$. Но прибавить сперва $3a^2b$, а потомъ $2a^2b$ все равно, что сразу прибавить $5a^2b$. Поэтому:

$$3a^2b+2a^2b=5a^2b.$$

Положимъ теперь, что оба члена отрицательные: $-3a^2b-2a^2b$.

[1]) Въ случаѣ положительныхъ величинъ.

Знакъ—передъ первымъ членомъ показываетъ, что слѣдуетъ отнять $3a^2b$; тотъ же знакъ передъ вторымъ членомъ показываетъ, что слѣдуетъ отнять $2a^2b$. Но отнять сперва $3a^2b$, а потомъ $2a^2b$ все равно, что сразу отнять $5a^2b$. Итакъ:

$$-3a^2b-2a^2b=-5a^2b.$$

II. *Подобные члены имѣютъ разные знаки.* Напр.,

$$3a^2b-2a^2b.$$

Знаки членовъ показываютъ, что сперва слѣдуетъ прибавить $3a^2b$, а потомъ отнять $2a^2b$, но это все равно, что сразу прибавить a^2b. Итакъ:

$$3a^2b-2a^2b=a^2b.$$

Положимъ теперь, что первый членъ отрицательный, а второй положительный: $-3a^2b+2a^2b$. Разсуждая по предыдущему, находимъ, что сперва надо отнять $3a^2b$, а потомъ прибавить $2a^2b$, но это все равно, что сразу отнять a^2b. Итакъ:

$$-3a^2b+2a^2b=-a^2b.$$

Изъ сказаннаго легко вывести слѣд. правило приведенія подобныхъ членовъ:

1. Если подобные члены имѣютъ *одинаковые* знаки, то складываютъ ихъ коэффиціенты и удерживаютъ ихъ *общій* знакъ.

2. Если подобные члены имѣютъ *разные* знаки, то изъ бо̀льшаго коэффиціента вычитаютъ меньшій и удерживаютъ знакъ *большаго.*

Очевидно, что при приведеніи *одинаковыхъ* членовъ съ разными знаками они взаимно уничтожаются, т.-е. даютъ въ результатѣ нуль.

$$3a^2b-3a^2b=0.$$

Примѣры. 1. $3a^2b+5abc^2+2a^2b-7abc^2-\frac{1}{2}a^2b=4\frac{1}{2}a^2b-2abc^2.$

2. $5ab^3-3a^2m^2c-0{,}3a-a^2m^2c-10{,}5ab^3+a+6ab^3+$
$+4a^2m^2c-3ab^3=-2{,}5ab^3+0{,}7a.$

Примѣчаніе. Легко видѣть, что приведеніе подобныхъ членовъ можно дѣлать двояко:

1) Сдѣлать приведеніе первыхъ двухъ членовъ $5ab^3-10{,}5ab^3$, затѣмъ сдѣлать приведеніе результата, т.-е.

—5,5ab^3 и 3-го члена 6ab^3 и, наконецъ, 2-го результата, т.-е. 0,5ab^3 и 4-го члена—3ab^3 или

2) Сдѣлать сперва приведеніе однихъ положительныхъ членовъ, т.-е. 5ab^3 и 6ab^3, затѣмъ приведеніе однихъ отрицательныхъ членовъ, т.-е.—10,5ab^3 и—3ab^3 и, наконецъ, приведеніе обоихъ результатовъ, т.-е. 11ab^3 и—13,5ab^3.

Четыре алгебраическія дѣйствія.

§ **16.** Дѣйствія надъ алгебраическими буквенными выраженіями, т.-е. надъ одночленами и многочленами совершить на самомъ дѣлѣ, какъ въ ариѳметикѣ, нельзя, а можно только указать ихъ знаками и преобразовать полученный результатъ, чтобы представить его въ простѣйшемъ видѣ.

Такъ какъ буквенныя выраженія представляютъ *алгебраическія* числа, которыя могутъ быть положительными и отрицательными, то необходимо предварительно установить общія правила дѣйствій надъ алгебраическими числами и уже затѣмъ вывести изъ нихъ правила дѣйствій надъ одночленами и многочленами.

Сложеніе.

§ **17.** *Сложеніе двухъ или нѣсколькихъ алгебраическихъ чиселъ есть дѣйствіе, въ которомъ находится ихъ сумма, т.-е. алгебраическое число, заключающее въ себѣ столько положительныхъ и отрицательныхъ единицъ и частей ихъ, сколько ихъ содержится во всѣхъ данныхъ слагаемыхъ числахъ.*

При сложеніи положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ сохраняютъ силу тѣ же правила, какія были выведены для приведенія подобныхъ членовъ.

1) *Если слагаемыя имѣютъ одинаковые знаки, то складываютъ ихъ абсолютныя величины и удерживаютъ общій знакъ.*

2) *Если слагаемыя имѣютъ разные знаки, то изъ слагаемаго, котораго абсолютная величина больше, вычитаютъ слагаемое, котораго абсолютная величина меньше, и удержи-*

ваютъ знакъ большей величины. Въ самомъ дѣлѣ:

I. $(+5)+(+2)=+7=\mathbf{5+2}$; $(-5)+(-2)=-7=\mathbf{-5-2}$, [1]) такъ какъ 5 отрицательныхъ единицъ да еще 2 отрицательныя единицы составятъ 7 отрицательныхъ единицъ.

II. $(+5)+(-2)=(+3)+(+2)+(-2)=+3=\mathbf{5-2}$.

Разлагаемъ слагаемое съ большей абсолютной величиной на два числа, изъ которыхъ одно по абсолютной величинѣ равно второму слагаемому. Два числа $+2$ и -2, равныя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по своимъ знакамъ, очевидно, взаимно уничтожаются. Сдѣлавъ это, получимъ искомую сумму $+3=5-2$.

Точно такъ же $(-5)+(+2)=(-3)+(-2)+(+2)=-3=$ $=\mathbf{-5+2}$.

§ **18. Сложенiе одночленовъ и многочленовъ.** Принимая во вниманiе найденные результаты:

$(+\mathbf{5})+(+\mathbf{2})=7=\mathbf{5+2}$	$(+\mathbf{5})+(-\mathbf{2})=3=\mathbf{5-2}$
$(-\mathbf{5})+(-\mathbf{2})=-7=\mathbf{-5-2}$	$(-\mathbf{5})+(+\mathbf{2})=-3=\mathbf{-5+2}$,

указывающiе, что *во всѣхъ случаяхъ сложенiя* сумму можно замѣнить выраженiемъ, составленнымъ изъ слагаемыхъ, взятыхъ съ ихъ знаками, выводимъ слѣдующее **правило сложенiя** простѣйшихъ алгебраическихъ выраженiй, т.-е. одночленовъ, представляющихъ, какъ извѣстно, какiя-нибудь алгебраическiя (положительныя или отрицательныя) числа:

для сложенiя одночленовъ слѣдуетъ писать всѣ слагаемыя одно за другимъ съ сохраненiемъ ихъ знаковъ и затѣмъ, если возможно, сдѣлать приведенiе.

Такимъ образомъ $a+(+b)=a+b$; $-a+(-b)=-a-b$; $a+(-b)=a-b$; $-a+(+b)=-a+b$; $a+(+b)+(-c)=a+b-c$; $a+(-3b^2)+(-2b^2)=a-3b^2-2b^2=a-5b^2$.

Результатъ алгебраическаго сложенiя называется **алгебраической суммой.** Очевидно, что алгебраическая сумма можетъ быть не только больше (какъ въ ариѳметикѣ), но и меньше каждаго изъ своихъ слагаемыхъ, такъ какъ *приба-*

---

[1]) Слагаемыя положительныя и отрицательныя числа поставлены въ скобкахъ, *чтобы не было смѣшенiя* знаковъ $+$ или $-$, стоящихъ передъ ними и означающихъ только *направленiя* этихъ величинъ со знакомъ $+$ дѣйствiя сложенiя (или со знакомъ $-$ дѣйствiя вычитанiя).

вить отрицательное число все равно, что *вычесть равное ему положительное*. Напр., $5+(-3)=2=5-3$.

Въ случаѣ многочленовъ правило сложенія остается то же самое, т.-е. *слѣдуетъ писать многочлены одинъ за другимъ съ сохраненіемъ ихъ знаковъ и затѣмъ, если возможно, сдѣлать приведеніе.*

Въ самомъ дѣлѣ, каждый многочленъ можно разсматривать какъ алгебраическую сумму всѣхъ его членовъ. Поэтому приложить къ многочлену $(a+b-c)$ многочленъ $(d-e)$ все равно, что къ суммѣ 3-хъ одночленовъ $a+(+b)+(-c)$ прибавить еще сумму двухъ одночленовъ $d+(-e)$ или найти сумму 5-ти одночленовъ $a+(+b)+(-c)+(+d)+(-e)$, Итакъ:

$$(a+b-c)+(d-e)=a+(+b)+(-c)+(+d)+(-e)=$$
$$a+b-c+d-e.$$

Примѣръ. $(3am^3+2b^2c)+(8b-am^3-\frac{1}{2}c^2d)+(-3b^2c-5c+$

$+5c^2d)=3am^3+2b^2c+8b-am^3-\frac{1}{2}c^2d-3b^2c-5c+5c^2d=2am^3-b^2c+$

$+8b+4\frac{1}{2}c^2d-5c.$

Примѣчаніе. Если слагаемые многочлены содержатъ подобные члены, то рекомендуется писать ихъ одинъ подъ другимъ, размѣщая такъ, чтобы подобные члены находились подъ подобными.

Примѣры. **1.**
$$\begin{array}{r}
5ax-3by+4cz\\
-2ax+4by-3cz\\
-ax+7by-cz\\
9ax-11by+10cz\\
\hline
11ax-3by+10cz
\end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rrrrr}
3a^2 & -5a & +2b & -4 & \\
 & 7a & -4b & +5 & -3b^2\\
2a^2 & -a & -b & & -2b^2\\
\hline
5a^2 & +a & -3b & +1 & -5b^2
\end{array}$$

§ 19. Два основныя свойства суммы.

I. **Свойство перемѣстительности:** *Сумма не измѣнится отъ перемѣщенія слагаемыхъ*, т.-е.

$$a+b+c=b+c+a=c+a+b=\ \ldots\ldots$$

II. **Свойство сочетательности:** *Сумма не измѣнится, если нѣсколько ея слагаемыхъ замѣнимъ ихъ суммой и обратно*, т.-е.

$$a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b=\ \ldots\ldots$$

Дѣйствительно, такъ какъ число положительныхъ и отрицательныхъ единицъ и частей ихъ въ *каждомъ* слагаемомъ не измѣнится, если будемъ перемѣщать эти слагаемыя или соединять (сочетать) ихъ въ группы, то слѣдовательно не измѣнится число единицъ и частей ихъ и *въ суммѣ*. На основаніи этихъ свойствъ сложеніе алгебраическихъ чиселъ можно производить слѣдующимъ образомъ: *сперва найти сумму всѣхъ положительныхъ чиселъ, затѣмъ сумму всѣхъ отрицательныхъ и, наконецъ, обѣ эти суммы соединить въ одну*.

$$12-5-\tfrac{1}{2}+1\tfrac{1}{2}-10+6-1=(+12+1\tfrac{1}{2}+6)+(-5-\tfrac{1}{2}-10-1)=(+19\tfrac{1}{2})+(-16\tfrac{1}{2})=3.$$

Вычитаніе.

§ **20**. *Вычитаніе алгебраическихъ чиселъ есть дѣйствіе обратное сложенію; въ немъ по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ, называемой уменьшаемымъ, и одному изъ нихъ называемому вычитаемымъ, находится другое, называемое разностью.*

Иначе говоря, *вычесть одно алгебраическое число изъ другого значитъ найти такое третье алгебраическое число (разность), которое, будучи прибавлено къ вычитаемому, давало бы уменьшаемое.*

Отсюда легко вывести слѣдующее правило вычитанія:

Чтобы вычесть одно алгебраическое количество изъ другого, надо къ уменьшаемому прибавить вычитаемое, взятое съ обратнымъ знакомъ.

Дѣйствительно:

$(+\mathbf{5})-(+\mathbf{2})=\mathbf{5}-\mathbf{2}=3,$ такъ какъ $5-2+2=5;$

$(+\mathbf{5})-(-\mathbf{2})=\mathbf{5}+\mathbf{2}=7,$ „ $5+2-2=5;$

$(-\mathbf{5})-(+\mathbf{2})=-\mathbf{5}-\mathbf{2}=-7,$ „ $-5-2+2=-5;$

$(-\mathbf{5})-(-\mathbf{2})=-\mathbf{5}+\mathbf{2}=-3$ „ $-5+2-2=-5.$

Очевидно, что въ алгебраическомъ вычитаніи разность можетъ быть *больше* уменьшаемаго (2-й и 4-й примѣры), такъ какъ *вычесть отрицательное количество все равно, что приложить положительное, равное ему по абсолютной величинѣ.*

§ **21. Вычитаніе алгебраическихъ выраженій.** Изъ предыдущаго непосредственно вытекаетъ *правило вычитанія* **одночленовъ:** *при вычитаніи одночлена слѣдуетъ къ уменьшаемому приписать вычитаемый одночленъ съ обратнымъ знакомъ и, если возможно, сдѣлать приведеніе.*

Примѣръ.

$$-7a^2b-(+2a^2b)=-7a^2b-2a^2b=-9a^2b.$$

При вычитаніи **многочлена** *слѣдуетъ къ уменьшаемому приписать всѣ члены вычитаемаго многочлена, взятые съ обратными знаками и, если возможно, сдѣлать приведеніе.*

Это слѣдуетъ изъ того, что многочленъ можно разсматривать какъ алгебраическую сумму всѣхъ его членовъ (§ 18), а чтобы измѣнить знакъ суммы надо измѣнить знаки всѣхъ ея слагаемыхъ.

Примѣръ. $(7a^5b^2-2abc^3-m)-(-10abc^3+3m-a^5b^2)=$ $=7a^5b^2-2abc^3-m+10abc^3-3m+a^5b^2=8a^5b^2+8abc^3-4m.$

§ **22. Раскрытіе скобокъ.** Изъ правилъ сложенія и вычитанія непосредственно вытекаютъ слѣдующія правила раскрытія скобокъ, передъ которыми стоитъ знакъ + или —.

1) (Случай сложенія). *Если передъ скобками стоитъ +, то скобки опускаются вмѣстѣ съ знакомъ +, при чемъ всѣ члены внутри скобокъ сохраняютъ свои знаки.* Напр.,

$$2a+3b+(-4c+d)=2a+3b-4c+d.$$

2) (Случай вычитанія). *Если передъ скобками стоитъ —, то скобки опускаются вмѣстѣ съ знакомъ —, при чемъ всѣ члены внутри скобокъ измѣняютъ свои знаки на обратные.* Напр., $2a+3b-(-4c+d)=2a+3b+4c-d.$

Если имѣется нѣсколько скобокъ, одна внутри другой, то ихъ раскрываютъ по порядку, начиная съ наружныхъ или внутреннихъ скобокъ, при чемъ слѣдуетъ помнить, что многочленъ, заключенный въ скобки, считается за одночленъ (§ 9).

Примѣры. I. $5c-[7d+(4c-6d)-3c]$.

1. Раскрываемъ сперва наружныя, а потомъ внутреннія скобки:

$5c-7d-(4c-6d)+3c=5c-7d-4c+6d+3c=4c-d.$

2. Раскрываемъ сперва внутреннія скобки:

$5c-[7d+4c-6d-3c]=5c-7d-4c+6d+3c=4c-d.$

II. $a-\{4b-[a-(-3b+3c)+2c-(-2b+a-c)]\}$.

1. Начнемъ съ раскрытія наружныхъ скобокъ: $a-4b+$ $+[a-(-3b+3c)+2c-(-2b+a-c)]=a-4b+a-(-3b+3c)+$ $+2c-(-2b+a-c)=a-4b+a+3b-3c+2c+2b-a+c=a+b.$

2. Начнемъ съ раскрытія внутреннихъ скобокъ: $a-\{4b-$ $-[a+3b-3c+2c+2b-a+c]\}=a-\{4b-a-3b+3c-2c-2b+$ $+a-c\}=a-4b+a+3b-3c+2c+2b-a+c=a+b$.

Очевидно, что тѣ же самыя правила существуютъ и при обратномъ преобразованіи, т.-е. при заключеніи всего многочлена или части его въ скобки.

$2a^3-3ab-7ab^2+5b=+(2a^3-3ab-7ab^2+5b)=-(-2a^3+$ $+3ab+7ab^2-5b)=2a^3-(3ab+7ab^2-5b)=2a^3-3ab+(-7ab^2+$ $+5b)$ и т. д.

Умноженіе.

§ **23**. **Умноженіе алгебраическихъ чиселъ. Правило знаковъ.** Чтобы вывести правило умноженія двухъ алгебраическихъ (положительныхъ и отрицательныхъ) чиселъ, разсмотримъ 4 возможные здѣсь случая:

I. $(+7)\cdot(+3)$; II. $(-7)\cdot(+3)$; III. $(+7)\cdot(-3)$; IV. $(-7)\cdot(-3)$.

Замѣтимъ, что въ первыхъ двухъ примѣрахъ множитель—положительный, а въ двухъ послѣднихъ множитель—отрицательный.

I. $(+7)\cdot(+3)$. Этотъ случай представляетъ обыкновенное ариѳметическое умноженіе. Умножить $(+7)$ на $(+3)$ значитъ множимое $(+7)$ повторить 3 раза слагаемымъ, т.-е.

$$(+7)\cdot(+3)=(+7)+(+7)+(+7)=+21.$$

II. $(-7)\cdot(+3)$. Руководствуясь тѣмъ же ариѳметическимъ опредѣленіемъ, находимъ, что умножить (-7) на $(+3)$ значитъ множимое (-7) повторить 3 раза слагаемымъ, т.-е.

$$(-7)\cdot(+3)=(-7)+(-7)+(-7)=-21.$$

III. $(+7)\cdot(-3)$. Въ этомъ случаѣ мы не можемъ уже основываться на ариѳметическомъ опредѣленіи и поэтому должны самостоятельно рѣшить вопросъ: что значитъ $(+7)$ взять минусъ три раза? Обратимъ вниманіе, что въ данномъ случаѣ множитель есть отрицательное число, т.-е. *противоположное* положительному. Въ дѣйствіяхъ сложенія и вычитанія отрицательныхъ чиселъ получаемые результаты противоположны результатамъ тѣхъ же дѣйствій съ положительными количествами: прибавить отрицательное число все равно, что отнять равное ему положительное и, наоборотъ, отнять отрицательное число все равно, что прибавить равное ему положительное.

Основываясь на этомъ, можно утверждать, что если $(+7).(+3)$ означаетъ, что $+7$ надо взять 3 раза *слагаемымъ*, то $(+7).(-3)$ будетъ означать, что $+7$ надо взять 3 раза *вычитаемымъ*, т.-е. *съ обратнымъ знакомъ*.

Поэтому $(+7).(-3)=(-7)+(-7)+(-7)=-21.$

IV. $(-7).(-3)$. Такъ какъ здѣсь множитель (-3)—отрицательное число, то, разсуждая совершенно подобно предыдущему, находимъ, что въ этомъ случаѣ надо множимое -7 взять 3 раза *вычитаемымъ*, т.-е. *съ обратнымъ знакомъ*.

$$(-7).(-3)=(+7)+(+7)+(+7)=+21.$$

Итакъ: $\left.\begin{array}{l}(+7).(+3)=+21\\ (-7).(-3)=+21\end{array}\right]$ и $\left.\begin{array}{l}(-7).(+3)=-21\\ (+7).(-3)=-21\end{array}\right]$ слѣдовательно: $\left.\begin{array}{l}(+a).(+b)=+ab\\ (-a).(-b)=+ab\end{array}\right]$ $\left.\begin{array}{l}(-a).(+b)=-ab\\ (+a).(-b)=-ab\end{array}\right]$

Такимъ образомъ: *при умноженіи двухъ количествъ съ одинаковыми знаками получается въ произведеніи плюсъ, а съ разными минусъ* [1]).

---

[1]) Иногда это правило выражаютъ, хотя и не совсѣмъ правильно, такимъ образомъ: плюсъ на плюсъ и минусъ на минусъ даютъ въ произведеніи $+$, а плюсъ на минусъ или минусъ на плюсъ даютъ въ произведеніи $-$.

Правило знаковъ очень часто выводятъ также при помощи слѣдующаго опредѣленія умноженія (даннаго французскимъ математикомъ *Коши*):

Умноженіе есть дѣйствіе, въ которомъ изъ множимаго составляется новое число, называемое произведеніемъ, точно такимъ же образомъ, какимъ множитель составленъ изъ положительной единицы.

При умноженіи положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ возможны слѣдующіе 4 случая:

I. $(+7).(+3)$. Множитель $+3$ составленъ изъ $+1$ черезъ повтореніе ея слагаемымъ 3 раза; слѣдовательно, произведеніе составится черезъ повтореніе $+7$ слагаемымъ 3 раза:

$$(+7).(+3)=+7+7+7=+21.$$

Легко видѣть, что при перемноженіи нѣсколькихъ количествъ положительныхъ и отрицательныхъ произведеніе будетъ съ знакомъ $+$, если число отрицательныхъ множителей *четное*, и со знакомъ $-$, если число ихъ *нечетное*. Напр.,

$$a.-b.-c.d.-e.-f=abcdef;\ a.-b.-c.d.-e=-abcde.$$

Вполнѣ очевидно, что если одинъ изъ множителей равенъ нулю, то и все произведеніе равно нулю, т.-е.

$$0.a=a.0=0.$$

§ 24. Умноженіе степеней одного и того же количества. *При умноженіи степеней одинаковыхъ буквъ показатели ихъ складываются.*

Въ самомъ дѣлѣ: $a^3.a^2=a.a.a.a.a.=a^5=a^{3+2}$;

$$b^2.b=b.b.b=b^3$$

Вообще: $a^m.a^n.=\overbrace{a.a.a\ldots}^{m\text{ разъ}}\overbrace{a.a.a\ldots}^{n\text{ разъ}}=\overbrace{a.a.a.a\ldots}^{m+n\text{ разъ}}=a^{m+n}$.

Примѣръ: $c^{m+1}.c^{3m+2}=c^{m+1+3m+2}=c^{4m+3}$.

§ 25. Умноженіе одночленовъ. $3a^5b^4c.-5a^2bd^2$. Такъ какъ отъ перемѣны порядка множителей произведеніе не измѣняется, то $3a^5b^4c.-5a^2bd^2=3.-5.a^5.a^2.b^4.b.c.d^2=-15a^7b^5cd^2$, т.-е. *при умноженіи одночленовъ коэффиціенты перемножаются (съ соблюденіемъ правила знаковъ), показатели степеней одинаковыхъ буквъ складываются, а буквы, входящія въ одинъ изъ производителей, переносятся въ произведеніе безъ измѣненія.*

Правило, очевидно, остается справедливымъ и въ случаѣ произведенія какого угодно числа одночленовъ.

II. $(-7).(-3)$. Множитель -3 составленъ изъ $+1$ черезъ перемѣну въ ней знака и повтореніе ея затѣмъ 3 раза слагаемымъ; слѣдовательно, произведеніе составится изъ -7 черезъ перемѣну въ немъ знака и повтореніе его слагаемымъ 3 раза:

$$(-7).(-3)=+7+7+7=+21.$$

III. $(-7).(+3)$. Чтобы найти произведеніе, слѣдуетъ -7 повторить слагаемымъ 3 раза (множитель составленъ какъ въ I случ.):

$$-7.+3=-7-7-7=-21.$$

IV. $(+7).(-3)$. Чтобы найти произведеніе, слѣдуетъ перемѣнить знакъ множимаго и затѣмъ повторить его слагаемымъ 3 раза (множитель составленъ какъ во II случ.):

$$+7.-3=-7-7-7=-21.$$

Примѣръ. $-\frac{1}{2}a^2b.3mn.4am^2c.a^3c^2=-6a^6bc^3m^3n$.

§ 26. Умноженіе многочлена на одночленъ. *Чтобы умножить многочленъ на одночленъ, нужно каждый членъ многочлена помножить на одночленъ съ соблюденіемъ правила знаковъ*, т.-е.

$$(a+b-c)\,m=am+bm-cm.$$

Докажемъ это правило, замѣтивъ, что множитель m можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ, цѣлымъ или дробнымъ.

1) *Множитель m цѣлое число.* Напр., $m=3$. Чтобы сдѣлать умноженіе $(a+b-c).3$, надо, по опредѣленію этого дѣйствія (§ 23), повторить множимое $(a+b-c)$ слагаемымъ 3 раза. Поэтому

$$(a+b-c).3=(a+b-c)+(a+b-c)+(a+b-c)=3a+3b-3c.$$

Если m отрицательное число, напр., $m=-3$, то (§ 23) слѣдуетъ повторить множимое вычитаемымъ (или съ обратнымъ знакомъ) 3 раза, т.-е.

$$(a+b-c).-3=-(a+b-c)-(a+b-c)-(a+b-c)=-3a-3b+3c.$$

2) *Множитель m есть дробь* Напр., $m=\frac{3}{4}$. Чтобы сдѣлать умноженіе $(a+b-c).\frac{3}{4}$, надо одну четверть $(a+b-c)$ или $\frac{1}{4}(a+b-c)$ повторить слагаемымъ 3 раза. Но $\frac{1}{4}(a+b-c)=$ $=\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}c$ [1]). Такимъ образомъ $(a+b-c).\frac{3}{4}=$

$$=\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}c\right).3=\frac{3}{4}a+\frac{3}{4}b-\frac{3}{4}c.$$

Итакъ, правило остается справедливымъ для всѣхъ случаевъ. Такъ какъ отъ перемѣны порядка множителей произведеніе не измѣняется, то выведенное правило сохраняется и при умноженіи одночлена на многочленъ.

---

[1]) Это легко провѣрить, помноживъ какъ $\frac{1}{4}(a+b-c)$, такъ и $\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}c$ на 4. Получимъ въ обоихъ случаяхъ одно и то же произведеніе $a+b-c$.

Примѣръ. $-2a^3 \cdot \left(3b - 5ab^2 + \frac{1}{2}a^2c\right) = -6a^3b + 10a^4b^2 - a^5c.$

§ **27. Умноженіе многочлена на многочленъ.** Дано умножить

$$(a+b-c)\ (m+n).$$

Замѣнимъ на время 1-й многочленъ одной буквой, напр., A; тогда $(a+b-c)\ (m+n) = A.(m+n) = Am + An$ (по предыдущему §). Подставимъ теперь вмѣсто A его величину:

$$Am+An=(a+b-c)m+(a+b-c)n=am+bm-cm+an+bn-cn.$$

Итакъ: $(a+b-c)\ (m+n)=am+bm-cm+an+bn-cn$, т.-е. *для умноженія многочлена на многочленъ надо каждый членъ множимаго помножить на каждый членъ множителя съ соблюденіемъ правила знаковъ.*

Примѣры. 1. $(a^2+4b^2-2ab)\ (a+2b)=a^3+4ab^2-2a^2b+$
$+2a^2b+8b^3-4ab^2=a^3+8b^3.$

2. $(ax^2+\frac{1}{2}a^3-3a^2x)\ (\frac{1}{3}ax-\frac{1}{2}x^2)=\frac{1}{3}a^2x^3+\frac{1}{6}a^4x-$
$-a^3x^2-\frac{1}{2}ax^4-\frac{1}{4}a^3x^2+\frac{3}{2}a^2x^3=1\frac{5}{6}a^2x^3+\frac{1}{6}a^4x-$
$-1\frac{1}{4}a^3x^2-\frac{1}{2}ax^4.$

3. $(2m^2-3mn^p)\ (5m^q+n^k)=10m^{q+2}-15m^{q+1}n^p+$
$+2m^2n^k-3mn^{p+k}.$

§ **28. Умноженіе расположенныхъ многочленовъ.** Для удобства дѣйствія при умноженіи многочленовъ очень часто располагаютъ множимое и множителя по *возрастающимъ* (восходящимъ) или *убывающимъ* (нисходящимъ) степенямъ одной какой-нибудь входящей въ нихъ буквы, т.-е. пишутъ члены каждаго многочлена въ такомъ порядкѣ, чтобы показатели степеней этой буквы или увеличивались, или уменьшались отъ перваго члена къ послѣднему. Членъ, содержащій наибольшаго показателя, называется *высшимъ*, а наименьшаго показателя—*низшимъ.*

Примѣръ. Многочленъ $2ax^2+8-3a^2x+\frac{1}{2}x^3$ располагается по *возрастающимъ* степенямъ буквы x такимъ образомъ:

$8-3a^2x+2ax^2+\frac{1}{2}x^3$; *по убывающимъ:* $\frac{1}{2}x^3+2ax^2-3a^2x+8.$

Расположеніе дѣйствія въ такомъ случаѣ будетъ слѣдующее:

Требуется умножить $(7a-5+2a^2)(3-4a^2+a)$.

$$\begin{array}{llll}
2a^2+7a-5 & & & \\
-4a^2+\ a+3 & & & \\
\hline
-8a^4-28a^3+20a^2\ \ldots\ldots & \text{Произведеніе} & \text{множимаго} & \text{на}-4a \\
\quad 2a^3+7a^2-5a\ \ldots\ldots & \text{"} & \text{"} & \text{"}\ a \\
\qquad 6a^2+21a-15\ \ . & \text{"} & \text{"} & \text{"}\ 3 \\
\hline
-8a^4-26a^3+33a^2+16a-15. & \text{Полное произведеніе.} & &
\end{array}$$

Выгода такого расположенія состоитъ въ томъ, что подобные члены подписываются одинъ подъ другимъ, чѣмъ значительно облегчается ихъ приведеніе. Изъ приведеннаго примѣра слѣдуетъ:

1. Если множимое и множитель расположены по убывающимъ или возрастающимъ степенямъ, то и произведеніе располагается по убывающимъ или возрастающимъ степенямъ.

2. Высшій членъ произведенія получается отъ перемноженія высшихъ, а низшій членъ отъ перемноженія низшихъ членовъ множимаго и множителя.

3. *Число членовъ произведенія до приведенія подобныхъ членовъ равно произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя.* Дѣйствительно, если напр., во множимомъ 4 члена, а во множителѣ 3 члена, то при умноженіи получится три ряда, а въ каждомъ ряду по 4 члена произведенія, т.-е. всего $4.3=12$ членовъ произведенія.

4. Высшій и низшій члены не могутъ имѣть себѣ подобныхъ членовъ и потому произведеніе двухъ многочленовъ *не можетъ содержать менѣе двухъ членовъ.*

§ 29. Общія свойства произведенія.

I. **Свойство перемѣстительности**: *Произведеніе не измѣнится отъ перемѣщенія его множителей,* т.-е.

$$(-3).(+5).(-10).=(+5).(-10).(-3)=(-10).(-3).(+5)=\ldots=150.$$
$$(-a).(+b).(-c)=(+b).(-c).(-a)=(-c).(-a).(+b)=\ldots=abc.$$

II. **Свойство сочетательности**: *Произведеніе не измѣнится, если нѣкоторые множители замѣнимъ ихъ произведеніемъ и обратно,* т.-е.

$$2.-3.5.10=-6.5.10=2.-150=\ldots=-300.$$
$$-a.b.c.d=-a(bcd)=(-abc)d=\ldots=-abcd.$$

III. **Свойство распредѣлительности**: *Чтобы умножить алгебраическую сумму на алгебраическое число, достаточно каждое слагаемое умножить на это число и полученныя произведенія сложить,* т.-е.

$$(3+7-5).2=3.2+7.2-5.2; \qquad (a+b-c)m=am+bm-cm.$$

Для положительныхъ чиселъ первыя два свойства извѣстны изъ ариѳметики. Для алгебраическихъ чиселъ абсолютная величина ихъ произведенія равна произведенію абсолютныхъ величинъ множителей, такъ какъ они перемножаются ариѳметически. Что же касается до знака произведенія, то онъ зависитъ только отъ четности или нечетности числа отрицательныхъ множителей, которыя очевидно не измѣняются. Итакъ, ни перемѣщенія алгебраическихъ множителей, ни группировка ихъ не измѣняютъ ни величины, ни знака ихъ произведенія.

Справедливость третьяго свойства доказана въ § 26.

Слѣдствіе. **Изъ свойства сочетательности слѣдуетъ, что** ***для вычисленія произведенія нѣсколькихъ множителей возможно разбить ихъ на какія угодно группы, найти произведенія множителей каждой группы и перемножить полученныя произведенія.*** **Такой порядокъ дѣйствій иногда облегчаетъ нахожденіе произведенія.**

Примѣръ. $(+2).(-3).(-4).(+5).(-10)=(+24).(-50)=-1200$.

§ 30. Замѣчательные случаи умноженія многочленовъ.

1. $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$, т.-е.

Квадратъ суммы двухъ количествъ равенъ квадрату перваго количества, плюсъ удвоенное произведеніе перваго количества на второе, плюсъ квадратъ второго количества.

2. $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$, т.-е.

Квадратъ разности двухъ количествъ равенъ квадрату перваго количества, минусъ удвоенное произведеніе перваго количества на второе, плюсъ квадратъ второго количества.

3. $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$, т.-е.

Произведеніе суммы двухъ количествъ на ихъ разность равно разности квадратовъ этихъ количествъ.

4. $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+$ $+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, т.-е.

Кубъ суммы двухъ количествъ равенъ кубу перваго количества, плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго количества на второе, плюсъ утроенное произведеніе перваго количества на квадратъ второго, плюсъ кубъ второго количества.

5. $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a^3-2a^2b+$ $+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, т.-е.

Кубъ разности двухъ количествъ равенъ кубу перваго количества, минусъ утроенное произведеніе квадрата перваго количества на второе, плюсъ утроенное произведеніе перваго ко-

личества на квадратъ второго, минусъ кубъ второго количества [1]).

Посредствомъ приведенныхъ формулъ иногда можно сдѣлать умноженіе проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ.

Примѣры: 1. $(7a^3b^2+\frac{1}{2}ax^4)(7a^3b^2-\frac{1}{2}ax^4)=49a^6b^4-\frac{1}{4}a^2x^8$.

2. $(2a^5b-3ac^2)^2=4a^{10}b^2-12a^6bc^2+9a^2c^4$.

3. $(2a+3b^3)^3=8a^3+36a^2b^3+54ab^6+27b^9$.

4. $(m+n+p)^2=[(m+n)+p]^2=(m+n)^2+$
$+2(m+n)p+p^2=m^2+n^2+p^2+2mn+2mp+2np$. [2]).

5. $(m+n+p)(m+n-p)=[(m+n)+p][(m+n)-p]=$
$=(m+n)^2-p^2=m^2+n^2+2mn-p^2$.

Точно такъ же нѣкоторыми (обыкновенно 1, 2 и 3-ей) формулами бываетъ иногда выгодно пользоваться въ дѣйствіяхъ надъ числами, въ особенности, при возвышеніи ихъ въ квадратъ [3]).

---

1) Полезно замѣтить, что знаки $+$ и $-$ идутъ, взаимно чередуясь $(+,-,+,-)$. То же самое получится при возвышеніи разности $a-b$ въ 4-ю, 5-ю и т. д., степени.

2) Двучленъ $m+n$, заключенный въ скобки, разсматривается какъ одночленъ (§ 9).

3) При возвышеніи въ квадратъ небольшихъ чиселъ полезно замѣтить слѣдующіе сокращенные пріемы:

1. Общій видъ всякаго числа, кончающагося на 5, есть $10n+5$. Возвышая его въ квадратъ, получимъ

$$(10n+5)^2=100n^2+100n+25=100n(n+1)+25,$$ т.-е.

чтобы возвысить въ квадратъ число, кончающееся на 5, достаточно умножить число, стоящее передъ 5-ю, на слѣдующее за нимъ цѣлое число и къ произведенію приписать 25.

Примѣры: $35^2=1225$; $75^2=5625$; $205^2=42025$.

Точно такъ же, возвышая въ квадратъ смѣшанное число вида $n+\frac{1}{2}$, получимъ, что $(n+\frac{1}{2})^2=n(n+1)+\frac{1}{4}$.

Примѣры: $(6\frac{1}{2})^2=42\frac{1}{4}$; $(10\frac{1}{2})^2=110\frac{1}{4}$.

2. Всякое цѣлое число близкое къ 50 можетъ быть представлено въ видѣ $50\pm n$. Возвышаемъ его въ квадратъ:

$$(50\pm n)^2=2500\pm100n+n^2=100(25\pm n)+n^2.$$

Примѣры: $47^2=(50-3)^2=100(25-3)+9=2209$.

$62^2=(50+12)^2=100(25+12)+144=3844$.

Для чиселъ близкихъ къ 100 удобнѣе пользоваться слѣдующей формулой:

$$(100\pm n)^2=10000\pm200n+n^2=100(100\pm2n)+n^2.$$

Примѣры: $98^2=(100-2)^2=100(100-4)+4=9604$.

$112^2=(100+12)^2=100(100+24)+144=12544$.

Примѣры: 1. $41 \cdot 39 = (40+1)(40-1) = 40^2 - 1^2 = 1600 - 1 = 1599$.

2. $58^2 = (50+8)^2 = 2500 + 800 + 64 = 3364$ или иначе: $58^2 = (60-2)^2 = 3600 - 240 + 4 = 3364$.

3. $998^2 = (1000-2)^2 = 1000000 - 4000 + 4 = 996004$.

§ **31. Тождества.** Два выраженія, имѣющія одинаковую числовую величину, образуютъ *тождество*. Тождества бываютъ *числовыя,* напр.,

$$2 \cdot 2 = 4;\ 7+5 = 15-3;\ \frac{3}{4} = 0{,}75;$$

и *буквенныя,* напр.,

$$a+b = b+a;\ ab = ba;\ \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m};$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и т. п. (§ 29). Очевидно, что при подстановкѣ вмѣсто буквъ *какихъ угодно* соотвѣтствующихъ имъ чиселъ буквенное тождество обращается въ числовое. Для обозначенія тождественности двухъ выраженій вмѣсто знака $=$ часто употребляютъ *знакъ тождества* $\equiv$ *(тождественно равно).* Напр., тождество $ab \equiv ba$ читается: произведеніе ab тождественно равно произведенію ba.

Нѣкоторыя буквенныя тождества имѣютъ довольно сложный видъ. Чтобы обнаружить справедливость такого тождества въ общемъ видѣ, слѣдуетъ или преобразовать одну часть его такъ, чтобы оно приняло такой же видъ, какой имѣетъ другая часть, или преобразовать обѣ части, чтобы обнаружить, что обѣ онѣ равны (тождественны) одному и тому же третьему выраженію.

Примѣры 1. **Тождество Лагранжа**[1].

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \equiv (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$.

Произведя указанныя дѣйствія, легко убѣдиться, что каждая часть въ отдѣльности приводится къ одному и тому же выраженію $a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2$, что и доказываетъ справедливость тождества Лагранжа.

2. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \equiv (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2$. Предоставляется провѣрить учащимся.

---

[1]) *Лагранжъ*—знаменитый французскій математикъ (1736—1813).

Дѣленіе.

§ **32. Опредѣленія.** *Дѣленіе есть дѣйствіе, въ которомъ по данному произведенію и одному изъ множителей отыскивается другой множитель.* Данное произведеніе назыв. *дѣлимымъ*, данный множитель—*дѣлителемъ*, искомый множитель—*частнымъ.* Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію. На это необходимо обратить вниманіе, чтобы легче усвоить особенности этого дѣйствія.

§ **33. Правило знаковъ** въ алгебраическомъ дѣленіи остается то же самое, какъ и въ умноженіи, т.-е. *при дѣленіи количествъ съ одинаковыми знаками въ частномъ получается плюсъ, а съ разными знаками—минусъ.* Въ самомъ дѣлѣ

$(+12):(+3)=+4$, такъ какъ $(+3).(+4)=+12$.
$(-12):(-3)=+4$, „ „ $(-3).(+4)=-12$.
$(+12):(-3)=-4$, „ „ $(-3).(-4)=+12$.
$(-12):(+3)=-4$, „ „ $(+3).(-4)=-12$.

§ **34. Примѣчаніе.** *Если дѣлимое равно* 0, *а дѣлитель не равенъ* 0, *то частное равно* 0, напр., $0:a=0$. Это (можно сказать, очевидное) положеніе доказывается тѣмъ, что только частное, равное нулю, будучи умножено на *произвольнаго* дѣлителя a, дастъ въ произведеніи 0, т.-е. $0.a=0$.

Если дѣлимое не равно 0, *а дѣлитель* $=0$, *то частнаго не существуетъ*, такъ какъ не можетъ быть числа, которое, будучи помножено на 0, давало бы въ произведеніи не нуль, а какое-нибудь число.

Если дѣлимое $=0$ *и дѣлитель* $=0$, *то частное можетъ быть какимъ угодно числомъ, т.-е. представляетъ неопредѣленную величину.* Дѣйствительно $0:0$ можетъ быть равно какому угодно алгебраическому числу $a, b, c, \ldots$, такъ какъ

$$a.0=b.0=c.0=\ldots=0.$$

§ **35. Дѣленіе степеней одного и того же количества.** При дѣленіи степеней одинаковыхъ буквъ изъ показателя дѣлимаго *вычитается* показатель дѣлителя.

$$a^7:a^4=a^3, \text{ такъ какъ } a^4.a^3=a^7.$$

Точно такъ же $b^5:b=b^4$; $c^m:c^n=c^{m-n}$ и т. д.

Изъ §§ 32 и 33 слѣдуетъ:

$(-a^7):(+a^4)=-a^3$; $a^7:(-a^4)=-a^3$; $(-a^7):(-a^4)=+a^3$;

§ 36. Дѣленіе одночленовъ. Положимъ, что требуется раздѣлить $-21a^5b^3c^2d$ на $7ab^2c^2$. Очевидно, что

1. Частное будетъ одночленъ съ знакомъ минусъ. Это прямо слѣдуетъ изъ правила умноженія и правила знаковъ.

2. Коэффиціентъ частнаго будетъ 3, т.-е. 21:7, такъ какъ $7.3=21$.

3. $a^5:a=a^4$; $b^3:b^2=b$; $c^2:c^2=1$. Эту единицу можно опустить, такъ какъ отъ умноженія на 1 частное не измѣняется.

4. Буква d, которой нѣтъ въ дѣлителѣ, должна безъ измѣненія перейти въ частное.

Итакъ: $-21a^5b^3c^2d:7ab^2c^2=-3a^4bd$, т.-е.

При дѣленіи одночленовъ коэффиціентъ дѣлимаго дѣлится на коэффиціентъ дѣлителя съ соблюденіемъ правила знаковъ, изъ показателей буквъ дѣлимаго вычитаются показатели тѣхъ же буквъ въ дѣлителѣ; буквы дѣлимаго, которыхъ нѣтъ въ дѣлителѣ, переносятся въ частное безъ измѣненія.

Если въ дѣлителѣ есть такія буквы, которыхъ нѣтъ въ дѣлимомъ, или, если показатели буквъ дѣлителя болѣе показателей тѣхъ же буквъ въ дѣлимомъ, то говорятъ, что дѣленіе *невозможно*. Тогда дѣйствіе дѣленія изображаютъ въ видѣ дроби. Напр.,

$$4ab^2c^3:6a^3b^6cd^2=\frac{4ab^2c^3}{6a^3b^6cd^2}.$$

§ 37. Дѣленіе многочлена на одночленъ. Положимъ, что дано раздѣлить $12a^5b^3-20a^4b^7c^2+a^3b^5d$ на $4a^3b^2$.

Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, помноженному на частное, то заключаемъ, что въ этомъ случаѣ:

1. Частное должно быть многочленомъ.

2. Первый членъ частнаго получится отъ дѣленія перваго члена дѣлимаго на дѣлителя, 2-й членъ частнаго получится отъ дѣленія 2-го члена дѣлимаго на дѣлителя, и т.д. Слѣдовательно

$$(12a^5b^3-20a^4b^7c^2+a^3b^5d):4a^3b^2=3a^2b-5ab^5c^2+\tfrac{1}{4}b^3d.$$

Итакъ, чтобы раздѣлить многочленъ на одночленъ, нужно каждый членъ дѣлимаго раздѣлить на дѣлителя.

Дѣленіе одночлена на многочленъ представляетъ случай *невозможнаго* дѣленія. Поэтому

$$5a^2b:(7a^3b^4+2ab-3)=\frac{5a^2b}{7a^3b^4+2ab-3}.$$

§ 38. **Дѣленіе многочлена на многочленъ.** Это дѣленіе возможно безъ остатка лишь въ немногихъ частныхъ случаяхъ. Чтобы лучше уяснить себѣ ходъ дѣйствія, воспользуемся примѣромъ умноженія многочленовъ, расположенныхъ по убывающимъ степенямъ, приведеннымъ въ § 28. Именно, положимъ, что требуется раздѣлить многочленъ $-8a^4-26a^3+33a^2+16a-15$ на многочленъ $2a^2+7a-5$.

$$\begin{array}{lr|l}
 & -8a^4-26a^3+33a^2+16a-15 & 2a^2+7a-5 \\
 & \underline{\pm 8a^4 \pm 28a^3 \mp 20a^2} \qquad\qquad & \overline{-4a^2+a+3} \\
\text{1-ый остатокъ} & 2a^3+13a^2+16a-15 & \\
 & \underline{\mp 2a^3 \mp 7a^2 \pm 5a} \qquad & \\
\text{2-ой остатокъ} & 6a^2+21a-15 & \\
 & \underline{\mp 6a^2 \mp 21a \pm 15} & \\
\text{3-й остатокъ} & 0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

Такъ какъ оба многочлена расположены по убывающимъ степенямъ и при умноженіи *высшій* членъ произведенія получается отъ умноженія *высшаго* члена множимаго на *высшій* членъ множителя, то, очевидно, при дѣленіи *высшій* членъ частнаго получится отъ дѣленія *высшаго* члена дѣлимаго на *высшій* членъ дѣлителя, т.-е. высшій членъ частнаго будетъ $-8a^4:2a^2=-4a^2$.

Далѣе, *при умноженіи* многочленовъ каждый членъ множителя множится на все множимое (или на каждый членъ его по порядку), и полученныя такимъ образомъ произведенія складываются другъ съ другомъ, послѣ чего и получается *полное* произведеніе. Поэтому *при дѣленіи* слѣдуетъ найденный 1-й высшій членъ частнаго помножить на всего дѣлителя. *Вычтя* полученное 1-е произведеніе изъ дѣлимаго, мы получимъ 1-ый остатокъ, который представитъ собой сумму произведеній дѣлителя на 2-й, 3-й и другіе члены частнаго. Итакъ, подпишемъ подъ дѣлимымъ произведеніе дѣлителя на $-4a^2$ и *измѣнимъ* для вычитанія *знаки этого произведенія на обратные.*

Разсуждая по предыдущему, легко понять, что 1-ый или *высшій* членъ перваго остатка получился отъ умноженія 1-го *или высшаго* члена дѣлителя на 2-ой членъ частнаго и, слѣдовательно, чтобы получить 2-ой членъ частнаго, надо 1-ый членъ 1-го остатка раздѣлить на 1-й членъ дѣлителя. Итакъ, 2-ой членъ частнаго будетъ $2a^3 : 2a^2 = a$.

Помноживъ его на всѣ члены дѣлителя и вычтя найденное произведеніе изъ 1-го остатка, получимъ 2-й остатокъ, который представляетъ произведеніе всѣхъ членовъ дѣлителя на остальные члены частнаго, кромѣ 1-го и 2-го. Поэтому, раздѣливъ высшій членъ 2-го остатка на высшій членъ дѣлителя, получимъ третій членъ частнаго, т.-е 3. Умноживъ его на дѣлителя и вычтя произведеніе изъ 2-го остатка, видимъ, что 3-й остатокъ оказался нулемъ, а это показываетъ, что другихъ членовъ частнаго не можетъ быть.

Въ такомъ же порядкѣ производится дѣленіе, если дѣлимое и дѣлитель расположены по возрастающимъ степенямъ.

Напр.,

$$\begin{array}{r|l}
1-3a+4a^2-4a^3 & 1-a+2a^2 \\ \cline{2-2}
\mp 1 \pm a \mp 2a^2 & 1-2a \\ \cline{1-1}
-2a+2a^2-4a^3 & \\
\pm 2a \mp 2a^2 \pm 4a^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Такимъ образомъ, при дѣленіи многочлена на многочленъ слѣдуетъ расположить ихъ по степенямъ одной какой-либо буквы и 1-ый членъ дѣлимаго раздѣлить на 1-ый членъ дѣлителя. Получимъ 1-ый членъ частнаго. Умноживъ его на дѣлителя и вычтя полученное произведеніе изъ дѣлимаго, найдемъ 1-й остатокъ. Раздѣливъ 1-й членъ этого остатка на 1-й членъ дѣлителя, получимъ 2-й членъ частнаго. Умноживъ его на дѣлителя и вычтя полученное произведеніе изъ 1-го остатка, найдемъ 2-й остатокъ. Раздѣливъ 1-ый членъ его на 1-ый членъ дѣлителя, получимъ 3-й членъ частнаго и т. д.

§ 39. **Дѣленіе съ остаткомъ.** Дѣленіе многочлена на многочленъ безъ остатка происходитъ, какъ уже было замѣчено выше, только въ рѣдкихъ случаяхъ. Остатокъ, получающійся при дѣленіи, присоединяютъ къ полученному частному въ видѣ дроби, числитель которой равенъ остатку, а знаменатель—дѣлителю.

$$
\begin{array}{r|l}
18a^3b^2+15a^2b^3+12ab^4 & 3a-2b \\
\cline{2-2}
\mp 18a^3b^2 \pm 12a^2b^3 & 6a^2b^2+9ab^3+\dfrac{30ab^4}{3a-2b}. \\
\cline{1-1}
27a^2b^3+12ab^4 & \\
\mp 27a^2b^3 \pm 18ab^4 & \\
\cline{1-1}
30ab^4 &
\end{array}
$$

§ **40**. **Случаи невозможнаго дѣленія**. Очевидно, что дѣленіе многочлена на многочленъ безъ остатка *невозможно*, когда:

1. *Высшій* членъ дѣлимаго не дѣлится на *высшій* членъ дѣлителя или *низшій* членъ дѣлимаго не дѣлится на *низшій* членъ дѣлителя.

2. *Высшій* членъ какого-либо остатка не дѣлится на высшій членъ дѣлителя.

3. Въ дѣлителѣ есть такія буквы, которыхъ нѣтъ въ дѣлимомъ.

4. Въ остаткѣ получается одночленъ.

§ **41**. **Случаи возможнаго дѣленія**. Полезно замѣтить слѣдующіе случаи дѣленія безъ остатка [1]):

1. *Разность* одинаковыхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на *разность* этихъ количествъ. Напр., $(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2$; $(a^4-b^4):(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3$.

2. *Разность* одинаковыхъ *четныхъ* степеней дѣлится на *сумму* этихъ количествъ. Напр.,

$$(a^4-b^4):(a+b)=a^3-a^2b+ab^2-b^3.$$

3. *Сумма* одинаковыхъ *нечетныхъ* степеней дѣлится на *сумму* этихъ количествъ. Напр., $(a^3+b^3):(a+b)=a^2-ab+b^2$.

Примѣры: 1. Двучленъ $81-16b^4$ дѣлится безъ остатка на двучлены $3+2b$ и $3-2b$, такъ какъ $81=3^4$ и $16b^4=(2b)^4$.

2. Двучленъ $32x^5+1$ дѣлится безъ остатка на $2x+1$, такъ какъ $32x^5=(2x)^5$ и $1=1^5$.

---

[1]) См. §§ 45 и 46.

Разложеніе многочлена на множителей.

§ **42**. Для различныхъ упрощеній и преобразованій въ алгебрѣ часто приходится разлагать многочленъ на составляющихъ его множителей. Укажемъ наиболѣе употребительные способы разложенія многочлена.

I. **Выведеніе общаго множителя за скобки**. Многочленъ вида $am+bm-cm$, всѣ члены котораго содержатъ общаго множителя m, очевидно, можетъ быть представленъ какъ произведеніе двухъ множителей, т.-е. въ слѣдующемъ видѣ:

$$am+bm-cm=m\,(a+b-c).$$

Разберемъ болѣе сложный примѣръ. Положимъ, что требуется разложить на множителей многочленъ $20a^3b^4c^2-$ $-45a^4b^2c^3d-15a^5b^3cd^2$. Разсматривая сперва коэффиціенты 20, 45 и 15, находимъ, что они имѣютъ общаго множителя 5. Количество a входитъ во всѣ три одночлена, какъ множитель; наименьшая степень его a^3 представляетъ также общаго множителя, такъ какъ $a^4=a^3.a$ и $a^5=a^3.a^2$. Такимъ же разсужденіемъ найдемъ еще двухъ общихъ множителей b^2 и c. Итакъ, мы получили слѣдующихъ общихъ множителей 5, a^3, b^2 и c. Произведеніе ихъ $5a^3b^2c$ представитъ общаго наибольшаго множителя (или, что все равно, общаго наибольшаго дѣлителя), котораго и выводятъ за скобки, при чемъ въ скобкахъ, очевидно, будетъ частное отъ дѣленія всѣхъ членовъ многочлена на ихъ общаго множителя:

$$5a^3b^2c(4b^2c-9ac^2d-3a^2bd^2).$$

Легко замѣтить, что выведеніе за скобки общаго множителя есть дѣйствіе обратное умноженію многочлена на одночленъ.

Примѣръ 1. $48a^3m^5x^4-36a^4m^4x^2+12a^3mx=$
$=12a^3mx(4m^4x^3-3am^3x+1)$ [1].

2. $2x(a+b)+3(a+b)=(a+b)\,(2x+3)$.

II. **Разложеніе по формуламъ сокращеннаго умноженія.**

Извѣстно (§ 29), что $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,$$ т.-е.

[1]) Предостерегаемъ учащихся отъ ошибки, которую они часто дѣлаютъ, пропуская въ скобкахъ членъ $=1$.

1. *Всякій двучленъ, представляющій разность квадратовъ двухъ количествъ, можетъ быть изображенъ въ видѣ произведенія суммы на разность этихъ количествъ.* Напр., $9a^2-16b^4$ есть разность квадратовъ количествъ $3a$ и $4b^2$ [1]) и, слѣдовательно,

$$9a^2-16b^4=(3a+4b^2)(3a-4b^2).$$

Примѣры: 1. $49x^2-1=(7x+1)(7x-1)$.

2. $(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$.

2. *Всякій трехчленъ, состоящій изъ суммы квадратовъ двухъ количествъ, увеличенной или уменьшенной удвоеннымъ произведеніемъ этихъ количествъ, представляетъ или квадратъ суммы или квадратъ разности этихъ количествъ.*

Примѣры: 1. $25a^2+20ax^2+4x^4=(5a+2x^2)^2$.

2. $m^2+1-2m=(m-1)^2$.

III. **Способъ группировки.** Иногда многочленъ можно разложить на множителей, если предварительно разбить его на части или на группы членовъ (большею частью на 2 группы). Напр., многочленъ $am+bm+an+bn$ можно разложить на множителей, разбивъ его на 2 группы: $am+bm$ и $an+bn$. Въ первой группѣ выведемъ за скобки общаго множителя m, а во второй n. Тогда нашъ многочленъ получитъ такой видъ $m(a+b)+n(a+b)$. Но теперь очевидно, что въ обѣихъ частяхъ есть общій множитель $a+b$, котораго и можно вывести за скобки. Итакъ

$$am+bm+an+bn=m(a+b)+n(a+b)=(a+b)(m+n).$$

Такой же результатъ можно было получить, взявъ группы $am+an$ и $bm+bn$:

$$am+bm+an+bn=a(m+n)+b(m+n)=(m+n)(a+b).$$

Точно также

$$3a^2-5bc-5a+3abc=3a(a+bc)-5(bc+a)=(a+bc)(3a-5)\ ^{2)}.$$

IV. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ полезно бываетъ разложить какой-нибудь членъ на *слагаемыя* или ввести какіе-нибудь *новые вспомогательные* члены.

Примѣры: 1. $a^2+7a+10=a^2+2a+5a+10=a(a+2)+$
$+5(a+2)=(a+2)(a+5)$.

---

[1]) $(3a)^2=9a^2$; $(4b^2)^2=16b^4$.

[2]) Предлагается учащимся разложить этотъ многочленъ на множителей другой группировкой.

2. $x^2-8xy+15y^2=x^2-3xy-5xy+15y^2=$
$x(x-3y)-5y(x-3y)=(x-5y)(x-3y)$.
3. $a^3-b^3=a^3+a^2b-a^2b-b^3=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)=$
$=a^2(a+b)-b(a+b)(a-b)=(a+b)[a^2-b(a-b)]=$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

V. Иногда представляется возможность воспользоваться случаями **дѣленія безъ остатка** (§ 41).

Въ особенности слѣдуетъ замѣтить 2 формулы:

$$a^3+b^3=(a+b)\ (a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)\ (a^2+ab+b^2).$$

Примѣры: 1. $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.
2. $m^3-8n^3=(m-2n)(m^2+2mn+4n^2)$.
3. $x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=$
$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

Весьма часто разложеніе многочлена на множителей производится примѣненіемъ нѣсколькихъ способовъ.

Примѣры: 1. $a^3b^4+4a^3b^2+4a^3b^3=a^3b^2(b^2+4+4b)=$
$=a^3b^2(b+2)^2$.
2. $3m(2a+5b)^2-27m^3=3m[(2a+5b)^2-9m^2]=$
$=3m(2a+5b+3m)(2a+5b-3m)$.
3. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-$
$-b^2-c^2+a^2)=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]=$
$=(b+c+a)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$.

О дѣлимости алгебраическихъ количествъ.

§ **43. Общій наибольшій дѣлитель цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій**. Общимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій называется такое цѣлое количество, на которое эти *выраженія* дѣлятся вполнѣ безъ *остатка*, т.-е. такъ, что полученныя частныя не будутъ имѣть ни буквенныхъ, ни числовыхъ дѣлителей.

Алгебраическія выраженія, не имѣющія общаго дѣлителя (кромѣ ±1) называются *взаимно простыми* или *первыми между собою*. Если данныя алгебраическія выраженія имѣютъ нѣсколько общихъ дѣлителей, то тотъ изъ нихъ, который дѣлится безъ остатка на каждый изъ остальныхъ, называется *общимъ наибольшимъ дѣлителемъ*.

Частныя отъ дѣленія алгебраическихъ выраженій на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя будутъ первыми между собою.

Примѣръ. Выраженія $6a^2$, $15ab$ и $9a(a-b)$ имѣютъ трехъ общихъ дѣлителей: 3, a и $3a$. Общій наибольшій дѣлитель есть $3a$. Раздѣливъ на него данныя выраженія, получимъ частныя: $2a$, $5b$ и $3(a-b)$, которыя уже не имѣютъ общихъ дѣлителей, а потому будутъ первыми между собою.

Обобщая здѣсь правила, извѣстныя изъ ариѳметики и достаточныя для простѣйшихъ случаевъ, можемъ сказать, что *для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ или нѣсколькихъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій, слѣдуетъ выбрать ихъ общихъ числовыхъ и буквенныхъ дѣлителей (или множителей) и затѣмъ перемножить между собою. Полученное произведеніе и будетъ искомымъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.*

Такъ какъ при выведеніи за скобки общихъ множителей мы въ сущности находили уже общ. наиб. дѣлителя для одночленовъ, входившихъ въ составъ многочлена, то здѣсь мы ограничимся примѣромъ нахожденія общ. наиб. дѣлителя для многочленовъ.

Примѣры. Найти общ. н. дѣлителя многочленовъ $6a^2+6ax$, $12(a^2+2ax+x^2)$, $8a^2-8x^2$.

Разлагаемъ ихъ на множителей: $2.3a(a+x)$, $2^2.3\,(a+x)^2$, $2^3(a+x)(a-x)$.

О. н. дѣлитель $=2(a+x)$.

§ **44. Общимъ наименьшимъ кратнымъ** двухъ или нѣсколькихъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій называется *самое меньшее* изъ такихъ количествъ, которыя могутъ дѣлиться на всѣ данныя выраженія вполнѣ безъ остатка. Обобщая и въ этомъ случаѣ правила ариѳметики, можно сказать, что *для нахожденія общ. наименьшаго кратнаго двухъ или нѣсколькихъ алгебр. выраженій, слѣдуетъ эти выраженія разложить на множителей, затѣмъ, выписавъ множителей одного изъ этихъ выраженій, прибавить къ нему недостающихъ множителей изъ другихъ выраженій и наконецъ найти произведеніе всѣхъ этихъ множителей.*

Примѣры. 1. Найти общ. н. кратное выраженій:

$$7a^2x,\ 6a^3x^2y,\ 21ax^2-21ay.$$

Разлагаемъ ихъ на множителей: $7a^2x$; $2.3a^3x^2y$; $3.7a(x^2-y)$.

О. наим. кратное$=7.2.3a^2.a.x.xy(x^2-y)=42a^3x^2y(x^2-y)$.

2. Найти о. н. кратное выраженій:

$$3a^2-3b^2,\ 12(a^2+b^2-2ab),\ 6a-6b.$$

Разлагаемъ на множителей : $3(a+b)(a-b)$; $3.2^2(a-b)^2$; $2.3(a-b)$.

О. наим. кратное $=3.2^2(a+b)(a-b)(a-b)=12(a^2-b^2)(a-b)$.

§ 45. **Дѣлимость на х — а. Теорема.** *Если дѣлимое есть многочленъ, расположенный по степенямъ буквы x, а дѣлитель есть двучленъ $x-a$, то остатокъ будетъ многочленъ совершенно такого же вида какъ дѣлимое, но съ замѣной въ немъ x на a,* т.-е., напр., если $2x^4-3x^3+5x-6$ раздѣлить на $x-a$, то остатокъ будетъ: $2a^4-3a^3+5a-6$ [1]).

Доказательство. Обозначимъ условно дѣлимый многочленъ черезъ M_x, частное отъ дѣленія его на $x-a$ черезъ Q, а полученный остатокъ черезъ R. Такъ какъ дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное плюсъ остатокъ, то имѣемъ

$$M_x=(x-a)Q+R \qquad (1).$$

Равенство (1) будетъ справедливо при всякомъ значеніи буквы x. Слѣдовательно, оно будетъ справедливо и тогда, когда $x=a$. Поэтому, замѣнивъ въ многочленѣ M_x букву x на a, получимъ многочленъ вида M_a, и можемъ написать, что

$$M_a=(a-a)\ Q_a+R \text{ или } M_a=0.\ Q_a+R \text{ или } M_a=R, \text{ т.-е.}$$

остатокъ R есть многочленъ M_a такого же вида какъ дѣлимое M_x.

Очевидно, что эта теорема справедлива, если a замѣнимъ какимъ-нибудь числовымъ значеніемъ, напр., 1, 2, 3,...

Примѣръ. Найти остатокъ отъ дѣленія многочлена $5x^4-3x^2+2x-4$ на $x-2$.

Остатокъ$=5.2^4-3.2^2+2.2-4=80-12+4-4=68$.

Слѣдствіе 1. Если дѣлитель будетъ не $x-a$, а $x+a$, то замѣтивъ, что $x+a=x-(-a)$, заключаемъ, что въ этомъ случаѣ остатокъ отъ дѣленія многочлена M_x на $x+a$ будетъ многочленъ такого же вида, но съ замѣной въ немъ x на $-a$.

Примѣры. 1. Найти остатокъ отъ дѣленія $2b^3x^2+3cx-7x$ на $x+a$.

Остатокъ$=2b^3.(-a)^2+3c.(-a)-7.(-a)=2b^3a^2-3ca+7a$.

2. Найти остатокъ отъ дѣленія $5x^4-3x^2+2x-4$ на $x+2$.

Остатокъ$=5.(-2)^4-3(-2)^2+2(-2)-4=60$.

Слѣдствіе 2. *Чтобы многочленъ, расположенный по степенямъ буквы x, дѣлился безъ остатка на двучленъ вида $x-a$, необходимо и достаточно, чтобы онъ обращался въ нуль при замѣнѣ въ немъ x черезъ a;* для того, чтобы

---

[1]) Провѣрьте это непосредственнымъ дѣленіемъ!

такой же многочленъ дѣлился безъ остатка на двучленъ $x+a$, необходимо и достаточно, чтобы онъ обращался въ нуль при замѣнѣ въ немъ x черезъ $-a$.

Примѣръ. Многочленъ $x^5-4x^4+x^3-2x^2+x+30$ раздѣлится безъ остатка на $x-2$, такъ какъ остатокъ отъ дѣленія$=2^5-4 . 2^4+2^3-2 . 2^2+2+30=$ $=32-64+8-8+2+30=0$.

Но на $x+2$ этотъ многочленъ дѣлится съ остаткомъ, который $=(-2)^5-4 . (-2)^4+(-2)^3-2 . (-2)^2-2+30=-84$.

§ 46. **Замѣчательные случаи дѣленія.** Изъ доказанной теоремы легко вывести слѣдующіе замѣчательные случаи дѣленія, о которыхъ отчасти было упомянуто въ § 41.

1. Разность одинаковыхъ степеней x^m-a^m всегда дѣлится (безъ остатка) на разность $x-a$, такъ какъ, замѣнивъ x черезъ a, найдемъ, что остатокъ$=a^m-a^m=0$.

Полезно замѣтить, что $(x^m-a^m):(x-a)=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+$ $+a^{m-2}x+a^{m-1}$.

2. Сумма x^m+a^m *не* дѣлится (безъ остатка) на разность $x-a$, такъ какъ, замѣнивъ x черезъ a, получимъ остатокъ$=a^m+a^m=2a^m$.

$$(x^m+a^m):(x-a)=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a}.$$

3. Разность x^m-a^m дѣлится на сумму $x+a$, если m—*четное* число, такъ какъ $(-a)^m-a^m$ при m четномъ будетъ$=a^m-a^m=0$.

$$(x^m-a^m):(x+a)=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots+a^{m-2}x-a^{m-1}.$$

4. Сумма x^m+a^m дѣлится на сумму $x+a$, если m—*нечетное* число, такъ какъ $(-a)^m+a^m$ при m—нечетномъ будетъ$=-a^m+a^m=0$.

$$(x^m+a^m):(x+a)=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots-a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

5. Разность x^m-a^m дѣлится на разность x^p-a^p, если m есть число кратное для p.

Дѣйствительно, положимъ, что $m=p.k$, гдѣ k есть нѣкоторое цѣлое число и назовемъ $x^p=X$ и $a^p=A$.

Тогда $x^m=x^{p.k}=X^k$ и $a^m=a^{p.k}=A^k$. Поэтому $(x^m-a^m):(x^p-a^p)=$ $=(X^k-A^k):(X-A)$. Но, по предыдущему, X^k-A^k дѣлится на $X-A$, слѣдовательно и x^m-a^mраздѣлится на x^p-a^p.

Примѣры. 1. $(x^5-1):(x-1)=x^4+x^3+x^2+x+1$.

2. $(x^5+a^5):(x+a)=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4$.

3. $(x^6-a^6):(x^2-a^2)=x^4+a^2x^2+a^4$.

§ 47. **Приложеніе правилъ дѣлимости къ разложенію на множителей.** 1. Разложить многочленъ x^2+x-2 на множителей. Извѣстно, что для того, чтобы одинъ многочленъ дѣлился безъ остатка на другой, необходимо, чтобы высшій и низшій члены дѣлимаго дѣлились соотвѣтственно на высшій и низшій члены дѣлителя. Низшій членъ даннаго многочлена -2 дѣлится безъ остатка на $+1$, -1, $+2$ и -2. Поэтому слѣдуетъ испытать, не дѣлится ли многочленъ на какой-либо изъ слѣдующихъ двучленовъ: $x-1$, $x+1$, $x-2$, $x+2$. Чтобы опредѣлить остатокъ отъ дѣленія x^2+x-2 на $x-1$, замѣнимъ въ дѣлимомъ x черезъ 1. (§ 45). Получимъ, что остатокъ $=1+1-2=0$. Итакъ, дѣленіе совершается безъ остатка. Сдѣлавъ его, получимъ $(x^2+x-2):(x-1)=x+2$. Такимъ образомъ $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Второй множитель $x+2$ могъ быть найденъ и, не прибѣгая къ дѣленію, изъ того соображенія, что для того, чтобы получить низшій членъ дѣлимаго -2, необходимо низшій членъ дѣлителя -1 умножить на $+2$.

2. Разложить на множителей многочленъ x^3-2x^2-5x+6. Низшій членъ 6 дѣлится на $+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$. Слѣдовательно необходимо испытать, не дѣлится ли нашъ многочленъ на двучлены $x-1$, $x+1$, $x-2$, $x+2$, $x-3$, $x+3$, $x-6$, $x+6$.

При нѣкоторомъ навыкѣ остатки отъ дѣленія на $x-1$ и на $x+1$ легко опредѣлить „въ умѣ". Для этого достаточно обратить вниманіе на коэффиціенты многочлена. Такъ какъ въ данномъ многочленѣ сумма положительныхъ коэффиціентовъ$=7$, а сумма отрицательныхъ$=-7$, то слѣдовательно, замѣнивъ x черезъ 1, въ остаткѣ получимъ 0, т.-е. нашъ многочленъ дѣлится на $x-1$. Совершивъ дѣленіе, найдемъ

$$(x^3-2x^2-5x+6):(x-1)=x^2-x-6.$$

Многочленъ x^2-x-6, какъ это легко замѣтить по его коэффиціентамъ, не дѣлится ни на $x-1$, ни на $x+1$. Замѣнивъ x черезъ 2, получимъ, что, при дѣленіи на $x-2$, остатокъ$=-4$. При замѣнѣ же x черезъ-2, найдемъ, что остатокъ $=0$. Итакъ, многочленъ дѣлится на $x+2$, а именно $(x^2-x-6):(x+2)=x-3$. Какъ уже ранѣе было замѣчено, нѣтъ необходимости производить это дѣленіе, чтобы найти послѣдняго множителя. Для этого достаточно было замѣтить, что для того, чтобы получить-6, слѣдуетъ-2 умножить на 3.

Итакъ, $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)$.

Алгебраическія дроби.

§ 48. **Опредѣленія.** Алгебраическая дробь есть частное отъ дѣленія одного алгебраическаго количества на другое, когда это дѣленіе не можетъ быть выполнено. При этомъ пишутъ дѣлителя подъ дѣлимымъ и раздѣляютъ ихъ чертою.

Дѣлимое въ такомъ случаѣ называется *числителемъ*, а дѣлитель — *знаменателемъ* дроби. Дробь называется *одночленной*, если знаменатель ея *одночленъ*, и *многочленной*, если знаменатель ея—*многочленъ*. Такимъ образомъ $\frac{a}{b}$, $\frac{3m^2}{5n^3}$ — одночленныя дроби, а $\frac{a+b}{m-n}$, $\frac{c^2}{2d-e^3+1}$ — многочленныя дроби. Дробь вида $\frac{a+b-c}{m}$ есть не что иное, какъ алгебраическая сумма трехъ одночленныхъ дробей, т.-е. $\frac{a+b-c}{m}=$ $=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$. (См. § 53).

Если передъ дробью стоитъ знакъ минусъ, то его можно отнести или къ числителю или къ знаменателю (§ 32). Это прямо слѣдуетъ изъ правила знаковъ при дѣленіи. Такимъ образомъ

$$1.\ -\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}.$$

$$2.\ -\frac{a+b}{m-n}=\frac{-(a+b)}{m-n}=\frac{-a-b}{m-n} \text{ или } -\frac{a+b}{m-n}=\frac{a+b}{n-m}.$$

§ **49**. Алгебраическая дробь представляетъ выраженіе болѣе общаго характера, чѣмъ дробь ариѳметическая, такъ какъ числитель и знаменатель алгебр. дроби могутъ быть не только цѣлыми и положительными количествами, но также дробными и отрицательными. Поэтому необходимо привести доказательства основныхъ свойствъ этихъ дробей и правилъ дѣйствій надъ ними. Мы убѣдимся, что эти свойства и правила будутъ совершенно такія же, какъ и у ариѳметическихъ дробей.

§ **50. Основное свойство дроби**. *Величина дроби не измѣняется при умноженіи или при дѣленіи ея числителя и знаменателя на одно и то же число*, т.-е. $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ и $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$.

Обозначимъ частное отъ дѣленія числителя на знаменателя дроби $\frac{a}{b}$ черезъ q, такъ что $\frac{a}{b}=q$. Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, помноженному на частное, то $a=bq$. Умноживъ обѣ эти равныя величины на какое-нибудь число m получимъ $a.m=bq.m$ или $am=bm.q$, откуда $q=\frac{am}{bm}$. Но по условію $q=\frac{a}{b}$, слѣдовательно, $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$. Такое же доказательство примѣняется и для случая дѣленія.

Слѣдствіе. *При одновременной перемѣнѣ знаковъ у числителя и знаменателя величина дроби не измѣняется.*

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b},$$

такъ какъ умноживъ числителя и знаменателя первой дроби на —1, получимъ вторую дробь.

Разсмотримъ по порядку дѣйствія съ алгебраическими дробями, начавъ для простоты съ одночленныхъ дробей.

§ **51. Сокращеніе дробей.** Если числитель и знаменатель дроби имѣютъ общаго множителя, то его можно опустить или, какъ говорятъ, можно сократить дробь. Это дѣлается на томъ основаніи, что отъ дѣленія числителя и знаменателя (или дѣлимаго и дѣлителя) на одно и то же количество дробь (или частное) не измѣняется.

Напр., $\frac{ab^2}{b^3}=\frac{a}{b}$; $\frac{4ab^2c^3}{6a^3b^2cd^2}=\frac{2c^2}{3a^2d^2}$; $-\frac{5a^3b^2}{20a^5b^2c}=-\frac{1}{4a^2c}$

$$\frac{a-b}{b-a}=\frac{a-b}{-(-b+a)}=-1.$$

§ **52. Приведеніе дробей къ общему знаменателю** основано, какъ извѣстно, на томъ свойствѣ дробей, что при умноженіи числителя и знаменателя (или дѣлимаго или дѣлителя) на одно и то же количество, величина дроби (или частнаго) не измѣняется. Здѣсь могутъ быть 2 случая.

1. *Знаменатели дробей не имѣютъ общихъ множителей.* Напримѣръ, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$. Въ этомъ случаѣ числителя и знаменателя каждой дроби слѣдуетъ помножить на произведеніе знаменателей остальныхъ дробей. Общій знаменатель будетъ bdf, т.-е. произведеніе знаменателей всѣхъ дробей.

Такимъ образомъ $\frac{a}{b}=\frac{adf}{bdf}$; $\frac{c}{d}=\frac{cbf}{bdf}$; $\frac{e}{f}=\frac{ebd}{bdf}$.

2. *Знаменатели дробей имѣютъ общихъ множителей.* Въ этомъ случаѣ нужно всѣхъ знаменателей разложить на множителей; выписать множителей одного знаменателя и прибавить къ нимъ изъ множителей другихъ знаменателей тѣхъ, которыхъ недостаетъ. Произведеніе этихъ множителей (представляющее *наименьшее кратное* всѣхъ знаменателей) и будетъ общимъ знаменателемъ. Далѣе, слѣдуетъ общаго знаменателя раздѣлить на знаменателя 1-ой дроби

и полученное частное помножить на ея числителя и знаменателя. Такъ же поступаютъ со 2-й, 3-ей и т. д. дробями.

Примѣръ. Привести къ одному знаменателю дроби $\frac{3c^2}{4b^3d^2}$, $\frac{5a}{6b^2d^3c}$, $\frac{1}{2b^4d}$. Общій знаменатель$=2.2b^3d^2 \,.\, 3dc \,.\, b=12b^4d^3c$.

Раздѣлимъ его на знаменателя 1-ой дроби: $\frac{12b^4d^3c}{4b^3d^2}=3bdc$.

Умножимъ числителя и знаменателя на частное:

$$\frac{3c^2 \,.\, 3bdc}{4b^3d^2 . 3bdc}=\frac{9c^3bd}{12b^4d^3c}.$$

Сдѣлаемъ то же самое со 2-ой и 3-ьей дробями:

$$\frac{12b^4d^3c}{6b^2d^3c}=2b^2;\quad \frac{5a \,.\, 2b^2}{6b^2d^3c \,.\, 2b^2}=\frac{10ab^2}{12b^4d^3c};$$

$$\frac{12b^4d^3c}{2b^4d}=6d^2c;\quad \frac{1 \,.\, 6d^2c}{2b^4d \,.\, 6d^2c}=\frac{6d^2c}{12b^4d^3c}.$$

Примѣчаніе. Иногда случается, что одинъ изъ знаменателей дѣлится безъ остатка на всѣ другіе знаменатели. Очевидно, что въ такомъ случаѣ этотъ знаменатель и будетъ общимъ знаменателемъ.

§ **53. Сложеніе и вычитаніе дробей.** *Для сложенія или вычитанія дробей съ одинаковыми знаменателями, слѣдуетъ сложить или вычесть ихъ числителей и подписать того же знаменателя.*

Дѣйствительно, $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}$, такъ какъ умноживъ каждую изъ обѣихъ частей этого равенства на m, получимъ одно и то же выраженіе $a+b-c$.

Если знаменатели данныхъ дробей разные, то дроби надо предварительно привести къ общему знаменателю.

Примѣры. 1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf}$.

2. $\frac{3c^2}{4b^3d^2}-\frac{5a}{6b^2d^3c}+\frac{1}{2b^4d}=\frac{9c^3bd-10ab^2+6d^2c}{12b^4d^3c}$.

3. $\frac{c}{d}-\frac{c-m+k}{2c}=\frac{2c^2-cd+md-kd}{2cd}$ [1]).

---

1) При вычитаніи слѣдуетъ помнить, что знакъ — передъ дробью относится ко *всему* числителю, а не только къ первому члену его. Забывая это, учащіеся ошибочно пишутъ, что $\frac{c}{d}-\frac{c-m+k}{2c}=\frac{2c^2-cd-md+kd}{2cd}$.

Если при сложенiи и вычитанiи кромѣ дробей находятся и цѣлыя количества, которыя всегда можно разсматривать, какъ дроби съ знаменателемъ $=1$, то ихъ обыкновенно тоже приводятъ къ общему знаменателю, для чего цѣлое количество умножаютъ и дѣлятъ на этого знаменателя.

Примѣры 1. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}+\frac{2ab}{ab}=\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}=$

$$=\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

2. $\frac{2x}{y}+3xy-\frac{y}{5x}=\frac{10x^2+15x^2y^2-y^2}{5xy}$

Примѣчанiе. Всякую дробь, числитель которой многочленъ, а знаменатель одночленъ, можно всегда представить въ видѣ алгебраической суммы нѣсколькихъ дробей. Напр.,

$$\frac{a^2-2b+3c}{2ab}=\frac{a^2}{2ab}-\frac{2b}{2ab}+\frac{3c}{2ab}=\frac{a}{2b}-\frac{1}{a}+\frac{3c}{2ab}.$$

Въ частныхъ случаяхъ одна или нѣсколько дробей могутъ обратиться въ цѣлыя количества. Напр.,

$$\frac{6m^3n+am^2}{3mn}=2m^2+\frac{am}{3n}.$$

§ **54. Умноженiе дробей.** *Чтобы перемножить дроби, надо перемножить отдѣльно ихъ числителей и знаменателей, и первое произведенiе раздѣлить на второе:*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Для доказательства положимъ, что $\frac{a}{b}=p$ и $\frac{c}{d}=q$.

Тогда $a=bp$ и $c=dq$. Перемноживъ по частямъ эти равенства, получимъ $ac=bp\,dq$ или $ac=bd\,pq$. Раздѣливъ обѣ части равенства на bd, найдемъ, что $\frac{ac}{bd}=p\cdot q=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$.

Это правило сохраняетъ свою силу, если перемножаются нѣсколько дробей: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$.

Случаи умноженiя дроби на цѣлое количество и цѣлаго количества на дробь сводятся къ случаю умноженiя дроби на дробь, такъ какъ подъ каждымъ цѣлымъ количествомъ можно подписать (или подразумѣвать) знаменателемъ 1. Такимъ образомъ

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{1} = \frac{am}{b}; \quad a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{1} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{n}.$$

Примѣры. 1. $-\frac{2a^3b^4}{5m^2n} \cdot \frac{10a^2m}{3b^3n^3} = -\frac{20a^5b^4m}{15m^2n^4b^3} = -\frac{4a^5b}{3mn^4}.$

2. $\frac{5a}{2b^2} \cdot 9a^2b = \frac{5 \cdot 9a^3b}{3b^2} = \frac{15a^3}{b}.$

3. $4x^2y \cdot \frac{3x}{2y^3} = \frac{4 \cdot 3x^3y}{2y^3} = \frac{6x^3}{y^2}.$

§ **55. Дѣленіе дробей.** *Чтобы раздѣлить дробь на дробь, надо числителя первой дроби умножить на знаменателя второй, а знаменателя первой умножить на числителя второй и первое произведеніе раздѣлить на второе:*

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Дѣйствительно, умноживъ полученное частное $\frac{ad}{bc}$ на дѣлителя $\frac{c}{d}$ и сокративъ, получимъ дѣлимое:

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

Это же правило распространяется и на случаи дѣленія дроби на цѣлое количество и цѣлаго количества на дробь:

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b} : \frac{m}{1} = \frac{a}{bm}; \quad a : \frac{m}{n} = \frac{a}{1} : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}.$$

Примѣры. 1. $-\frac{2x^2c}{21y^4d^3} : \frac{6x^4}{7yc^2d^2} = -\frac{2 \cdot 7x^2yc^3d^2}{21 \cdot 6x^4y^4d^3} = -\frac{c^3}{9x^2y^3d}.$

2. $\frac{24a^3}{b^2} : 6a = \frac{24a^3}{6ab^2} = \frac{4a^2}{b^2}.$

3. $10c^2d^3 : \frac{5ac^4}{d^2} = \frac{10c^2d^5}{5ac^4} = \frac{2d^5}{ac^2}.$

Примѣчаніе. Числомъ или выраженіемъ *обратнымъ* данному числу или выраженію называется частное отъ дѣленія $+1$ на это число или выраженіе.

Напр., $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{a}$ — числа обратныя 3 и a; $\frac{4}{3}$ и $\frac{b}{a}$ — дроби обратныя дробямъ $\frac{3}{4}$ и $\frac{a}{b}$. Очевидно, что произведенiе двухъ обратныхъ чиселъ или выраженiй всегда $= 1$.

Пользуясь этимъ опредѣленiемъ, можно высказать слѣдующее *правило: чтобы раздѣлить дробь на дробь, надо первую дробь умножить на дробь обратную второй.*

§ **56. Дѣйствiя надъ многочленными дробями** подчиняются тѣмъ же самымъ правиламъ, но отличаются вообще бо̀льшею сложностью.

I. *Сокращенiе.* Для сокращенiя многочленныхъ дробей приходится числителя и знаменателя разлагать на множителей.

Примѣры 1. $\frac{6x^2-18xy}{6x^2-42x^3}=\frac{6x(x-3y)}{6x^2(1-7x)}=\frac{x-3y}{x(1-7x)}$ [1]).

2. $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}=\frac{(a+b)\ (a-b)}{(a-b)\ (a-b)}=\frac{a+b}{a-b}$.

3. $\frac{12a^4b-27a^2b}{12a^3b+36a^2b+27ab}=\frac{3a^2b\ (4a^2-9)}{3ab\ (4a^2+12a+9)}=$

$$=\frac{a\,(2a+3)\ (2a-3)}{(2a+3)\ (2a+3)}=\frac{a\,(2a-3)}{2a+3}.$$

II. *Сложенiе и вычитанiе.*

Примѣры: 1. $\frac{m}{b+c}+\frac{n}{b-c}=\frac{m\,(b-c)}{(b+c)\ (b-c)}+\frac{n\,(b+c)}{(b+c)\ (b-c)}=$

$$=\frac{mb-mc+nb+nc}{b^2-c^2}.$$

2. $\frac{x^2}{ax^2-a^3}-\frac{1}{a+x}+\frac{a}{x^2+a^2+2ax}=$

$$=\frac{x^2(x+a)-a(x^2-a^2)+a^2(x-a)}{a(x+a)\ (x+a)\ (x-a)}=$$

$$=\frac{x^3+ax^2-ax^2+a^3+a^2x-a^3}{a(x+a)^2(x-a)}=\frac{x^3+a^2x}{a(x+a)^2(x-a)}.$$

---

1) Предостерегаемъ учащихся никогда не сокращать *отдѣльныхъ слагаемыхъ* въ числителѣ и знаменателѣ: сокращаться могутъ только *общiе множители всего* числителя и *всего* знаменателя, которыхъ поэтому слѣдуетъ выводить за скобки. Напр., было бы грубой ошибкой сокращать дробь $\frac{a+5b}{c+5b}$ на $5b$ или на 5 и написать, что она $=\frac{a}{c}$ или $\frac{a+1}{c+1}$ и т. п.

Разлагаемъ знаменателей на множителей.	$ax^2-a^3=a(x^2-a^2)=a(x+a)\,(x-a)$ $a+x= \qquad x+a$ $x^2+a^2+2ax=(x+a)^2=(x+a)\,(x+a)$ Общій знаменатель $=a(x+a)\,(x+a)\,(x-a)$

Приводимъ дроби къ общему знаменателю:

$$\frac{a(x+a)(x+a)(x-a)}{a(x+a)\;(x-a)}=x+a \text{ и слѣдов. } \frac{x^2}{ax^2-a^3}=\frac{x^2(x+a)}{a(x+a)(x+a)(x-a)};$$

$$\frac{a(x+a)\,(x+a)\,(x-a)}{x+a}=a(x^2-a^2) \;\text{ » }\; \frac{1}{a+x}=\frac{a(x^2-a^2)}{a(x+a)\,(x+a)\,(x-a)};$$

$$\frac{a(x+a)(x+a)(x-a)}{(x+a)\;(x+a)}=a(x-a) \;\text{ » }\; \frac{a}{x^2+a^2+2ax}=\frac{a^2(x-a)}{a(x+a)(x+a)(x-a)}$$

III. *Умноженіе и дѣленіе.* 1. $\dfrac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\dfrac{2x+3a}{2ax^2-2ay^2}$.

Прежде всего слѣдуетъ попробовать разложить многочлены на множителей, затѣмъ обозначить дѣйствія знаками и, наконецъ, если возможно, сдѣлать сокращеніе или приведеніе:

$$\frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}=\frac{3x(x+y)}{2y(2x+3a)};\quad \frac{2x+3a}{2ax^2-2ay^2}=\frac{2x+3a}{2a(x+y)\;(x-y)}.$$

$$\text{Слѣдовательно } \frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\frac{2x+3a}{2ax^2-2ay^2}=$$

$$=\frac{3x(x+y)(2x+3a)}{2y(2x+3a)\,.\,2a(x+y)(x-y)}=\frac{3x}{4ay(x-y)}.$$

$$2\,.\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{2b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)\;(a-b)}:\frac{2b}{a+b}=$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a+b)\;(a-b)}:\frac{2b}{a+b}=\frac{4ab(a+b)}{(a+b)(a-b)\,.\,2b}=\frac{2a}{a-b}.$$

IV. *Упрощеніе выраженій.*

$$\left[\left(1-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\cdot\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\right)\right]:\left(a-\frac{2ab}{a+b}\right)=$$

$$=\left[\frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right]:\left(\frac{a^2+ab-2ab}{a+b}\right)=$$

$$=\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}:\frac{a\,(a-b)}{a+b}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{(a+b)(a-b)a(a-b)}=\frac{1}{a}.$$

Пропорціи.

§ **57**. **Отношеніемъ** *двухъ количествъ называется частное отъ дѣленія одного изъ нихъ на другое.* Такимъ образомъ отношеніе количествъ a и b есть $a:b$ или $\frac{a}{b}$;

" $c+m$ и $d-n$ " $(c+m):(d-n)$ или $\frac{c+m}{d-n}$ и т. д.

Отношеніе есть результатъ отъ сравненія двухъ величинъ посредствомъ дѣленія одной изъ нихъ на другую. Но такъ какъ сравнивать такимъ образомъ возможно между собою только или отвлеченныя величины или величины одного наименованія, то отсюда слѣдуетъ, что *отношеніе есть всегда отвлеченное количество.*

Величины a и b, составляющія отношеніе $\frac{a}{b}$, называются *членами* отношенія; изъ нихъ a назыв. *предыдущимъ* членомъ, а b—*послѣдующимъ.*

Очевидно, что отношеніе двухъ величинъ имѣетъ всѣ свойства частнаго или дроби.

Поэтому, если $\frac{a}{b}=k$, то $a=bk$; $b=a:k$; $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$; $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$.

§ **58**. **Пропорціей** *называется равенство двухъ отношеній.* Такимъ образомъ равенство

$a:b=c:d$ или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ есть пропорція.

Четыре величины a, b, c и d, составляющія пропорцію, называются *пропорціональными*; изъ нихъ a и d называются *крайними* членами пропорціи, b и c—*средними.*

Пропорціи $a:b=b:c$ и $m:n=p:m$, въ которыхъ средніе или крайніе члены равны, называются **непрерывными**.

Общій членъ b или m непрерывной пропорціи называется **средней геометрической или средней пропорціональной** двухъ другихъ величинъ.

§ **59. Основное свойство пропорціи**. I. **Теорема**. *Во всякой пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ членовъ.*

Дѣйствительно, приведя обѣ части пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ къ общему знаменателю, находимъ, что $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$, откуда $ad=bc$.

II. **Обратная теорема.** *Если произведеніе двухъ количествъ равно произведенію двухъ другихъ количествъ, то эти четыре количества пропорціональны*, т.-е. изъ нихъ всегда можно составить пропорцію, принимая множителей перваго произведенія за крайніе члены, а множителей второго произведенія за средніе члены (или наоборотъ).

Докажемъ это. Пусть $ef=gh$.

Раздѣливъ обѣ части равенства послѣдовательно на eg, eh, fg, fh, т.-е. на произведенія двухъ множителей, изъ которыхъ одинъ взятъ изъ лѣвой части, а другой изъ правой части равенства и сдѣлавъ сокращенія, получимъ рядъ пропорцій

$$\frac{f}{g}=\frac{h}{e};\quad \frac{f}{h}=\frac{g}{e};\quad \frac{e}{g}=\frac{h}{f};\quad \frac{e}{h}=\frac{g}{f}.$$

Примѣръ. Изъ 4-хъ чиселъ равенства $6.3=9.2$ можно составить слѣд. пропорціи:

$$\frac{3}{9}=\frac{2}{6};\quad \frac{3}{2}=\frac{9}{6};\quad \frac{6}{9}=\frac{2}{3};\quad \frac{6}{2}=\frac{9}{3}.$$

Слѣдствія. 1. *Крайній членъ пропорціи равенъ произведенію среднихъ, раздѣленному на другой крайній.*

2. *Средній членъ пропорціи равенъ произведенію крайнихъ, раздѣленному на другой средній.*

Дѣйствительно, изъ пропорціи $a:b=c:d$, слѣдуетъ, что $ad=bc$. Раздѣливъ обѣ части этого равенства на каждое изъ 4-хъ количествъ d, c, b и a, получимъ

$$a=\frac{bc}{d};\quad b=\frac{ad}{c};\quad c=\frac{ad}{b};\quad d=\frac{bc}{a}.$$

3. *Средняя геометрическая или средняя пропорціональная двухъ величинъ равна квадратному корню изъ ихъ произведенія.*

Дѣйствительно, изъ пропорціи $a:b=b:c$ имѣемъ, что $b^2=ac$, откуда

$$b=\sqrt{ac}.$$

Примѣръ. $36:12=12:4;\quad 12=\sqrt{36.4}$.

§ 60. **Перестановка членовъ пропорціи.** *Во всякой пропорціи можно переставлять:* 1) *одни крайніе члены;* 2) *одни средніе члены;* 3) *крайніе и средніе члены вмѣстѣ.*

Это доказывается тѣмъ, что при этихъ перестановкахъ произведеніе крайнихъ членовъ будетъ оставаться равнымъ произведенію среднихъ членовъ.

Такимъ образомъ изъ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (1) можно составить еще 3 слѣдующія пропорціи:

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\ (2);\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\ (3);\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\ (4).$$

Написавъ данную пропорцію въ видѣ $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ (5) и составивъ отсюда еще 3 пропорціи:

$$\frac{b}{d}=\frac{a}{c}\ (6);\ \frac{c}{a}=\frac{d}{b}\ (7);\ \frac{d}{c}=\frac{b}{a}\ (8),$$

заключаемъ, что всякая пропорція можетъ быть написана 8-ью различными способами.

§ 61. **Сложными пропорціями** *называются пропорціи, полученныя отъ перемноженія или дѣленія соотвѣтственныхъ отношеній двухъ или нѣсколькихъ пропорцій.* Напр., изъ двухъ пропорцій $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (1) и $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ (2) получаются сложныя пропорціи

$$\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh} \text{ и } \frac{af}{be}=\frac{ch}{dg}.$$

§ 62. **Производныя пропорціи.** Если прибавимъ или вычтемъ изъ обѣихъ частей пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ по 1, то получимъ $\frac{a}{b}\pm1=\frac{c}{d}\pm1$, или по приведеніи каждой части къ своему знаменателю

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}. \qquad (1).$$

Раздѣливъ почленно найденную пропорцію (1) на данную, находимъ

$$\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}. \qquad (2).$$

Пропорціи (2) и (1) называются *производными* и читаются такъ: *сумма или разность членовъ перваго отношенія такъ относится къ своему предыдущему* (или къ своему послѣдующему), *какъ сумма или разность членовъ второго отношенія къ своему предыдущему* (или къ своему послѣдующему).

Переставивъ мѣстами средніе члены пропорцій (1) и (2), получимъ еще двѣ другія производныя пропорціи

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \text{ т.-е.}$$

сумма или разность членовъ перваго отношенія такъ относится къ суммѣ или разности членовъ второго отношенія, какъ предыдущій къ предыдущему или какъ послѣдующій къ послѣдующему.

Напишемъ отдѣльно 2 пропорціи, изображаемыя равенствомъ (1)

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Раздѣливъ одну изъ нихъ на другую, получимъ новую производную пропорцію $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, т.-е. *сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ ихъ разности.*

§ 63. Свойство ряда равныхъ отношеній: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots$

Называя ихъ общее частное черезъ k, находимъ, что

$$a_1 = b_1 k \ldots (1); \quad a_2 = b_2 k \ldots (2); \quad a_3 = b_3 k \ldots (3).$$

Сложимъ почленно равенства (1), (2), (3)...:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = b_1 k + b_2 k + b_3 k + \ldots \quad \text{или}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots) k \qquad (4).$$

Раздѣливъ обѣ части равенства (4) на сумму $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$, получимъ

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 \ldots}{b_1 + b_2 + b_3 \ldots} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots k, \text{ т.-е.,}$$

если имѣемъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма предыдущихъ членовъ такъ относится къ суммѣ послѣдующихъ членовъ, какъ каждый изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему.

§ 64. **О пропорціональности величинъ**. Двѣ величины называются *прямо пропорціональными* одна другой, если онѣ находятся между собой въ такой зависимости, что, при увеличеніи (или уменьшеніи) одной изъ нихъ въ нѣкоторое число разъ, другая также увеличивается (или уменьшается) во столько же разъ. Напр., количество и стоимость товара, время и пространство, проходимое тѣломъ въ равномѣрномъ движеніи, суть величины прямо пропорціональныя.

Зависимость между двумя прямо пропорціональными величинами a и b выражается равенствомъ

$$a=mb \qquad (1),$$

гдѣ m есть нѣкоторое постоянное число. Дѣйствительно, увеличивая величину b, напр., въ 2, 3, 4... раза, мы заключаемъ изъ равенства (1), что величина a также будетъ увеличиваться въ 2, 3, 4... раза.

Двѣ величины называются *обратно пропорціональными* одна другой, если онѣ находятся между собой въ такой зависимости, что съ увеличеніемъ одной изъ нихъ въ нѣкоторое число разъ, другая уменьшается во столько же разъ (или наоборотъ). Напр., количество работниковъ и число дней, въ которое они могутъ совершить извѣстную работу, скорость и время, въ которое можно пройти извѣстное пространство въ равномѣрномъ движеніи, суть величины обратно пропорціональныя.

Зависимость между двумя обратно пропорціональными величинами a и b выражается равенствомъ

$$a=m\cdot\frac{1}{b} \ (2) \text{ или } a=\frac{m}{b} \qquad (2'),$$

гдѣ m есть нѣкоторое постоянное число. Дѣйствительно, увеличивая въ равенствѣ (2′) величину b, напр., въ 2, 3, 4... раза, мы находимъ, что величина a будетъ уменьшаться въ 2, 3, 4... раза.

Постоянное число m, называемое обыкновенно *множителемъ* или *коэффиціентомъ пропорціональности*, очевидно, равно числовому значенію, которое имѣетъ величина a, если величина $b=1$.

Двѣ величины могутъ быть связаны между собой не только простой (прямой или обратной) пропорціональностью 1-й степени, но и пропорціональностью 2-й, 3-ьей и т. д. степени.

Напр., двѣ величины c и d равенства $c=md^2$ связаны между собой прямой пропорціональностью 2-й степени, такъ какъ при увеличеніи d въ 2, 3, 4,... раза величина c увеличивается въ 2^2, 3^2, 4^2,... т.-е. въ 4, 9, 16,... разъ. Такимъ образомъ, возрастанія величины c пропорціональны *квадратамъ* возрастаній величины d.

Точно также изъ равенства $e=\frac{m}{f^3}$ заключаемъ, что возрастанія величины e обратно пропорціональны *кубамъ* возрастаній величины f, такъ какъ при увеличеніи f въ 2, 3, 4,... раза величина e уменьшается въ 2^3, 3^3, 4^3,... раза или въ 8, 27, 64,... раза.

Простѣйшіе примѣры прямой пропорціональности 1-й, 2-й и 3-ьей степени мы находимъ въ геометріи.

Называя черезъ C, K и V длину окружности, площадь круга и объемъ шара, имѣемъ слѣдующія зависимости ихъ отъ радіуса r

$$C=2\pi r \ (1);\quad K=\pi r^2 \ (2);\quad V=\frac{4\pi}{3}r^3 \ (3).$$

Изъ равенствъ (1), (2) и (3) заключаемъ, что длина окружности прямо пропорціональна 1-й степени радіуса, площадь круга—2-й степени или квадрату радіуса, объемъ шара — 3-ьей степени или кубу радіуса.

Коэффиціентъ пропорціональности въ первомъ случаѣ $=2\pi$, во второмъ $=\pi$, въ третьемъ $=\frac{4\pi}{3}$.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

Уравненія первой степени.

Рѣшеніе уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ.

§ **65**. **Опредѣленія**. Два числовыхъ или буквенныхъ выраженія, соединенныя знакомъ $=$, составляютъ *равенство*. Выраженіе, стоящее налѣво отъ знака $=$, называется *лѣвой* или *первой* частью, а стоящее направо отъ него, — *правой* или *второй* частью равенства.

Равенства бываютъ двухъ родовъ: *тождества* и *уравненія*.

Тождество, какъ извѣстно (§ 30), есть такое равенство, которое справедливо при *всякихъ* значеніяхъ входящихъ въ него буквъ.

Уравненіе есть такое равенство, которое справедливо не при всякихъ значеніяхъ входящихъ въ него буквъ, а только при *нѣкоторыхъ*.

Напр., равенство $x-8=2$ есть уравненіе, такъ какъ оно справедливо только при одномъ значеніи x, а именно, при $x=10$. Точно также равенство $\frac{2}{3}x=4$ есть уравненіе, такъ какъ оно справедливо только при одномъ значеніи x, именно, при $x=6$. Равенство $x^2=25$ есть уравненіе, справедливое при *двухъ* значеніяхъ x, именно, при $x=+5$ и при $x=-5$, такъ какъ $(+5)^2=25$ и $(-5)^2=25$.

Очевидно, если вмѣсто x подставимъ его значенія, то уравненія обращаются въ тождества.

Уравненіе $x-8=2$ при $x=10$ обращается въ тождество $10-8=2$.

" $\frac{2}{3}x=4$ " $x=6$ " " $\frac{2}{3}\cdot 6=4$.

" $x^2=25$ " $x=+5$ и при $x=-5$ " $25=25$.

Такія количества, какъ x, которыя только при *нѣкоторыхъ опредѣленныхъ* своихъ значеніяхъ обращаютъ уравненіе въ тождество, называются *неизвѣстными* уравненія. Они обыкновенно обозначаются послѣдними буквами азбуки x, y, z и т. д.

Тѣ опредѣленныя значенія неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ уравненіе въ тождество, называются *корнями* уравненія. Напр., 10 есть корень уравненія $x-8=2$; $+5$ и -5 суть 2 корня уравненія $x^2=25$.

Рѣшить уравненіе значитъ найти *корни* его.

§ **66. Раздѣленіе уравненій**. Кромѣ *численныхъ* уравненій, подобныхъ приведеннымъ въ предыдущемъ §, существуютъ еще уравненія *буквенныя*, въ которыхъ кромѣ послѣднихъ буквъ азбуки x, y, z, u,..., означающихъ *неизвѣстныя* входятъ еще другія буквы, означающія *извѣстныя* (или предполагаемыя извѣстными) величины. Напр., $2mx+a=b-c$; $abx-c=5d^3x+1$ и т. д. Численные и буквенные множители $2m$, ab, $5d^3$ при неизвѣстныхъ принято называть коэффиціентами неизвѣстныхъ.

Уравненія раздѣляются:

1. По *числу* неизвѣстныхъ на уравненія съ 1-мъ, 2-мя, 3-мя и болѣе неизвѣстными.

2. По *степени* неизвѣстныхъ на уравненія 1-й, 2-ой, 3-ьей и т. д. степени. Напр.,
$x-8=2$ есть уравненіе 1-й степени съ 1-мъ неизвѣстнымъ.
$3x+y=2z-10$ есть уравненіе 1-й степени съ 3-мя неизвѣстными.

$x^2=25$ есть уравненіе 2-й степени съ 1-мъ неизвѣстнымъ и т. д. [1]).

§ **67. Равносильныя (эквивалентныя) уравненія**. Уравненія называются *равносильными* или *эквивалентными*, если они имѣютъ одни и тѣ же корни. Напр., уравненія

$$3x-1=x+5 \quad \text{и} \quad x+4=2x+1$$

суть равносильные, такъ такъ они имѣютъ одинъ и тотъ же корень: $x=3$. Рѣшеніе всякаго даннаго уравненія состоитъ въ преобразованіи его въ такое простѣйшее *равносильное*

---

[1]) Въ высшей алгебрѣ доказывается, что всякое опредѣленное уравненіе имѣетъ столько *корней* для каждаго изъ неизвѣстныхъ, входящихъ въ него, сколько *единицъ* въ степени уравненія. Такимъ образомъ уравненія 1-й степени имѣютъ по 1 корню для каждаго неизвѣстнаго, уравненія 2-й степени—по 2 корня и т. д.

уравненіе, корень (или корни, если уравненіе выше 1-ой степени) котораго былъ бы очевиденъ. Преобразованія уравненій основаны на двухъ слѣдующихъ ихъ свойствахъ.

§ 68. Основныя свойства уравненій. Теорема I. *Если къ объимъ частямъ уравненія прибавимъ или отъ нихъ отнимемъ одно и то же количество, то новое уравненіе будетъ равносильно первоначальному.*

Положимъ, что имѣемъ уравненіе

$$A=B, \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ мы для общности и краткости всю лѣвую часть (напр., $3x-1$) обозначимъ черезъ A, а всю правую часть (напр., $x+5$) обозначимъ черезъ B. Если мы къ обѣимъ частямъ приложимъ какое-нибудь количество m, то получимъ новое уравненіе

$$A+m=B+m \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Если при нѣкоторомъ значеніи [1]) неизвѣстнаго (напр., при $x=3$) A и B будутъ равными количествами, то совершенно очевидно, что при томъ же значеніи неизвѣстнаго $A+m$ и $B+m$ тоже будутъ равными количествами, такъ какъ если къ равнымъ количествамъ прибавимъ поровну, то получимъ равныя количества. Поэтому уравненіе (2) равносильно уравненію (1).

Наоборотъ, если при какомъ-нибудь значеніи неизвѣстнаго $A+m$ и $B+m$ будутъ равными количествами, то при томъ же самомъ значеніи неизвѣстнаго A и B тоже будутъ равными количествами, такъ какъ если отъ равныхъ количествъ отнимемъ поровну, то получимъ равныя количества. Итакъ, уравненіе (1) равносильно уравненію (2).

Справедливость теоремы въ случаѣ *вычитанія* видна какъ изъ только что доказаннаго положенія, что уравненіе $A+m=B+m$ равносильно уравненію $A=B$, такъ и изъ того, что *отнять* какое-нибудь количество все равно что *прибавить* то же количество съ обратнымъ знакомъ.

---

[1]) Если уравненіе $A=B$ выше 1-й степени, то такихъ значеній будетъ *нѣсколько*.

Теорема II. *Если объ части уравненія умножимъ или раздълимъ на одно и то же количество, то новое уравненіе будетъ равносильно первоначальному.*

Дано уравненіе $A=B$ . . . . (1)

Умноживъ обѣ его части на нѣкоторое количество m, получимъ уравненіе

$$Am=Bm \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Если при нѣкоторомъ значеніи неизвѣстнаго A и B будутъ равными количествами, то при томъ же его значеніи Am и Bm тоже будутъ равными количествами, такъ какъ, умноживъ равныя количества на одно и то же количество, получимъ равныя количества. Итакъ, уравненіе (2) равносильно уравненію (1).

Точно также докажемъ, что уравненіе (1) равносильно уравненію (2), исходя изъ того, что, раздѣливъ равныя количества (Am и Bm) на одно и то же количество (m), получимъ равныя количества (A и B).

Справедливость теоремы въ случаѣ дѣленія (т.-е. что уравненія $A=B$ и $\frac{A}{m}=\frac{B}{m}$ равносильны) слѣдуетъ какъ изъ только что приведеннаго доказательства, такъ и изъ того, что раздѣлить на число m все равно, что умножить на обратное ему число $\frac{1}{m}$.

§ **69. Необходимыя замѣчанія.** Теорема II имѣетъ слѣдующее весьма важное ограниченіе:

Если объ части уравненія умножимъ или раздълимъ на 0 (который, впрочемъ, и не представляетъ собою количества) *или на выраженіе, которое можетъ обратиться въ* 0, *то не получимъ уравненія равносильнаго данному.* Разсмотримъ оба случая отдѣльно.

I. Если обѣ части какого угодно уравненія $A=B$ умножимъ на нуль, то всегда получимъ не уравненіе, а одно и то же тождество $0=0$,

такъ какъ $A \cdot 0=0$ и $B \cdot 0=0$.

Дѣленіе на 0 невозможно. Поэтому, если иногда по неосмотрительности дѣлятъ обѣ части уравненія на 0 или сокращаютъ ихъ на выраженія, равныя нулю, то получаютъ нелѣпые результаты: изъ того, что $A \cdot 0 = B \cdot 0$, невозможно сдѣлать заключеніе, что $A = B$ [1]).

II. Положимъ, что имѣемъ уравненіе

$$3x = 15, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

удовлетворяющееся при $x = 5$. Умноживъ обѣ части его на x, получимъ уравненіе 2-й степени:

$$3x^2 = 15x, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

которое, какъ легко провѣрить, удовлетворяется *двумя* корнями: $x_1 = 5$ и $x_2 = 0$. Второй корень явился здѣсь *впервые*. Онъ не удовлетворяетъ первоначальному уравненію $3x = 15$. Поэтому уравненіе (2) *не равносильно* уравненію (1), такъ какъ содержитъ *посторонній* или *лишній* корень.

Разсмотримъ другой примѣръ. Уравненіе

$$3x - 1 = x + 5 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1')$$

удовлетворяется при $x = 3$. Умножимъ обѣ части его на $x - 2$:

$$(3x - 1)(x - 2) = (x + 5)(x - 2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2')$$

Это уравненіе тоже 2-й степени и имѣетъ два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$, что легко провѣрить. Итакъ, уравненіе (2′) тоже не равносильно уравненію (1), ибо имѣетъ *посторонній* корень $x = 2$.

Обратно, если бы мы имѣли уравненія (2) и (2′):

$$3x^2 = 15x \quad \text{и} \quad (3x - 1)(x - 2) = (x + 5)(x - 2),$$

имѣющія по два корня, и раздѣлили бы обѣ части перваго уравненія на x, а второго на $x - 2$, то получили бы два уравненія 1-ой степени

$$3x = 15 \ldots (1) \quad \text{и} \quad 3x - 1 = x + 5 \ldots (1'),$$

имѣющія по одному корню и слѣдовательно неравносильныя первоначальнымъ уравненіямъ (2) и (2′).

Легко видѣть, что въ первомъ случаѣ мы получили лишніе корни, потому что *умножили*, а во второмъ случаѣ потеряли нѣкоторые корни, потому что *раздѣлили* обѣ части уравненій на множителей x и $x - 2$, которые имѣли значенія, равныя нулю.

---

[1]) Иногда дѣлятъ обѣ части даннаго уравненія на общаго множителя вида $(m - n)$, не обративъ вниманія, что m можетъ быть $= n$, то-есть, что $m - n = 0$. Такимъ способомъ доказываютъ разные софизмы, что напр., $2 = 3$, исходя изъ того, что $2.0 = 3.0$ и сокращая затѣмъ на 0 и т. п.

Итакъ, *при умноженіи или дѣленіи обѣихъ частей уравненія на одно и то же выраженіе, содержащее неизвѣстное, получается уравненіе, неравносильное первоначальному, такъ какъ мы или получаемъ посторонніе корни, или, наоборотъ, утрачиваемъ нѣкоторые корни.*

§ **70. Преобразованія уравненій.** Изъ основныхъ свойствъ уравненій вытекаютъ слѣдствія, помощью которыхъ уравненія приводятся къ *простѣйшему* виду.

1. *Если въ обѣихъ частяхъ уравненія находятся одинаковые члены съ одинаковыми знаками, то эти члены можно опустить.*

$\frac{3}{4}+5x-9=3+2x+\frac{3}{4}$. Отнявъ отъ обѣихъ частей по $\frac{3}{4}$, получимъ $$5x-9=3+2x.$$

2. *Всякій членъ уравненія можно перенести изъ одной части въ другую, перемѣнивъ въ немъ знакъ на обратный.* Напр., дано ур-іе $5x-9=3+2x$.

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ по $+9$:

$$\begin{array}{r} 5x-9=3+2x \\ +9 \quad\; +9 \\ \hline 5x=3+2x+9, \end{array}$$

т.-е. членъ -9 перешелъ во 2-ю часть съ *обратнымъ* знакомъ [1]).

Вычтемъ теперь изъ обѣихъ частей по $2x$:

$$\begin{array}{r} 5x=3+2x+9 \\ -2x \quad -2x \\ \hline 5x-2x=3+9, \end{array}$$

[1]) Очень интересно замѣтить, что именно это преобразованіе, т.-е. перенесеніе *отрицательныхъ* (вычитаемыхъ) членовъ изъ одной части уравненія въ другую, гдѣ они обращаются въ *положительные* (слагаемые) называлось у средневѣковыхъ арабовъ *аль джаберъ* (*al jaber*—возстановленіе). Перенесеніе же положительныхъ членовъ въ другую часть уравненія, гдѣ они становятся отрицательными, называлось *аль мукабала* (al mukabala)—противопоставленіе). Итальянецъ *Леонардо Пизанскій* или *Леонардо Фибоначчи*, ознакомившій впервые Европу съ математическими открытіями индусовъ и арабовъ, въ своемъ сочиненіи, вышедшемъ въ 1202 г., писалъ: часть третья начинается рѣшеніемъ нѣкоторыхъ вопросовъ по способу *„алгебры и алмукабалы"*. Позднѣйшіе авторы первоначально также употребляли оба названія, но затѣмъ для краткости второе было отброшено и новая отрасль математики стала называться просто алгеброй.

т.-е. членъ $2x$ перешелъ въ 1-ую часть съ *обратнымъ* знакомъ. Замѣтимъ, что произведя въ полученномъ уравненіи указанныя дѣйствія, получимъ $3x=12$, откуда $x=4$.

3. *Знаки всѣхъ членовъ можно измѣнить на обратные.* Перенесемъ всѣ члены 1-ой части уравненія $5x-9=3+2x$ во вторую, а всѣ члены 2-ой части въ первую:

$$-3-2x=-5x+9 \text{ или } -5x+9=-3-2x.$$

Можно, впрочемъ, еще проще выяснить правильность этого преобразованія, вообразивъ, что обѣ части уравненія умножены на -1.

4. *Если всѣ члены уравненія имѣютъ общаго множителя, то можно на него раздѣлить всѣ члены и такимъ образомъ упростить уравненіе.*

Примѣръ. $20+25x=5x+100$. Раздѣливъ всѣ члены на общ. множителя 5, получимъ: $4+5x=x+20$.

5. *Если въ уравненіи есть дробные члены, то отъ нихъ можно освободиться, приведя всѣ члены къ одному знаменателю и затѣмъ отбросивъ его.*

Примѣръ. Дано ур-іе $x+\frac{12-x}{4}=\frac{26-x}{2}$. Приведемъ всѣ члены къ одному знаменателю: $\frac{4x}{4}+\frac{12-x}{4}=\frac{2(26-x)}{4}$.

Умножимъ обѣ части уравненія на 4 или, что все равно отбросимъ знаменателя:

$$4x+12-x=2(26-x).$$

§ **71. Рѣшеніе уравненій съ 1-мъ неизвѣстнымъ** сводится къ слѣдующимъ правиламъ:

Послѣ освобожденія обѣихъ частей уравненія отъ дробей и раскрытія скобокъ слѣдуетъ:

1. Перенести всѣ извѣстные члены въ одну часть, а неизвѣстные—въ другую.

2. Произвести дѣйствія, указанныя знаками.

3. Раздѣлить обѣ части уравненія на коэффиціентъ при неизвѣстномъ.

§ **72. Примѣры рѣшенія численныхъ уравненій.**

Примѣръ 1. $\frac{5x-7}{3}-2=\frac{3x+12}{4}$.

1. *Освобождаемъ уравненіе отъ дробей:* $4(5x-7)-24=$ $=3(3x+12)$.

2. *Раскрываемъ скобки:* $20x-28-24=9x+36$.

3. *Переносимъ извѣстные члены въ одну часть, а неизвѣстные въ другую:* $20x-9x=36+28+24$.

4. *Дѣлаемъ приведеніе:* $11x=88$.

5. *Дѣлимъ обѣ части уравненія на коэффиціентъ при неизвѣстномъ:* $x=8$.

6. *Сдѣлаемъ повѣрку*, подставивъ въ данное ур-іе вмѣсто x его значеніе: $\frac{5.8-7}{3}-2=\frac{3.8+12}{4}$; $\frac{33}{3}-2=\frac{36}{4}$; $9=9$.

Уравненіе обратилось въ тождество, слѣдовательно, искомое значеніе x опредѣлено вѣрно.

Примѣръ 2. $7x-\frac{2-x}{9}=\frac{7+9x}{4}-1$.

1. Освобождаемъ ур-іе отъ дробей: $252x-4(2-x)=$ $=9(7+9x)-36$.

2. Раскрываемъ скобки: $252x-8+4x=63+81x-36$.

3. Переносимъ члены: $252x+4x-81x=63-36+8$.

4. Дѣлаемъ приведеніе: $175x=35$.

5. Опредѣляемъ неизвѣстное: $x=\frac{35}{175}=\frac{1}{5}$ [1]).

Примѣръ 3. $\frac{7}{x}-\frac{23-x}{3x}=\frac{7}{12}-\frac{1}{4x}-\frac{1}{3}$.

1. Освобождаемъ ур-іе отъ дробей: $84-92+4x=7x-3-4x$.

2. Переносимъ члены: $4x-7x+4x=-3-84+92$.

3. Дѣлаемъ приведеніе: $x=5$.

4. Повѣрка. $\frac{7}{5}-\frac{23-5}{3.5}=\frac{7}{12}-\frac{1}{4.5}-\frac{1}{3}$;

$$\frac{7}{5}-\frac{18}{15}=\frac{7}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{3};\ \frac{1}{5}=\frac{1}{5}.$$

---

[1]) Слѣдуетъ обратить вниманіе на ошибку, очень часто дѣлаемую учащимися. Забывая, что знакъ дѣленія — черта замѣняетъ собою скобки, измѣняютъ *не всѣ* знаки у многочленнаго числителя дроби, передъ которой стоитъ знакъ минусъ, а только знакъ *перваго* члена. Напр., при рѣшеніи ур-ія $7x-\frac{2-x}{9}=\frac{7+9x}{4}-1$, освобождая его *въ умѣ* отъ дробей, пишутъ такое выраженіе 1-ой части: $252x-8-4x$ вмѣсто $252x-8+4x$.

Примѣръ 4. $\frac{2x+1}{3x-15}-\frac{x-11}{2x-10}=1.$

1. Освобождаемъ ур-іе отъ дробей [Общ. знаменат. $6(x-5)$]:

$$2(2x+1)-3(x-11)=6(x-5).$$

2. Раскрываемъ скобки: $4x+2-3x+33=6x-30$.
3. Переносимъ члены: $4x-3x-6x=-30-2-33$.
4. Дѣлаемъ приведеніе и измѣняемъ знаки на обратные:

$$5x=65.$$

5. Опредѣляемъ неизвѣстное: $x=\frac{65}{5}=13$.
6. Повѣрка: $\frac{2.13+1}{3.13-15}-\frac{13-11}{2.13-10}=1;\ \frac{27}{24}-\frac{2}{16}=1; 1=1.$

Примѣръ 5. $\frac{6x^2+4x+10}{8x^2-x+26}=\frac{3}{4}.$

1. Освобождаемъ ур-іе отъ дробей. Полезно замѣтить, что данное ур-іе представляетъ *пропорцію*, поэтому для освобожденія отъ дробей пишемъ, что произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ:

$$4(6x^2+4x+10)=3(8x^2-x+26).$$

2. Раскрываемъ скобки: $24x^2+16x+40=24x^2-3x+78$.
3. Уничтожаемъ одинаковый членъ $24x^2$ въ обѣихъ частяхъ и переносимъ члены: $16x+3x=78-40$.
4. Дѣлаемъ приведеніе: $19x=38$.

Опредѣляемъ неизвѣстное: $x=\frac{38}{19}=2$.

6. Повѣрка. $\frac{6.4+4.2+10}{8.4-2+26}=\frac{3}{4};\ \frac{42}{56}=\frac{3}{4};\ \frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$

§ 73. Примѣры рѣшенія буквенныхъ уравненій.

Примѣръ 1. $\frac{x-b}{a}=\frac{a-x}{b}.$

1. Освобождаемъ ур-іе отъ дробей: $b(x-b)=a(a-x)$.
2. Раскрываемъ скобки: $bx-b^2=a^2-ax$.
3. Переносимъ члены: $ax+bx=a^2+b^2$.
4. *Выносимъ неизвѣстный членъ за скобки* [1]*:*

$$x(a+b)=a^2+b^2.$$

---

[1]) т.-е. опредѣляемъ коэффиціентъ при неизвѣстномъ.

5. Опредѣляемъ неизвѣстное: $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

6. Повѣрка. $\dfrac{\frac{a^2+b^2}{a+b}-b}{a}=\dfrac{a-\frac{a^2+b^2}{a+b}}{b}$; $\dfrac{a^2+b^2-ab-b^2}{(a+b)a}=$

$$=\frac{a^2+ab-a^2-b^2}{(a+b)b};\ \frac{a(a-b)}{(a+b)a}=\frac{b(a-b)}{(a+b)b};\ \frac{a-b}{a+b}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Примѣръ 2. $\dfrac{ac-2ax}{a^2-x^2}-\dfrac{b-x}{a+x}=\dfrac{c-x}{a-x}$.

1. Освобождаемъ ур-іе отъ дробей (Общ. знам. a^2-x^2):

$$ac-2ax-(a-x)\ (b-x)=(a+x)\ (c-x).$$

2. Раскрываемъ скобки:

$$ac-2ax-ab+ax+bx-x^2=ac+cx-ax-x^2.$$

3. Уничтожаемъ одинаковые члены ac и $-x^2$ въ обѣихъ частяхъ и переносимъ остальные члены: $bx-cx=ab$.

4. Выносимъ неизвѣстный членъ за скобки: $x(b-c)=ab$.

5. Опредѣляемъ неизвѣстное: $x=\frac{ab}{b-c}$.

Примѣръ 3. Нѣкоторыя уравненія рѣшаются очень просто помощью производныхъ пропорцій

$$\frac{x+n}{x}=\frac{a+b}{a}.$$

Составивъ производную пропорцію: *разность членовъ 1-го отношенія такъ относится къ своему послѣдующему, какъ разность членовъ 2-го отношенія относится къ своему послѣдующему,* получимъ

$$\frac{n}{x}=\frac{b}{a},\ \text{откуда}\ x=\frac{an}{b}.$$

Составленіе уравненій съ 1 неизвѣстнымъ.

§ **74**. Введеніемъ уравненій математика, во 1-хъ, значительно облегчила способы рѣшенія весьма многихъ вопросовъ и задачъ, рѣшавшихся прежде чрезвычайно трудными и искусственными пріемами [1]), а во-2-хъ, что гораздо важ-

[1]) Примѣры подобныхъ вопросовъ и теперь еще встрѣчаются почти во всѣхъ ариѳметическихъ задачникахъ.

нѣе, несравненно расширила область самихъ вопросовъ. При помощи уравненій оказалось возможнымъ разрѣшеніе такихъ вопросовъ, которые были *недоступны* прежней наукѣ. Изученіе свойствъ математическихъ величинъ, какъ количественныхъ, такъ и пространственныхъ, многія открытія въ области физики, механики, астрономіи обязаны во многомъ методу уравненій.

Въ виду чрезвычайной важности этого отдѣла, учащійся долженъ обратить на него особое вниманіе и помнить, что только самостоятельный трудъ, продолжительная практика и сосредоточеніе вниманія на условіяхъ разрѣшаемыхъ имъ вопросовъ помогутъ ему овладѣть этимъ цѣннымъ методомъ.

Чтобы рѣшить задачу способомъ уравненій, надо: 1) составить уравненіе по условіямъ задачи и 2) рѣшить составленное уравненіе. Опредѣленныхъ правилъ для составленія уравненій нѣтъ, такъ какъ задачи могутъ быть самаго разнообразнаго рода, а слѣдовательно и пріемы составленія уравненій будутъ различные для каждаго случая. Тѣмъ не менѣе существуетъ одно общее *указаніе*, которымъ полезно руководиться для всевозможныхъ случаевъ составленія уравненій, а именно, *слѣдуетъ:*

1. Обозначить *искомую* величину или величину, непосредственно съ ней связанную, одной буквой, напр., x.

2. Считая величину x, какъ за *извѣстную*, выразить знаками дѣйствій зависимость между нею и всѣми остальными *данными* величинами, входящими въ задачу.

3. Составить по условіямъ задачи два *количественно* одинаковыхъ выраженія и связать ихъ знакомъ равенства [1]).

---

[1]) Вотъ что говоритъ великій математикъ *Ньютонъ* о рѣшеніи задачъ способомъ составленія уравненій: „Особенное превосходство алгебры состоитъ въ томъ, что между тѣмъ какъ въ ариѳметикѣ вопросы рѣшаются путемъ перехода отъ данныхъ величинъ къ искомымъ,—алгебра слѣдуетъ обратному порядку — отъ количествъ искомыхъ, разсматриваемыхъ какъ данныя, къ количествамъ даннымъ, какъ будто они были искомыми, съ цѣлью притти такъ или иначе къ заключенію или уравненію, изъ котораго можно было бы опредѣлить искомыя. Чтобы привести вопросъ къ уравненію, нужно дать обозначенія какъ извѣстнымъ, такъ и неизвѣстнымъ количествамъ, насколько того требуетъ данный случай, и выразить смыслъ вопроса алгебраическимъ языкомъ, если можно такъ выразиться.

§ 75. Примѣры составленія уравненій.

Примѣръ 1. Въ лавкѣ находятся 3 куска ситца. Въ 1-мъ кускѣ вдвое болѣе аршинъ, чѣмъ во 2-мъ, а во 2-мъ вдвое болѣе, чѣмъ въ 3-мъ. Когда отъ 1-го куска отрѣзали 15 аршинъ, отъ 2-го 13 арш. и отъ 3-го 5 арш., то оказалось, что число аршинъ оставшагося ситца равно $\frac{5}{6}$ числа аршинъ, первоначально бывшихъ въ 1-мъ кускѣ. Сколько аршинъ осталось въ каждомъ кускѣ?

Задачу эту можно рѣшить нѣсколькими способами.

1-ый способъ. Положимъ, что въ 1-мъ кускѣ первоначально было x аршинъ, тогда по условіямъ задачи во 2-мъ кускѣ было $\frac{1}{2}x$ арш., а въ 3-мъ $\frac{1}{2}$ отъ $\frac{1}{2}x$, т.-е. $\frac{1}{4}x$ арш.

Число аршинъ во всѣхъ 3-хъ кускахъ: $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=\frac{7}{4}x$.

Всего отрѣзано аршинъ: $15+5+13=33$.

Число оставшихся аршинъ: $\frac{7}{4}x-33$.

По условію задачи это число равно $\frac{5}{6}$ числа аршинъ, первоначально бывшихъ въ 1-мъ кускѣ, т.-е. равно $\frac{5}{6}x$. Поэтому

$$\frac{7}{4}x-33=\frac{5}{6}x. \qquad \text{Рѣшимъ это уравненіе:}$$

$$21x-396=10x; \quad 11x=396; \quad x=36.$$

Итакъ, въ 1-мъ кускѣ первоначально было 36 арш. и слѣдовательно, *осталось* въ немъ $36-15=21$ арш.

Во 2-мъ кускѣ первоначально было $\frac{1}{2}x=\frac{36}{2}=18$ аршинъ; осталось $18-13=5$ арш.

Условія вопроса, выраженныя такимъ образомъ алгебраически, дадутъ столько уравненій, сколько нужно для его рѣшенія.

Вы видите отсюда, что для рѣшенія вопросовъ, которые относятся къ числамъ или отвлеченнымъ отношеніямъ величинъ, требуется только перевести задачу съ того языка, на которомъ она предложена, на языкъ алгебраическій, т.-е. на языкъ знаковъ, способный выражать наши понятія о соотношеніяхъ величинъ". (Arithmetica universalis).

Въ 3-мъ кускѣ первоначально было $\frac{1}{4}x=\frac{36}{4}=9$ аршинъ; осталось $9-5=4$ арш.

Повѣрка. Всѣхъ аршинъ первоначально было $\frac{7}{4}x=\frac{7}{4}.36=$ $=63$ арш.; осталось $63-33=30$ арш.; $\frac{5}{6}$ числа арш. 1-го куска $=\frac{36.5}{6}=30$.

2-й способъ. Обозначимъ число аршинъ, первоначально бывшихъ въ 3-мъ кускѣ, черезъ x. Тогда во 2-мъ было $2x$ арш., а въ 1-мъ $4x$ арш. Число всѣхъ аршинъ первоначально было $x+2x+4x=7x$; число оставшихся аршинъ во всѣхъ 3-хъ кускахъ$=7x-33$; $\frac{5}{6}$ числа арш. 1-го куска$=\frac{5}{6}.4x=\frac{10}{3}x$. По условію задачи $7x-33=\frac{10}{3}x$. Откуда $21x-99=10x$; $11x=99$; $x=9$ и слѣдов. $2x=18$; $4x=36$ и т. д.

3-й способъ. Пусть число аршинъ, *оставшихся* въ 1-мъ кускѣ, было x. Слѣдов., первоначально было арш. въ 1-мъ кускѣ $x+15$; во 2-мъ $\frac{x+15}{2}$; въ 3-мъ $\frac{x+15}{4}$ и всего въ 3-хъ кускахъ было $x+15+\frac{x+15}{2}+\frac{x+15}{4}=\frac{4x+60+2x+30+x+15}{4}=$ $=\frac{7x+105}{4}$ арш., а осталось $\frac{7x+105}{4}-33$; $\frac{5}{6}$ первоначальнаго числа аршинъ въ 1-мъ кускѣ будетъ $\frac{5}{6}(x+15)$.

По условію задачи $\frac{7x+105}{4}-33=\frac{5}{6}(x+15)$. Рѣшаемъ ур-іе:

$$3(7x+105)-396=10(x+15);\ 21x+315-396=10x+150;$$
$$21x-10x=150-315+396;\ 11x=231;\ x=21.$$

Итакъ, въ 1-мъ кускѣ осталось 21 арш.; во 2-мъ $\frac{21+15}{2}-13=\frac{36}{2}-13=5$ арш.; въ 3-мъ осталось $\frac{21+15}{4}-5=4$ арш.

4-й способъ. Пусть первоначальное число аршинъ во всѣхъ 3-хъ кускахъ будетъ x. Такъ какъ числа аршинъ въ 1-мъ, 2-мъ и 3-мъ кускахъ относятся, какъ $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$ или какъ $4:2:1$, то число арш., первоначально бывшихъ въ 1-мъ кускѣ, равно $\frac{4}{7}x$, во 2-мъ $\frac{2}{7}x$ и въ 3-мъ $\frac{1}{7}x$; $\frac{5}{6}$ числа арш. 1-го куска будетъ $\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}x=\frac{10}{21}x$.

По условію задачи $x-33=\frac{10}{21}x$, откуда $21x-693=10x$; $11x=693$; $x=63$. Первоначальное число арш. 1-го куска $\frac{4}{7}x=\frac{4.63}{7}=36$; слѣдов., осталось въ немъ $36-15=21$ арш. и т. д.

Понятно, что задачу можно было бы рѣшить еще нѣсколькими способами, напр., обозначивъ черезъ x число аршинъ, первоначально бывшихъ или оставшихся во 2-мъ кускѣ или число аршинъ, оставшихся во всѣхъ 3-хъ кускахъ и т. д. Составленіе уравненій въ этихъ случаяхъ предоставляется самимъ учащимся.

Уже изъ приведенныхъ примѣровъ можно заключить:

1. Обозначеніе неизвѣстнаго количества одной буквой, указаніе посредствомъ ея той зависимости, которая существуетъ между *данными и искомыми* величинами задачи и, наконецъ, выраженіе условій задачи уравненіемъ — въ значительной степени облегчаютъ рѣшеніе всѣхъ подобныхъ вопросовъ.

2. Вообще говоря, можно рѣшить всякій предложенный вопросъ нѣсколькими способами. Отъ опытности и находчивости учащагося зависитъ выбрать самый короткій и легкій изъ нихъ.

Примѣръ 2-й. Найти число, которое при дѣленіи на 5 даетъ въ остаткѣ 2, а при дѣленіи на 8 даетъ въ остаткѣ 5, зная, что первое частное тремя единицами болѣе второго.

1-й способъ. Обозначимъ искомое число черезъ x. Вычтя изъ него 2 и раздѣливъ разность на 5, найдемъ, что первое частное будетъ $\frac{x-2}{5}$. Разсуждая точно такъ же, получимъ, что второе частное будетъ $\frac{x-5}{8}$. Такъ какъ первое частное тремя единицами болѣе второго, то $\frac{x-2}{5}=\frac{x-5}{8}+3$. Рѣшаемъ уравненіе

$$8(x-2)=5(x-5)+120;\ 8x-16=5x-25+120;$$

$$3x=111;\ x=37.$$

Повѣрка. 37|5 остатокъ 2|7   37|8 остатокъ 5|4.

2-й способъ. Пусть первое частное будетъ x, тогда второе частное$=x-3$. Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, помноженному на частное, плюсъ остатокъ, то, по условіямъ задачи, можно составить два выраженія искомаго числа: $5x+2$ и $8(x-3)+5$.

Приравняемъ ихъ другъ къ другу: $5x+2=8(x-3)+5$.

Рѣшимъ уравненіе: $5x+2=8x-24+5$; $3x=21$; $x=7$.

Искомое число $=7\,.\,5+2=37$.

Примѣръ 3-й. Братъ съ сестрой на вопросъ: „сколько въ ихъ семьѣ братьевъ и сестеръ", отвѣчали: первый, — что у него братьевъ и сестеръ поровну, а вторая, — что у ней братьевъ вдвое болѣе, чѣмъ сестеръ. Сколько было въ семьѣ братьевъ и сестеръ?

Обозначимъ число всѣхъ сестеръ черезъ x. На основаніи отвѣта брата заключаемъ, что всѣхъ братьевъ было $x+1$. Такъ какъ число сестеръ безъ той, которую спрашивали, было $x-1$, то на основаніи отвѣта сестры пишемъ уравненіе $x+1=2\,(x-1)$. Откуда $x=3$.

Итакъ, всѣхъ сестеръ было 3, а братьевъ 4.

Примѣръ 4. Сумма цифръ искомаго двузначнаго числа равна 9. Если его удвоить и къ произведенію прибавить 18, то получится число изъ тѣхъ же цифръ, но въ обратномъ порядкѣ. Найти это число.

Обозначимъ цифру десятковъ искомаго числа черезъ x. Тогда цифра единицъ его будетъ $9-x$. Искомое число выразится черезъ $10x+9-x$, а число изъ тѣхъ же цифръ, но въ обратномъ порядкѣ, черезъ $10\,(9-x)+x$. Изъ условій задачи находимъ: $(10x+9-x)2+18=10(9-x)+x$; откуда $x=2$; $9-x=7$.

Искомое число: 27. Провѣрка: $27 \cdot 2+18=72$.

Примѣръ 5. У мальчика было два ящика съ орѣхами. Онъ перекладываетъ поперемѣнно изъ каждаго ящика $\frac{1}{3}$ находившихся въ немъ орѣховъ въ другой. Послѣ четырехъ перекладываній въ каждомъ ящикѣ оказалось по 32 орѣха. Сколько было въ каждомъ ящикѣ первоначально?

Положимъ, что въ 1-мъ ящикѣ было первоначально x орѣховъ, тогда во 2-мъ ихъ было $64-x$. Составимъ таблицу перекладываній.

	1 ящикъ.	2 ящикъ.
	x	$64-x$.
1.	$\frac{2}{3}x$.	$64-x+\frac{1}{3}x=64-\frac{2}{3}x$.
2.	$\frac{2}{3}x+(64-\frac{2}{3}x)\frac{1}{3}=\frac{4}{9}x+\frac{64}{3}$	$\frac{2}{3}(64-\frac{2}{3}x)=\frac{128}{3}-\frac{4}{9}x$.
3.	$\frac{2}{3}(\frac{4}{9}x+\frac{64}{3})=\frac{8}{27}x+\frac{128}{9}$	$\frac{128}{3}-\frac{4}{9}x+\frac{1}{3}(\frac{4}{9}x+\frac{64}{3})=\frac{448}{9}-\frac{8}{27}x$.
4.	$\frac{8}{27}x+\frac{128}{9}+\frac{1}{3}(\frac{448}{9}-\frac{8}{27}x)=\frac{16}{81}x+\frac{832}{27}$.	$\frac{2}{3}(\frac{448}{9}-\frac{8}{27}x)=\frac{896}{27}-\frac{16}{81}x$.

Послѣ четвертаго перекладыванія въ каждомъ ящикѣ оказалось поровну. Поэтому

$\frac{16}{81}x+\frac{832}{27}=\frac{896}{27}-\frac{16}{81}x$; $\frac{32}{81}x=\frac{64}{27}$; $x=6$; слѣдовательно во 2-мъ ящикѣ было 58 орѣховъ.

§ **76. Особые случаи, встрѣчающіеся при рѣшеніи уравненій.** Въ нѣкоторыхъ случаяхъ рѣшенія составленныхъ уравненій указываютъ на неправильный подборъ данныхъ величинъ, на невѣрную постановку вопроса, на ошибочность въ предположеніи, допущенную при составленіи уравненія, или, наконецъ, на невозможность вопроса.

Примѣръ 1. Партія рабочихъ, состоявшая изъ мужчинъ и женщинъ, заработала 250 рублей, при чемъ каждый мужчина получилъ по 20 рублей, а каждая женщина по 14 рублей. Сколько было мужчинъ, если вся партія состояла изъ 15 человѣкъ.

Если число мужчинъ назовемъ черезъ x, то число женщинъ выразится черезъ $15-x$. По условію задачи

$$20x+14\,(15-x)=250;\text{ откуда } x=6\tfrac{2}{3}.$$

Это рѣшеніе противорѣчитъ необходимо подразумѣваемому условію, что x долженъ быть *цѣлымъ* числомъ. Невозможный отвѣтъ получился вслѣдствіе неправильнаго подбора данныхъ величинъ, при которомъ не было обращено вниманіе на это необходимое условіе.

Примѣръ 2. Отцу 49 лѣтъ, а сыну 17. Когда отецъ будетъ втрое старше сына?

Положимъ, что это случится черезъ x лѣтъ. Тогда отцу будетъ $49+x$ лѣтъ, а сыну $17+x$. По условію задачи

$$49+x=3(17+x);\text{ откуда } x=-1.$$

Отрицательное рѣшеніе въ этомъ случаѣ указываетъ на невѣрную постановку вопроса. Вопросъ слѣдовало отнести не къ *будущему*, а къ *прошедшему* времени, т.-е. слѣдовало спросить: когда отецъ *былъ* втрое старше сына. Тогда уравненіе получило бы такой видъ:

$$49-x=3(17-x);\text{ откуда } x=1.$$

Дѣйствительно, 1 годъ тому назадъ отецъ былъ втрое старше сына. Одному было 48, а другому 16 лѣтъ.

Примѣръ 3. Два путешественника выходятъ одновременно, 1-й изъ города A, второй изъ города B, и идутъ по одному направленію. На пути ихъ лежитъ городъ C, отстоящій отъ A на 135 верстъ и отъ B на 85 верстъ. На какомъ разстояніи отъ города C первый путешественникъ, проходящій въ день по 35 верстъ, догонитъ второго, проходящаго въ день по 21 верстѣ?

A B N C M. Положимъ, что первый путешественникъ догонитъ второго въ точкѣ M, лежащей на разстояніи x верстъ за городомъ C. Пространство, которое придется пройти первому до мѣста встрѣчи M, выразится черезъ $135+x$ верстъ, а второму черезъ $85+x$ верстъ. Первый пройдетъ свой путь до встрѣчи въ $\frac{135+x}{35}$ дней, а второй—свой путь въ $\frac{85+x}{21}$ дней. Такъ какъ эти числа должны быть равны, то $\frac{135+x}{35}=\frac{85+x}{21}$, откуда $x=-10$ верстъ.

Отрицательное рѣшеніе показываетъ, что при составленіи уравненія сдѣлано было невѣрное предположеніе, что путешественники встрѣтятся за городомъ C. Они встрѣтятся въ точкѣ N, *не доходя* 10 верстъ до города C. Это легко провѣрить: измѣнивъ предположеніе, получимъ такое уравненіе:

$$\frac{135-x}{35}=\frac{85-x}{21}, \text{ откуда } x=10.$$

Изъ примѣровъ 2 и 3 заключаемъ, что если искомое количество можетъ имѣть два противоположныхъ значенія, то *отрицательное рѣшеніе* показываетъ, какъ надо измѣнить вопросъ, чтобы получить положительное рѣшеніе. Если же искомое количество можетъ имѣть только одно положительное значеніе, то отрицательное рѣшеніе указываетъ на невозможность самой задачи.

Примѣръ 4. Числитель искомой дроби равенъ $\frac{3}{4}$ знаменателя ея. Если къ числителю прибавить 4, а къ знаменателю 6, то дробь обратится въ $\frac{2}{3}$. Найти дробь.

Изъ условій задачи прямо слѣдуетъ уравненіе

$$\frac{\frac{3}{4}x+4}{x+6}=\frac{2}{3}, \text{ откуда } x=0.$$

Рѣшеніе показываетъ, что задача *невозможна.*

Необходимо, впрочемъ, замѣтить, что не всякое рѣшеніе вида $x=0$ *(нулевое рѣшеніе)* указываетъ невозможность задачи. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ оно даетъ опредѣленный отвѣтъ на вопросъ.

Примѣръ 6. Отцу 57, а сыну 19 лѣтъ. Когда отецъ будетъ втрое старше сына? Положимъ, что это случится черезъ x лѣтъ. Тогда:

$$57+x=3\ (19+x);\ \text{откуда } x=0.$$

Нулевое рѣшеніе въ этомъ случаѣ указываетъ, что отецъ втрое старше сына *въ настоящее время* [1]).

---

[1]) При рѣшеніи уравненій встрѣчаются и другіе, здѣсь неразсмотрѣнные, случаи. (Рѣшенія безконечныя и неопредѣленныя). О нихъ будетъ сказано въ статьѣ объ изслѣдованіи уравненій.

Уравненія со многими неизвѣстными.

§ 77. **Неопредѣленныя уравненія.** Всякое уравненіе, содержащее не одно, а два или болѣе неизвѣстныхъ, можетъ быть удовлетворено (т.-е. можетъ обратиться въ тождество) посредствомъ безчисленнаго множества различныхъ значеній неизвѣстныхъ и называется поэтому *неопредѣленнымъ уравненіемъ.*

Дѣйствительно, возьмемъ простѣйшее изъ такихъ уравненій, а именно, уравненіе съ двумя неизвѣстными, напр., $2x+3y=5$. Перенеся $3y$ во вторую часть и раздѣливъ затѣмъ обѣ части на коэффиціентъ при x, получимъ

$$x=\frac{5-3y}{2}.$$

Если будемъ давать неизвѣстному y произвольныя значенія, напр., $y=0,1,2,..-1,-2,..$, то x будетъ принимать слѣдующія значенія: $x=\frac{5}{2},\ 1,-\frac{1}{2},..,\ 4,\frac{11}{2},..$

Очевидно, что всякая пара значеній для x и y, напр., $(0;\frac{2}{5})$, $(1;1)$, $(-1;4)$ и т. д. обращаетъ данное уравненіе въ тождество. Такъ какъ нѣтъ никакихъ ограниченій при выборѣ значеній неизвѣстнаго y, то оно можетъ имѣть безчисленное множество значеній, но тогда и x будетъ имѣть также безчисленное множество значеній, изъ которыхъ каждое соотвѣтствуетъ выбранному значенію y.

§ 78. **Совмѣстныя уравненія.** Для того, чтобы получить опредѣленныя значенія для нѣсколькихъ неизвѣстныхъ, необходимо имѣть столько *независимыхъ* [1]) уравненій, сколько самихъ неизвѣстныхъ. Имѣя два независимыхъ уравненія съ двумя неизвѣстными, три уравненія съ тремя неизвѣстными и т. д., мы можемъ посредствомъ тѣхъ способовъ, которые будутъ указаны, опредѣлить значенія неизвѣстныхъ. Независимыя уравненія, содержащія однѣ и тѣ же неизвѣст-

---

[1]) *Независимыми* уравненіями называются такія, которыя не могутъ получиться одно изъ другого путемъ, напр., умноженія или дѣленія обѣихъ частей на одно и то же количество, возвышеніемъ обѣихъ частей въ одну и ту же степень и другихъ преобразованій.

ныя величины, называются *совмѣстными*, а совокупность ихъ—*системой совмѣстныхъ уравненій.*

§ 79. Общій пріемъ рѣшеній уравненій съ двумя неизвѣстными.

Чтобы рѣшить два уравненія съ двумя неизвѣстными, исключаютъ изъ нихъ одно неизвѣстное, послѣ чего получается одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ. Рѣшивъ его, т.-е. найдя значеніе этого неизвѣстнаго, подставляютъ величину его въ одно изъ данныхъ уравненій и затѣмъ опредѣляютъ то неизвѣстное, которое было исключено. Для исключенія неизвѣстныхъ употребляются въ большинствѣ случаевъ слѣдующіе способы: 1. *Способъ уравниванія коэффиціентовъ*; 2. *Способъ подстановки*; *и* 3. *Способъ сравненія неизвѣстныхъ.*

§ 80. Способъ уравниванія коэффиціентовъ или способъ сложенія и вычитанія. Чтобы исключить по этому способу одно изъ неизвѣстныхъ, слѣдуетъ, послѣ приведенія данныхъ уравненій къ ихъ простѣйшему виду, *уравнять* коэффиціенты при исключаемомъ неизвѣстномъ въ обоихъ уравненіяхъ. Для этого умножаютъ всѣ члены 1-го ур-ія на коэффиціентъ при исключаемомъ неизвѣстномъ во 2-мъ ур-іи, а всѣ члены 2-го ур-ія—на коэффиціентъ при томъ же неизвѣстномъ въ 1-мъ ур-іи. Затѣмъ оба уравненія почленно *складываютъ или вычитаютъ*, смотря по тому, какіе знаки имѣетъ исключаемое неизвѣстное въ обоихъ уравненіяхъ, разные или одинаковые.

Примѣръ 1. $5x+4y=23$ . . . . (1).

$7x-6y=9$ . . . . (2).

Чтобы исключить неизвѣстное y, множимъ всѣ члены ур-ія (1) на 6, а всѣ члены ур-ія (2) на 4 и *сложимъ* почленно полученныя уравненія.

$$30x+24y=138 \quad \ldots \quad (1')$$
$$\underline{28x-24y=36 \quad \ldots \quad (2')}$$
$$58x=174; x=3.$$

Подставимъ найденное значеніе x въ ур-іе (1):

$$15+4y=23; \text{ откуда } y=2.$$

Въ частныхъ случаяхъ этотъ способъ допускаетъ нѣкоторыя упрощенія. Напр., замѣтивъ, что въ данныхъ ур-іяхъ коэффиціенты при y имѣютъ общаго множителя 2, заключаемъ, что достаточно помножить всѣ члены ур-ія (1) на 3, а ур-ія (2) на 2, чтобы уравнять коэффиціенты. Такимъ образомъ.

$$\begin{array}{l|l} 5x+4y=23 & 3 \\ 7x-6y=\ 9 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 15x+12y=69 \\ \underline{14x-12y=18} \\ 29x=87; x=3. \end{array}$$

Примѣръ 2. $13x-\ 5y=19$ . . . . (1).

$17x-10y=11$ . . . . (2).

Чтобы исключить неизвѣстное y достаточно помножить ур-іе (1) на 2 и *вычесть* затѣмъ изъ него ур-іе (2).

$$\begin{array}{r} 26x-10y=\ \ 38 \\ \underline{\mp 17x\pm 10y=\mp 11} \\ 9x=27; x=3. \end{array}$$

Подставивъ въ одно изъ данныхъ ур-ій, напр., во (2) вмѣсто x его величину, находимъ:

$$17.3-10y=11;\ \text{откуда}\ y=4.$$

Примѣръ 3. Найти два числа, если извѣстна ихъ сумма$=a$ *и разность*$=b$.

Назвавъ одно изъ искомыхъ чиселъ черезъ x, а другое черезъ y, получимъ два уравненія:

$x+y=a$ . . . . (1).

$x-y=b$ . . . . (2).

Сложивъ ихъ почленно, получимъ $2x=a+b$, откуда

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

Вычтемъ почленно уравненіе (2) изъ ур-ія (1): $2y=a-b$

откуда $$y=\frac{a-b}{2}.$$

Примѣръ 4. Найти два числа, если извѣстна ихъ сумма$=a$ *и частное*$=c$.

Пусть одно неизвѣстное будетъ x, а другое y. Изъ условій задачи находимъ $x+y=a$; $x:y=c$ или $x=cy$ или $x-cy=0$.

Итакъ, имѣемъ слѣд. систему:

$$x+y=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$
$$x-cy=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Вычтя изъ ур-iя (1) ур-iе (2), получимъ

$$y+cy=a \quad \text{или} \quad y(1+c)=a,$$

откуда
$$y=\frac{a}{1+c}.$$

Подставимъ въ ур-iе (1) значенiе y:

$$x+\frac{a}{1+c}=a.$$

Рѣшимъ это уравненiе:

$$x(1+c)+a=a+ac \quad \text{или} \quad x(1+c)=ac,$$

откуда
$$x=\frac{ac}{1+c}.$$ [1])

§ **81. Способъ подстановки.**

Примѣръ 1. Даны два уравненiя:

$$5x+14y=24 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$
$$19x-21y=17 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

1. Опредѣляемъ изъ одного уравненiя, напр., изъ (1) неизвѣстное y, считая x, какъ бы извѣстнымъ: $y=\frac{24-5x}{14}$. (a).

2. Подставляемъ эту величину вмѣсто y въ другое уравненiе (2): $$19x-21\left(\frac{24-5x}{14}\right)=17 \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

3. Уравненiе (3) содержитъ только одно неизвѣстное x. Рѣшаемъ его: $$19x-\frac{(24-5x)}{2}=17;$$

$$38x-72+15x=34;\ 53x=106;\ x=2.$$

---

[1]) Очевидно, что по условiямъ двухъ послѣднихъ примѣровъ легко составить одно уравненiе съ однимъ неизвѣстнымъ и, найдя затѣмъ значенiе этого неизвѣстнаго, сейчасъ же опредѣлить связанное съ нимъ другое неизвѣстное. Сдѣлайте это!

4. Подставляемъ найденную величину x въ выведенное для y выраженіе (а): $y=\frac{24-5\,.\,2}{14}$; $y=1$.

Итакъ, $x=2$; $y=1$.

5. *Повѣрка.* Подставляемъ найденныя величины въ уравненіе (2):

$$19.2-21.1=17;\ 17=17.$$

Очевидно, можно было бы такимъ же способомъ исключить неизвѣстное x и опредѣлить сперва величину y.

Итакъ, по способу подстановки опредѣляютъ какое-либо неизвѣстное, напр. x, изъ одного уравненія и полученное выраженіе подставляютъ вмѣсто x въ другое уравненіе. Тогда получаютъ одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ y. Опредѣливъ изъ него это неизвѣстное, подставляютъ его значеніе въ выведенное ранѣе выраженіе и находятъ отсюда другое неизвѣстное (x).

Обыкновенно исключаютъ то неизвѣстное, у котораго коэффиціентъ меньше. Въ особенности выгодно употреблять этотъ способъ, если коэффиціентъ одного изъ неизвѣстныхъ$=1$.

Примѣръ 2. $\frac{3x+7}{10y+3}=1$ . . . . (1).

$$\frac{12x+5}{7x+1}=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

1. Приведемъ данныя уравненія къ простѣйшему виду:

$$3x+7=10y+3;\qquad 3x-10y=-4 \ \ldots\ldots (1').$$
$$12x+5=14y+2;\qquad 12x-14y=-3 \ \ldots\ldots (2').$$

2. Опредѣляемъ изъ ур-ія (1') x въ зависимости отъ y:

$$x=\frac{10y-4}{3} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

3. Подставляемъ величину x въ ур-іе (2'):

$$4(10y-4)-14y=-3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

4. Рѣшаемъ полученное уравненіе (3):

$$40y-16-14y=-3;\ 26y=13;\ y=\tfrac{1}{2}.$$

5. Подставляемъ величину y въ выраженіе (a).

$$x=\frac{10.\frac{1}{2}-4}{3};\ x=\tfrac{1}{3}.$$

6. Повѣрка. $\dfrac{12.\frac{1}{3}+5}{7.\frac{1}{2}+1}=2;\ \dfrac{9}{4\frac{1}{2}}=2;\ 2=2.$

Примѣръ 3. $\qquad ax=by \ldots\ldots (1)$

$$bx+ay=a^2+b^2 \ldots\ldots (2).$$

1. Опредѣляемъ y изъ ур-ія (1):

$$y=\frac{ax}{b} \ldots\ldots (3).$$

2. Подставляемъ значеніе y въ ур-іе (2):

$$bx+\frac{a^2x}{b}=a^2+b^2 \ldots\ldots (4).$$

3. Рѣшаемъ полученное ур-іе (4):

$$b^2x+a^2x=(a^2+b^2)b;\ x(a^2+b^2)=(a^2+b^2)b;\ x=b.$$

4. Подставляемъ найденное значеніе x въ ур-іе (3):

$$y=\frac{ab}{b};\ y=a.$$

§ **82. Способъ сравненія неизвѣстныхъ** имѣетъ сходство со способомъ подстановки. Онъ основанъ на примѣненіи аксіомы: если двѣ величины порознь равны одной и той же третьей, то онѣ равны между собой.

Примѣръ 1. Даны два уравненія:

$$3x+5y=50 \ldots (1) \text{ и } 2x-3y=8 \ldots (2).$$

1. Опредѣляемъ одно изъ неизвѣстныхъ, напр., x, послѣдовательно изъ обоихъ уравненій:

$$x=\frac{50-5y}{3} \ldots (1');\ x=\frac{8+3y}{2} \ldots (2').$$

2. Такъ какъ вторыя части уравненій (1′) и (2′) равны одному и тому же количеству x, то, слѣдовательно, онѣ равны между собой. Поэтому $\dfrac{50-5y}{3}=\dfrac{8+3y}{2} \ldots\ldots (3).$

3. Рѣшаемъ ур-іе (3): $(50-5y)2=(8+3y)3$;

$$100-10y=24+9y;\ 76=19y;\ y=4.$$

4. Подставляемъ найденную величину y въ выраженіе (2').

$$x=\frac{8+3.4}{2};\ x=10.$$

Примѣръ 2. $2x+3y=5a+2b$ . . . (1); $ax-by=a^2$ . . . (2).

1. Опредѣляемъ x изъ обоихъ уравненій:

$$x=\frac{5a+2b-3y}{2} \ . \ . \ . \ (1');\quad x=\frac{a^2+by}{a} \ . \ . \ . \ (2').$$

2. Приравниваемъ другъ другу вторыя части уравненій (1') и (2'):

$$\frac{5a+2b-3y}{2}=\frac{a^2+by}{a} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3).$$

3. Рѣшаемъ уравненіе (3): $(5a+2b-3y)a=(a^2+by)2$;

$$5a^2+2ab-3ay=2a^2+2by;\quad 3a^2+2ab=3ay+2by;$$

$$a(3a+2b)=y(3a+2b);$$

$$y=\frac{a(3a+2b)}{3a+2b};\ y=a.$$

4. Подставимъ найденное значеніе y въ уравненіе (2'):

$$x=\frac{a^2+b\cdot a}{a}=\frac{a(a+b)}{a};\ x=a+b.$$

§ **83**. *Рѣшимъ нѣсколько болѣе сложныхъ системъ уравненій:*

Примѣръ 1. $\frac{2x}{3}+\frac{y+2x}{2}=8-\frac{9y-10}{12}+\frac{3x+7}{4}$ . . . . (1).

$$\frac{y-3x}{6}=\frac{25}{6}-2x \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Приведемъ оба уравненія къ простѣйшему виду:

$$8x+6(y+2x)=96-9y+10+3(3x+7);$$

$$8x+6y+12x=106-9y+9x+21;\ 11x+15y=127 \quad (1').$$

$$y-3x=25-12x;\qquad y+9x=25 \quad (2').$$

Изъ ур-ія (2') $y=25-9x$.

Подставимъ эту величину въ ур-iе ($1'$):

$11x+15\ (25-9x)=127;\ 11x+375-135x=127;\ 248=124x;\ x=2.$

Поэтому $\qquad y=25-9x=25-18=7.$

Повѣрка. $\qquad \frac{7-6}{6}=\frac{25}{6}-4;\ \frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$

Примѣръ 2. $\qquad \frac{1-y}{a}=\frac{x}{n}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$

$$ny=\frac{an(x+y)}{n+a}+n-a\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

1. Приведемъ оба ур-iя къ простѣйшему виду:

$$n-ny=ax;\ ax+ny=n\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1').$$

$$ny(n+a)=an(x+y)+(n+a)\ (n-a);\ n^2y+any=anx+any+n^2-a^2;$$

$$anx-n^2y=a^2-n^2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2').$$

2. Умножимъ обѣ части ур-iя ($1'$) на n, чтобы уравнять коэффицiенты:

$$anx+n^2y=n^2\ .\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1'')$$

3. Сперва сложимъ по частямъ ур-iя ($1''$) и ($2'$), а затѣмъ вычтемъ изъ ур-iя ($1''$) ур-iе ($2'$):

$$\begin{array}{c} anx+n^2y=n^2 \\ \underline{anx-n^2y=a^2-n^2} \\ 2anx=a^2 \\ x=\frac{a}{2n} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} anx+n^2y=n^2 \\ \underline{\mp anx\pm n^2y=\mp a^2\pm n^2} \\ 2n^2y=2n^2-a^2 \\ y=\frac{2n^2-a^2}{2n^2}=1-\frac{a^2}{2n^2}. \end{array}$$

Примѣръ 3. $\qquad \frac{4}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\ .\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$

$$\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{13}{4}\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Если освободить эти уравненiя отъ знаменателей, то получимъ ур-iя, содержащiя произведенiя неизвѣстныхъ: $8y-2x=xy$ и $12y+20x=13xy$.

Это суть уравненiя 2-й степени съ 2-мя неизвѣстными, которыхъ мы еще не умѣемъ рѣшать. Но кромѣ того, что еще важнѣе, полученныя уравненiя не *равносильны* первоначальнымъ.

Тѣмъ не менѣе мы можемъ рѣшить данную систему ур-ій однимъ изъ слѣдующихъ 2-хъ способовъ.

I. Уравняемъ числителей дробей, содержащихъ въ знаменателѣ одно изъ неизвѣстныхъ, напр., y, и затѣмъ сложимъ (или вычтемъ, смотря по знакамъ) по частямъ оба уравненія.

$$\frac{20}{x}-\frac{5}{y}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{13}{4}$$

$$\frac{23}{x}=\frac{23}{4};\ x=\frac{23.4}{23}=4.$$

Подставляя въ одно изъ данныхъ ур-ій, напр., во (2) значеніе x, найдемъ значеніе y:

$$\frac{4}{4}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{y}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\ y=2.$$

II. *Замѣнимъ въ данныхъ ур-іяхъ однѣ неизвѣстныя другими*, положивъ, что $\frac{1}{x}=x'$ и $\frac{1}{y}=y'$. Такъ какъ $\frac{4}{x}=4.\frac{1}{x}=4x'$ и т. д., то ур-ія примутъ видъ

$$4x'-y'=\frac{1}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

$$3x'+5y'=\frac{13}{4}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2').$$

Рѣшивъ ур-ія (1′) и (2′), найдемъ, что $x'=\frac{1}{4}$ и $y'=\frac{1}{2}$.

Такимъ образомъ: $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$; $x=4$; $\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$; $y=2$.

§ **84. Рѣшеніе уравненій со многими неизвѣстными**. Легко понять, что, примѣняя какой-либо изъ указанныхъ способовъ исключенія неизвѣстныхъ, мы можемъ рѣшить точно также 3 уравненія съ 3-мя неизвѣстными, 4 уравненія съ 4 мя неизвѣстными и вообще n уравненій съ n неизвѣстными. Чтобы рѣшить, напр., 3 уравненія съ 3-мя неизвѣстными x, y и z, слѣдуетъ исключить изъ нихъ одно неизвѣстное, напр., z. Получимъ 2 уравненія съ 2-мя неизвѣстными x и y. Исключивъ въ нихъ другое неизвѣстное, напр., y, получимъ одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ x. Рѣшивъ его, найдемъ это неизвѣстное и затѣмъ черезъ подстановку два другихъ.

Примѣръ.

$$2x+4y-3z=22 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$
$$4x-2y+5z=18 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$
$$6x+7y-z=63 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Исключимъ неизвѣстное x изъ ур-ій (1) и (2), умноживъ обѣ части ур-ія (1) на 2 и вычтя изъ него ур-іе (2):

$$\begin{array}{r} 4x+8y-6z=\ \ 44 \\ \underline{\mp 4x\pm 2y\mp 5z=\mp 18} \\ 10y-11z=\ \ 26 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots (1').$$

Исключимъ *то же* неизвѣстное x изъ другой пары уравненій [1]), напр., изъ ур-ій (1) и (3), для чего умножимъ обѣ части ур-ія (1) на 3 и вычтемъ изъ него ур-іе (3):

$$\begin{array}{r} 6x+12y-9z=\ \ 66 \\ \underline{\mp 6x\mp\ 7y\pm\ z=\mp 63} \\ 5y-8z=\ \ \ 3 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots (2').$$

Итакъ, имѣемъ систему 2-хъ уравненій съ 2-мя неизвѣстными:

$$10y-11z=26 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1').$$
$$5y-\ 8z=\ 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2').$$

Чтобы исключить неизвѣстное y, умножимъ обѣ части ур-ія (2′) на 2 и вычтемъ полученное ур-іе изъ ур-ія (1′):

$$\begin{array}{r} 10y-11z=\ \ 26 \quad \ldots\ldots\ldots (1'). \\ \underline{\mp 10y\pm 16z=\mp\ 6} \quad \ldots\ldots\ldots (2'). \\ 5z=20;\ z=4. \end{array}$$

Подставимъ величину z въ одно изъ уравненій съ 2-мя неизвѣстными, напр., въ ур-іе (2′):

$$5y-32=3;\ \ y=7.$$

---

[1]) Начинающимъ слѣдуетъ обратить вниманіе, что исключать надо сперва *одно и то же* неизвѣстное какъ изъ первой, такъ изъ второй пары данныхъ уравненій (конечно, если это неизвѣстное входитъ во всѣ данныя уравненія). Иначе, исключивъ изъ одной пары, напр., x, а изъ другой пары y, мы получимъ 2 уравненія съ 3-мя неизвѣстными уравненій x, y и z.

Подставимъ величины y и z въ одно изъ ур-iй съ 3-мя неизвѣстными, напр., въ ур-iе (1):

$$2x+28-12=22;\ x=3.$$

Повѣрка. Подставимъ найденныя величины въ ур-iе (3):

$$18+49-4=63;\ 63=63.$$

Рѣшимъ эту же систему уравненiй способомъ подстановки.

Опредѣляемъ z изъ ур-iя (3):

$$z=6x+7y-63.$$

Подставимъ эту величину въ ур-iя (1) и (2). Получимъ 2 ур-iя съ 2-мя неизвѣстными.

$$\left.\begin{array}{l}2x+4y-3(6x+7y-63)=22\\ 4x-2y+5(6x+7y-63)=18\end{array}\right| \text{ или послѣ преобразованiй: } \left|\begin{array}{l}16x+17y=167\ (1').\\ 34x+33y=333\ (2').\end{array}\right.$$

Рѣшивъ ур-iя (1′) и (2′), найдемъ, что $x=3$; $y=7$, и слѣдовательно:

$$z=6x+7y-63=18+49-63=4.$$

§ **85**. Рѣшенiе уравненiй со многими неизвѣстными, въ особенности, если число неизвѣстныхъ болѣе 3-хъ, а также, если даны буквенныя уравненiя, сводится часто къ довольно продолжительнымъ вычисленiямъ. Поэтому прежде всего слѣдуетъ обратить вниманiе на приведенiе каждаго изъ данныхъ уравненiй къ простѣйшему виду, а затѣмъ на возможныя упрощенiя и на надлежащiй выборъ исключаемыхъ неизвѣстныхъ, а также и на способъ ихъ исключенiя, при чемъ:

1) если нѣкоторыя неизвѣстныя не входятъ во всѣ уравненiя, то сперва надо исключать эти неизвѣстныя;

2) если въ каждое уравненiе входятъ всѣ неизвѣстныя, то смотря по виду уравненiй, слѣдуетъ исключать или тѣ неизвѣстныя, которыя имѣютъ *меньшiе* коэффицiенты [1]) или тѣ неизвѣстныя, которыя имѣютъ *равные* или *кратные* коэффицiенты [2]).

---

[1]) Напр., если въ данной системѣ уравненiй одно изъ неизвѣстныхъ имѣетъ коэффицiентъ равный 1-цѣ, то въ большинствѣ случаевъ надо начинать съ исключенiя этого неизвѣстнаго по способу подстановки.

[2]) Такiя неизвѣстныя обыкновенно удобно исключать по способу сложенiя и вычитанiя или по способу сравненiя.

§ 86. Искуственные способы рѣшенія системы уравненій. Иногда данная система уравненій имѣетъ видъ нѣкоторой правильности или закономѣрности. Въ такомъ случаѣ бываетъ возможно, употребивъ какой-нибудь *особенный* пріемъ, очень легко найти сперва одно, а затѣмъ и остальныя неизвѣстныя. Здѣсь нельзя дать никакихъ опредѣленныхъ правилъ. Искусство рѣшать такія задачи зависитъ отъ вдумчиваго отношенія къ дѣлу и сообразительности, а также отъ практики въ подобныхъ упражненіяхъ.

Примѣръ 1. Рѣшить систему:

$$x+y=a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x+z=b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$y+z=c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Сложивъ всѣ три уравненія, получимъ $2x+2y+2z=a+b+c$ или $x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Вычтемъ изъ этого ур-ія сперва ур-іе (1), затѣмъ ур-іе (2) и наконецъ ур-іе (3):

$$z=\tfrac{1}{2}(a+b+c)-a=\tfrac{1}{2}(b+c-a);\quad y=\tfrac{1}{2}(a+b+c)-b=\tfrac{1}{2}(a+c-b);$$
$$x=\tfrac{1}{2}(a+b+c)-c=\tfrac{1}{2}(a+b-c).$$

Примѣръ 2. Рѣшить систему:

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y-b}{b}=\frac{z-c}{c}\ \ldots (1);\qquad x+y+z=1\ \ldots (2).$$

Замѣтивъ, что выраженіе (1) содержитъ два уравненія и раздѣливъ числителя и знаменателя 1-й дроби на a, 2-й — на b и 3-й — на c, получимъ $\frac{x}{a}-1=\frac{y}{b}-1=\frac{z}{c}-1$, откуда $\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$ и $\frac{z}{c}=\frac{x}{a}$ или $y=\frac{bx}{a}$, $z=\frac{cx}{a}$. Подставивъ эти значенія въ ур-іе (2), находимъ $x+\frac{bx}{a}+\frac{cx}{a}=1$ или $x(a+b+c)=a$, откуда $x=\frac{a}{a+b+c}$.

Примѣръ 3. Рѣшить систему:

$$\frac{10}{x+y}+\frac{1}{x-y}=18 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\frac{1}{x+y}-\frac{1}{5(x-y)}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Введемъ новыя неизвѣстныя, положивъ

$$\frac{1}{x+y}=z \text{ и } \frac{1}{x-y}=u.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$10z+u=18 \;.\;.\;.\;.\;(1') \quad \text{и} \quad z-\tfrac{1}{5}u=0 \text{ или } u=5z \;.\;.\;(2')$$

Подставивъ значенiе u въ ур-iе (1'), получимъ

$$10z+5z=18 \text{ или } 15z=18, \text{ откуда } z=\tfrac{6}{5}, \text{ а } u=6.$$

Итакъ имѣемъ

$$\frac{1}{x+y}=\frac{6}{5} \text{ и } \frac{1}{x-y}=6 \text{ или } x+y=\tfrac{5}{6} \text{ и } x-y=\tfrac{1}{6}.$$

Отсюда легко найти, что $x=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{1}{3}$.

§ 87. **Составленiе уравненiй съ двумя и многими неизвѣстными.** Если задача содержитъ нѣсколько неизвѣстныхъ величинъ, то для опредѣленiя ихъ необходимо имѣть такое же число условiй. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, когда связь между неизвѣстными такъ очевидна, что можно легко выразить черезъ одно неизвѣстное всѣ другiя, составляютъ одно уравненiе съ однимъ неизвѣстнымъ и, рѣшивъ его, находятъ затѣмъ всѣ остальныя неизвѣстныя. Примѣры такого рода мы имѣли въ § 75. Но очень часто выбираютъ другой путь рѣшенiя такихъ задачъ, а именно составляютъ, столько уравненiй, сколько неизвѣстныхъ входитъ въ задачу. Этотъ путь часто предпочитаютъ первому, такъ какъ онъ значительно облегчаетъ составленiе уравненiй.

Примѣръ 1. Если младшiй братъ дастъ старшему 5 копеекъ, то у старшаго будетъ втрое болѣе денегъ, чѣмъ у младшаго; если же старшiй братъ даетъ младшему 5 коп., то у обоихъ будетъ поровну. Сколько у каждаго денегъ?

Положимъ, что у старшаго x коп., а у младшаго y коп. Если младшiй отдастъ старшему 5 коп., то у перваго будетъ $y-5$ коп., а у второго $x+5$ коп. По условiю задачи:

$$x+5=3(y-5) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Разсуждая такъ же, составимъ 2-ое ур-iе:

$$x-5=y+5 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2).$$

Рѣшимъ эту систему. Изъ ур-ія (2) находимъ $x=y+10$. Подставимъ эту величину вмѣсто x въ ур-іе (1):

$$y+10+5=3y-15, \text{ откуда } y=15, \text{ а } x=y+10=25.$$

Примѣръ 2. Если неизвѣстное двузначное число раздѣлить на сумму его цифръ, то въ частномъ получится 4; если же двузначное число, составленное изъ тѣхъ же цифръ, но въ обратномъ порядкѣ, раздѣлить на сумму его цифръ, увеличенную единицей, то въ частномъ получится 6. Найти это число.

Назовемъ цифру десятковъ черезъ x, а цифру единицъ черезъ y. Тогда видъ искомаго числа будетъ $10x+y$, а числа, состоящаго изъ тѣхъ же цифръ, но въ обратномъ порядкѣ, $10y+x$. Изъ условій задачи легко написать два уравненія. (Дѣлимое=дѣлителю$\times$частное):

$$10x+y=4(x+y) \quad \dots\dots\dots \quad (1).$$
$$10y+x=6(x+y+1) \quad \dots\dots\dots \quad (2).$$

Раскрывъ скобки, сдѣлавъ приведеніе и сокративъ ур-іе (1) на 3 получимъ

$$2x=y \quad \dots\dots\dots \quad (1').$$
$$4y-5x=6 \quad \dots\dots\dots \quad (2').$$

Подставимъ величину y изъ ур-ія (1') въ ур-іе (2'):

$$8x-5x=6;\ x=2;\ y=4. \text{ Искомое число } =24.$$

Повѣрка. $24:6=4$; $42:7=6$.

Примѣръ 3. Пароходъ прошелъ въ 11 часовъ 168 верстъ по теченію рѣки и потомъ 48 верстъ противъ теченія; въ другой разъ также въ 11 часовъ онъ прошелъ 144 версты по теченію и 60 верстъ противъ теченія. Сколько верстъ можетъ онъ проходить въ стоячей водѣ и какова скорость теченія?

Назовемъ скорость парохода въ верстахъ въ часъ въ стоячей водѣ черезъ x, а скорость теченія рѣки тоже въ верстахъ въ часъ черезъ y. Когда пароходъ идетъ по теченію, то къ его собственной скорости x прибавляется скорость теченія y и, слѣдовательно, онъ проходитъ въ часъ $x+y$ верстъ. Наоборотъ, когда пароходъ идетъ противъ теченія, то его скорость уменьшается на величину скорости теченія, и онъ проходитъ въ. часъ $x-y$ верстъ. Путь въ 168 верстъ по теченію онъ пройдетъ въ $\frac{168}{x+y}$ часовъ, а путь въ 48 верстъ противъ теченія пройдетъ въ $\frac{48}{x-y}$ часовъ.

По условію задачи $\frac{168}{x+y}+\frac{48}{x-y}=11$ . . . . (1).

Точно также составимъ 2-ое ур-іе: $\frac{144}{x+y}+\frac{60}{x-y}=11$. (2).

Если рѣшать эту систему обыкновеннымъ путемъ, то, по освобожденіи отъ дробей, получаются неравносильныя уравненія 2-й степени. Для избѣжанія этого положимъ, что $\frac{1}{x+y}=z$, $\frac{1}{x-y}=u$. Тогда ур-ія (1) и (2) примутъ такой видъ:

$$168z+48u=11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1').$$

$$144z+60u=11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2').$$

Рѣшивъ эти уравненія, находимъ $z=\frac{1}{24}$; $u=\frac{1}{12}$, или

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{24},\quad \frac{1}{x-y}=\frac{1}{12}.\qquad \text{откуда}\quad \begin{array}{l} x+y=24 \\ x-y=12 \\ \hline 2x=36;\ x=18;\ y=6. \end{array}$$

Примѣръ 4. Въ трехклассномъ училищѣ передъ экзаменами число учениковъ 1-го класса было на 35 человѣкъ менѣе общаго числа учениковъ 2-го и 3-го классовъ. Послѣ экзаменовъ изъ 1-го класса перешли во второй 34 ученика, изъ 2-го въ 3-ій — 30 учениковъ и кончили курсъ 31 ученикъ 3-го класса, послѣ чего оказалось въ 1-мъ классѣ въ шесть разъ менѣе учениковъ, чѣмъ во 2-мъ и въ семь разъ менѣе, чѣмъ въ 3-мъ. Сколько учениковъ было въ каждомъ классѣ до экзаменовъ?

Назовемъ искомое число учениковъ 1-го класса черезъ x, 2-го—черезъ y и 3-го—черезъ z.

Изъ перваго условія находимъ: $x+35=y+z$ . . . . . (1).

Послѣ экзаменовъ въ 1-мъ классѣ осталось $x-34$ ученика, во 2-мъ $y-30$, но такъ какъ 34 ученика перешли изъ

1-го класса, то всего во 2-мъ классѣ будетъ $y-30+34=$ $=y+4$ ученика.

Точно также найдемъ, что число учениковъ 3-го класса послѣ экзаменовъ будетъ $z-31+30=z-1$.

Теперь по даннымъ условіямъ нетрудно составить 3 уравненія:

$$\begin{array}{lll}
x+35=y+z \quad (1). & \text{Изъ ур-ій (1) и (2)} & \text{Изъ ур-ій (3) и (1')} \\
(x-34)6=y+4 \quad (2). & \text{исключаемъ } y\text{:} & \text{исключаемъ } z\text{:} \\
(x-34)7=z-1 \quad (3). & \mp x \mp 35 = \mp y \mp z & 5x-243=-z. \\
 & 6x-204=y+4 & 7x-238=z-1. \\
\hline
 & 5x-239=-z+4; & 12x-481=-1; \\
 & 5x-243=-z \quad (1'). & x=40.
\end{array}$$

Изслѣдованіе уравненій первой степени.

§ **88**. Рѣшая какой-нибудь вопросъ въ общемъ видѣ, когда данныя количества изображены буквами, мы получаемъ для опредѣленія неизвѣстнаго формулу, представляющую равенство, въ одной части котораго находится неизвѣстное (x, y, $z\ldots$), а въ другой — алгебраическое буквенное выраженіе, указывающее, какія дѣйствія и въ какомъ порядкѣ надо совершить, чтобы получить значеніе этого неизвѣстнаго.

Во многихъ случаяхъ такое буквенное выраженіе указываетъ, что не всегда, т.-е. не при всѣхъ численныхъ значеніяхъ данныхъ буквенныхъ количествъ предложенная задача является возможной; далѣе, что при нѣкоторыхъ значеніяхъ данныхъ количествъ рѣшеніе представляетъ ту или другую особенность и т. д.

Изслѣдовать рѣшеніе уравненія значитъ опредѣлить по полученной формулѣ, всегда ли данный вопросъ и уравненіе являются возможными или нѣтъ; затѣмъ, при какихъ именно значеніяхъ данныхъ буквенныхъ количествъ вопросъ и уравненіе будутъ возможными и невозможными; наконецъ, не представляетъ ли уравненіе какихъ-нибудь замѣчательныхъ особенностей при нѣкоторыхъ значеніяхъ данныхъ количествъ.

§ **89**. Положимъ, что имѣемъ уравненіе вида $ax+m=bx+n$. Рѣшая его, находимъ $(a-b)\,x=n-m$, откуда

$$x=\frac{n-m}{a-b}.$$

Такъ какъ выраженіе для x есть дробь, то величина и знакъ ея зависятъ отъ значеній количествъ a, b, m и n, входящихъ въ ея числитель и знаменатель. При различныхъ значеніяхъ этихъ количествъ здѣсь могутъ быть 5 слѣдующихъ случаевъ.

1. **Положительное рѣшеніе**. Если числитель и знаменатель имѣютъ одинаковые знаки, т.-е. если $a>b$ и $n<m$ или, если $a<b$ и $n>m$ [1]), то x есть положительное количество, которое или представляетъ отвѣтъ на данный вопросъ или указываетъ, что задача невозможна только вслѣдствіе неудачнаго подбора данныхъ чиселъ, которыя подчинены нѣкоторому условію, не выраженному въ уравненіи (§ 76. Примѣръ 1).

2. **Отрицательное рѣшеніе**. Если числитель и знаменатель имѣютъ разные знаки, т.-е. если $a>b$ и $n<m$ или если $a<b$ и $n>m$, то x есть отрицательная величина. Отрицательное рѣшеніе указываетъ или на невозможность вопроса или (если искомое количество можетъ имѣть два противоположныхъ значенія) на невѣрную постановку вопроса. Въ послѣднемъ случаѣ, измѣнивъ вопросъ, а слѣдовательно и уравненіе, въ обратномъ смыслѣ, получимъ положительное рѣшеніе, удовлетворяющее задачѣ. (§ 76. Примѣры 2 и 3).

3. **Нулевое рѣшеніе**. Если числитель равенъ нулю, а знаменатель равенъ нѣкоторой величинѣ, т.-е. если $n=m$, $a\neq b$, то $x=0$. Нулевое рѣшеніе указываетъ или на невозможность вопроса или на то, что величины данныхъ количествъ уже сами въ себѣ содержатъ рѣшеніе вопроса (§ 76. Примѣры 4 и 5).

Замѣтимъ, что всѣ три разсмотрѣнныя рѣшенія удовлетворяютъ съ формальной стороны составленному уравненію, хотя и могутъ указывать на невозможность вопроса. Иное

---

[1]) Если $a<b$ и $n<m$, то выраженію для x можно дать такой видъ $x=\frac{m-n}{b-a}$, перемѣнивъ одновременно знаки у числителя и знаменателя.

представляютъ два слѣдующія рѣшенія. Они, какъ увидимъ, указываютъ не только невозможность вопроса, но и невозможность самого уравненія.

4. **Неопредѣленное рѣшеніе**. Если и числитель и знаменатель равны нулю, т.-е. если $a=b$ и $n=m$, то $x=\frac{0}{0}$. Такое выраженіе называется **выраженіемъ неопредѣленнаго вида** или просто **неопредѣленностью**. Чтобы выяснить, что оно можетъ обозначать, обратимся къ нашему уравненію $ax+m=bx+n$. Замѣнивъ въ немъ b и n соотвѣтственно равными величинами a и m, получимъ равенство $ax+m=ax+m$, представляющее *тождество*, а не уравненіе. Тождество же, какъ извѣстно, удовлетворяется при *всякихъ* значеніяхъ входящихъ въ него буквъ. Поэтому *любое* значеніе x удовлетворяетъ данному вопросу, который такимъ образомъ является *неопредѣленнымъ* [1]).

Примѣръ. Если къ искомому числу прибавить $\frac{3}{4}$ его и 42, то получится число, которое въ 14 разъ болѣе суммы $\frac{1}{8}$ искомаго числа и трехъ. Найти это число.

Изъ условій задачи имѣемъ, что $x+\frac{3}{4}x+42=14\left(\frac{1}{8}x+3\right)$, или послѣ приведенія къ простѣйшему виду:

$$7x+168=7x+168;\text{ откуда } x=\frac{168-168}{7-7}=\frac{0}{0}.$$

Рѣшеніе показываетъ, что *всякое* число удовлетворяетъ условіямъ задачи (что легко провѣрить подстановкой), а потому данный вопросъ былъ неопредѣленный.

Замѣчаніе. Выраженіе вида $\frac{0}{0}$ не всегда, впрочемъ, служитъ признакомъ неопредѣленности. Иногда такой видъ пріобрѣтаетъ дробь оттого, что въ числителѣ и знаменателѣ ея находится общій множитель, превращающійся въ нуль при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ входящихъ въ него буквъ. Если

---

[1]) Что *неопредѣленное выраженіе* $\frac{0}{0}$ можетъ означать *какое угодно число* объясняютъ такимъ образомъ. Пусть $\frac{0}{0}=n$, отсюда имѣемъ, что $0.n=0$. Такъ какъ произведеніе 0 на какое угодно число равно 0, то слѣдовательно n можетъ означать любое произвольное число.

предварительно сократить дробь на этого множителя, то она можетъ принять вполнѣ опредѣленное значенiе.

Примѣръ 1. Дробь $\frac{a^2-b^2}{a-b}$, при $a=b$, обращается въ $\frac{0}{0}$. Но, разложивъ числителя и знаменателя на множители и сократя, получимъ $\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}=a+b=2a$. Замѣтимъ, что сокращаемый множитель $a-b=0$, такъ какъ $a=b$.

Примѣръ 2. $\frac{m^2-4m+4}{m^2-4}$, при $m=2$, обращается въ $\frac{0}{0}$.

Но, разложивъ числителя и знаменателя на множители и сокративъ, находимъ $\frac{(m-2)(m-2)}{(m+2)(m-2)}=\frac{m-2}{m+2}=0$ (т. к. $m-2=0$).

5. **Безконечное рѣшенiе**. Если числитель равенъ нѣкоторой величинѣ, а знаменатель равенъ нулю, т.-е., если $n \neq m$, но $a=b$, то $x=\frac{n-m}{0}$ или, положивъ, что разность $n-m=A$, получаемъ $x=\frac{A}{0}$. Выраженiе вида $\frac{A}{0}$ называется **безконечно-большой величиной** или **безконечностью** и обозначается знакомъ ∞, такъ что $x=\frac{A}{0}=\infty$.

Обратившись къ начальному уравненiю $ax+m=bx+n$ и замѣнивъ въ немъ b черезъ a, получимъ $ax+m=ax+n$. Но это равенство невозможно, такъ какъ m не равно n. Итакъ безконечное рѣшенiе указываетъ не только на невозможность вопроса, но и на невозможность самаго равенства.

Примѣръ. Какое число надо прибавить къ числителю и знаменателю дроби $\frac{2}{3}$, чтобы она обратилась въ 1?

Изъ условiй задачи имѣемъ $\frac{2+x}{3+x}=1$, откуда $2+x=3+x$;

$$x(1-1)=3-2,\ x=\frac{1}{0}=\infty .$$

Рѣшенiе показываетъ, что какъ вопросъ, такъ и равенство *невозможны.*

§ **90. О выраженiяхъ вида** $\frac{A}{0}$. Чтобы уяснить смыслъ выраженій вида $\frac{A}{0}$, возьмемъ какую-нибудь дробь $\frac{a}{b}$ и, оставляя въ ней числителя a безъ измѣненія, будемъ уменьшать знаменателя b въ 10, 100, 1000, . . разъ. При этомъ, какъ извѣстно, величина дроби будетъ увеличиваться въ 10, 100, 1000,... разъ. Такъ какъ уменьшать знаменателя можно безпредѣльно, то очевидно, что величина дроби можетъ возрасти до безпредѣльно-большой величины. Поэтому принимаютъ, что когда знаменатель обратится въ нуль, то дробь обратится въ безконечно-большую величину. Если числитель былъ положительной величиной, то считаютъ, что дробь обращается въ *положительную* безконечно-большую величину ($+\infty$), при отрицательномъ же числителѣ,—что дробь обращается въ *отрицательную* безконечно-большую величину ($-\infty$).

Величину вида $\frac{A}{\infty}$ *считаютъ равной* 0, т.-е. частное отъ дѣленія какой-либо опредѣленной конечной величины на безконечно-большую величину$=0$.

Понятіе о безконечно-большихъ величинахъ, очевидно, слѣдуетъ считать *условнымъ*, такъ какъ мы не можемъ ихъ себѣ представить. Тѣмъ не менѣе оно, какъ и нѣкоторыя другія условныя понятія, вводимыя въ алгебру, приноситъ существенную пользу, давая косвенные отвѣты на предложенный вопросъ или указывая на нѣкоторыя особенности вопроса.

Напр., хотя равенство $2+x=3+x$ и невозможно, но, раздѣливъ обѣ части его на x, получимъ $\frac{2}{x}+1=\frac{3}{x}+1$, откуда мы можемъ заключить, что чѣмъ болѣе будетъ величина x, тѣмъ менѣе будетъ разность между обоими выраженіями

$$\frac{2}{x}+1 \text{ и } \frac{3}{x}+1 .$$

Дѣйствительно, прибавляя къ числителю и знаменателю дроби $\frac{2}{3}$ послѣдовательно 1, 2, 3, . . . 100, 1000 и т. д., увидимъ, что она обращается въ дроби $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{102}{103}$, $\frac{1002}{1003}$, т.-е. чѣмъ бо́льшую величину мы будемъ прибавлять къ числителю и знаменателю дроби, тѣмъ менѣе она будетъ отличаться отъ единицы.

Въ особенности важное значеніе имѣютъ безконечныя рѣшенія въ геометрическихъ вопросахъ.

Примѣры изслѣдованія уравненій.

§ **91**. *Примѣръ* 1. Черезъ 2 станціи A и B, находящіяся на разстояніи d верстъ, одновременно проѣзжаютъ по направленію отъ A къ B два поѣзда. Одинъ проѣзжаетъ въ часъ a верстъ, другой b верстъ. Опредѣлить мѣсто ихъ встрѣчи.

Положимъ, что встрѣча поѣздовъ произойдетъ въ мѣстѣ C, отстоящемъ *вправо* отъ A на x верстъ, такъ что $AC=x$ верстъ, а $BC=x-d$ верстъ. Первый поѣздъ пройдетъ разстояніе AC въ $\frac{x}{a}$ часовъ, а второй пройдетъ разстояніе BC въ $\frac{x-d}{b}$ часовъ. По условію задачи $\frac{x}{a}=\frac{x-d}{b}$, откуда $bx=ax-ad$; $x(a-b)=ad$; $x=\frac{ad}{a-b}$.

1. *Положительное рѣшеніе*. Если $a>b$, то x есть положительное число и даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ, что и понятно, такъ какъ 1-ый поѣздъ ѣдетъ скорѣе 2-го.

2. *Отрицательное рѣшеніе*. Если $a<b$, то x есть отрицательное число, т.-е. вправо отъ станціи A не можетъ быть встрѣчи поѣздовъ. Дѣйствительно, 1-ый поѣздъ ѣдетъ медленнѣе 2-го и слѣдовательно не можетъ его догнать. Если бы станціи A и B были начальными станціями отправленія, то отрицательное рѣшеніе указывало бы невозможность вопроса. Но такъ какъ поѣзда только проѣзжаютъ эти станціи, то рѣшеніе указываетъ на неправильность предположенія, что мѣсто C встрѣчи лежитъ вправо отъ A. Предположивъ, что мѣсто C лежитъ *влѣво* отъ A, и назвавъ попрежнему $AC=x$, при чемъ $BC=d+x$, получимъ уравненіе $\frac{x}{a}=\frac{d+x}{b}$, откуда $x=\frac{ad}{b-a}$. Это рѣшеніе положительное и указываетъ, что встрѣча произошла до прихода 1-го поѣзда на станцію

A, при чемъ второй поѣздъ догналъ и затѣмъ опередилъ первый.

3. *Нулевое рѣшеніе.* Если $d=0$, но $a\neq b$, то $x=0$. Рѣшеніе указываетъ, что оба поѣзда одновременно проѣхали станцію A, при чемъ они ѣдутъ съ различными скоростями. Очевидно, что (кромѣ A) они не могутъ имѣть никакой встрѣчи.

4. *Неопредѣленное рѣшеніе.* Если $d=0$ и $a=b$, то $x=\frac{0}{0}$. Рѣшеніе указываетъ на неопредѣленность вопроса. Дѣйствительно, изъ данныхъ условій слѣдуетъ, что поѣзда одновременно проѣзжаютъ одну и ту же станцію и ѣдутъ съ одинаковой скоростью.

5. *Безконечное рѣшеніе.* Если $a=b$, но $d>0$, то $x=\frac{ad}{0}=\infty$. Рѣшеніе указываетъ на невозможность уравненія и вопроса. Дѣйствительно, по условіямъ задачи, поѣзда проѣзжаютъ одновременно черезъ 2 различныя станціи и ѣдутъ съ равными скоростями. Очевидно, что во все время ихъ движенія они будутъ находиться другъ отъ друга на одномъ и томъ же разстояніи$=d$ и потому нигдѣ не могутъ имѣть мѣстъ встрѣчи.

§ **92.** *Примѣръ 2.* Къ двумъ окружностямъ, радіусы которыхъ равны R и r, проведены 2 общія внѣшнія касательныя. Найти разстояніе ихъ точки пересѣченія отъ центра окружности радіуса r, если разстояніе между обоими центрами O и O_1 равно d [1]).

Положимъ, что искомая точка C лежитъ вправо отъ центра O_1. Назвавъ разстояніе O_1C черезъ x и проведя изъ центровъ радіусы OA и O_1B къ точкамъ прикосновенія, изъ подобія $\triangle\triangle$-въ AOC и BO_1C находимъ $\frac{d+x}{R}=\frac{x}{r}$, откуда

$$x=\frac{dr}{R-r}.$$

1. Если $R>r$, то получается *положительное рѣшеніе.* Точка C лежитъ *вправо* отъ центра O_1 въ разстояніи отъ него$=\frac{dr}{R-r}$.

---

1) Учащимся рекомендуется сдѣлать чертежъ этой задачи.

2. Если $R<r$, то получается *отрицательное рѣшеніе*. Точка C лежитъ *влѣво* отъ центра O въ разстояніи отъ него$=\frac{dr}{r-R}$.

Легко найти, что уравненіе въ этомъ случаѣ принимаетъ такой видъ $\frac{x-d}{R}=\frac{x}{r}$.

3. Если $d=0$, но $R\neq r$, то получается *нулевое рѣшеніе* $x=0$. Задача *невозможна*, такъ какъ мы имѣемъ здѣсь 2 концентрическія окружности.

4. Если $d=0$, и $R=r$, то получается *неопредѣленное рѣшеніе*. Задача *неопредѣленная:* обѣ окружности совпадаютъ въ одну.

5. Если $d>0$ и $R=r$, то получается *безконечное рѣшеніе* ($x=\infty$). Рѣшеніе указываетъ, что задача *невозможна*, точки пересѣченія нѣтъ или, какъ говорятъ иногда, *она удалена въ безконечность*. Отсюда заключаемъ, что обѣ касательныя *параллельны* между собой.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

Степени и корни.

Возвышеніе въ степень.

§ 93. Опредѣленіе дѣйствія и правило знаковъ. *Возвысить количество въ степень значитъ взять его множителемъ столько разъ, сколько въ показателѣ степени единицъ.*

Изъ правила знаковъ въ умноженіи слѣдуетъ, что

1. *Четная степень всякаго количества есть положительное количество.*

$$(+a)^4=a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.=+a^4;\ (-a)^4=-a.-a.-a.-a=+a^4;$$
$$(-10)^4=10000.$$

2. *Нечетная степень какого-либо количества имѣетъ знакъ самого количества.*

$$(+a)^5=a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a=+a^5;\ (-a)^5=-a.-a.-a.-a.-a=-a^5;$$
$$(+10)^3=1000;\ (-10)^3=-1000.$$

Число (a), возвышаемое въ степень, называется *основаніемъ* степени.

§ 94. **Правила возвышенія въ степень.** 1. *Чтобы возвысить въ степень произведеніе, слѣдуетъ возвысить въ степень каждаго множителя отдѣльно.*

$(abc)^n = abc.abc.abc \ldots$ (n разъ) $= aaa \ldots bbb \ldots ccc \ldots = a^n b^n c^n$.

$(abc)^3 = abcabcabc = aaabbbccc = a^3b^3c^3$; $(2.3.4)^3 = 2^3.3^3.4^3. = 13824$.

2. *Чтобы возвысить въ степень дробь, слѣдуетъ возвысить въ степень отдѣльно числителя и знаменателя.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}; \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots (n \text{ разъ}) = \frac{aaa\ldots}{bbb\ldots} = \frac{a^n}{b^n}.$$

3. *Чтобы возвысить степень въ новую степень, слѣдуетъ показателей степеней перемножить.*

$$(a^m)^n = a^m a^m a^m \ldots = a^{m+m+m+\cdots} = a^{mn}.$$

$$(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{4 \cdot 3} = a^{12}; \ (10^2)^3 = 10^6 = 1000000.$$

При помощи этихъ правилъ легко **возвысить въ степень всякій одночленъ.**

Примѣры. 1. $(-5m^4np^3)^3 = -125m^{12}n^3p^9$;

2. $\left(\frac{2a^3b}{3mn^2}\right)^4 = \frac{16a^{12}b^4}{81m^4n^8}$;

3. $\left(-\frac{a^2}{4bc^3}\right)^5 = -\frac{a^{10}}{1024b^5c^{15}}$.

§ 95. **Возвышеніе въ квадратъ многочлена.** *Квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ, сложенной съ удвоенными произведеніями всѣхъ членовъ, попарно взятыхъ.* Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что квадратъ двучлена:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \ldots \ldots \ldots (1).$$

По этой формулѣ легко получить квадратъ трехчлена $(a+b+c)^2$, замѣнивъ на время два послѣдніе члена $b+c$ одной буквой, напр. K, и затѣмъ сдѣлавъ обратную подстановку:

$$(a+b+c)^2 = (a+K)^2 = a^2 + K^2 + 2aK = a^2 + (b+c)^2 + 2a(b+c) =$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ab + 2ac, \text{ т.-е.}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \ldots (2).$$

Точно такимъ же образомъ изъ формулы квадрата трехчлена легко найти квадратъ четырехчлена $(a+b+c+d)^2$, замѣнивъ на время два послѣдніе члена одной буквой, напр., M:

$$(a+b+c+d)^2=(a+b+M)^2=a^2+b^2+M^2+2ab+2aM+2bM=$$
$$a^2+b^2+(c+d)^2+2ab+2a(c+d)+2b(c+d),\text{ т.-е.}$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+$$
$$+2bd+2cd\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

Продолжая поступать такимъ образомъ, убѣдимся, что правило остается справедливымъ для многочлена съ *какимъ угодно* числомъ членовъ.

Доказательство. Докажемъ эту теорему въ общемъ видѣ *способомъ математической индукціи*. Сущность этого способа состоитъ въ слѣдующемъ: Предполагая, что извѣстное положеніе справедливо для многочлена съ n членами, доказываютъ, что оно будетъ справедливо и для многочлена съ $n+1$ членами.

Напр., намъ извѣстно, что формула квадрата многочлена справедлива для 3-хчлена. Поэтому, если докажемъ нашу теорему, то докажемъ, что формула квадрата многочлена справедлива для 4-хчлена. Отсюда же слѣдуетъ, что она будетъ справедлива и для 5-ичлена, 6-ичлена и т. д.

Итакъ, предположимъ, что искомая формула вѣрна для многочлена $a+b+c\,.\,.+p$, состоящаго изъ n членовъ. Обозначимъ этотъ многочленъ одной буквой P и прибавимъ къ нему еще одинъ ($n+1$-ый) членъ q. Тогда

$$(a+b+c\;.\;.\;.\;+p+q)^2=(P+q)^2.$$

Принимая P за одночленъ, получимъ $(P+q)^2=P^2+2Pq+q^2$. Замѣтивъ, что P^2 представляетъ сумму квадратовъ и сумму удвоенныхъ произведеній n членовъ многочлена $P=a+b+c\,...\,+p$, а $2Pq$ есть сумма удвоенныхъ произведеній членовъ этого многочлена на $n+1$-ый членъ q; наконецъ, что q^2 есть квадратъ $n+1$-го члена, заключаемъ, что формула квадрата многочлена справедлива для многочлена съ $n+1$ членами, т.-е. что она справедлива для многочлена *съ какимъ угодно* числомъ членовъ.

Полезно замѣтить при возвышеніи въ степень многочлена, члены котораго имѣютъ разные знаки, что *квадраты* членовъ будутъ *всегда съ положительными* знаками, а *удвоенныя произведенія* или съ *положительными* или съ *отрицательными* знаками, смотря по тому, произошли они отъ перемноженія членовъ съ одинаковыми или съ разными знаками.

Примѣръ. $(1+3a-5a^3)^2=1+9a^2+25a^6+6a-10a^3-30a^4$.

Въ заключеніе укажемъ, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ квадратъ многочлена предпочитаютъ выражать въ другомъ видѣ, а именно

$$\begin{aligned}(a+b+c+...+p+q)^2=a^2&+2ab+b^2\\&+2(a+b)c+c^2\\&+2(a+b+c)d+d^2\\&\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\&+2(a+b+c+...+p)q+q^2,\text{ т.-е.}\end{aligned}$$

Квадратъ многочлена равенъ квадрату 1-го члена $+$ удвоенное произведенiе 1-го члена на 2-ой $+$ квадратъ 2-го члена $+$ удвоенное произведенiе первыхъ двухъ членовъ на 3-iй $+$ квадратъ 3-го члена $+$ и т. д.

Справедливость этого тождества слѣдуетъ изъ того, что вторая часть его содержитъ сумму квадратовъ всѣхъ членовъ, сложенныхъ съ удвоенными произведенiями всѣхъ членовъ, взятыхъ попарно.

Извлеченiе корня.

§ **96. Опредѣленiе дѣйствiя и правило знаковъ.** *Извлечь изъ даннаго количества корень какой-нибудь степени значитъ найти количество, которое, будучи возвышено въ ту же самую степень, равнялось бы данному количеству.*

Изъ правила знаковъ при возвышенiи въ степень слѣдуетъ, что

1. *Корень нечетной степени изъ положительнаго количества есть положительное количество, а изъ отрицательнаго — отрицательное.*

$\sqrt[3]{+64}=+4$, т. к. $(+4)^3=64$; $\sqrt[3]{-64}=-4$, т. к. $(-4)^3=-64$.

2. *Корень четной степени изъ положительнаго количества можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ количествомъ.*

$\sqrt{+25}=\pm 5$ [1]), такъ какъ $(+5)^2=+25$ и $(-5)^2=+25$;

$\sqrt[4]{81}=\pm 3$, такъ какъ $(+3)^4=81$ и $(-3)^4=81$.

3. *Корень четной степени изъ отрицательнаго количества есть выраженiе невозможное,* потому что какъ всякое положительное, такъ и всякое отрицательное количество при возвышенiи въ *четную* степень даютъ только положительныя количества. Такимъ образомъ, $\sqrt{-36}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt{-5}$ — выраженiя невозможныя или, какъ ихъ чаще называютъ, выраженiя *мнимыя.*

---

[1]) Выраженiе ± 5 читается: плюсъ 5 и минусъ 5 или плюсъ-минусъ 5. Въ дальнѣйшемъ изложенiи мы, въ большинствѣ случаевъ, для краткости, не будемъ ставить двойного знака.

Ариѳметическимъ значеніемъ корня называется *положительное* значеніе корня изъ *положительнаго числа.* Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ говорить только объ ариѳметическихъ значеніяхъ корней.

§ **97. Правила извлеченія корня.** 1. *Чтобы извлечь корень изъ произведенія, слѣдуетъ извлечь его изъ каждаго множителя отдѣльно* или *корень изъ произведенія равенъ произведенію корней изъ всѣхъ его множителей.*

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.$$

Дѣйствительно, возвысивъ обѣ части въ n-ую степень, получимъ *тождество:*

$$(\sqrt[n]{abc})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n\cdot(\sqrt[n]{c})^n,\ \text{откуда } abc=abc$$ [1]).

2. *Чтобы извлечь корень изъ дроби, слѣдуетъ извлечь его отдѣльно изъ числителя и изъ знаменателя.*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ \text{такъ какъ}\ \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n=\frac{a}{b}\ \text{и}\ \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}.$$

3. *Чтобы извлечь корень изъ степени, слѣдуетъ показателя степени раздѣлить на показателя корня.*

$\sqrt[n]{a^4}=a^2$, такъ какъ $(a^2)^2=a^4$; $\sqrt[3]{a^{12}}=a^4$, такъ какъ $(a^4)^3=a^{12}$.

Вообще $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ (предполагаемъ, что m дѣлится безъ остатка на n), такъ какъ, возвысивъ обѣ части этого равенства въ n-ую степень, получимъ $(\sqrt[n]{a^m})^n=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$ или $a^m=a^m$.

§ **98. Извлеченіе корня изъ одночленовъ.** Примѣнимъ эти правила для извлеченія корня изъ одночленовъ.

---

[1]) $(\sqrt[n]{abc})^n=abc$; $(\sqrt[n]{a})^n=a$; $(\sqrt[n]{b})^n=b$; $(\sqrt[n]{c})^n=c$, такъ какъ возвышеніе количества въ n-ую степень и извлеченіе изъ того же количества корня n-ой степени суть дѣйствія взаимно-уничтожающіяся.

Необходимо замѣтить при этомъ, что повѣрка равенствъ при помощи возвышенія въ степень и полученія тождества возможно только тогда, когда возвышаемыя количества имѣютъ *одинаковые* знаки. Иначе можно прійти къ нелѣпымъ выводамъ. Напр. $+\sqrt{a}=-\sqrt{a}$, такъ какъ $(+\sqrt{a})^2=a$ и $(-\sqrt{a})^2=a$ и проч.; на этомъ основано много такъ называемыхъ математическихъ *софизмовъ.*

Примѣры. 1. $\sqrt[5]{-32a^{15}b^5c^{20}}=-2a^3bc^4$.

2. $\sqrt{\frac{a^6b^{10}}{25m^2}}=\frac{a^3b^5}{5m}$.

3. $\sqrt[3]{\frac{27a^9b^6}{64m^{15}n^3}}=\frac{3a^3b^2}{4m^5n}$.

§ **99. Выведенiе множителей изъ-подъ знака корня.** Въ тѣхъ случаяхъ, когда нельзя извлечь корня изъ всего подкоренного количества, это послѣднее разлагаютъ на множителей и извлекаютъ корень только изъ тѣхъ его множителей, изъ которыхъ это возможно сдѣлать.

Примѣры. 1 $\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$.

2. $\sqrt{\frac{3z^2}{4}}=\frac{z}{2}\sqrt{3}$.

3. $\sqrt[3]{a^5b^7}=\sqrt[3]{a^3.\,a^2.\,b^6.\,b}=ab^2.\sqrt[3]{a^2b}$.

4. $\sqrt{\frac{50m^3}{27n^9}}=\sqrt{\frac{25.2m^2m}{9.3n^8n}}=\frac{5m}{3n^4}\sqrt{\frac{2m}{3n}}$.

Если, наоборотъ, требуется подвести множителя подъ знакъ корня, то его слѣдуетъ возвысить въ степень, равную показателю корня.

Примѣры. 1. $2\sqrt{5}=\sqrt{2^2.\,5}=\sqrt{20}$.

2. $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}$.

3. $\frac{4m^2}{5}\sqrt{m}=\sqrt{\frac{16m^5}{25}}$.

Извлеченiе квадратнаго корня.

§ **100.** Изъ таблицы умноженiя извѣстно, что числа

1, 4, 9, 16, 25, 36, 64, 81, 100 . . . . . . (1)

суть квадраты послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 10 и что, слѣдовательно, квадратные корни изъ написанныхъ чиселъ будутъ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . . . (2)

Всѣ цѣлыя числа, состоящiя изъ однѣхъ единицъ, или изъ единицъ и десятковъ, кромѣ написанныхъ въ первомъ ряду, напр., числа 3, 7, 20, 56 и т. д. не квадраты и потому изъ нихъ нельзя извлечь квадратнаго корня. Это легко доказать. Положимъ, напр., что слѣдуетъ найти $\sqrt{20}$. Квадратн. корень изъ 20, очевидно, не можетъ быть цѣлымъ числомъ, такъ какъ $4^2<20$, а $5^2>20$. Докажемъ, что $\sqrt{20}$ не можетъ быть и дробью. Въ самомъ дѣлѣ если

$$\sqrt{20}=\frac{a}{b},\ \text{то}\ (\sqrt{20})^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2\ \text{или}\ 20=\frac{a^2}{b^2},$$

но $\frac{a}{b}$ есть *несократимая* дробь (иначе мы могли бы представить ее въ простѣйшемъ видѣ или сократить), т.-е. числитель и знаменатель ея не имѣютъ общихъ множителей, а тогда, слѣдовательно, и квадратъ ея $\frac{a^2}{b^2}$ есть тоже несократимая дробь. Такимъ образомъ, предположенiе, что $\sqrt{20}=\frac{a}{b}$, привело насъ къ нелѣпому заключенiю, что цѣлое число 20 равно несократимой дроби $\frac{a^2}{b^2}$. Итакъ, $\sqrt{20}$ не можетъ быть ни цѣлымъ числомъ, ни дробью, что и слѣдовало доказать.

Изъ такихъ чиселъ, какъ 20, 3, 7, 56,.. можно извлекать квадратные корни только *приближенные*, т.-е. находить числа, квадраты которыхъ *приблизительно* равнялись бы этимъ числамъ. Оставивъ пока этотъ вопросъ, обратимся къ извлеченiю корня изъ полныхъ квадратовъ бо́льшихъ 100 [1]).

§ 101. Число цифръ кв. корня. *Квадратъ числа содержитъ или вдвое болѣе цифръ, чѣмъ самое число, или вдвое болѣе безъ единицы.* Въ самомъ дѣлѣ, квадраты всѣхъ *однозначныхъ* чиселъ отъ 1 до 9 содержатъ или *одну* или *двѣ* цифры ($2^2=4$; $5^2=25$), квадраты всѣхъ *двузначныхъ* чиселъ отъ 10 до 99 содержатъ или *три* или *четыре* цифры ($11^2=121$; $40^2=1600$), квадраты всѣхъ *трехзначныхъ* чиселъ отъ 100 до 999 содержатъ или *пять* или *шесть* цифръ ($125^2=15625$; $780^2=608400$) и т. д.

Это свойство позволяетъ сразу опредѣлить, сколько цифръ имѣетъ квадратный корень изъ какого угодно числа, раз-

---

[1]) Замѣтимъ, что полные квадраты могутъ оканчиваться только на 1, 4, 6, 9, 25 или на четное число нулей, передъ которыми должно стоять одно изъ этихъ чиселъ.

бивъ это число отъ правой руки къ лѣвой на группы, по двѣ цифры въ каждой, при чемъ въ первой отъ начала числа группѣ можетъ оказаться одна цифра. Число этихъ группъ или, какъ ихъ называютъ, *граней* равняется числу цифръ кв. корня.

§ 102. Извлеченіе кв. корня изъ чиселъ отъ 100 до 10000. Кв. корень изъ такихъ чиселъ состоитъ изъ *двухъ* цифръ— единицъ и десятковъ. Положимъ, что требуется извлечь кв. корень изъ 4761.

Общій видъ всякаго двузначнаго числа есть $10x+y$, гдѣ x—цифра десятковъ, а y—цифра единицъ. Общій видъ квадрата такихъ чиселъ есть $(10x+y)^2=100x^2+2\cdot10xy+y^2$, т.-е. *квадратъ двузначнаго числа состоитъ изъ квадрата его десятковъ, удвоеннаго произведенія десятковъ на единицы и квадрата единицъ.*

Раздѣлимъ данное число на грани: 47'61. Квадратъ *числа* десятковъ будетъ никакъ *не болѣе* числа первой грани, т.-е. 47, такъ какъ квадратъ десятковъ [1]), какъ число, оканчивающееся двумя нулями, не можетъ быть болѣе 4700. Итакъ, квадратъ числа десятковъ искомаго корня или равенъ, или менѣе 47. Онъ не можетъ быть равенъ 47, такъ какъ 47 не есть квадратъ, значитъ, онъ *менѣе* 47. Возьмемъ для цифры десятковъ число, квадратъ котораго наиболѣе приближается къ 47. Это будетъ 6, такъ какъ $6^2=36$. Такимъ образомъ, число единицъ, выражаемое цифрой десятковъ корня, будетъ 60; квадратъ его $60^2=3600$. Вычтемъ его изъ даннаго квадрата: $4761-3600=1161$. Остатокъ 1161 заключаетъ въ себѣ два числа: удвоенное произведеніе десятковъ на единицы и квадратъ единицъ.

Удвоенное произведеніе числа десятковъ на единицы не можетъ быть болѣе 116, такъ какъ произведеніе десятковъ на единицы, какъ число, оканчивающееся однимъ нулемъ, никакъ не болѣе 1160. Отсюда слѣдуетъ, что раздѣливъ 116 на удвоенное число десятковъ, т.-е. на 12, получимъ въ

---

[1]) Во избѣжаніе недоразумѣній надо строго различать выраженія: квадратъ *числа десятковъ* и квадратъ *десятковъ* числа. Такъ, у 54 квадратъ числа десятковъ или $5^2=25$, а квадратъ десятковъ или $50^2=2500$.

частномъ число 9, которое будетъ, во всякомъ случаѣ, *не меньше* числа единицъ, а будетъ или *равно* или *больше* его.

Примемъ 9 за цифру единицъ и сдѣлаемъ повѣрку. Если окажется, что эта цифра велика, возьмемъ 8; если и эта велика, возьмемъ 7 и т. д. Удвоенное произведенiе десятковъ на единицы $=2.60.9=1080$. Вычтемъ это число изъ полученнаго остатка: $1161-1080=81$. Новый остатокъ 81 долженъ равняться квадрату единицъ. Такъ это и есть въ дѣйствительности, потому что $9^2=81$. Порядокъ дѣйствiя располагается такимъ образомъ:

$$\sqrt{47'61}=69.$$

$$\begin{array}{r|r}
 & 3600 \\
\hline
6.2=12 & 116,1 \\
9 & 1080 \\
\hline
9^2 & 81 \\
 & 81 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Обыкновенно, впрочемъ, этотъ порядокъ упрощаютъ.

Во-первыхъ, нулей у квадратовъ десятковъ не пишутъ, а только подразумѣваютъ.

Во-вторыхъ, два послѣднiя дѣйствiя, т.-е. вычитанiе удвоеннаго произведенiя десятковъ на единицы и квадрата единицъ соединяютъ въ одно дѣйствiе. Такъ какъ $2.60.9+9^2=$ $=(2.60+9).9=129.9$ [1]), то вмѣсто этихъ двухъ дѣйствiй можно, приписавъ къ удвоенной цифрѣ десятковъ (12) найденную цифру единицъ (9), помножить полученное число на число единицъ и затѣмъ произведенiе вычесть. Такимъ образомъ:

1. $\sqrt{47'61}=69.$

$$\begin{array}{r|r}
 & 36 \\
\hline
129 & 116,1 \\
9 & 116\,1 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

2. $\sqrt{8'41}=29.$

$$\begin{array}{r|r}
 & 4 \\
\hline
49 & 44,1 \\
9 & 44\,1 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

3. $\sqrt{56'25}=75.$

$$\begin{array}{r|r}
 & 49 \\
\hline
145 & 72,5 \\
5 & 72\,5 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Во 2-мъ примѣрѣ при дѣленiи 44 на 4 получилось частное 11, которое *очевидно не можетъ представлять цифру единицъ.* Поэтому за цифру единицъ взяли $11-2=9$.

---

1) Или въ общемъ видѣ: $2.10xy+y^2=(20x+y)y$.

§ 103. Извлеченіе кв. корня изъ чиселъ большихъ 10000. Извлеченіе кв. корня изъ чиселъ, состоящихъ болѣе чѣмъ изъ четырехъ цифръ, по существу ничѣмъ не отличается отъ извлеченія корня изъ трехъ и четырехзначныхъ чиселъ. Положимъ, напр., что требуется найти $\sqrt{39'43'84}$. Раздѣливъ подкоренное число на грани, заключаемъ, что искомый корень состоитъ изъ сотенъ, десятковъ и единицъ. Но сотни и десятки, взятые вмѣстѣ, можно разсматривать какъ десятки [1]). Такимъ образомъ, попрежнему, имѣемъ, что подкоренное число состоитъ изъ квадрата десятковъ, удвоеннаго произведенія десятковъ на единицы и квадрата единицъ. Квадратъ десятковъ, какъ число, оканчивающееся двумя нулями, можетъ заключаться только въ первыхъ двухъ граняхъ. Извлекая изъ нихъ корень и затѣмъ разсуждая попрежнему, опредѣлимъ и единицы корня.

Положимъ еще, что надо найти $\sqrt{1'33'63'36}$. Искомый корень состоитъ изъ тысячъ, сотенъ, десятковъ и единицъ, но первые три разряда можно считать за десятки. Квадратъ ихъ заключается въ первыхъ трехъ граняхъ даннаго числа. Извлекая изъ нихъ корень, прибавимъ къ остатку послѣднюю грань и поступая какъ ранѣе, найдемъ искомое число.

I. $\sqrt{39'43'84}=628$. II. $\sqrt{1'33'63'36}=1156$. III. $\sqrt{16'56'49}=407$.

```
        36                  1                     16
 122 | 34,3          21 | 3,3             807 | 564,9
   2 | 24 4           1 | 2 1               7 | 564 9
1248 |  9 98,4      225 | 126,3                   0
   8 |  9 98 4        5 | 112 5
          0        2306 |  1383,6
                      6 |  1383 6
                              0
```

Итакъ, *чтобы извлечь кв. корень изъ даннаго числа, разбиваемъ его на грани, по двѣ цифры въ каждой. Извлекая корень изъ первой грани, найдемъ первую цифру корня. Вычтя изъ первой грани квадратъ первой цифры корня, снесемъ къ остатку вторую грань и число десятковъ полученнаго числа раздѣлимъ на удвоенную первую цифру корня. Полученное*

[1]) Напр., число 526 состоитъ изъ 52 десятковъ и 6 единицъ.

частное припишемъ къ дѣлителю (т.-е. къ удвоенной 1-й цифрѣ корня) и полученное число умножимъ на частное. Если произведенiе будетъ равно или менѣе остатка вмѣстѣ со второю гранью, то частное будетъ второй цифрой корня. Въ противномъ случаѣ, частное слѣдуетъ уменьшить на 1, 2 и болѣе единицъ. Такъ же находимъ и остальныя цифры корня.

§ **104. Извлеченiе кв. корня изъ дробей.** Чтобы извлечь корень изъ простой дроби, слѣдуетъ, какъ уже было сказано ранѣе, извлечь корни изъ ея числителя и знаменателя.

$$\sqrt{\frac{6889}{455625}}=\frac{\sqrt{6889}}{\sqrt{455625}}=\frac{83}{675}.$$

При извлеченiи корня изъ десятичной дроби, необходимо помнить, что число десятичныхъ знаковъ ея непремѣнно должно быть *четное*, такъ какъ квадратъ десятичной дроби всегда содержитъ вдвое болѣе десятичныхъ знаковъ, чѣмъ самая дробь [1]). Поэтому *нечетное* число десятичныхъ знаковъ прямо указываетъ на невозможность извлеченiя точнаго корня.

Корень извлекается сперва изъ цѣлой, а потомъ изъ дробной части.

Напр., $\sqrt{28,09}=\sqrt{\frac{2809}{100}}=\frac{\sqrt{2809}}{\sqrt{100}}=\frac{53}{10}=5,3$ или

I. $\sqrt{28,09}=5,3$. II. $\sqrt{62,88'49}=7,93$. III. $\sqrt{0,'00'31'36}=0,056$.

$$\begin{array}{r|l}
 & 25 \\
\hline
103 & 30,9 \\
3 & 30\,9 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 49 \\
\hline
149 & 138,8 \\
9 & 134\,1 \\
\hline
1583 & \;\;474,9 \\
3 & \;\;474\,9 \\
\hline
 & \;\;\;\;0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 25 \\
\hline
106 & 63,6 \\
6 & 63\,6 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

§ **105. Извлеченiе кв. корня по приближенiю.** Если данное число не есть полный квадратъ, то изъ него можно извлечь корень только съ приближенiемъ, т.-е. найти число, квадратъ котораго приблизительно равнялся бы данному числу (§ 100).

Извлечь корень съ приближенiемъ до 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д. значитъ найти одно изъ двухъ чиселъ, разность между ко-

---

1) Это прямо слѣдуетъ изъ правила умноженiя десят. дробей: $2,5^2=6,25$; $2,63^2=6,9169$ и т. д.

торыми равна 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д. и между квадратами которыхъ заключается данное число.

Примѣръ. Найти $\sqrt{547}$ съ точностью до 1. $\sqrt{5'47}=23$.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 43 & 147 \\ 3 & 129 \\ \hline & \;\;18 \end{array}$$

Число 23 и есть кв. корень изъ 547 съ приближеніемъ до 1, такъ какъ $23^2<547$. Второй приближенный корень есть 24, такъ какъ $24^2>547$.

Чтобы извлечь кв. корень съ приближеніемъ или, какъ еще говорятъ, съ *точностью* до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, и т. д., слѣдуетъ, согласно замѣчанію предыдущаго §, приписать къ подкоренному количеству *вдвое болѣе* нулей, чѣмъ сколько ихъ въ знаменателѣ степени точности, затѣмъ извлечь корень и отдѣлить въ немъ справа столько десятичныхъ знаковъ, сколько указано степенью точности.

Примѣры. 1. Извлечь $\sqrt{547}$ съ точностью до $\frac{1}{100}$.

$$\sqrt{5'47{,}00'00}=23{,}38.$$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 43 & 14{,}7 \\ 3 & 129 \\ \hline 463 & \;\;180{,}0 \\ 3 & \;\;1389 \\ \hline 4668 & \;\;\;4110{,}0 \\ 8 & \;\;\;37344 \\ \hline & \;\;\;\;3756 \end{array}$$

Число 23,38 и есть искомый корень, такъ какъ $23{,}38^2<547$. Второй приближ. корень есть 23,39.

2. Извлечь $\sqrt{5}$ съ точностью до 0,001.

$$\sqrt{5'00'00'00}=2{,}236.$$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 42 & 10{,}0 \\ 2 & 84 \\ \hline 443 & \;\;160{,}0 \\ 3 & \;\;1329 \\ \hline 4466 & \;\;\;2710{,}0 \\ 6 & \;\;\;26796 \\ \hline & \;\;\;\;304 \end{array}$$

При извлеченіи приближеннаго корня изъ простыхъ дробей, ихъ обыкновенно обращаютъ въ десятичныя.

Извлеченіе приближеннаго корня изъ десятичной дроби съ точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... дѣлается на тѣхъ же основаніяхъ и совершенно такъ же, какъ извлеченіе приближеннаго корня изъ цѣлыхъ чиселъ. Именно, преобразовываютъ данную дробь, чтобы число десятичныхъ знаковъ ея было вдвое болѣе числа нулей знаменателя степени точности, для чего или приписываютъ слѣдуемое число нулей или, наоборотъ, откидываютъ лишніе десятичные знаки, и затѣмъ поступаютъ по предыдущему.

Пр. 1. Извл. $\sqrt{2,8}$ съ точн. до 0,01; $\sqrt{2',80'00}=1,67$.

2. „ $\sqrt{0,69132739}$ „ „ „ 0,001; $\sqrt{0',69'13'27}=0,831$.

3. „ $\sqrt{0,00072}$ „ „ „ 0,001; $\sqrt{0',00'07'20}=0,026$.

4. „ $\sqrt{\frac{5}{6}}$ „ „ „ 0,1; $\sqrt{\frac{5}{6}}=\sqrt{0,83}=0,9$.

§ **106. Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочленовъ.** Извлечь квадратный корень изъ многочлена значитъ найти многочленъ, квадратъ котораго былъ бы равенъ подкоренному количеству. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что *извлечь кв. корень изъ двучлена нельзя*, такъ какъ квадратъ наименьшаго многочлена, т. е. двучлена состоитъ изъ трехъ членовъ.

Положимъ, что слѣдуетъ извлечь корень изъ $\sqrt{49a^4-28a^3-17a^2+6a+\frac{9}{4}}$. Допустимъ, что искомый корень есть многочленъ вида $x+y+z+\ldots$, гдѣ $x, y, z, \ldots$ неизвѣстные пока члены корня, *расположенные какъ и члены подкоренного количества по нисходящимъ степенямъ одной и той же буквы* (a).

Итакъ мы имѣемъ:

$$49a^4-28a^3-17a^2+6a+\tfrac{9}{4}=(x+y+z+\ldots)^2 \text{ или (§ 95)}$$

$$49a^4-28a^3-17a^2+6a+\tfrac{9}{4}=x^2+2xy+y^2+2(x+y)z+z^2+\ldots \quad (1).$$

Такъ какъ высшій членъ подкоренного количества есть квадратъ высшаго члена корня, то $49a^4=x^2$. Откуда $x=7a^2$; это и есть первый членъ корня.

Вычитая изъ обѣихъ частей равенства (1) равныя количества $49a^4$ и x^2, получимъ

$$-28a^3-17a^2+6a+\tfrac{9}{4}=2xy+y^2+2(x+y)z+z^2 \quad \ldots (2)$$

Въ этомъ равенствѣ высшій членъ первой части долженъ равняться высшему члену второй части; слѣдовательно $-28a^3=2xy=2.7a^2y$, откуда второй членъ корня

$$y=-\frac{28a^3}{14a^2}=-2a.$$

Находимъ произведеніе $2xy+y^2=(2x+y)y=(14a^2-2a).-2a=-28a^3+4a^2$ и вычтемъ его изъ перваго остатка (2) подкоренного количества. Тогда

$$-21a^2+6a+\tfrac{9}{4}=2(x+y)z+z^2\ldots=2xz+2yz+z^2+\ldots \quad (3).$$

Высшіе члены этихъ остатковъ должны быть равны между собою.

Поэтому $-21a^2=2xz$, откуда $z=-\dfrac{21a^2}{14a^2}=-\dfrac{3}{2}$. (Третій членъ корня).

Найдемъ произведеніе $2xz+2yz+z^2=(2x+2y+z)z=(14a^2-4a-\frac{3}{2}).-\frac{3}{2}=-21a^3+6a+\frac{9}{4}$. Вычитая его изъ второго остатка (3) подкоренного количества, получимъ 0. Итакъ, искомый корень: $7a^2-2a-\frac{3}{2}$. Замѣтимъ, что, при извлеченіи корня изъ $49a^4$, мы взяли только его *положительное* значеніе ($+7a^2$). Если бы мы взяли его *отрицательное* значеніе, то знаки всѣхъ членовъ измѣнились бы на *обратные*. Такимъ образомъ найденный корень правильнѣе писать такъ:

$$\pm(7a^2-2a-\tfrac{3}{2}).$$

Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\sqrt{49a^4-28a^3-17a^2+6a+\tfrac{9}{4}}=7a^2-2a-\tfrac{3}{2}.$$

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\mp 49a^4} \\
\hline
14a^2-2a & -28a^3-17a^2 \\
-2a & \pm 28a^3 \mp 4a^2 \\
\hline
14a^2-4a-\frac{3}{2} & -21a^2+6a+\frac{9}{4} \\
-\frac{3}{2} & \pm 21a^2 \mp 6a \mp \frac{9}{4} \\
\hline
 & \quad 0
\end{array}$$

Итакъ, чтобы извлечь квадратный корень изъ многочлена, располагаютъ его по нисходящимъ (или по восходящимъ) степенямъ одной буквы.

1-й членъ корня получится при извлеченіи кв. корня изъ 1-го члена подкоренного количества. Вычтя квадратъ перваго члена корня изъ подкоренного количества, получаютъ 1-й остатокъ.

Раздѣливъ 1-й членъ 1-го остатка на удвоенный 1-й членъ корня, получаютъ 2-й членъ корня. Сумму удвоеннаго 1-го члена и 2-го члена умножаютъ на 2-й членъ; вычтя полученное произведенiе изъ 1-го остатка, получаютъ 2-й остатокъ.

Раздѣливъ 1-й членъ 2-го остатка на удвоенный 1-й членъ, получимъ 3-й членъ корня.

Къ суммѣ удвоеннаго 1-го и удвоеннаго 2-го члена прибавляютъ 3-й членъ; полученный трехчленъ умножаютъ на 3-й членъ корня; вычтя полученное произведенiе изъ 2-го остатка, получаютъ 3-й остатокъ.

Раздѣливъ 1-й членъ 3-го остатка на удвоенный 1-й членъ корня, получимъ 4-й членъ корня и т. д.

Изъ изложеннаго слѣдуетъ, что, если высшiй и низшiй члены подкоренного количества не суть точные квадраты, то корень не можетъ быть извлеченъ.

Извлеченiе кубичнаго корня.

§ 107. При помощи умноженiя легко найти, что кубы

чиселъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . . . (1).

будутъ: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 . . . . (2).

Всѣ цѣлыя числа отъ 1 до 1000, кромѣ стоящихъ въ рядѣ (2), напр., 5, 100, 450 и т. д. не кубы и потому изъ нихъ можно извлекать только приближенные кубичные корни, т.-е. находить числа, кубы которыхъ *приблизительно* равнялись бы этимъ числамъ.

§ 108. **Число цифръ куб. корня.** *Кубъ числа содержитъ или втрое болѣе цифръ, чѣмъ самое число, или второе болѣе безъ единицы, или втрое болѣе безъ двухъ.* Въ самомъ дѣлѣ, кубы всѣхъ *однозначныхъ* чиселъ содержатъ 3, 2 или 1 цифру: $8^3=512$; $4^3=64$; $2^3=8$;

кубы всѣхъ *двузначныхъ* чиселъ содержатъ 6, 5 или 4 цифры:

$$90^3=729000;\ 25^3=15625;\ 11^3=1331;$$

кубы всѣхъ *трехзначныхъ* чиселъ содержатъ 9, 8 или 7 цифръ:

$$900^3=729000000;\ 400^3=64000000;\ 111^3=1367631 \text{ и т. д.}$$

Поэтому, если разобьемъ данное число отъ правой руки къ лѣвой на грани по три цифры въ каждой, при чемъ въ первой отъ начала числа грани можетъ быть 1, 2 или три цифры, то найдемъ число цифръ куб. корня. Оно, очевидно, будетъ равно числу граней.

§ 109. **Извлеченiе куб. корня изъ чиселъ отъ 1000 до 1000000.** Куб. корень такихъ чиселъ состоитъ изъ двухъ цифръ: десятковъ и единицъ. Общiй видъ двузначнаго числа, какъ уже было замѣчено, есть $10x+y$; слѣдовательно, общій видъ куба его будетъ $(10x+y)^3=1000x^3+3.100x^2y+$ $+3.10xy^2+y^3$, т.-е. *кубъ двузначнаго числа состоитъ изъ куба его десятковъ, утроеннаго произведенія квадрата десятковъ на единицы, утроеннаго произведенія десятковъ на квадратъ единицъ и куба единицъ.*

Положимъ, что требуется найти $\sqrt[3]{314'432}$. Кубъ *цифры* десятковъ не можетъ быть болѣе числа 1-й грани, т.-е. 314, такъ какъ кубъ десятковъ, какъ число, оканчивающееся тремя нулями, не можетъ быть болѣе 314000. Возьмемъ поэтому для цифры десятковъ, число наиболѣе приближающееся къ 314. Такое число будетъ 6, такъ какъ $6^3=216$, а $7^3=343$.

Вычтемъ кубъ десятковъ, т.-е. $60^3=216000$ изъ даннаго числа: $314432-216000=98432$. Этотъ остатокъ, очевидно, состоитъ изъ утроеннаго произведенія квадрата десятковъ на единицы, утроеннаго произведенія десятковъ на квадратъ единицъ и куба единицъ.

Цифру единицъ найдемъ на основаніи слѣдующихъ соображеній. Утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы, какъ число, оканчивающееся двумя нулями, не можетъ быть болѣе 98400. Слѣдовательно, раздѣливъ 984 на утроенный квадратъ *цифры* десятковъ, т.-е. на $3.6^2=108$, найдемъ число 9, которое будетъ никакъ не менѣе цифры единицъ, а будетъ или *равно*, или *болѣе* ея.

Сдѣлаемъ повѣрку, не велика ли взята цифра единицъ.

Утроенное произведеніе квадрата дес. на единицы	$3.100x^2y=3.60^2.9=$	97200
Утроенное произведеніе десятк. на квадр. единицъ	$3.10xy^2=3.60.9^2=$	14580
Кубъ единицъ	$y^3=9^3=$	729
	Сумма=	112509

Сумма трехъ частей полнаго куба болѣе полученнаго остатка:

$$112509>98432.$$

Итакъ, цифра единицъ была слишкомъ велика. Уменьшимъ ее на 1 т.-е. возьмемъ $9-1=8$ и сдѣлаемъ вторую повѣрку:

$$\begin{aligned} 3.100x^2y&=3.60^2.8=86400\\ 3.10xy^2&=3.60.8^2=11520\\ y^3&=8^3=\ \ 512\\ \hline &\text{Сумма}=98432 \end{aligned}$$

Сумма трехъ частей куба равна остатку, слѣдовательно, цифра единицъ опредѣлена вѣрно.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ приходится дѣлать болѣе двухъ повѣрокъ и цифру единицъ уменьшать на 2 и болѣе единицъ.

Самое дѣйствіе располагается въ такомъ порядкѣ:

$$\sqrt[3]{314'432}=68.$$

	216	$3.60^2.9=97200$	$3.60^2.8=86400$
$3.6^2=108$	984,32	$3.60.\ 9^2=14580$	$3.60.\ 8^2=11520$
	984 32	$9^3=\ \ 729$	$8^3=\ \ 512$
	0	112509	98432

Примѣры 1. $\sqrt[3]{79'507}=43.$

$$\begin{array}{r|l}
 & 64 \\ \hline
3.4^2=48 & 155{,}07 \\
 & 155\ 07 \\ \hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3.40^2.3=14400 \\
3.40.\ 3^2=\ \ 1080 \\
3^3=\ \ \ \ 27 \\ \hline
15507
\end{array}$$

2. $\sqrt[3]{2'744}=14.$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\ \hline
3.1^2=3 & 17{,}44 \\
 & 17\ 44 \\ \hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3.10^2.5=1500 \\
3.10.\ 5^2=\ 750 \\
5^3=\ 125 \\ \hline
2375
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3.10^2.4=1200 \\
3.10.\ 4^2=\ 480 \\
4^3=\ \ 64 \\ \hline
1744
\end{array}$$

110. Извлеченіе куб. корня изъ чиселъ большихъ 1000000 совершается по тѣмъ же правиламъ и отличается только большею сложностью дѣйствій.

Положимъ, что требуется найти $\sqrt[3]{45'882'712}$. Искомый корень состоитъ изъ сотенъ, десятковъ и единицъ. Разсматривая сотни и десятки, взятые вмѣстѣ, какъ десятки, заключаемъ, что кубъ десятковъ, какъ число, кончающееся тремя нулями, заключается въ первыхъ двухъ граняхъ. Извлекая изъ нихъ корень и разсуждая по предыдущему, находимъ единицы корня.

Примѣръ. $\sqrt[3]{45'882'712}=358.$

$$\begin{array}{r|l}
 & 27 \\ \hline
3.\ 3^2=\ \ 27 & 188{,}82 \\
 & 158\ 75 \\ \hline
3.35^2=3675 & 30077{,}12 \\
 & 30077\ 12 \\ \hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3.30^2.6=16200 \\
3.30\ .6^2=\ 3240 \\
6^3=\ \ 216 \\ \hline
19656 \\
3.30^2.5=13500 \\
3.30.\ 5^2=\ 2250 \\
5^3=\ \ 125 \\ \hline
15875
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
3.350^2.8=2940000 \\
3.350.\ 8^2=\ \ \ 67200 \\
8^3=\ \ \ \ \ 512 \\ \hline
3007712
\end{array}$$

Итакъ, *чтобы извлечь куб. корень изъ даннаго числа, разбиваютъ его на грани и, извлекая корень изъ первой грани, находятъ первую цифру корня. Къ остатку сносятъ 2-ю грань и число сотенъ полученнаго числа дѣлятъ на утроенный квадратъ первой цифры корня. Частное будетъ или второй цифрой корня или болѣе ея на 1,2,... Ее испытываютъ повѣркой и, если нужно, уменьшаютъ на 1,2,... Такъ же находятъ остальныя цифры корня.*

§ 111. Извлеченіе куб. корня изъ дробей. Чтобы извлечь корень изъ простой дроби, слѣдуетъ, какъ извѣстно, извлечь его отдѣльно изъ числителя и знаменателя. Корень изъ десятичной дроби извлекается сперва изъ цѣлой, а потомъ изъ дробной части, при чемъ число десятичныхъ знаковъ данной дроби непремѣнно должно быть кратнымъ трехъ, т.-е. 3, 6, 9 и т. д. Это прямо слѣдуетъ изъ правила умноженія десятичн. дробей.

Примѣры. 1. $\sqrt[3]{\frac{9261}{1860867}}=\frac{21}{123}$.

2. $\sqrt[3]{389',017}=\sqrt[3]{\frac{389017}{1000}}=\frac{73}{10}=7,3$ или

$\sqrt[3]{389',017}=7,3$.

§ 112. **Извлеченіе куб. корня по приближенію.** Если данное число не есть полный кубъ, то изъ него можно извлечь приближенный корень съ точностью до 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$,... и т. д., т.-е. найти одно изъ двухъ чиселъ, разность между которыми будетъ равна 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$,... и т. д. и между кубами которыхъ заключается данное число.

Примѣръ. Найти $\sqrt[3]{71025}$ съ точностью до 1.

$$\sqrt[3]{71'025}=41.$$

$$\begin{array}{l|l}
 & 64 \\
\hline
3.4^2=48 & 70,25 \\
 & 49\ 21 \\
\hline
 & 21\ 04
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3.40^2.1=4800 \\
3.40.1^2=\ \ 120 \\
1^3=\ \ \ \ 1 \\
\hline
4921
\end{array}$$

Число 41 есть куб. корень изъ 71025 съ точностью до 1, такъ какъ $41^3<71025$, а (2-й приближ. корень) $42^3>71025$.

Чтобы извлечь куб. корень съ точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ и т. д., слѣдуетъ по § 111, приписать къ подкоренному количеству *втрое* болѣе нулей, чѣмъ сколько ихъ въ знаменателѣ степени точности, затѣмъ извлечь корень и отдѣлить въ немъ справа столько десятичныхъ знаковъ, сколько указано степенью точности.

Примѣры. 1. Найти: $\sqrt[3]{11}$ съ точностью до $\frac{1}{100}$.

$\sqrt[3]{11',000'000}=2,22$.

2. „ $\sqrt[3]{7}$ съ точностью до $\frac{1}{10}$.

$\sqrt[3]{7',000}=1,9$.

При извлеченіи приближеннаго корня изъ простыхъ дробей, ихъ обыкновенно обращаютъ въ десятичныя.

Чтобы извлечь приближенный куб. корень изъ десятичной дроби съ точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ и т. д., преобразовываютъ данную дробь, прибавляя слѣдуемое число нулей или, наоборотъ откидывая лишніе десятичные знаки и затѣмъ поступаютъ такъ же, какъ при извлеченіи приближ. куб корня изъ цѣлыхъ чиселъ.

Примѣры. 1. Извлечь $\sqrt[3]{9,81}$ съ точностью до 0,01.

$\sqrt[3]{9',810'000}=2,14$.

2. „ $\sqrt[3]{638,32417}$ съ точностью до 0,1.

$\sqrt[3]{638',324}=8,7$.

Примѣры. 3. Извлечь $\sqrt[3]{0,0251}$ съ точностью до 0,01.

$\sqrt[3]{0', 025'100}=0{,}29.$

4. » $\sqrt[3]{\frac{4}{11}}$ съ точностью до 0,1

$\sqrt[3]{\frac{4}{11}}=\sqrt[3]{0', 363}=0{,}7.$

Дѣйствія съ ирраціональными количествами.

§ **113**. **Опредѣленіе**. Количества, содержащія корень, который нельзя извлечь, называются *ирраціональными* или *радикальными*.

Напр., $\sqrt{12}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ [1]) суть количества ирраціональныя.

Разсмотримъ дѣйствія съ ирраціональными количествами.

§ **114**. **Возвышеніе въ степень**. *Чтобы ирраціональное количество возвысить въ степень, слѣдуетъ возвысить въ эту степень подкоренное количество*.

Дѣйствительно $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\ldots=\sqrt[n]{a.a.a\ldots}=\sqrt[n]{a^m}$.

Примѣры. 1. $(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[3]{a^4}$, такъ какъ $(\sqrt[3]{a})^4=$

$\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{aaaa}=\sqrt[3]{a^4}.$

2. $(\sqrt{2a^3b})^3=\sqrt{8a^9b^3}=2a^4b\sqrt{2ab}.$

При возвышеніи $\sqrt[n]{a}$ въ n-ую степень *знакъ корня отбрасывается*, такъ какъ возвышеніе количества въ n-ую степень и извлеченіе изъ него корня n-ой степени суть дѣйствія взаимноуничтожающіяся.

$$(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a.$$

§ **115**. **Извлеченіе корня**. *Чтобы извлечь корень изъ ирраціональнаго количества, слѣдуетъ показателей корней перемножить*.

Требуется доказать, что $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$. Возвысивъ обѣ части этого равенства въ m-ую степень, получимъ $\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$.

[1]) Замѣтимъ, что корень изъ алгебраическаго двучлена всегда представляетъ ирраціональное количество. Дѣйствительно, всякая степень одночлена есть также одночленъ, а n-ая степень двучлена представляетъ многочленъ изъ $n+1$ членовъ (т.-е. 2-я степень двучлена есть 3-хчленъ, 3-ья степень — 4-хчленъ и т. д.). Такимъ образомъ изъ двучлена нельзя извлечь корня.

Возвысимъ обѣ части полученнаго равенства въ n-ую степень: $a=\sqrt[mn]{a^{mn}}=a$. Получилось тождество, откуда заключаемъ, что первоначальное равенство $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ было справедливо.

1. $\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt[6]{a}$, такъ какъ $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a}}\right)^6=\sqrt[3]{(\sqrt{a})^6}=\sqrt[3]{a^3}=a$,

и точно такъ же $(\sqrt[6]{a})^6=a$.

2. $\sqrt{\sqrt{a^6b^9}}=\sqrt[4]{a^6b^9}=ab^2\sqrt[4]{a^2b}$.

Отсюда слѣдуетъ правило: *извлеченіе корня, показатель котораго составное число, замѣняется послѣдовательнымъ извлеченіемъ корней, показатели которыхъ суть первоначальные множители этого числа.*

1. $\sqrt[4]{20736}=\sqrt{\sqrt{20736}}=\sqrt{144}=12$.

2. $\sqrt[6]{46656}=\sqrt[3]{\sqrt{46656}}=\sqrt[3]{216}=6$.

3. $\sqrt[8]{65536}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{65536}}}=\sqrt{\sqrt{256}}=\sqrt{16}=4$.

§ **116. Сокращеніе корней.** *Величина ирраціональнаго количества не измѣнится, если показателей корня и подкоренного количества помножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число.*

Для доказательства возвысимъ $\sqrt[m]{a^n}$ въ степень k и извлечемъ изъ полученнаго выраженія корень той же степени k. Такъ какъ эти два дѣйствія суть взаимно-уничтожающіяся, то величина ирраціональнаго количества останется безъ перемѣны.

Поэтому $\sqrt[km]{a^{kn}}=\sqrt[m]{a^n}$.

На этомъ свойствѣ основано сокращеніе корней и приведеніе ихъ къ одному показателю.

Сокращеніе корней состоитъ въ томъ, что показателей корня и подкоренного количества дѣлятъ на одно и то же число, если оно входитъ во всѣ показатели, какъ общій множитель.

Примѣры 1. $\sqrt[6]{a^3b^9}=\sqrt{ab^3}=b\sqrt{ab}$.

2. $\sqrt[10]{81a^{12}b^4c^{16}}=\sqrt[5]{9a^6b^2c^8}=ac\sqrt[5]{9ab^2c^3}$.

§ **117. Приведеніе корней къ одному показателю** имѣетъ большое сходство съ приведеніемъ дробей къ одному знаменателю. Разсмотримъ два основныхъ случая.

I. *Показатели корней не имѣютъ общихъ множителей.* Въ этомъ случаѣ показателей каждаго корня и его подкоренного количества умножаютъ на произведеніе показателей остальныхъ корней.

Напр., $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[5]{2c^3}$ по приведеніи къ общему показателю принимаютъ слѣд. видъ: $\sqrt[30]{a^{15}}$, $\sqrt[30]{b^{20}}$, $\sqrt[30]{64c^{18}}$.

II. *Показатели корней имѣютъ общихъ множителей.* Въ этомъ случаѣ составляютъ наименьшее кратное показателей и умножаютъ показателей каждаго корня и его подкореннаго количества на недостающихъ множителей.

Примѣры 1. $\sqrt[4]{2a}$ и $\sqrt[6]{3b^2}$. Наименьшее кратное показателей $=12$. По приведеніи къ нему корней, получимъ $\sqrt[12]{8a^3}$ и $\sqrt[12]{9b^4}$.
2. $\sqrt{3m}$, $\sqrt[3]{5n^2p}$, $\sqrt[6]{7p^5}$. Общій показатель 6. Поэтому показателей перваго выраженія слѣдуетъ помножить на 3, второго на 2, а третьяго оставить безъ измѣненія. Сдѣлавъ это, будемъ имѣть $\sqrt[6]{27m^3}$, $\sqrt[6]{25n^4p^2}$, $\sqrt[6]{7p^5}$.

§ **118. Сложеніе и вычитаніе** ирраціональныхъ количествъ дѣлаются по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для раціональныхъ количествъ, т.-е. при сложеніи ирраціональныхъ количествъ пишутъ ихъ одно за другимъ съ ихъ знаками; при вычитаніи къ уменьшаемому приписываютъ вычитаемое съ обратнымъ знакомъ. Иногда бываетъ возможно путемъ преобразованій (выведеніемъ множителей изъ подъ знака корня, освобожденіемъ дробнаго подкоренного количества отъ знаменателя и т. п.) сдѣлать радикальныя количества ***подобными***, т.-е. имѣющими одинаковые показатели корней и подкоренныя количества, и затѣмъ сдѣлать *приведеніе*.

Примѣры: 1. $\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{\frac{27}{4}}=\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}=4\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
2. $\sqrt{a}+\sqrt{a^3}+\sqrt{a^5}=\sqrt{a}+a\sqrt{a}+a^2\sqrt{a}=\sqrt{a}(1+a+a^2)$.

§ **119. Умноженіе и дѣленіе.** При *умноженіи* ирраціональныхъ количествъ съ одинаковыми показателями корней перемножаются ихъ подкоренныя количества, а при *дѣленіи*— дѣлятся. Это слѣдуетъ изъ того, что $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Примѣры: 1. $\sqrt{6a^2b^3}\cdot\sqrt{2a^3x}=\sqrt{12a^5b^3x}=2a^2b\sqrt{3abx}$.

2. $\sqrt{8x^2y}:\sqrt{6x^3y^4}=\sqrt{\frac{8x^2y}{6x^3y^4}}=\sqrt{\frac{4}{3xy^3}}=\frac{2}{y}\sqrt{\frac{1}{3xy}}=\frac{2}{y\sqrt{3xy}}$.

При умноженіи или дѣленіи ирраціональныхъ количествъ съ разными показателями ихъ необходимо ранѣе привести къ общему показателю.

Если передъ радикалами имѣются коэффиціенты, то съ ними поступаютъ такъ же, какъ съ коэффиціентами при раціональныхъ количествахъ, т.-е. умножаютъ или дѣлятъ другъ на друга.

Примѣры: 1. $\sqrt{3a^3b}\cdot\sqrt[3]{2ab^2c}=\sqrt[6]{27a^9b^3}\cdot\sqrt[6]{4a^2b^4c^2}=$
$=\sqrt[6]{108a^{11}b^7c^2}=ab\sqrt[6]{108a^5bc^2}$.

2. $\sqrt[4]{8x^3y^2}:\sqrt[6]{2xy^3}=\sqrt[12]{8^3x^9y^6}:\sqrt[12]{2^2x^2y^6}=$
$=\sqrt[12]{\frac{512x^9y^6}{4x^2y^6}}=\sqrt[12]{128x^7}$.

§ **120. Преобразованіе ирраціональнаго знаменателя въ раціональный.** Очень часто бываетъ полезно освободить знаменателя дроби отъ находящагося въ немъ радикала. Для этого достаточно умножить числителя и знаменателя дроби на такое выраженіе, чтобы знаменатель обратился въ раціональное количество.

Примѣры: 1. $\frac{a}{\sqrt{b}}$. Умноживъ числителя и знаменателя на $\sqrt{b}$, получимъ $\frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$.

2. $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$. Умножаемъ числителя и знаменателя на $\sqrt[3]{b^2}$:

$$\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^3}}=\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}.$$

Если знаменатель представляетъ двучленъ, въ которомъ одинъ или оба члена содержатъ радикалы второй степени, то, исходя изъ тождествъ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ или $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$, заключаемъ, что въ такихъ случаяхъ для освобожденія знаменателя отъ радикаловъ, слѣдуетъ, если знаменатель представляетъ *сумму*, помножить числителя и знаменателя на *разность* членовъ знаменателя и наоборотъ.

3. $\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$;

4. $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$.

Точно такъ же, исходя изъ тождествъ (§ 42; V):

$(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3$ и $(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$ или $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=a+b$ и $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})=$ $=a-b$, легко можемъ освободить знаменатель отъ радикаловъ, если онъ представляетъ двучленъ, въ которомъ одинъ или оба члена содержатъ радикалы третьей степени.

5. $\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{a(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}{(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}=\frac{a(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}{b+c}$.

6. Если знаменатель есть трехчленъ, наприм., такого вида $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$, то, принимая сперва $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ за одночленъ, умножимъ числителя и знаменателя на разность $(\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{d}$:

$$\frac{a[(\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{d}]}{[(\sqrt{b}+\sqrt{c})+\sqrt{d}][(\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{d}]}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-(\sqrt{d})^2}=$$
$$=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{b+c+2\sqrt{bc}-d}.$$

Чтобы освободиться отъ радикала $2\sqrt{bc}$, будемъ разсматривать раціональные члены знаменателя $b+c-d$ за одночленъ и умножимъ числителя и знаменателя на разность $(b+c-d)-2\sqrt{bc}$. Тогда получимъ:

$$\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})[(b+c-d)-2\sqrt{bc}]}{[(b+c-d)+2\sqrt{bc}][(b+c-d)-2\sqrt{bc}]}=$$
$$=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})(b+c-d-2\sqrt{bc})}{(b+c-d)^2-4bc}.$$

§ **121. Дробные показатели.** Извѣстно (§ 97; 3), что при извлеченіи корня изъ степени надо раздѣлить показателя степени на показателя корня, напр., $\sqrt[3]{a^{12}}=a^{\frac{12}{3}}=a^4$. Распространивъ это правило на тѣ случаи, когда показатель степени не дѣлится на показателя корня, мы получимъ *дробные показатели.*

Напр. $\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{a^5}=a^{\frac{5}{2}}$; $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$. Вообще $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

Такимъ образомъ выраженіе $a^{\frac{m}{n}}$ есть лишь иной видъ корня степени n изъ количества a въ степени m. Числитель дробнаго показателя=показателю подкоренного количества, а знаменатель=показателю корня. Очевидно, что дробные показатели не имѣютъ того значенія, которое указано въ § 4, а представляютъ лишь условныя или *символическія* обозначенія корней. Тѣмъ не менѣе дробные показатели употребляются въ алгебрѣ, такъ какъ они способствуютъ большей общности алгебраическихъ выраженій и иногда упрощаютъ самыя дѣйствія.

Правила дѣйствій надъ выраженіями съ дробными показателями остаются тѣми же самыми, какъ и надъ выраженіями съ цѣлыми и положительными показателями. Такимъ образомъ *при умноженіи* такихъ выраженій показатели *складываются, при дѣленіи—вычитаются, при возвышеніи въ степень — перемножаются,* а *при извлеченіи корня — дѣлятся.* Докажемъ это.

1. Доказать, что $a^{\frac{2}{3}}.\ a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{8}{12}+\frac{3}{12}}=a^{\frac{11}{12}}$.

Дѣйствительно $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$, $a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{a}$. Но $\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[4]{a}=$

$$=\sqrt[12]{a^8}.\sqrt[12]{a^3}=\sqrt[12]{a^{11}}=a^{\frac{11}{12}}.$$

Точно такъ же доказывается, что $a^{\frac{2}{3}}:\ a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{8-3}{12}}=a^{\frac{5}{12}}$.

2. Доказать, что $(a^{\frac{3}{4}})^5=a^{\frac{3\cdot 5}{4}}=a^{\frac{15}{4}}$.

$$a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3};\ \text{но}\ (\sqrt[4]{a^3})^5=\sqrt[4]{a^{15}}=a^{\frac{15}{4}}.$$

Точно такъ же $\left(a^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{5}{8}}=a^{\frac{4\cdot 5}{5\cdot 8}}=a^{\frac{1}{2}}$, такъ какъ $(a^{\frac{4}{5}})^{\frac{5}{8}}=\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^{\frac{5}{8}}=$

$$=\sqrt[8]{(\sqrt[5]{a^4})^5}=\sqrt[8]{a^4}=\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}.$$

3. Доказать, что $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{5}}}=a^{\frac{1}{5}:3}=a^{\frac{1}{15}}$.

$$a^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{a}.\ \text{Поэтому}\ \sqrt[3]{a^{\frac{1}{5}}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}=\sqrt[15]{a}=a^{\frac{1}{15}}.$$

Поэтому иногда въ дѣйствіяхъ надъ ирраціональными количествами знаки корней предпочитаютъ замѣнять дробными показателями.

Примѣры 1. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=a-b.$

2. $(3\sqrt{ab}+\sqrt{a^2b}-6\sqrt{a^3c}):3\sqrt{a}=$

$$=(3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+ab^{\frac{1}{2}}-6a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}):3a^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-2ac^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{b}+\frac{1}{3}\sqrt{ab}-2a\sqrt{c}.$$

§ **122. Нулевые и отрицательные показатели.** Обобщая правило дѣленія степеней одинаковыхъ буквъ: $a^m:a^n=a^{m-n}$ на такіе случаи, когда показатель дѣлимаго (m) *равенъ* или *меньше* показателя дѣлителя (n), получимъ *нулевые и отрицательные* показатели. Разсмотримъ отдѣльно оба случая.

Если $m=n$, то $a^{m-n}=a^{m-m}=a^0$. Легко видѣть, что выраженіе $a^0=1$. Дѣйствительно $a^m:a^m=\frac{a^m}{a^m}=1$. Итакъ, *всякое количество въ нулевой степени равно 1*, такъ какъ оно представляетъ собою дробь, у которой числитель равенъ знаменателю.

Примѣры. $3^0=\frac{3}{3}=1$; $\left(2x\right)^0=\frac{2x}{2x}=1$; $\left(c+d\right)^0=\frac{c+d}{c+d}=1.$

2. Если $m<n$, то $m-n<0$, т.-е. показатель выраженія a^{m-n} *отрицательный*. Напр., $a^4:a^7=a^{4-7}=a^{-3}$.

Количество съ отрицательнымъ показателемъ степени есть не что иное, какъ дробь, числитель которой единица, а знаменатель—то же самое количество, но въ положительной степени.

Дѣйствительно $a^4:a^7=\frac{a^4}{a^7}=\frac{1}{a^3}$. Итакъ $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$.

Точно такъ же $a^{-1}=\frac{1}{a}$; $\left(a+3b\right)^{-2}=\frac{1}{(a+3b)^2}$ и т. д.

Употребляя отрицательные показатели, можно писать дроби безъ знаменателей. Напр., $\frac{2a}{b^3c}=2ab^{-3}c^{-1}$.

Подобно дробнымъ показателямъ, нулевые и отрицательные показатели суть лишь условныя или *символическія* обозначенія, которыя не могутъ имѣть того значенія, которое указано въ § 4. Дѣйствія надъ количествами съ отрицательными показателями производятся по тѣмъ же правиламъ, которыя были выведены для количествъ съ положительными показателями, что легко провѣрить.

1. $$a^{-2}\cdot a^{-5}=a^{-2+(-5)}=a^{-2-5}=a^{-7},$$

такъ какъ

$$a^{-2}\cdot a^{-5}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a^5}=\frac{1}{a^7}=a^{-7}.$$

2. $$a^{-2}:a^{-5}=a^{-2-(-5)}=a^{-2+5}=a^3,$$

такъ какъ

$$a^{-2}:a^{-5}=\frac{1}{a^2}:\frac{1}{a^5}=\frac{a^5}{a^2}=a^3.$$

3. $\left(a^{-3}\right)^5=a^{-3.5}=a^{-15}$, т. к. $\left(a^{-3}\right)^5=\left(\frac{1}{a^3}\right)^5=\frac{1}{a^{15}}=a^{-15}$.

4. $\sqrt[3]{a^{-12}}=a^{-\frac{12}{3}}=a^{-4}$, т. к. $\sqrt[3]{a^{-12}}=\sqrt[3]{\frac{1}{a^{12}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^{12}}}=\frac{1}{a^4}=a^{-4}$.

Если при этомъ показатель степени подкоренного количества не дѣлится на показателя корня, то въ результатѣ получится количество съ *дробно-отрицательнымъ показателемъ*.

Напр. $\sqrt[3]{a^{-2}}=a^{-\frac{2}{3}}$, т. к. $\sqrt[3]{a^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=a^{-\frac{2}{3}}$.

Количества съ дробными, отрицательными и дробно-отрицательными показателями могутъ быть не только одночлены, но и многочлены. Напр., $(a+b)^{-3}=\frac{1}{(a+b)^3}$; $(2m^3-n^4)^{\frac{1}{5}}=$

$$=\sqrt[5]{2m^3-n^4};\ (x^2-2y)^{-0{,}75}=(x^2-3y)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{(x^2-3y)^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(x^2-3y)^3}}.$$

§ **123. Рѣшеніе уравненій, содержащихъ неизвѣстное подъ знакомъ корня.** Если уравненіе содержитъ неизвѣстное подъ знакомъ корня, то его стараются сдѣлать раціональнымъ, возвышая обѣ части въ соотвѣтствующую степень, а также производя всѣ возможныя преобразованія, чтобы *уединитъ* корень.

Примѣры. 1. $4=\sqrt[3]{90-2x}$.

Возвышаемъ обѣ части въ 3-ю степень: $64=90-2x$; откуда $x=13$.

2. $\sqrt{4x+21}=\sqrt{4x}+1$. Возвышаемъ обѣ части въ квадратъ: $4x+21=4x+1+2\sqrt{4x}$. Дѣлаемъ приведенiе, переносимъ всѣ рацiональные члены въ одну часть и снова возвышаемъ обѣ части въ квадратъ:

$$10=\sqrt{4x};\ 100=4x;\ x=25.$$

Повѣрка: $\sqrt{100+21}=\sqrt{100}+1$; $11=11$.

3. $\sqrt{29-\sqrt{x+4}}=5$. Возвышаемъ обѣ части въ квадратъ: $29-\sqrt{x+4}=25$. Переносимъ члены и дѣлаемъ приведенiе: $4=\sqrt{x+4}$. Возвышаемъ снова обѣ части въ квадратъ:

$$16=x+4;\ x=12.$$

Повѣрка: $\sqrt{29-\sqrt{12+4}}=5$; $\sqrt{29-4}=5$; $5=5$.

4. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b}$. Возвышаемъ обѣ части въ квадратъ, при чемъ замѣтимъ, что 1-ая часть представляетъ двучленъ:

$a-x+b-x+2\sqrt{(a-x)\ (b-x)}=a+b$. Упростимъ уравненiе и *уединимъ корень*:

$2\sqrt{(a-x)\ (b-x)}=2x$ или $\sqrt{ab-ax-bx+x^2}=x$. Возвышаемъ обѣ части въ квадратъ:

$$ab-ax-bx+x^2=x^2 \text{ или } ab=x(a+b);\ x=\frac{ab}{a+b}.$$

§ **124**. **Необходимо замѣтить,** что при возвышенiи обѣихъ частей уравненiя въ степень получается новое уравненiе, вообще *неравносильное съ даннымъ*, и имѣющее, кромѣ корней даннаго уравненiя, еще *лишнiе* корни. Положимъ, что имѣемъ уравненiе $ax=b$ (1). Возвысивъ обѣ части его въ квадратъ, получимъ $a^2x^2=b^2$ или $a^2x^2-b^2=0$ или $(ax-b)\ (ax+b)=0$ (2). Но произведенiе изъ двухъ множителей только тогда равно нулю, когда одинъ изъ нихъ (безразлично первый или второй) равенъ нулю. Слѣдовательно, ур-iе (2) разлагается на 2 уравненiя: $ax-b=0$ (3) и $ax+b=0$ (4). Легко видѣть, что ур-iе (3) тождественно съ даннымъ ур-iемъ (1), а ур-iе (4) даетъ *лишнiй* или *посторонний* корень $x=-\frac{b}{a}$.

Вслѣдствіе этого, рѣшивъ ирраціональное уравненіе, *необходимо каждый разъ удостовѣриться повѣркой, обращается или нѣтъ данное уравненіе въ тождество.*

Примѣръ. Дано ур-іе: $1-\sqrt{x^2-x-2}=x$. Рѣшимъ его, перенеся раціональные члены въ одну часть и возвышая обѣ части въ квадратъ: $-\sqrt{x^2-x-2}=x-1$; $x^2-x-2=x^2-2x+1$; $x=3$. Это рѣшеніе не удовлетворяетъ данному ур-ію, такъ какъ подстановка приводитъ къ нелѣпому результату: $1-\sqrt{9-3-2}=3$ или $1-2=3$. Рѣшеніе $x=3$ удовлетворяетъ ур-ію: $1+\sqrt{x^2-x-2}=x$, т.-е. ур-ію, одинаковому съ даннымъ, но передъ радикаломъ котораго стоитъ *плюсъ.*

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Уравненія второй степени.

§ **125. Опредѣленія.** Уравненіе, которое, будучи приведено къ простѣйшему виду (т.-е. послѣ раскрытія скобокъ, освобожденія отъ знаменателей и радикаловъ), содержитъ неизвѣстное во второй степени, называется уравненіемъ второй степени или *квадратнымъ.*

Если освободить такое уравненіе отъ знаменателей и перенести всѣ члены его въ одну часть, то оно приметъ слѣд. общій видъ:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Такое квадратное уравненіе называется *полнымъ.* Такимъ образомъ первая часть полнаго квадратнаго уравненія состоитъ изъ члена, содержащаго неизвѣстное во 2-й степени (ax^2), члена, содержащаго неизвѣстное въ 1-й степени (bx) и извѣстнаго или свободнаго члена (c). Если же въ квадратномъ уравненіи нѣтъ второго или третьяго члена, то оно называется *неполнымъ.* Уравненія

$$ax^2+bx=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

$$ax^2+c=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

суть неполныя квадратныя уравненія.

§ 126. Рѣшеніе неполнаго уравненія вида $ax^2+c=0$.

Переносимъ извѣстный членъ c въ 2-ю часть и дѣлимъ обѣ части на коэффиціентъ при x:

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

Извлекаемъ изъ обѣихъ частей квадр. корень:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если подкоренное количество $-\frac{c}{a}$ положительно, то неизвѣстное x имѣетъ *два* значенія:

$$x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

которыя будутъ *раціональными*, если подкоренное количество представляетъ полный квадратъ, *и ирраціональными* въ противномъ случаѣ. Если подкоренное количество $-\frac{c}{a}$ отрицательно, то неизвѣстное x *вовсе не имѣетъ дѣйствительныхъ значеній*, такъ какъ квадратъ (x^2) всякаго числа есть всегда положительное количество, т.-е. не можетъ быть отрицательнымъ (§ 96; 3). Въ этомъ случаѣ говорятъ, что неизвѣстное имѣетъ два *мнимыхъ* корня.

1. $4x^2-9=0$; $x^2=\frac{9}{4}$; $x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$; $x_1=\frac{3}{2}$; $x_2=-\frac{3}{2}$.

2. $25x^2-3=0$; $x^2=\frac{3}{25}$; $x=\pm\sqrt{\frac{3}{25}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{5}$;

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{5};\ x_2=-\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

3. $x^2+4=0$; $x=\pm\sqrt{-4}$; $x_1=\sqrt{-4}$; $x_2=-\sqrt{-4}$. (Корни мнимые).

§ 127. Рѣшеніе неполнаго уравненія вида $ax^2+bx=0$.

Выносимъ x за скобки:

$$x(ax+b)=0.$$

Произведеніе изъ 2-хъ множителей только тогда можетъ равняться нулю, когда какой-либо изъ его множителей равенъ нулю. Поэтому послѣднее ур-іе разбивается на 2 слѣдующихъ уравненія:

(1) $$x_1=0.$$

(2) $$ax+b=0;\ \text{откуда}\ x_2=-\frac{b}{a}.$$

Итакъ, неполное квадр. уравненіе $ax^2+bx=0$ также имѣетъ два корня: $x_1=0$ и $x_2=-\frac{b}{a}$, изъ которыхъ одинъ всегда равенъ нулю.

Примѣры: 1. $7x^2-5x=0;\ x(7x-5)=0;\ x_1=0;\ 7x-5=0;\ x_2=\frac{5}{7}$

2. $\sqrt{x^2+5x}=3\sqrt{x};\ x^2+5x=9x;\ x^2-4x=0;$
$x(x-4)=0;\ x_1=0;\ x_2=4.$

§ 128. Рѣшеніе уравненія вида $x^2+px+q=0$.

Полное квадр. уравненіе $ax^2+bx+c=0$ часто приводятъ къ болѣе простому виду, раздѣливъ обѣ части на коэффиціентъ при неизвѣстномъ во второй степени:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

и затѣмъ обозначивъ для краткости $\frac{b}{a}$ черезъ p и $\frac{c}{a}$ черезъ q. Тогда получимъ уравненіе:

$$x^2+px+q=0.$$

Перенесемъ свободный членъ q во вторую часть: $x^2+px=-q$. Замѣтимъ, что если бы это послѣднее уравненіе возможно было представить въ видѣ $(x+m)^2=k$, то, по извлеченіи изъ обѣихъ частей квадр. корня, мы получили бы, что

$$x+m=\pm\sqrt{k}$$

и, слѣдовательно, нашли бы два рѣшенія:

$$x_1=-m+\sqrt{k}\quad \text{и}\quad x_2=-m-\sqrt{k}.$$

Но x^2+px можно разсматривать, какъ два первые члена квадрата суммы двухъ количествъ [1]) x и $\frac{p}{2}$. Прибавимъ къ обѣимъ частямъ по 3-му члену квадрата этой суммы, т. е. по $\frac{p^2}{4}$. Тогда

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q\quad \text{или}\quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

---

1) Въ самомъ дѣлѣ: $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$.

Извлекаемъ изъ обѣихъ частей квадр. корень:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\ \text{откуда}\ x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad (1).$$

Итакъ, неизвѣстное квадратнаго уравненія вида

$$x^2+px+q=0$$

равно *половинѣ коэффиціента при неизвѣстномъ въ первой степени, взятаго съ обратнымъ знакомъ, плюсъ-минусъ квадратный корень изъ квадрата этой половины безъ извѣстнаго члена.*

Примѣчаніе. Формулу (1) легко преобразовать въ формулу $x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}\ldots(1')$, болѣе удобную при рѣшеніи численныхъ уравненій.

§ **129. Рѣшеніе уравненія вида** $ax^2+bx+c=0$, легко получается изъ найденной формулы (1)

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

если вмѣсто p и q подставить ихъ значенія $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ и упростить полученную формулу:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

или

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Примѣчаніе. Если въ ур-іи $ax^2+bx+c=0$ коэффиціентъ b есть четное число, то положивъ $b=2b'$, найдемъ изъ (2), что въ этомъ случаѣ

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}\ \text{или}\ x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}. \qquad (3)$$

§ **130. Изслѣдованіе рѣшеній квадратнаго уравненія.**

Изслѣдуя обѣ формулы рѣшенія полнаго квадратнаго уравненія

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ \text{и}\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

заключаемъ:

1. Если подкоренныя количества $\frac{p^2}{4}-q>0$ или $b^2-4ac>0$, то кв. уравненіе имѣетъ *два различныхъ дѣйствительныхъ корня*, которые будутъ *раціональны*, если эти количества представляютъ полные квадраты, и *ирраціональны* въ противномъ случаѣ.

2. Если $\frac{p^2}{4}-q=0$ и $b-4ac=0$, то кв. уравненіе имѣетъ *одинъ* корень $\left(x=-\frac{p}{2}\text{ или }x=-\frac{b}{2a}\right)$ или, какъ говорятъ, *два равныхъ корня*. Полезно замѣтить, что въ этомъ случаѣ первыя части кв. уравненій $x^2+px+q=0$ и $ax^2+bx+c=0$ представляютъ *полные квадраты*. Дѣйствительно, подставивъ въ первомъ ур-іи вмѣсто q равную ему величину $\frac{p^2}{4}$, получимъ $x^2+px+\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0$. Точно такъ же, найдя изъ условія $b^2-4ac=0$, что $c=\frac{b^2}{4a}$ и подставивъ это значеніе во второе ур-іе, получимъ $ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=0$ или по освобожденіи отъ знаменателя

$$4a^2x^2+4abx+b^2=0 \text{ или } (2ax+b)^2=0.$$

3. Если $\frac{p^2}{4}-q<0$ или $b^2-4ac<0$, то кв. уравненіе имѣетъ *два мнимыхъ корня*, т.-е. уравненіе не имѣетъ никакого рѣшенія.

Дѣйствительно, рѣшая оба вида кв. уравненія $x^2+px+q=0$ и $ax^2+bx+c=0$, мы приходили къ равенствамъ $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$ и $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Но эти равенства при условіи, что $\frac{p^2}{4}-q<0$ или $b^2-4ac<0$, *невозможны*, такъ какъ первыя части ихъ, какъ квадраты, положительны, а вторыя части отрицательны.

Выраженія $\frac{p^2}{4}-q$ и b^2-4ac, опредѣляющія значенія корней кв. уравненія, называются *дискриминантами*.

§ 131. Примѣры рѣшенія уравненій 2-ой степени.

1. $x^2-5x+6=0$; $x=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$;

$$x_1=3;\ x_2=2.$$

2. $$2x^2+5x+2=0.$$

Рѣшаемъ это ур-іе по болѣе общей формулѣ:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4.2.2}}{2.2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm3}{4};$$

$$x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=-2.$$

3. $$\frac{x^2}{3}+x-\frac{24}{5}=\frac{11x}{5}.$$

Освобождаемъ ур-іе отъ дробей:

$$5x^2+15x-72=33x.$$

Переносимъ всѣ члены въ 1-ую часть:

$$5x^2-18x-72=0.$$

Раздѣлимъ обѣ части на коэффиціентъ при x:

$$x^2-\frac{18}{5}x-\frac{72}{5}=0.$$

Опредѣляемъ неизвѣстное:

$$x=\frac{9}{5}\pm\sqrt{\frac{81}{25}+\frac{72}{5}}=\frac{9}{5}\pm\sqrt{\frac{441}{25}}=\frac{9\pm21}{5};\ x_1=6;\ x_2=-2\tfrac{2}{5}.$$

Рѣшимъ это же ур-іе $5x^2-18x-72=0$ по болѣе общей формулѣ.

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81+5.72}}{5}=\frac{9\pm\sqrt{81+360}}{5}=\frac{9\pm\sqrt{441}}{5}=\frac{9\pm21}{5};$$

$$x_1=6;\ x_2=-2\tfrac{2}{5}.$$

4. $x^2-14x+49=0$; $x=7\pm\sqrt{49-49}$; $x=7$. Уравненіе имѣетъ одинъ (или два равныхъ корня). Замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ, согласно § 130, первая часть уравненія должна представлять полный квадратъ. Дѣйствительно, $x^2-14x+49=$ $=(x-7)^2=0$, откуда прямо получаемъ, что $x=7$.

5. $x^2-6x+34=0$; $x=3\pm\sqrt{9-34}$; $x=3\pm\sqrt{-25}$; $x=3\pm5\sqrt{-1}$. Уравненіе имѣетъ два мнимыхъ корня.

6. $$\frac{x-8}{x}+\frac{x}{x-8}=\frac{26}{5}.$$

Освобождаемъ ур-іе отъ дробей:

$$5(x-8)^2+5x^2=26x(x-8).$$

Раскрываемъ скобки:

$$5x^2-80x+320+5x^2=26x^2-208x.$$

Переносимъ члены и дѣлаемъ приведеніе:

$$16x^2-128x-320=0.$$

Дѣлимъ обѣ части на 16:

$$x^2-8x-20=0.$$

Опредѣляемъ неизвѣстное:

$$x=4\pm\sqrt{16+20}=4\pm6;\ x_1=10;\ x_2=-2.$$

7. $$(a-x)^2+(x-b)^2=(a-b)^2.$$

Раскрываемъ скобки:

$$a^2-2ax+x^2+x^2-2bx+b^2=a^2-2ab+b^2.$$

Переносимъ члены и дѣлаемъ приведеніе:

$$2x^2-2ax-2bx+2ab=0.$$

Дѣлимъ обѣ части ур-ія на 2 и выносимъ изъ 2-го и 3-го члена x за скобку:

$$x^2-(a+b)x+ab=0.$$

Опредѣляемъ неизвѣстное:

$$x=\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}-ab}=\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}}=$$

$$=\frac{a+b\pm\sqrt{(a-b)^2}}{2}=\frac{a+b\pm(a-b)}{2};\ x_1=a;\ x_2=b.$$

8. $$a^2x^2-(a+b)\,x=b^2x^2+(a-b)\,x=1.$$

По перенесеніи всѣхъ членовъ въ 1-ую часть и упрощеніи, получимъ:

$$(a^2-b^2)\,x^2-2ax+1=0,\text{ откуда } x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-(a^2-b^2)}}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{a\pm b}{a^2-b^2};\ x_1=\frac{1}{a-b};\ x_2=\frac{1}{a+b}.$$

§ **132. Свойства корней квадр. уравненія $x^2+px+q=0$.** *Сумма корней квадр. уравненія равна коэффиціенту при неизвѣстномъ въ первой степени съ обратнымъ знакомъ, а произведеніе корней равно извѣстному члену.*

Общій видъ корней квадр. уравненія $x^2+px+q=0$, какъ извѣстно (§ 128), слѣдующій:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,;\; x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Требуется доказать, что 1) $x_1+x_2=-p$ и 2) $x_1 . x_2=q$.

Сложимъ величины обоихъ корней:

$$x_1+x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-p.$$

Перемножимъ величины обоихъ корней:

$$x_1 . x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+$$

$$+\frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q.$$

Легко доказать, что эта теорема справедлива и для обоихъ видовъ неполнаго квадратнаго уравненія $x^2+q=0$ и $x^2+px=0$ [1]).

Такъ какъ ур-іе $ax^2+bx+c=0$ приводится къ ур-ію $x^2+px+q=0$ черезъ дѣленіе обѣихъ частей на a и замѣну $\frac{b}{a}$ черезъ p и $\frac{c}{a}$ черезъ q, то, на основаніи только что доказаннаго можемъ сказать, что въ ур-іи $ax^2+bx+c=0$, сумма корней $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, а произведеніе корней $x_1 . x_2=\frac{c}{a}$.

Доказанная теорема имѣетъ большое теоретическое и практическое значеніе. Укажемъ нѣкоторыя слѣдствія ея:

I. *Не рѣшая квадр. уравненія, можно опредѣлить знаки его корней.* Такъ, корни ур-ія $x^2+24x-256=0$ имѣютъ *разные* знаки, потому что произведеніе ихъ, т.-е. -256 *отрицательное* количество. Корни ур-ія $x^2-11x+24=0$ имѣютъ

[1]) Докажите это!

одинаковые знаки, такъ какъ произведенiе ихъ 24—*положительное* количество; они оба *положительные*, потому что сумма ихъ, взятая съ обратнымъ знакомъ (—11), *отрицательна*.

II. *По даннымъ корнямъ всегда можно составить квадр. уравненiе.* 1. Положимъ напр., что $x_1=5$; $x_2=-2$. Сумма ихъ $x_1+x_2=5-2=3$, а произведенiе $x_1 . x_2=5.-2=-10$. Слѣдовательно, искомое квадр. уравненiе будетъ:

$$x^2-3x-10=0.$$

2. Если $x_1=a$; $x_2=b$, то $x_1+x_2=a+b$; $x_1 . x_2=ab$. Поэтому искомое уравненiе: $x^2-(a+b)x+ab=0$.

3. Если $x_1=a+1$; $x_2=a-1$, то $x_1+x_2=2a$; $x_1 . x_2=a^2-1$.

Слѣдовательно, искомое ур-iе: $x^2-2ax+a^2-1=0$.

III. *По данной суммѣ и произведенiю двухъ чиселъ можно найти оба эти числа.* Пусть, напр., сумма искомыхъ чиселъ$=11$, а произведенiе 28. Разсматривая искомыя числа, какъ корни нѣкотораго квадр. уравненiя, составимъ это уравненiе:

$$x^2-11x+28=0, \text{ откуда } x=\frac{11\pm3}{2};\ x_1=7;\ x_2=4.$$

Искомыя числа: 7 и 4.

§ 133. Разложенiе трехчленовъ 2-й степени на множителей 1-ой степени. Трехчленами 2-й степени называются трехчлены вида x^2+px+q и вида ax^2+bx+c, въ которыхъ p, q, a, b и c означаютъ нѣкоторыя *данныя числа*, а x означаетъ *какое-нибудь произвольное число.* Не слѣдуетъ смѣшивать трехчленъ 2-й степени съ первой частью квадр. уравненiя, такъ какъ буква x въ уравненiи означаетъ не какое угодно число, а только *тѣ* 2 числа, которыя представляютъ *корни* уравненiя.

I. *Всякiй трехчленъ вида x^2+px+q можетъ быть представленъ въ видѣ произведенiя двухъ двучленныхъ множителей 1-ой степени.*

Для доказательства приравняемъ данный трехчленъ нулю. Получимъ извѣстный видъ квадратнаго уравненiя $x^2+px+q=0$. Рѣшивъ это уравненiе, найдемъ два корня его, изъ которыхъ одинъ для краткости обозначимъ черезъ m, а другой черезъ n.

Составивъ по этимъ корнямъ квадр. уравненіе, получимъ: $x^2-(m+n)x+mn=0$ или $x^2-mx-nx+mn=0$.

Разложимъ многочленъ, представляющій 1-ю часть, на множители по способу группировки:

$$x(x-m)-n(x-m)=0 \text{ или } (x-m)\ (x-n)=0.$$

Итакъ, всякій трехчленъ вида x^2+px+q можетъ быть разложенъ на два множителя вида $x-m$ и $x-n$. Для этого надо приравнять его нулю и рѣшить полученное квадр. уравненіе. Множители будутъ представлять разности между неизвѣстнымъ (x) этого уравненія и каждымъ изъ его корней.

II. *Трехчленъ вида* ax^2+bx+c *разлагается на три множителя* 1-ой степени. Дѣйствительно, $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$ $=a(x^2+px+q)=a\ (x-m)\ (x-n)$.

Примѣры: 1. Разложить на множители трехчленъ a^2-5a+6. Приравняемъ трехчленъ нулю и рѣшимъ полученное кв. уравненіе:

$$a^2-5a+6=0\ ;\ a=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6};\ a=\frac{5\pm1}{2};\ a_1=3;\ a_2=2.$$

Отсюда находимъ, что $a^2-5a+6=(a-3)\ (a-2)$, что легко провѣрить непосредственнымъ умноженіемъ.

2. Разложить на множители трехчленъ k^2-5-4k.

$k^2-4k-5=0;\ k=2\pm\sqrt{4+5};\ k=2\pm3;\ k_1=5;\ k_2=-1.$

Откуда $k^2-5-4k=(k-5)\ (k+1)$.

3. Разложимъ на множители многочленъ $2n^2+3n+1$.

Выведемъ 2 за скобки: $2\left(n^2+\frac{3n}{2}+\frac{1}{2}\right)$. Приравнявъ многочленъ, стоящій въ скобкахъ, нулю и рѣшивъ полученное квадр. ур-іе, получимъ: $n_1=-\frac{1}{2}$; $n_2=-1$. Откуда находимъ, что $2(n^2+\frac{3n}{2}+1)=2\left(n+\frac{1}{2}\right)\ (n+1)$ или, введя 2 въ первую скобку: $2n^2+3n+1=(2n+1)\ (n+1)$.

Слѣдствіе. Квадратное уравненіе не можетъ имѣть болѣе двухъ корней, такъ какъ оно можетъ быть представлено въ видѣ $(x-m)(x-n)=0$, откуда видно, что 1-я часть можетъ быть равна нулю *только* въ тѣхъ случаяхъ, если $x=m$ или $x=n$.

§ **134. Мнимые корни** кв. уравненій, какъ и вообще всѣ мнимыя количества, какъ это уже было объяснено (§ 96), суть количества невозможныя, не имѣющія никакого дѣйствительнаго значенія.

Введеніе ихъ вызвано основною цѣлью алгебры давать *общіе выводы, общія правила и общія рѣшенія*, хотя бы въ отдѣльныхъ случаяхъ эти рѣшенія и были невозможны.

Сужденіе же о возможности или невозможности общаго рѣшенія въ томъ или другомъ частномъ случаѣ (т.-е. при однихъ или другихъ значеніяхъ буквенныхъ величинъ) составляетъ уже другую задачу алгебры, называемую изслѣдованіемъ или анализомъ формулъ рѣшеній. Не вводя понятія о мнимыхъ корняхъ, мы не могли бы сдѣлать многихъ важныхъ выводовъ, напр., что всякое квадратное уравненіе имѣетъ два корня, какія свойства имѣютъ корни кв. уравненія, а также и другихъ выводовъ, съ которыми вскорѣ познакомимся (о свойствахъ и числѣ рѣшеній ур-ій вида $ax^4+bx^2+c=0$, называемыхъ биквадратными и т. д.).

Такъ какъ корень всякой четной степени изъ отрицательнаго количества можно привести къ квадратному корню изъ отрицательнаго количества $\left(\text{напр.}, \sqrt[6]{-3}=\sqrt[3]{\sqrt{-3}}\right)$, то слѣдуетъ разсмотрѣть только свойства квадр. корней изъ отрицательныхъ количествъ.

§ **135. Дѣйствія надъ мнимыми количествами.**

Мнимыя количества подчиняются условію, вытекающему изъ общаго тождества $(\sqrt{\pm a})^2=\pm a$, т.-е ставятъ условіе, что $(\sqrt{-a})^2=-a$ или, что квадратъ мнимаго количества вида $\sqrt{-a}$ есть отрицательная величина $-a$.

Обыкновенно мнимыя количества вида $\sqrt{-a}$ представляютъ въ слѣдующемъ видѣ: $\sqrt{-a}=\sqrt{a.-1}=\sqrt{a}.\sqrt{-1}$.

Напр., $\sqrt{-3}=\sqrt{3}.\sqrt{-1}$; $\sqrt{-4}=\sqrt{4}.\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}$.

Множитель $\sqrt{-1}$ представляетъ простѣйшее мнимое количество. Его часто называютъ *мнимымъ множителемъ* и изображаютъ для краткости буквой i [1]).

Такимъ образомъ $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$; $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,.\,i$; $\sqrt{-4}=2i$.

Степени мнимаго множителя $\sqrt{-1}$.

По условію $(\sqrt{-1})^2=-1$. Слѣдовательно:

$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2.\sqrt{-1}=-\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2.(\sqrt{-1})^2=-1.-1=+1;$$
$$(\sqrt{-1})^5=(\sqrt{-1})^4.(\sqrt{-1}=\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})^6=(\sqrt{-1})^4.(\sqrt{-1})^2=+1.-1=-1; \text{ и т. д.}$$

Всматриваясь въ найденные результаты, замѣчаемъ, что, послѣдовательныя степени $\sqrt{-1}$, начиная съ 1-й, имѣютъ повторяющійся характеръ съ періодомъ въ 4 звена: $\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, 1$. Поэтому при нахожденіи какой угодно n-ой степени $\sqrt{-1}$, т.-е. $(\sqrt{-1})^n$, слѣдуетъ раздѣлить число n на 4 и обращать вниманіе на остатки. При остаткахъ 1, 2, 3 степени $\sqrt{-1}$ будутъ: $\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}$, а при дѣленіи безъ остатка будетъ 1.

Примѣры: $(\sqrt{-1})^{15}=(\sqrt{-1})^{4.3+3}=-\sqrt{-1}$;

$$(\sqrt{-1})^{38}=(\sqrt{-1})^{4.9+2}=-1.$$

Соблюдая эти условія, производятъ надъ мнимыми количествами всѣ алгебраическія дѣйствія. Иногда результатъ этихъ дѣйствій даетъ возможность сдѣлать интересный выводъ. Приведемъ примѣры:

1. $\sqrt{-m}+\sqrt{-n}=\sqrt{m}.\sqrt{-1}\pm\sqrt{n}.\sqrt{-1}=(\sqrt{m}\pm\sqrt{n})\sqrt{-1}.$

$\sqrt{-3}+\sqrt{-2}=\sqrt{3}.\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}=(\sqrt{3}+2)\sqrt{-1}.$

2. $\sqrt{-m}\,.\,\sqrt{-n}=\sqrt{m}.\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{n}.\sqrt{-1}=\sqrt{mn}.(\sqrt{-1})^2=-\sqrt{mn}.$

$\sqrt{-2}\,.\,\sqrt{-8}=\sqrt{2}.\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{8}.\sqrt{-1}=\sqrt{2.8}.-1=-4.$

3. $\sqrt{-m}:\sqrt{-n}=\sqrt{m}.\sqrt{-1}:\sqrt{n}.\sqrt{-1}=\dfrac{\sqrt{m}.\sqrt{-1}}{\sqrt{n}.\sqrt{-1}}=$

$$=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{m}{n}}.$$

$$\sqrt{-2}:\sqrt{-8}=\sqrt{2}.\sqrt{-1}:\sqrt{8}.\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{2}{8}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

---

[1]) Отъ начальной буквы французскаго слова *imaginaire* (мнимый).

§ 136. Комплексное количество. Сопряженныя мнимыя количества.

Мнимые корни, получаемые при рѣшенiи полныхъ квадр уравненiй, имѣютъ видъ $a+b\sqrt{-1}$ и $a-b\sqrt{-1}$, гдѣ a и b— дѣйствительныя количества, которыя могутъ быть рацiональными или иррацiональными. Мнимое количество вида $a+b\sqrt{-1}$ называется *комплекснымъ*. Комплексное количество представляетъ самый *общiй видъ* количествъ. При $b=0$ опо представляетъ *дѣйствительное* (вещественное) количество a; при $a=0$ оно представляетъ мнимое количество $b\sqrt{-1}$. При $a=0$ и $b=0$ комплексное количество $a+b\sqrt{-1}=0$.

Два комплексныхъ количества вида $a+b\sqrt{-1}$ и $a-b\sqrt{-1}$ называются *сопряженными*.

Дѣйствiя надъ комплексными количествами совершаются по тѣмъ же правиламъ, какъ и дѣйствiя надъ дѣйствительными количествами.

Покажемъ, что какъ *сумма, такъ и произведенiе двухъ сопряженныхъ количествъ суть дѣйствительныя величины.*

1. $(a+b\sqrt{-1})+(a-b\sqrt{-1})=2a$.

2. $(a-b\sqrt{-1})\,(a-b\sqrt{-1})=a^2-(b.\sqrt{-1})^2=a^2-(b^2.-1)=$
$$=a^2+b^2.$$

Послѣднiй выводъ указываетъ, что произведенiе двухъ сопряженныхъ количествъ представляетъ сумму двухъ квадратовъ, т.-е. величина положительная и рацiональная[1]).

Примѣръ. Рѣшимъ уравненiе:

$$x^2+4x+13=0;\ x=-2\pm\sqrt{4-13}=-2\pm\sqrt{-9}=-2\pm3\sqrt{-1}.$$

Итакъ, корни этого ур-iя суть два сопряженныхъ мнимыхъ количества: $-2+3\sqrt{-1}$ и $-2-3\sqrt{-1}$.

Сумма ихъ$=-4$; произведенiе$=(-2)^2-(3.\sqrt{-1})^2=$
$$=(-2)^2+(3)^2=4+9=13.$$

§ **137**. Чтобы показать на примѣрѣ пользу отъ примѣненiя мнимыхъ количествъ, докажемъ слѣдующую теорему:

Теорема. *Если нѣкоторое число есть сумма двухъ квадратовъ, то и квадратъ его есть также сумма двухъ квадратовъ.*

---

[1]) Если a и b рацiональныя количества. Положительное количество $\sqrt{a^2+b^2}$ называется *модулемъ* комплекснаго количества $a+b\sqrt{-1}$.

Положимъ, что число $n=a^2+b^2$; требуется доказать, что $n^2=p^2+q^2$.

Извѣстно (§ 136) что $n=a^2+b^2=(a+b\sqrt{-1})\ (a-b)\sqrt{-1})$.

Возвысимъ обѣ части въ квадратъ:

$$n^2=(a+b\sqrt{-1})^2(a-b\sqrt{-1})^2=(a^2-b^2+2ab\sqrt{-1})\ (a^2-b^2-2ab\sqrt{-1}).$$

Замѣтивъ, что оба множителя 2-й части представляютъ сопряженныя количества вида $p+q\sqrt{-1}$ и $p-q\sqrt{-1}$, гдѣ $p=a^2-b^2$, а $q=2ab$, по предыдущему получимъ $n^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=p^2+q^2$.

Примѣръ. $5=2^2+1^2$. Слѣдовательно $5^2=(2^2-1^2)^2+(2.2.1)^2=3^2+4^2$.

§ 138. Составленіе и изслѣдованіе уравненій 2-й степени.

1. Нѣсколько знакомыхъ взаимно обмѣнялись своими фотографіями, при чемъ оказалось, что изъ 40 приготовленныхъ дюжинъ осталось 100 карточекъ. Сколько лицъ обмѣнялись карточками?

Назовемъ искомое число лицъ черезъ x. Каждый участникъ отдалъ свою карточку $x-1$ лицамъ. Слѣдовательно, всѣ лица роздали $x\ (x-1)$ карточекъ.

По условію задачи:

$$x(x-1)=40.12-100, \text{ откуда } x^2-x-380=0;$$

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+380}=\frac{1\pm\sqrt{1521}}{2}=\frac{1\pm39}{2};\ x_1=20;\ x_2=-19.$$

Искомое число лицъ$=20$. Второй корень не имѣетъ здѣсь смысла.

2. Опредѣлить сторону квадратнаго основанія прямой призмы, полная поверхность которой $=512$ кв. футамъ, а высота $=12$ фут.

Назовемъ длину искомой стороны черезъ x. Боковая поверхность прямой призмы равна периметру основанія, помноженному на высоту, т.-е. $48x$; сумма двухъ основаній призмы $=2x^2$. Итакъ, $2x^2+48x=512$; $x^2+24x-256=0$; $x=-12\pm\sqrt{144+256}=-12\pm20$; $x_1=-32$. Искомая сторона $=8$ фут. Второй корень не удовлетворяетъ вопросу.

3. Опредѣлить сторону правильнаго вписаннаго 10-угольника, если радіусъ круга $=r$.

Извѣстно, что сторона прав. вписан. 10-угольника равна бóльшей части радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношенiи. Назовемъ длину стороны 10-угольника черезъ x; тогда меньшая часть радiуса будетъ $r-x$.

Имѣемъ уравненiе: $\frac{r}{x}=\frac{x}{r-x}$. Рѣшаемъ его:

$$x^2=r^2-rx;\ x^2+rx-r^2=0;\ x=-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\frac{r^2}{4}+r^2}=$$
$$=-\frac{r}{2}\pm\sqrt{\frac{5r^2}{4}}.$$

Вопросу удовлетворяетъ только первый корень

$$x_1=-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{5r^2}{4}}\ \text{или}\ x=-\frac{r}{2}+\frac{r}{2}\sqrt{5}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1).$$

4. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу a прямоуг. $\triangle$-ка, равенъ h. Найти длину отрѣзковъ гипотенузы и изслѣдовать рѣшенiе.

Назовемъ одинъ изъ искомыхъ отрѣзковъ черезъ x, тогда другой отрѣзокъ есть $a-x$. По извѣстному свойству перпендикуляра h имѣемъ:

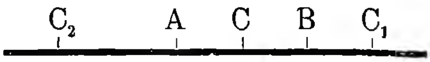
$$x:h=h:(a-x)\ \text{или}\ h^2=x\ (a-x)\ \text{или}\ x^2-ax+h^2=0.$$

Отсюда $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-h^2}$ или $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4h^2}}{2}$.

Оба рѣшенiя возможны при условiи, что $a^2>4h^2$ или, что $a>2h$. Одно рѣшенiе выражаетъ длину перваго отрѣзка, а другое—второго отрѣзка. Оба отрѣзка будутъ равны между собою, а именно, каждый изъ нихъ будетъ $=\frac{a}{2}$ при $a=2h$ или при $h=\frac{a}{2}$, что будетъ въ томъ случаѣ, если данный прямоуг. $\triangle$-къ равнобедренный.

§ 139. **Задача о двухъ свѣтящихся точкахъ.** Изъ физики извѣстно, что сила освѣщенiя обратно пропорцiональна квадратамъ разстоянiй освѣщаемаго предмета отъ источника свѣта, т.-е., иными словами, если разстоянiе предмета отъ источника свѣта *увеличится* въ 2, 3, 4... раза, то сила освѣщенiя предмета *уменьшится* въ 4, 9, 16... разъ. Требуется опредѣлить положенiе точки, равно-освѣщенной двумя свѣтящимися точками A и B, разстоянiе между которыми

d метровъ, если сила свѣта первой точки равна a свѣчамъ, а второй — b свѣчамъ на разстояніи единицы длины (1 метра, 1 фута и т. п.).



Положимъ, что искомое положеніе равно-освѣщенной точки C будетъ въ разстояніи x *вправо* отъ первой свѣтящейся точки A. Тогда сила освѣщенія ея точкою $A = \frac{a}{x^2}$; а точкою $B = \frac{b}{(d-x)^2}$. По условію задачи

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}.$$

Рѣшимъ это уравненіе: $a(d-x)^2 = bx^2$; $ad^2 - 2adx + ax^2 = bx^2$;

$$(a-b)x^2 - 2adx + ad^2 = 0;\quad x^2 - \frac{2ad}{a-b}x + \frac{ad^2}{a-b} = 0;$$

$$x = \frac{ad}{a-b} \pm \sqrt{\frac{a^2d^2 - ad^2(a-b)}{(a-b)^2}};\quad x = \frac{ad \pm \sqrt{abd^2}}{a-b};$$

$$x = \frac{ad \pm d\sqrt{a}\,\sqrt{b}}{a-b};\quad x = \frac{d\sqrt{a}\,(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{a-b}.$$

Замѣтивъ, что $a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$, находимъ

$$x_1 = \frac{d\sqrt{a}\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \text{ или } x_1 = d \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

$$x_2 = \frac{d\sqrt{a}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \text{ или } x_2 = d \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

Изслѣдуемъ эти рѣшенія, для чего разсмотримъ 3 возможныхъ здѣсь случая: 1) $a > b$; 2) $a < b$; 3) $a = b$.

Если $a > b$, то $x_1 < d$, но $> \frac{1}{2}d$ (такъ какъ при $a > b$ дробь $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ болѣе дроби $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$ равной $\frac{1}{2}$). Слѣдовательно, 1-я искомая точка (C) лежитъ между точками A и B, притомъ ближе къ B. Второй корень $x_2 > d$, т.-е. 2-я равноосвѣщенная точка (C_1) лежитъ вправо за B.

2. *Если* $a < b$, то $x_1 < d$ и $< \frac{1}{2}d$ (такъ какъ при $a < b$ дробь $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ менѣе дроби $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}$). Отсюда заключаемъ, что 1-я

точка (C) лежитъ между A и B, но ближе къ A. Второй корень x_2 есть отрицательная величина, такъ какъ при $a<b$ дробь $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ имѣетъ отрицательный знаменатель.

Отрицательное рѣшеніе указываетъ, что 2-я точка (C_2) лежитъ влѣво отъ точки A, на разстояніи отъ него$=d\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$.

3. *Если* $a=b$, то $x_1=\frac{d}{2}$, т.-е. равноосвѣщенная точка (C) находится посрединѣ разстоянія AB. Второй корень $x_2=\frac{d\sqrt{a}}{0}=\infty$ указываетъ, что, въ случаѣ 2-хъ свѣтящихся точекъ равной силы, второй равноосвѣщенной точки *не* существуетъ. По мѣрѣ уравненія яркости обоихъ источниковъ свѣта, эта точка удаляется въ безконечность.

Численный примѣръ. Опредѣлить положеніе равноосвѣщенной точки, если $d=4$ фут.; $a=25$ свѣч.; $b=9$ свѣч.

Уравненія, приводимыя къ квадратнымъ.

§ **140. Уравненія высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ.** Изъ уравненій выше 2-й степени разсматриваются въ начальной алгебрѣ только тѣ, которыя искусственнымъ путемъ могутъ быть приведены къ виду квадратныхъ уравненій. Сюда относятся прежде всего уравненія, у которыхъ первая часть представляетъ произведеніе 2-хъ или нѣсколькихъ множителей, а вторая часть $=0$.

Примѣры. 1. $x^3-ax^2+bx=0$. Выведя x за скобки, получимъ $x(x^2-ax+b)=0$. Очевидно, что это ур-іе разлагается на 2 уравненія: $x_1=0$ и $x^2-ax+b=0$. Рѣшивъ это послѣднее уравненіе, найдемъ 2-й и 3-й корни даннаго кубичнаго уравненія: $x_{2,3}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

2. $x^3-3x^2-x+3=0$. Разложимъ 1-ю часть ур-ія по способу группировки: $x^2(x-3)-(x-3)=0$, или $(x^2-1)(x-3)=0$, или $(x+1)(x-1)(x-3)=0$. Корни этого уравненія будутъ $x_1=-1$; $x_2=1$; $x_3=3$.

3. $ax^3+bx^2+bx+a=0$. Разлагая 1-ю часть на множителей, получимъ: $a(x^3+1)+bx(x+1)=0$, или

$$a(x^2-x+1)(x+1)+bx(x+1)=0, \text{ или}$$
$$(x+1)(ax^2-ax+a+bx)=0.$$

Такимъ образомъ опять получаемъ 2 уравненія, рѣшивъ которыя, найдемъ всѣ три корня даннаго уравненія:

$$x_1=-1;\ x_{\frac{2}{3}}=\frac{a-b\pm\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a}.$$

4. $x^3-1=0$. Разложивъ первую часть ур-ія на множителей, получимъ $(x-1)(x^2+x+1)=0$. Слѣдовательно имѣемъ два уравненія: $x-1=0$ . . . . (1) и $x^2+x+1=0$ . . . . (2).

Изъ ур-ія (1) находимъ, что $x_1=1$; а изъ ур-ія (2), что $x_{\frac{2}{3}}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

§ **141. Трехчленныя уравненія.** Изъ уравненій, приводимыхъ къ виду квадратныхъ, особеннаго вниманія заслуживаютъ такъ называемыя *трехчленныя уравненія*, общій видъ которыхъ слѣдующій:

$ax^{2n}+bx^n+c=0$ или, по раздѣленіи обѣихъ частей на a:

$$x^{2n}+px^n+q=0, \text{ гдѣ } p=\frac{b}{a} \text{ и } q=\frac{c}{a}.$$

Рѣшеніе этихъ уравненій основано на весьма простой замѣнѣ неизвѣстнаго x^n черезъ другое неизвѣстное, напр., y. При этомъ трехчленное уравненіе получаетъ видъ квадратнаго. Дѣйствительно, если $x^n=y$, то $x^{2n}=y^2$ и, слѣдовательно, наше уравненіе принимаетъ видъ: $y^2+py+q=0$, откуда

$$y=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \text{ и, наконецъ,}$$

$$x=\sqrt[n]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

Простѣйшія изъ трехчленныхъ уравненій (при $n=2$) имѣютъ видъ $ax^4+bx^2+c=0$ или послѣ упрощенія $x^4+px^2+q=0$. Эти уравненія называются **биквадратными**.

Полагая $x^2=y$, $x^4=y^2$, будемъ имѣть $y^2+py+q=0$;

$$y=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}; \text{ откуда } x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

Какъ видно, здѣсь получаются 4 рѣшенія, какъ и слѣдовало ожидать, такъ какъ биквадратное уравненіе есть уравненіе 4-й степени.

Легко убѣдиться, что въ зависимости отъ величины y эти 4 корня могутъ быть: 1^0, всѣ дѣйствительные; 2^0, всѣ мнимые; 3^0, два дѣйствительныхъ и два мнимыхъ.

Интересно замѣтить, что *въ биквадратномъ уравненіи сумма всѣхъ корней его* $=0$; *а произведеніе ихъ* $=q$ (*постоянному члену* [1]).

Примѣры: 1. $x^4-18x^2+32=0$. Положивъ $x^2=y$, $x^4=y^2$, имѣемъ $y^2-18y+32=0$; $y=9\pm\sqrt{81-32}$; $y=9\pm7$; $y_1=16$ $y_2=2$.

Слѣдовательно, $x_{\substack{1\\2}}=\pm\sqrt{16}=\pm4$; $x_{\substack{3\\4}}=\pm\sqrt{2}$.

2. $x^{10}+31x^5-32=0$. Если $x^5=y$; $x^{10}=y^2$, то имѣемъ $y^2+31y-32=0$, откуда $y_1=1$; $y_2=-32$. Слѣдовательно,

$$x_1=\sqrt[5]{1}=1;\ x_2=\sqrt[5]{-32}=-2.$$

3. $2x-11\sqrt{x}+12=0$. Полагая $\sqrt{x}=y$ и $x=y^2$, получимъ $2y^2-11y+12=0$; $y^2-\frac{11}{2}y+6=0$; $y_1=4$; $y_2=\frac{3}{2}$. Откуда

$$x_1=y_1^2=16;\ x_2=y_2^2=\tfrac{9}{4}.$$

4. $x^2+\sqrt{2x^2-9}=12$. Чтобы привести это уравненіе къ виду трехчленнаго уравненія, слѣдуетъ преобразовать его такъ, чтобы въ него входило раціональное выраженіе, одинаковое съ подкоренной величиной $2x^2-9$. Для этого сперва умножимъ обѣ части на 2, а затѣмъ вычтемъ изъ нихъ 9. Тогда получимъ

$2x^2-9+2\sqrt{2x^2-9}=15$. Полагая $\sqrt{2x^2-9}=y$ и $2x^2-9=y^2$, будемъ имѣть: $y^2+2y-15=0$; $y=-1\pm\sqrt{16}$; $y=-1\pm4$;

$$y_1=3;\ y_2=-5. \text{ Слѣдовательно}$$

$(\sqrt{2x^2-9})_1=3$; $2x^2-9=9$; $2x^2=18$; $x^2=9$; $x_{\substack{1\\2}}=\pm3$.

$(\sqrt{2x^2-9})_2=-5$; $2x^2-9=25$; $2x^2=34$; $x^2=17$; $x_{\substack{3\\4}}=\pm\sqrt{17}$.

Легко убѣдиться, что корни x_3 и x_4 не удовлетворяютъ данному уравненію. Они удовлетворяютъ уравненію

$$x^2-\sqrt{2x^2-9}=12. \text{ (§ 124).}$$

[1] Провѣрьте это!

§ 142. Преобразованіе двойного радикала $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

Корни биквадратнаго уравненія $x^4+px^2+q=0$, опредѣляемые формулой $x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$, представляютъ двойной радикалъ вида $\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, гдѣ $A=-\frac{p}{2}$, $B=\frac{p^2}{4}-q$. Радикалы этого вида при нѣкоторыхъ условіяхъ могутъ быть представлены въ видѣ суммы или разности двухъ простыхъ радикаловъ:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$
$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

гдѣ x и y — раціональныя количества. Найдемъ условія возможности такого преобразованія. Для этого сперва сложимъ почленно эти уравненія, а потомъ изъ ур-ія (1) вычтемъ ур-іе (2). Тогда

$$2\sqrt{x}=\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}.$$
$$2\sqrt{y}=\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}.$$

Возвысимъ каждое изъ этихъ уравненій въ квадратъ:

$$4x=A+\sqrt{B}+A-\sqrt{B}+2\sqrt{A^2-B}=2A+2\sqrt{A^2-B};$$
$$4y=A+\sqrt{B}+A-\sqrt{B}-2\sqrt{A^2-B}=2A-2\sqrt{A^2-B};$$

откуда $x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}=\frac{A+C}{2}$;

$$y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}=\frac{A-C}{2}, \text{ гдѣ } C=\sqrt{A^2-B}.$$

Итакъ, для раціональности величинъ x и y необходимо, чтобы A^2-B представляло полный квадратъ.

Слѣдствіе. Чтобы корни биквадратнаго уравненія $x^4+px^2+q=0$ допускали такого рода преобразованіе, необходимо, чтобы постоянный членъ q представлялъ полный квадратъ.

Дѣйствительно $A^2-B=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q$.

Если биквадратное уравненіе имѣетъ видъ $ax^4+bx^2+c=0$, то легко вывести, что для возможности преобразованія необходимо, чтобы $\frac{c}{a}$ было полнымъ квадратомъ.

Примѣръ. Изъ уравненія $x^4-16x^2+4=0$ получаемъ:

$$x=\pm\sqrt{8\pm\sqrt{60}}.$$

Но $8^2-60=4$ представляетъ полный квадратъ. Поэтому

$$x=\pm\sqrt{\frac{8+2}{2}}\pm\sqrt{\frac{8-2}{2}} \text{ или } x=\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{3}.$$

Квадратныя уравненія съ двумя и многими неизвѣстными.

§ **143. Одно уравненіе квадратное, а другое уравненіе 1-й степени.** Такая система легко приводится къ одному квадр. уравненію съ однимъ неизвѣстнымъ. Выразивъ изъ уравненія 1-й степени одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого и подставивъ его выраженіе въ квадр. уравненіе, получимъ квадратное уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ. Опредѣливъ изъ него оба значенія этого неизвѣстнаго и подставивъ ихъ въ полученную ранѣе формулу, найдемъ оба значенія другого неизвѣстнаго.

Примѣръ. $x^2+2y^2=34$ . . . (1); $x+y=7$ . . . . (2).

Опредѣляемъ x изъ ур-ія (2): $x=7-y$ . . . . (3).

Подставляемъ это значеніе въ ур-іе (1): $(7-y)^2+2y^2=34$.

Рѣшаемъ это уравненіе: $49-14y+y^2+2y^2=34$;

$$3y^2-14y+15=0;\ y^2-\frac{14}{3}x+\frac{15}{3}=0;$$

$$y=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}-\frac{15}{3}};\ y=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}};$$

$$y=\frac{7\pm2}{3};\ y_1=3;\ y_2=\frac{5}{3}.$$

Подставляемъ поочередно полученныя значенія y въ формулу (3):

$$x_1=7-3;\ x_1=4;\ x_2=7-\frac{5}{3};\ x_2=5\frac{1}{3}.$$

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ оба неизвѣстные такой системы уравненій представляютъ корни одного и того же квадратнаго уравненія, такъ что $x_1=y_2=m$; $x_2=y_1=n$. Такой случай представляютъ *симметричныя* системы, видъ которыхъ не измѣняется отъ взаимной перестановки x и y. Напр.,

$$x+y=a;\ xy=b \ . . . (A);\ x^2+y^2=a^2;\ x+y=b \ . . . (B).$$

Слѣдуетъ замѣтить, что эти и подобныя системы можно рѣшить болѣе простыми и изящными способами, чѣмъ способомъ подстановки, а именно:

I. Въ системѣ (A) извѣстны сумма a и произведенiе b неизвѣстныхъ x и y.

Слѣдовательно, эти неизвѣстныя будутъ корнями уравненiя $z^2-az+b=0$, изъ котораго находимъ $z_{\frac{1}{2}}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

Очевидно, что $x_1=y_2=z_1$ и $x_2=y_1=z_2$.

Чтобы рѣшить систему: $x-y=a$; $xy=b$, положимъ $-y=z$, тогда будемъ имѣть систему $x+z=a$; $xy=-b$, которая рѣшается только что указаннымъ способомъ.

II. Система $x^2+y^2=a^2$ . . . (1); $x+y=b$ . . . (2) разрѣшается такимъ образомъ. Возведемъ обѣ части ур-iя (2) въ квадратъ: $x^2+y^2+2xy=b^2$ . . . (2') и вычтемъ изъ ур-iя (2') ур-iе (1). Тогда найдемъ, что $xy=\frac{b^2-a^2}{2}$ . . . (3). Зная сумму (2) и произведенiе (3) неизвѣстныхъ, составимъ уравненiе

$$z^2-bz+\frac{b^2-a^2}{2}=0, \text{ откуда}$$

$$z_1=x_1=y_2=\frac{b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2} \text{ и } z_2=x_2=y_1=\frac{b-\sqrt{2a^2-b^2}}{2}.$$

III. Система $x^2-y^2=a^2$ . . . (1); $x+y=b$ . . . (2). приводится къ двумъ уравненiямъ 1-й степени. Дѣйствительно, написавъ ур-iе (1) въ видѣ $(x+y)(x-y)=a^2$ и подставивъ въ него значенiе $x+y=b$, получимъ $b(x-y)=a^2$,

$$\text{откуда } x-y=\frac{a^2}{b} \text{ . . . (3).}$$

По суммѣ (2) и разности (3) неизвѣстныхъ легко найдемъ, что

$$x=\frac{1}{2}\left(b+\frac{a^2}{b}\right);\; y=\frac{1}{2}\left(b-\frac{a^2}{b}\right).$$

Такимъ образомъ ур-iе (1) имѣетъ *только видъ* квадратнаго уравненiя, въ дѣйствительности же при условiи, выражаемомъ ур-iемъ (2), *оно есть уравненiе 1-й степени.*

§ **144. Два квадратныхъ уравненiя.** Система двухъ квадратныхъ уравненій съ 2-мя неизвѣстными въ самомъ общемъ видѣ

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \text{ и}$$

$a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$, послѣ исключенія изъ нихъ одного неизвѣстнаго приводится къ уравненію 4-ой степени, не разрѣшаемому пріемами начальной алгебры. Поэтому рѣшеніе двухъ квадр. уравненій съ двумя неизвѣстными возможно лишь въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, при чемъ часто приходится употреблять различные *искусственные способы*. Разберемъ нѣсколько примѣровъ такихъ уравненій.

I. Система 2-хъ уравненій вида $ax^2+by^2=p$ и $mx^2+ny^2=q$, очевидно, легко рѣшается способомъ уравниванія коэффиціентовъ.

Примѣръ. $3x^2+4y^2=139$ . . . . (1).

$5x^2-6y^2=29$ . . . . (2).

Уравниваемъ коэффиціенты при y^2, для чего обѣ части ур-ія (1) умножимъ на 3, а ур-ія (2) на 2, а затѣмъ сложимъ почленно оба уравненія:

$$9x^2+12y^2=417$$
$$10x^2-12y^2=58$$
$$19x^2=475;\quad x^2=\frac{475}{19}=25;\quad x=\pm 5.$$

Неизвѣстное y легко теперь найти по способу подстановки: $y=\pm 4$.

II. Замѣтимъ слѣдующее изящное рѣшеніе системы

$$x^2+y^2=a \text{ и } xy=b,$$

которое покажемъ на слѣдующемъ числовомъ примѣрѣ:

$x^2+y^2=58$ . . . . (1); $xy=21$ . . . . . . (2)

Умножимъ обѣ части ур-ія (2) на 2 и затѣмъ приложимъ его, а потомъ вычтемъ почленно изъ ур-ія (1):

$x^2+y^2+2xy=58+42$; $(x+y)^2=100$, откуда $x+y=\pm 10$ . . . (3)

$x^2+y^2-2xy=58-42$; $(x-y)^2=16$, откуда $x-y=\pm 4$ . . . (4)

Изъ ур-ій (3) и (4) найдемъ, что $x_{\substack{1\\2}}=\pm 7=y_{\substack{3\\4}}$; $x_{\substack{3\\4}}=\pm 3=y_{\substack{1\\2}}$.

Конечно, предложенную систему можно было рѣшить и способомъ подстановки, при чемъ получилось бы биквадратное уравненіе.

III. Два уравненія, въ которыхъ всѣ неизвѣстные члены 2-й степени или уже имѣютъ *одинаковые коэффиціенты*, или могутъ быть приведены къ такому виду, при помощи сложенія или вычитанія даютъ уравненіе 1-й степени. Рѣшая это уравненіе совокупно съ однимъ изъ данныхъ уравненій, найдемъ искомыя неизвѣстныя.

Примѣръ. $3xy-x-y=121$ . . . . (1)

$2xy-x+y=86$ . . . . (2)

Умноживъ почленно первое уравненіе на 2, а второе на 3 и затѣмъ вычтя одно изъ другого, получимъ, что $x=5y-16$. Подставивъ это значеніе x въ одно изъ данныхъ уравненій, получимъ квадратное уравненіе, рѣшивъ которое, найдемъ, что $y_1=5$; $y_2=-1\frac{2}{5}$, а отсюда $x_1=9$ и $x_2=-23$.

IV. Уравненія вида $x^2+xy=a$ . . . . (1)

$y^2+xy=b$ . . . . (2)

рѣшаются слѣдующими двумя способами.

1-й способъ. Взявъ за скобки въ первомъ ур-іи x, а во второмъ y и раздѣливъ по частямъ одно уравненіе на другое, получимъ, что отношеніе неизвѣстныхъ $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ (3). Опредѣливъ $x=\frac{ay}{b}$ и подставивъ его въ одно изъ данныхъ уравненій, легко опредѣлить неизвѣстное $y=\pm\frac{b}{\sqrt{a+b}}$, а затѣмъ и $x=\pm\frac{a}{\sqrt{a+b}}$.

2-й способъ. Если дано или найдено отношеніе неизвѣстныхъ $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$, то для опредѣленія неизвѣстныхъ употребляютъ очень часто слѣдующій пріемъ.

Вводятъ новое вспомогательное неизвѣстное z, полагая $x=az$ и $y=bz$.

Подставляя это значеніе въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., въ (1), опредѣляютъ сперва z, а затѣмъ x и y:

$$a^2z^2+abz^2=a \text{ или } z^2(a+b)=1, \text{ откуда } z=\pm\frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

и слѣдовательно $x=\pm\frac{a}{\sqrt{a+b}}$; $y=\pm\frac{b}{\sqrt{a+b}}$.

V. Вообще въ подобныхъ задачахъ нахожденіе отношенія $\frac{x}{y}$, съ помощью котораго легко опредѣляются неизвѣстные, является весьма желательнымъ. Поэтому въ затруднительныхъ случаяхъ слѣдуетъ обратить вниманіе, нельзя ли какимъ-либо преобразованіемъ найти это отношеніе.

Положимъ, что дано уравненіе $ax^2+bxy+cy^2=0$. Не трудно видѣть, что раздѣливъ обѣ части его на y^2, получимъ уравненіе вида $a\left(\frac{x}{y}\right)^2+b\left(\frac{x}{y}\right)+c=0$, изъ котораго легко получимъ два значенія для $\frac{x}{y}$.

VI. Для опредѣленія отношенія $\frac{x}{y}$ часто пользуются слѣдующимъ свойствомъ пропорціи: если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Напр., ур-іе $\frac{x+y}{x-y}=\frac{a}{b}$ преобразовывается въ

$$\frac{x+y+x-y}{x+y-x+y}=\frac{a+b}{a-b} \text{ или } \frac{x}{y}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Точно такъ же изъ ур-ія $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=a$, получимъ

$$\frac{x}{y}=\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 \text{ и т. д. [1]).}$$

§ 145. Системы квадратныхъ уравненій съ тремя неизвѣстными. Такія системы представляютъ еще большія затрудненія для рѣшенія ихъ элементарными, хотя и искусственными способами. Рѣшеніе значительно упрощается, если въ систему входятъ и уравненія 1-й степени или, если удается замѣтить въ уравненіяхъ нѣкоторую закономѣрность. Приведемъ два примѣра:

I. Найти гипотенузу и катеты прямоугольн. треугольника, если сумма чиселъ, выражающихъ длины его сторонъ $=24$, а сумма квадратовъ этихъ чиселъ $=200$.

---

[1]) Дополнительныя статьи о рѣшеніи уравненій высшихъ степеней, приводимыхъ къ квадратнымъ, а также о рѣшеніи системы такихъ уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными помѣщены въ 3-ьей части курса алгебры.

Называя числа, выражающія длины гипотенузы и катетовъ, соотвѣтственно черезъ x, y и z, изъ условій задачи имѣемъ

$$x+y+z=24\ \ldots\ (1) \text{ и } x^2+y^2+z^2=200\ \ldots\ (2)$$

Теорема Пиѳагора даетъ еще уравненіе

$$x^2=y^2+z^2 \text{ или } x^2-y^2-z^2=0\ \ldots\ (3)$$

Складывая ур-ія (2) и (3), найдемъ, что $2x^2=200$, откуда $x=10$ [1]).

Вставляя значеніе x въ ур-ія (1) и (2), получимъ систему

$$y+z=14; \qquad y^2+z^2=100,$$

рѣшеніе которой извѣстно (§ 143). Длины катетовъ выражаются числами 6 и 8.

II. Рѣшить систему: $xy=a \ldots (1)$; $xz=b \ldots (2)$; $y^2+z^2=c^2 \ldots (3)$.

Раздѣливъ ур-іе (1) на (2), получимъ

$$\frac{y}{z}=\frac{a}{b}, \text{ откуда } z=\frac{by}{a}.$$

Подставивъ это значеніе въ (3), найдемъ $y^2+\frac{b^2y^2}{a^2}=c^2$ или

$$\frac{y^2(a^2+b^2)}{a^2}=c^2, \text{ откуда } y=\pm\frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

1. Ариѳметическая прогрессія.

§ **146. Опредѣленія. Ариѳметической прогрессіей** *называется* **рядъ чиселъ**, *въ которомъ каждое слѣдующее число составляется изъ предыдущаго черезъ прибавленіе къ нему одного и того же числа.* Если это постоянное число, называемое *разностью прогрессіи, положительное*, то прогрессія называется *возрастающей*, если оно *отрицательное*, то прогрессія называется *убывающей*. Числа, составляющія прогрессію, называются *членами* ея.

Знакъ прогрессіи ÷.

---

[1]) Отрицательный корень по смыслу задачи отбрасывается.

Примѣры:

$\div$ 2, 5, 8, 11,..... (1) Прогрессіи возрастающія.
$\div$ $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{4}$, 5, $5\frac{3}{4}$,.... (2) Разн. 1-й прогр.: 3, а 2-й: $\frac{3}{4}$.
$\div$ 7, 3, —1, —5,.. (3) Прогрессіи убывающія.
$\div$ 10, $9\frac{1}{2}$, 9, $8\frac{1}{2}$,.... (4) Разн. 3-й прогр.:—4, а 4-й:—$\frac{1}{2}$.

Общій видъ ар. прогрессіи такой: $\div a, b, c, d, \ldots t, v, u$.

Вообще принято обозначать: первый членъ a, послѣдній u, разность прогрессіи r, число членовъ n, сумму членовъ S.

Всѣ вопросы, относящіеся къ ариѳметической прогрессіи, рѣшаются на основаніи слѣдующихъ трехъ теоремъ.

§ **147. Теорема.** *Всякій членъ ар. прогрессіи равенъ первому члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи на число предшествующихъ членовъ.*

Дана прогрессія $\div a, b, c, d, \ldots v, u$, разность которой r, а число членовъ n. Изъ опредѣленія прогрессіи имѣемъ

2-й членъ $b = a + r = a + 1r$
3-й „ $c = b + r = a + 2r$
4-й „ $d = c + r = a + 3r$
. . . .
10-й членъ . . . $= a + 9r$
и вообще n-й членъ . . . $u = a + (n-1)r$ . . . . . (1).

Отсюда слѣдуетъ, что *любой членъ ар. прогрессіи равенъ первому члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи на число всѣхъ предшествующихъ членовъ.*

Слѣдствіе. Общій видъ ариѳм. прогрессіи можно изобразить такъ:

$$\div a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r, \ldots\ldots, a+(n-1)r.$$

Примѣры: 1. Найти 8-й членъ прогрессіи $\div 2, 5, 8, \ldots$ Разность прогрессіи $= 5 - 2 = 3$; слѣдовательно, 8-й членъ $= 2 + 3 \cdot 7 = 23$.

2. Найти 15-й членъ прогрессіи $\div 10, 9\frac{1}{2}, 9, \ldots$ Разность прогрессіи $= 9\frac{1}{2} - 10 = -\frac{1}{2}$; слѣдов., 15-й членъ $= 10 + (-\frac{1}{2}).14 = 10 - \frac{1}{2}.\ 14 = 10 - 7 = 3$.

3. Данъ рядъ нечетныхъ чиселъ $\div 1.3.5.7\ldots$ Чему равно n-ое нечетное число?

Здѣсь $a=1$; $r=2$. Поэтому n-ое нечетное число

$$=1+(n-1)2=2n-1.$$

Напр., 100-е нечетное число $=2.100-1=199$.

§ **148. Теорема II**. *Сумма каждыхъ двухъ членовъ ар. прогрессіи, равноотстоящихъ отъ начала и конца ея, равна суммѣ крайнихъ членовъ:*

Дана прогрессія $\div a, b, c, \ldots t, v, u,$
разность которой $=r$. Если члены прогрессіи переписать въ обратномъ порядкѣ:

$$\div u, v, t, \ldots c, b, a,$$

то получится новая прогрессія, разность которой равна $-r$. По доказанному въ предыдущей теоремѣ изъ 1-й прогрессіи имѣемъ: $b=a+r$; $c=a+2r$ и т. д., а изъ 2-й прогрессіи:

$$v=u+(-r)=u-r;\ t=u-2r \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно

$$b+v=a+r+u-r=a+u.$$
$$c+t=a+2r+u-2r=a+u \text{ и т. д.}$$

Примѣръ. Въ прогрессіи $\div 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$ имѣемъ:

$$3+17=5+15=7+13=9+11=20$$ [1]).

Слѣдствіе. Ариѳм. прогрессію въ общемъ видѣ можно изобразить такъ:

$$\div a,\ a+r,\ a+2r, \ldots\ldots, u-2r,\ u-r,\ u.$$

§ **149. Теорема III**. *Сумма членовъ ар. прогрессіи равна полусуммѣ крайнихъ членовъ, умноженной на число членовъ.*

Дана прогрессія $\div a, b, c, \ldots t, v, u,$ число членовъ которой n, а сумма членовъ S. Напишемъ два выраженія суммы членовъ и сложимъ полученныя равенства:

$$S=a+(a+r)+(a+2r)+\ldots+(u-2r)+(u-r)+u$$
$$S=u+(u-r)+(u-2r)+\ldots+(a+2r)+(a+r)+a$$
$$\overline{2S=(a+u)+(a+u)+(a+u)+\ldots+(a+u)+(a+u)+(a+u).}$$

Такъ какъ число двучленовъ равно n (числу всѣхъ членовъ данной прогрессіи), то

$$2S=(a+u)n, \text{ откуда } S=\frac{(a+u)n}{2} \quad \ldots\ldots (2)$$

---

[1]) Очевидно, что въ ар. прогрессіи съ *нечетнымъ* числомъ членовъ сумма крайнихъ членовъ равна удвоенному среднему члену. Напр., въ прогрессіи $\div 1, 5, 9, 13, 17$ сумма крайнихъ членовъ $1+17=2.9$.

Подставивъ въ формулу (2) вмѣсто u его выраженіе черезъ первый членъ (§ 147), получимъ другое употребительное выраженіе суммы членовъ.

$$S=\frac{[2a+(n-1)r]n}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2')$$

Примѣры. 1. Найти сумму 20 членовъ прогрессіи ÷ 7, 13, 19,... Имѣемъ, что $a=7$; $r=13-7=6$; 20-й членъ$=7+6.19=121$.

Слѣдовательно $S=\frac{(7+121).20}{2}=1280$.

2. Найти сумму n членовъ натур. ряда чис. $1,2,3,...(n-1), n$. Здѣсь $a=1$; $r=1$; n-й (любой) членъ $u=1+n-1=n$.

Слѣдовательно $S=\frac{(1+n)n}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, сумма, напр., 10-ти первыхъ членовъ натуральнаго ряда чиселъ$=\frac{10.11}{2}=55$.

3. Доказать, что *сумма n первыхъ нечетныхъ чиселъ 1, 2, 3... равна квадрату числа этихъ чиселъ.*

Здѣсь $a=1$; $r=2$. Слѣдов. $S=\frac{[2a+(n-1)r]n}{2}=\frac{[2+(n-1)2]n}{2}=n^2$.

Въ самомъ дѣлѣ, сумма, напр., 6 ти первыхъ нечетныхъ чиселъ $1+3+5+7+9+11=6^2=36$.

§ 150. Вставка среднихъ ариѳметическихъ.

Рѣшимъ слѣд. задачу: *между двумя данными числами a и b вставить m среднихъ ариѳметическихъ*, т.-е. между a и b вставить m такихъ чиселъ, которыя составляли бы ариѳметическую прогрессію, имѣющую a первымъ и b послѣднимъ членомъ. Очевидно, что вопросъ будетъ разрѣшенъ, если будетъ опредѣлена разность этой прогрессіи. Такъ какъ число всѣхъ членовъ ея$=m+2$, то, пользуясь выраженіемъ для всякаго члена ар. прогрессіи, имѣемъ:

$$b=a+(m+1)r, \text{ откуда } r=\frac{b-a}{m+1}.$$

Примѣръ. Между 10 и 25 вставить 4 среднихъ ариѳметическихъ.

Разность$=\frac{25-10}{5}=3$. Искомая прогрессія: 10, 13, 16, 19, 21, 25.

Если между каждыми двумя членами ариѳм. прогрессіи $a, b, c, d,...$ вставить *одинаковое* число (напр., m) среднихъ ариѳметическихъ то вновь полученный рядъ составитъ тоже ариѳм. прогрессію. Дѣйствительно, разность членовъ, вставленныхъ между a и b, будетъ $r_1 = \frac{b-a}{m+1}$, разность членовъ, вставленныхъ между b и c, будетъ $r_2 = \frac{c-b}{m+1}$ и т. д., но извѣстно, что $b-a=c-b=...$, слѣдовательно $r_1=r_2=....$, т. е. полученный рядъ представляетъ ариѳм. прогрессію.

§ **151**. Два выведенныя уравненія

$$u=a+(n-1)r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{и } S=\frac{(a+u)n}{2}=\frac{[2a+(n-1)r]n}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

рѣшаютъ всѣ вопросы, относящіяся къ ар. прогрессіи. Очевидно, что въ каждомъ такомъ вопросѣ изъ 5 основныхъ величинъ a, u, r, n, S, три величины должны быть даны, такъ какъ два уравненія опредѣляютъ только два неизвѣстныхъ.

Рѣшимъ нѣсколько задачъ.

1. Сумма 12 членовъ ар. прогрессіи $=288$. Первый членъ $=2$. Найти послѣдній членъ и разность.

$a=2$; $n=12$; $S=288$. Подставивъ въ формулу суммы прогрессіи соотвѣтствующія числа, имѣемъ: $288=\frac{(2+u)12}{2}$, откуда $u=46$.

Изъ формулы (1) подстановкой находимъ: $46=2+11r$; $r=4$.

Итакъ, искомая прогрессія: 2, 6, 10, 14,....42,46.

2. Долгъ въ 441 р. уплачивается слѣд. образомъ: въ первый мѣсяцъ должникъ уплачиваетъ 12 р., а въ каждый слѣдующій на 3 р. болѣе, чѣмъ въ предыдущій. Черезъ сколько мѣсяцевъ будетъ уплаченъ весь долгъ и какъ великъ послѣдній взносъ?

Очевидно, что величина всего долга представляетъ сумму ариѳметической прогрессіи, въ которой слѣдуетъ узнать число членовъ и послѣдній членъ. Такъ какъ $a=12$; $r=3$;

$S=441$, то изъ формулы $S=\frac{[2a+(n-1)r]n}{2}$ подстановкой чиселъ получимъ:

$$441=\frac{[24+(n-1)3]n}{2}.$$

Рѣшимъ это уравненіе: $882=(24+3n-3)n$; $882=21n+3n^2$, $n^2+7n-294=0$; $n=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}+294}=\frac{-7\pm 35}{2}$; $n_1=14$; $n_2=-21$. Долгъ будетъ уплаченъ черезъ 14 мѣс. (Вопросу удовлетворяетъ только первый корень). Чтобы найти величину послѣдняго взноса, воспользуемся формулой (1):

$$u=12+3.(14-1)=12+39=51 \text{ р.}$$

3. Путешественникъ выходитъ изъ города A и проходитъ въ 1-й день 1 версту, во 2-ой—2 версты, въ 3-й—3 версты и т. д. Черезъ 5 дней изъ A выходитъ другой путешественникъ и, идя по той же дорогѣ, дѣлаетъ ежедневно по 12 верстъ. Черезъ сколько дней послѣ отправленія 1-го путешественника они встрѣтятся?

Положимъ, что они встрѣтятся черезъ x дней. Первый путешественникъ отойдетъ отъ города A за это время на число верстъ $=$ суммѣ членовъ ар. прогрессіи, въ которой $a=1$; $r=1$; $n=x$; т.-е. на $\frac{x(x+1)}{2}$ верстъ, а второй на $12(x-5)$ верстъ. По условію задачи

$$\frac{x(x+1)}{2}=12(x-5);\ x^2+x=24x-120;\ x^2-23x+120=0;$$

$$x=\frac{23}{2}\pm\sqrt{\frac{529}{4}-120}=\frac{23\pm 7}{2};\ x_1=8;\ x_2=15.$$

Рѣшеніе показываетъ, что путешественники встрѣтятся 2 раза. Именно, послѣ отправленія 1-го путешественника изъ города A черезъ 8 дней, второй догонитъ перваго, а черезъ 15 дней (т.-е. черезъ 7 дней послѣ 1-й встрѣчи) первый догонитъ второго.

II. Геометрическая прогрессія.

§ **152. Опредѣленія. Геометрической прогрессіей** *называется* **рядъ чиселъ,** *въ которомъ каждое слѣдующее число равно предыдущему, умноженному на одно и то же число.* Если этотъ постоянный множитель, называемый *знаменателемъ прогрессіи*, болѣе 1-цы, то прогрессія будетъ *возрастающей;* если онъ менѣе 1-цы, то прогрессія будетъ *убывающей.* Числа, составляющія прогрессію, называются *членами* ея. Знакъ геометр. прогрессіи $\div\div$.

$\div\div 3, 6, 12, 24, 48, ..$ (1). Возрастающая прогрессія; знаменатель$=2$.

$\div\div 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}...$ (2). Убывающая прогрессія; знаменатель $=\frac{1}{3}$.

Изъ опредѣленія прогрессіи слѣдуетъ:

1. Чтобы найти знаменателя прогрессіи, достаточно раздѣлить какой-либо членъ прогрессіи на его предыдущій. Напр., знаменатель прогрессіи (2)$=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$.

2. Каждые три члена геометр. прогрессіи составляютъ непрерывную геометрич. пропорцію, а каждый членъ прогрессіи есть среднее геометрическое число между своимъ предыдущимъ и послѣдующимъ. Напр., изъ прогрессіи (2) имѣемъ: $27:9=9:3$ и $9=\sqrt{27.3}$ и т. д. [1]).

3. Если знаменатель прогрессіи (обозначаемый въ общемъ видѣ черезъ q) *положительное* число ($q>0$), то всѣ члены будутъ *положительные*; если же знаменатель *отрицательное* число ($q<0$), то члены прогрессіи будутъ *поперемѣнно положительные и отрицательные.*

Примѣръ. $\div\div 2, -6, 18, -54, ...$ Знаменатель прогрессіи $-\frac{6}{2}=-3$.

§ **153. Теорема I.** *Всякій членъ геом. прогрессіи равенъ пер-*

---

[1]) Точно такъ же и въ ариѳм. прогрессіи каждый членъ есть среднее ариѳметическое число между смежными съ нимъ членами. Напр., изъ ариѳм. прогрессіи $\div 2, 5, 8, 11, ..$ имѣемъ $5=\frac{8+2}{2}$ и т. д.

вому члену, умноженному на знаменателя въ степени числа предшествующихъ членовъ.

Дана геометр. прогрессія $\div\!\div a, b, c, d, \ldots\ldots v : u$, знаменатель которой q, а число членовъ n. Требуется доказать, что $u = aq^{n-1}$.

Изъ опредѣленія прогрессіи имѣемъ:

$$\begin{array}{lll} \text{2-й членъ} & & b = aq = aq^1 \\ \text{3-й} & \text{„} & c = bq = aq^2 \\ \text{4-й} & \text{„} & d = cq = aq^3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \text{15-й членъ} & \ldots & = aq^{14} \\ \text{и вообще } n\text{-й членъ} & \ldots & n = aq^{n-1}. \end{array}$$

Слѣдствіе. Общій видъ геометрической прогрессіи можно изобразить такъ:

$$\div\!\div a,\ aq,\ aq^2, \ldots aq^{n-1}.$$

Примѣры: 1. Найти 7-й членъ прогрессіи $\div\!\div 3,\ 6,\ 12, \ldots$ Знаменатель прогрессіи $= 6:3 = 2$; слѣдовательно, 7-й членъ $= 3 \cdot 2^6 = 3 \cdot 64 = 192$.

2. Найти 8-й членъ прогрессіи $\div\!\div 36,\ -12,\ 4 \ldots$ Знаменатель прогрессіи $= -12:36 = -\frac{1}{3}$; слѣдовательно, 8-й членъ $= 36 \cdot \frac{1}{-3^7} = -\frac{36}{2187} = -\frac{4}{243}$.

3. *Найти* n-ый *членъ прогрессіи* $\div\!\div 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots$

$a = 1$; $q = 2$. Слѣдовательно, n-ый членъ $= 2^{n-1}$.

Напр., 4-ый членъ этой прогрессіи $= 2^{4-1} = 2^3 = 8$.

§ **154. Теорема II.** *Сумма членовъ геом. прогрессіи равна дроби, числитель которой есть разность между произведеніемъ послѣдняго члена на знаменателя и первымъ членомъ, а знаменатель есть разность между знаменателемъ прогрессіи и единицей.*

Требуется найти сумму членовъ геом. прогрессіи $S = a + b + c + \ldots$, число членовъ которой n. Такъ какъ $b = aq$; $c = aq^2$ и т. д., то сумма членовъ можетъ быть написана въ такомъ видѣ:

$$S=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-2}+aq^{n-1} \qquad (A)$$

Умножимъ обѣ части этого равенства на знаменателя прогрессіи q:

$$Sq=aq+aq^2+aq^3+aq^4+\ldots+aq^{n-1}+aq^n \ldots . (B).$$

Вычтемъ почленно равенство (A) изъ (B):

$$Sq-S=aq^n-a, \text{ откуда } S=\frac{a(q^n-1)}{q-1} \ldots\ldots (2)$$

или, принимая во вниманіе, что $u=aq^{n-1}$ и слѣдов. $uq=aq^n$,

$$S=\frac{uq-a}{q-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (2').$$

Для вычисленія суммы членовъ *возрастающей* прогрессіи употребительны обѣ формулы (2) и (2′), при чемъ формула (2) употребляется предпочтительно передъ (2′), когда послѣдній членъ неизвѣстенъ.

Въ случаѣ *убывающей* прогрессіи удобнѣе пользоваться преобразованными формулами:

$$S=\frac{a(1-q^n)}{1-q} \ldots (3) \text{ или } S=\frac{a-uq}{1-q}, \ldots\ldots (3'),$$

которыя получаются изъ (2) и (2′) черезъ перемѣну знаковъ въ числителѣ и знаменателѣ.

Примѣры. 1. *Найти сумму n членовъ прогрессіи* $\div 1, 2, 4,\ldots$

$$a=1;\ q=2;\ \text{слѣдов.,}\ S=\frac{1.(2^n-1)}{2-1}=2^n-1.$$

Напр., сумма 8-ми членовъ этой прогрессіи

$$=2^8-1=256-1=255.$$

2. Найти сумму 5 членовъ ряда $\div 100,\ 25,\ 6\tfrac{1}{4},\ldots$;

$$a=100;\ q=\tfrac{25}{100}=\tfrac{1}{4};\ \text{слѣдов.,}\ S=\frac{100.[1-(\frac{1}{4})^5]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{100.[1-\frac{1}{1024}]}{\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{100.1023.4}{3.1024}=133\tfrac{13}{64}.$$

3. Найти сумму 6 членовъ ряда $\div 5,\ -15,\ 40\ldots$;

$$a=5;\ q=-\frac{15}{5}=3;\ S=\frac{5.[(-3)^6-1]}{-3-1}=-\frac{5.728}{4}=-910.$$

§ **155. Теорема III**. *Произведеніе каждыхъ двухъ членовъ геом. прогрессіи, равноотстоящихъ отъ начала и конца ея, равно произведенію крайнихъ членовъ.*

Если данную геом. прогрессію $\div\div a, b, c, d, \ldots\ldots, s, t, v, u$, знаменатель которой $=q$, переписать въ обратномъ порядкѣ, то получится геом. прогрессія $\div\div u, v, t, s, \ldots\ldots, d, c, b, a$, знаменатель которой $=\frac{1}{q}$. Изъ первой прогрессіи имѣемъ:

$b=aq$; $c=aq^2$; $d=aq^3$ и т. д., а изъ 2-й прогрессіи:

$v=u.\frac{1}{q}=\frac{u}{q}$; $t=\frac{u}{q^2}$; $s=\frac{u}{q^3}$ и т. д.

Поэтому $b.v=aq.\frac{u}{q}=au$; $ct=aq^2.\frac{u}{q^2}=au$; $ds=aq^3.\frac{u}{q^3}=au$ и т. д.

Примѣръ. Въ прогрессіи $\div\div 2, 4, 8, 16, 32, 64$ имѣемъ

$$2.64=4.32=8.16=128$$ [1]).

Слѣдствіе. *Произведеніе n членовъ геом. прогрессіи равно кв. корню изъ произведенія крайнихъ членовъ, возведеннаго въ n-ую степень.*

Опредѣлимъ произведеніе n членовъ прогрессіи

$$\div\div a, b, c, d, \ldots\ldots s, t, v, u.$$

Написавъ произведеніе P этихъ членовъ въ видѣ ряда произведеній изъ членовъ равноотстоящихъ отъ начала и конца, получимъ:

$$P=(a.u).(b.v).(c.t).(d.s)\ldots\ldots$$

или, такъ какъ произведеніе каждой пары множителей $=a.u$, а число всѣхъ паръ $=\frac{n}{2}$,

то
$$P=(au)^{\frac{n}{2}} \text{ или } P=\sqrt{(au)^n}.$$

§ 156. Сумма членовъ безконечно-убывающей геом. прогрессіи. Если рядъ членовъ прогрессіи можетъ быть безпредѣльно продолжаемъ, то такая прогрессія называется *безконечной*. Очевидно, что въ случаѣ *безконечно-возрастающей* или *расходящейся* прогрессіи, сумма членовъ ея не можетъ быть вычислена, такъ какъ, по мѣрѣ увеличенія числа членовъ, она превзойдетъ всякую данную величину. Въ случаѣ же *безконечно-убывающей* или *сходящейся* прогрессіи

---

[1]) Въ геом. прогрессіи съ нечетнымъ числомъ членовъ произведеніе крайнихъ членовъ равно квадрату средняго члена. Напр., въ прогрессіи $\div\div 3:6:12:24:48$ произведеніе крайнихъ членовъ $3.48=144=12^2$.

существуетъ такое число, къ которому безпредѣльно приближается сумма прогрессіи, при неограниченномъ возрастаніи числа ея членовъ. Это число и называютъ суммой безконечно-убывающей прогрессіи. Чтобы найти общее выраженіе суммы безконечно-убывающей геометр. прогрессіи, замѣтимъ, что члены ея, непрерывно уменьшаясь по мѣрѣ своего удаленія отъ начала, неограниченно приближаются къ нулю. Такимъ образомъ, положивъ, что послѣдній членъ ея $u=0$, найдемъ, что и произведеніе $uq=0$, вслѣдствіе чего и формула суммы $S=\frac{a-uq}{1-q}$ приметъ видъ:

$$S=\frac{a}{1-q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Примѣры. 1. Найти сумму безконечно-убывающей прогрессіи

$\div\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \ldots;$ $a=\frac{1}{4};$ $q=\frac{1}{12}:\frac{1}{4}=\frac{1}{3};$ слѣдов., $S=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}$.

2. Найти сумму ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$ Данный рядъ представляетъ сходящуюся геом. прогрессію, въ которой $a=\frac{1}{2}$; $q=\frac{1}{2}$. Поэтому $S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$.

3. Періодическія дроби представляютъ также примѣръ сходящихся прогрессій. Напр., дробь $0{,}4747\ldots$ есть не что иное, какъ сумма безконечно-убывающей геом. прогрессіи вида $\frac{47}{100}+\frac{47}{100^2}+\frac{47}{100^3}+\ldots$, въ которой $a=\frac{47}{100}$; $q=\frac{1}{100}$. Суммируя ее, находимъ $0{,}4747\ldots=\frac{\frac{47}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{47}{99}$, что уже извѣстно изъ ариѳметики.

§ 157. Вставка среднихъ геометрическихъ. *Между двумя данными числами a и b вставить m среднихъ геометрическихъ,* т.-е. между a и b вставить m чиселъ, составляющихъ геом. прогрессію, въ которой первый членъ $=a$, а послѣдній $=b$. Число всѣхъ членовъ этой прогрессіи $=m+2$, поэтому знаменателя ея найдемъ изъ выраженія для всякаго члена: $b=aq^{m+1}$, откуда $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$.

Примѣръ. Между 3 и 192 вставить 5 среднихъ геометрическихъ.

Знаменатель $q = \sqrt[6]{\frac{192}{3}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Искомая прогрессія $\div\div$ 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.

Замѣтимъ, что при вставкѣ между каждыми двумя членами геом. прогрессіи по m среднихъ геометрическихъ получится новая геом. прогрессія.

Дѣйствительно, знаменатель прогрессіи между первыми двумя членами a и b будетъ $q_1 = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$, знаменатель прогрессіи между 2-мъ и 3-мъ членами b и c будетъ $q_2 = \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}$ и т. д., но въ геом. прогрессіи $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, поэтому $q_1 = q_2 = \ldots$ Слѣдовательно, полученный рядъ представляетъ геом. прогрессію.

Такимъ образомъ геом. прогрессія имѣетъ свойства аналогичныя съ доказанными уже свойствами ариѳм. прогрессіи. Аналогія свойствъ обѣихъ прогрессій видна изъ сопоставленія слѣдующихъ формулъ:

Ариѳм. прогрессія.	Геом. прогрессія.
$u = a + r(n-1)$ . . . . . . (1).	$u = aq^{n-1}$ . . . . (1').
$a + u = b + v$ . . . . (2).	$au = bv$ . . . . (2').
$S = \frac{(a+u)n}{2}$ . . . . (3).	$P = \sqrt{(au)^n}$ . . . . (3').

Легко видѣть, что изъ формулъ (1), (2) и (3) получаются формулы (1'), (2') и (3'), замѣняя сложеніе и вычитаніе умноженіемъ и дѣленіемъ, а умноженіе и дѣленіе—возвышеніемъ въ степень и извлеченіемъ кв. корня.

§ **158**. Всѣ задачи, относящіяся къ геометр. прогрессіямъ, рѣшаются на основаніи трехъ выведенныхъ уравненій:

$$u = aq^{n-1} \ldots (1), \quad S = \frac{uq-a}{q-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1} \ldots (2) \text{ и } P = \sqrt{(au)^n} \ldots (3).$$

Надо однако замѣтить, что многіе изъ такихъ вопросовъ приводятъ или къ рѣшенію уравненій высшихъ степеней, разрѣшаемыхъ начальной алгеброй лишь въ немногихъ частныхъ случаяхъ, или къ рѣшенію *показательныхъ* уравненій, т.-е. такихъ, въ которыхъ неизвѣстное входитъ показателемъ степени и которыя въ большинствѣ случаевъ разрѣшаются съ помощью логариѳмовъ.

Примѣры: 1. Сумма 5 членовъ геом. прогрессіи$=726$. Знаменатель прогрессіи$=3$. Найти первый и послѣдній члены.

$n=5$; $S=726$; $q=3$. Изъ уравненія (2): $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ находимъ $a=\frac{S(q-1)}{q^n-1}=\frac{726.(3-1)}{3^5-1}=\frac{726.2}{242}=6$. Послѣдній членъ опредѣляется непосредственно изъ ур-ія (1): $u=aq^{n-1}=6.3^4=486$.

2. Первый членъ геом. прогрессіи $a=2,5$; послѣдній членъ $u=20$; сумма членовъ $S=37,5$. Найти знаменателя прогрессіи q и число членовъ n.

Изъ выраженія суммы геом. прогрессіи $S=\frac{uq-a}{q-1}$, получимъ, что $$q=\frac{S-a}{S-u}=\frac{37,5-2,5}{37,5-20}=2.$$

Изъ выраженія для всякаго члена $u=aq^{n-1}$ находимъ, что $q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ или $2=\sqrt[n-1]{\frac{20}{2,5}}$ или $2=\sqrt[n-1]{8}$. Возвысимъ обѣ части въ $n-1$-ую степень: $2^{n-1}=8=2^3$.

Итакъ $n-1=3$, откуда $n=4$.

3. Найти сумму n членовъ ряда [1]):

$S=k+2k^2+3k^3+4k^4+\ldots+(n-1)k^{n-1}+nk^n$. . . . . . (1).

Умножимъ обѣ части на k:

$Sk=k^2+2k^3+3k^4+4k^5+\ldots+(n-1)k^n+nk^{n+1}$ . . . . . (2).

Вычтемъ почленно равенство (1) изъ (2):

$S(k-1)=nk^{n+1}-(k^n+k^{n+1}+\ldots+k^3+k^2+k)$ . . . . . . (3).

Замѣтивъ, что члены, заключенные въ скобкахъ, образуютъ геом. прогрессію, находимъ, что $S(k-1)=nk^{n+1}-\frac{k^{n+1}-k}{k-1}$, откуда $$S=\frac{nk^{n+1}}{k-1}+\frac{k(k^n-1)}{(k-1)^2}.$$

---

[1]) Такой рядъ назыв. *геометрическимъ*.

4. Въ квадратъ, площадь котораго$=a^2$, впишемъ другой квадратъ, соединивъ прямыми средины сторонъ 1-го квадрата; во 2-й квадратъ впишемъ такимъ же образомъ 3-й квадратъ, въ 3-й квадратъ впишемъ 4-й и т. д. до безконечности. Найти сумму площадей всѣхъ квадратовъ.

По теоремѣ Пиѳагора легко находимъ, что площадь 2- г квадрата$=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$; площадь 3-го квадрата$=\frac{a^2}{2.4}+\frac{a^2}{2.4}=\frac{a^2}{4}$; площадь 4-го квадрата$=\frac{a^2}{4.4}+\frac{a^2}{4.4}=\frac{a^2}{8}$ и т. д. Сумма площадей всѣхъ квадратовъ $S=a^2+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{8}+\ldots$ представляетъ, очевидно, безконечно сходящуюся прогрессію, 1-й членъ которой$=a^2$, а знаменатель$=\frac{1}{2}$. Поэтому $S=\frac{a}{1-\frac{1}{2}}=2a^2$, а сумма площадей всѣхъ *вписанныхъ* квадратовъ$=2a^2-a^2=a^2$, т.-е. равна площади даннаго квадрата.

III. Неопредѣленныя уравненія 1-й степени.

§ **159.** Если число уравненій менѣе числа неизвѣстныхъ, то, какъ было уже замѣчено, такія уравненія называются *неопредѣленными*, такъ какъ имѣютъ безчисленное множество рѣшеній. Значенія неизвѣстныхъ могутъ быть положительныя, отрицательныя, цѣлыя и дробныя.

Встрѣчаются однако вопросы, которые, хотя и приводятъ къ неопредѣленнымъ уравненіямъ, но по своему смыслу удовлетворяются только цѣлыми и положительными рѣшеніями. Такова, напр., задача: рубль размѣняли на пятачки и трехкопеечники. Сколько было тѣхъ и другихъ?

Въ этихъ случаяхъ можетъ обнаружиться, что неопредѣленное уравненіе имѣетъ ограниченное число вполнѣ опредѣленныхъ рѣшеній. Можетъ случиться, что данное неопредѣленное уравненіе имѣетъ только по одному такому значенію для каждаго неизвѣстнаго, и даже, что оно вовсе не имѣетъ цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній.

§ **160.** Разсмотримъ рѣшеніе въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленнаго уравненія 1-й степени съ двумя неизвѣстными.

Какой бы видъ первоначально не имѣло такое уравненіе, послѣ упрощеній его всегда можно привести къ общему виду

$$ax+by=c,$$

гдѣ a, b и c суть цѣлыя числа, не имѣющія общаго множителя, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы могли бы еще болѣе упростить это уравненіе, раздѣливъ обѣ части его на общаго множителя.

Коэффиціенты a и b также не могутъ имѣть общаго множителя, если x и y должны быть цѣлыми числами.

Для доказательства допустимъ противное, т.-е. что a и b имѣютъ общаго множителя p, такъ что $a=a_1p$; $b=b_1p$. Тогда уравненіе $ax+by=c$ можно написать въ видѣ

$$a_1px+b_1py=c, \text{ откуда } a_1x+b_1y=\frac{c}{p}.$$

Но такое равенство невозможно, такъ какъ сумма цѣлыхъ чиселъ a_1x+b_1y не можетъ равняться несократимой дроби $\frac{c}{p}$.

Примѣръ: Дано ур-іе $6x+9y=25$.

Раздѣливъ обѣ части его на 3, получимъ $2x+3y=\frac{25}{3}$, откуда очевидно, что x и y не могутъ быть цѣлыми числами.

§ **161**. Что касается *знаковъ* коэффиціентовъ a и b, то здѣсь, какъ легко убѣдиться, могутъ быть только 2 случая; 1) *оба коэффиціента имѣютъ положительные знаки* и 2) *одинъ изъ коэффиціентовъ, напр., b имѣетъ отрицательный знакъ.*

Такимъ образомъ намъ предстоитъ разсмотрѣть рѣшеніе уравненій двоякаго вида

$$ax+by=c \;.\;.\;.\;.\;.\; (1) \text{ и } ax-by=c \;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Какъ увидимъ впослѣдствіи, уравненія перваго вида имѣютъ ограниченное число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній, а уравненія второго вида—безчисленное множество такихъ рѣшеній.

§ **162**. **Частные случаи**. Неопредѣленныя уравненія въ особенности просто рѣшаются въ слѣдующихъ двухъ частныхъ случаяхъ: 1) Когда коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ (т.-е. a или b) равенъ 1; 2) когда постоянный членъ $c=0$.

I. Если $b=1$, то ур-іе вида (1) обращается въ $ax+y=c$, откуда $y=c-ax$. При этомъ каждому цѣлому значенію x соотвѣтствуетъ цѣлое значеніе y. Число положительныхъ рѣшеній опредѣляется условіемъ, чтобы c было болѣе ax.

Если $c<a$, то здѣсь возможна только одна пара такихъ рѣшеній: $x=0$; $y=c$.

Уравненіе (2) при $b=1$ обращается въ $ax-y=c$, откуда $y=ax-c$. Чтобы y было цѣлымъ и положительнымъ, необходимо, чтобы x было цѣлымъ и чтобы $ax-c>0$ или $x>\frac{c}{a}$. Такъ какъ значеній x, удовлетворяющихъ этому условію, можно взять сколько угодно, то заключаемъ, что уравненіе вида $ax-y=c$ имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній.

Примѣръ: Изъ уравненія $3x+y=7$ находимъ $y=7-3x$. Отсюда получимъ три пары цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній:

$$x=0;\ 1;\ 2.$$
$$x=7;\ 4;\ 1.$$

Наоборотъ, изъ уравненія $3x-y=7$ или $y=3x-7$ получимъ безчисленное множество такихъ рѣшеній, начиная съ $x=3$.

$$x=3;\ 4;\ 5;\ \ 6;\ \ldots$$
$$y=2;\ 5;\ 8;\ 11;\ \ldots$$

II. Если $c=0$, то изъ уравненія $ax+by=0$ находимъ, что $y=-\frac{ax}{b}$. Такъ какъ a и b не имѣютъ общихъ множителей, то для того, чтобы y было цѣлымъ числомъ, необходимо, чтобы $\frac{x}{b}$ было цѣлымъ числомъ. Такъ какъ, это число можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ, то обозначимъ его черезъ $\pm t$, такъ что $\frac{x}{b}=\pm t$. Тогда

$$x=bt;\ y=-at \quad \text{или} \quad x=-bt;\ y=at.$$

Очевидно, что при $+t$, x будетъ имѣть положительныя рѣшенія, а y—отрицательныя. Наоборотъ, при $-t$, x будетъ имѣть отрицательныя, а y—положительныя рѣшенія. Наконецъ, при $t=0$, будемъ имѣть $x=0$ и $y=0$.

Разсуждая точно такъ же относительно уравненія $ax-by=0$, найдемъ, что $x=bt$ и $y=at$.

При $t=0$, получимъ $x=0$ и $y=0$. Полагая t равнымъ любому цѣлому положительному числу, начиная съ 1, получимъ безчисленное множество цѣлыхъ и положительныхъ значеній для x и y.

Примѣръ. 1. Изъ уравненія $2x+7y=0$, находимъ, что $x=7t$; $y=-2t$.

Полагая	$t=0$;	1;	2;	3; . .	-1;	-2;	-3; . .
получимъ	$x=0$;	7;	14;	21; . .	-7;	-14;	-21; . .
„	$y=0$;	-2;	-4;	-6; . .	2;	4;	6; . .

2. Уравненія $2x-7y=0$ даютъ общія рѣшенія:

$x=7t$; $y=2t$. Полагая

	$t=0$;	1;	2;	3; . . . .
находимъ	$x=0$;	7;	14;	21; . . . .
„	$y=0$;	2;	4;	6; . . . .

§ 163. Рѣшеніе уравненія вида $ax+by=c$. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію общаго способа рѣшенія неопредѣленнаго уравненія, предложеннаго знаменитымъ математикомъ *Эйлеромъ* (1707—1783) [1]. Покажемъ для наглядности примѣненіе этого способа на частномъ примѣрѣ. Положимъ, что дано уравненіе $7x+39y=400$.

Опредѣлимъ изъ него то неизвѣстное, у котораго коэффиціентъ меньше:

$$x=\frac{400-39y}{7}.$$

Раздѣливъ числителя на 7, чтобы выдѣлить цѣлыя числа, получимъ

$$x=57-5y+\frac{1-4y}{7}.$$

Чтобы x было цѣлымъ числомъ, надо, чтобы частное $\frac{1-4y}{7}$

[1]) Вопросами, приводящими къ неопредѣленнымъ уравненіямъ, занимался еще греческій математикъ *Діофантъ* (360 г. по Р. Х.), вслѣдствіе чего эти уравненія иногда называются уравненіями Діофанта.

было также цѣлымъ числомъ. Обозначимъ это число черезъ t. Тогда

$$x=57-5y+t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Изъ уравненія $\frac{1-4y}{7}=t$ имѣемъ $1-4y=7t$. Опредѣливъ отсюда неизвѣстное съ меньшимъ коэффиціентомъ, получимъ $y=\frac{1-7t}{4}$ или, выдѣливъ цѣлое число: $y=-t+\frac{1-3t}{4}$. Чтобы y было цѣлымъ числомъ, необходимо, чтобы $\frac{1-3t}{4}$ было также цѣлымъ числомъ. Обозначимъ его черезъ t_1. Тогда

$$y=-t+t_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Изъ уравненія $\frac{1-3t}{4}=t_1$ получимъ $t=\frac{1-4t_1}{3}$ или

$$t=-t_1+\frac{1-t_1}{3}.$$

Разсуждая по предыдущему, положимъ $\frac{1-t_1}{3}=t_2$, такъ что

$$t=-t_1+t_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Изъ уравненія $\frac{1-t_1}{3}=t_2$ находимъ $1-t_1=3t_2$, откуда

$$t_1=1-3t_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Подставляя послѣдовательно значеніе t_1, t и y въ равенства (3), (2) и (1), будемъ имѣть:

$$t=-1+3t_2+t_2=-1+4t_2.$$

$$y=-t+t_1=1-4t_2+1-3t_2=2-7t_2 \quad \ldots \ldots (\mathrm{I}).$$

$$x=57-5y+t=57-10+35t_2-1+4t_2=46+39t_2 \quad \ldots (\mathrm{II}).$$

Формулы $x=46+39t$ и $y=2-7t$ (въ которыхъ мы для краткости отбросили значки у t) представляютъ *общія рѣшенія* даннаго уравненія. Подставляя въ нихъ вмѣсто t произвольныя цѣлыя положительныя и отрицательныя числа, а также и 0, можемъ получать для x и y сколько угодно цѣлыхъ значеній.

Такъ какъ, однако, намъ надо найти для x и y только *положительныя* цѣлыя значенія, то для этого необходимо поставить два условія: $x>0$ и $y>0$.

Отсюда имѣемъ два неравенства:

$$46+39t>0 \ldots\ldots (\mathrm{I}); \quad 2-7t>0 \ldots\ldots (\mathrm{II}).$$

Постараемся опредѣлить изъ нихъ значенія t. Для этого изъ обѣихъ частей перваго неравенства вычтемъ по 46, а къ обѣимъ частямъ второго неравенства прибавимъ по $7t$ [1]). Тогда получимъ

$$39t>-46 \ldots\ldots (\mathrm{I}'); \quad 2>7t \ldots\ldots (\mathrm{II}').$$

Мы сдѣлали это перенесеніе, чтобы опредѣлить предѣлы для *положительныхъ* значеній t. Дѣйствительно, изъ неравенствъ (I′) и (II′), находимъ, что

$$t>-1\tfrac{7}{39} \ldots\ldots (1) \text{ и } t<\tfrac{2}{7} \ldots\ldots (2).$$

Отсюда видно, что t можетъ быть или нулемъ или цѣлымъ числомъ бо́льшимъ $-1\frac{7}{39}$ и меньшимъ $\frac{2}{7}$. Такое число только одно, а именно -1.

Такимъ образомъ заключаемъ, что для t возможны только *два* значенія: $t=0$ и $t=-1$.

Если $t=0$, то $x=46$; $y=2$.
» $t=-1$ » $x=7$; $y=9$.

Итакъ, данное уравненіе имѣетъ только двѣ пары цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній.

§ 164. Какъ видно, способъ Эйлера заключается въ послѣдовательномъ переходѣ отъ одного неопредѣленнаго уравненія къ другому болѣе простому, пока наконецъ такимъ образомъ не дойдемъ до уравненія, коэффиціентъ при неизвѣстномъ котораго равенъ 1.

При большихъ значеніяхъ коэффиціентовъ при x и y этотъ способъ требуетъ большаго ряда вычисленій и потому стараются пользоваться всѣми возможными упрощеніями.

1. При выдѣленіи цѣлыхъ чиселъ полезно преобразовывать числителя такимъ образомъ, чтобы дробные остатки получились по возможности меньшими. Напр., выдѣляя цѣ-

---

[1]) Это мы имѣемъ право сдѣлать, такъ какъ если *къ неравнымъ количествамъ придадимъ поровну или если отъ неравныхъ количествъ отнимемъ поровну, то получимъ неравныя количества.* Отсюда находимъ, что при перенесеніи членовъ изъ одной части неравенства въ другую знаки мѣняются на обратные, такъ же какъ и въ равенствахъ.

лыя числа изъ $y=\frac{1-7t}{4}$, прибавимъ и вычтемъ изъ числителя по t. Тогда

$$y=\frac{1-8t+t}{4}=-2t+\frac{1+t}{4} \text{ или } y=-2t+t_1, \text{ гдѣ}$$

$t_1=1+t$. Отсюда находимъ, что $t=4t_1-1$ и затѣмъ $y=2-7t_1$; $x=46+39t_1$.

2. Если оба члена остатка имѣютъ общаго множителя, то его слѣдуетъ взять за скобки.

Примѣръ. Изъ уравненія $3x+5y=47$ находимъ

$$x=\frac{47-5y}{3}=15-y+\frac{2-2y}{3}=15-y+\frac{2(1-y)}{3}.$$

Чтобы x было цѣлымъ числомъ, достаточно чтобы $\frac{1-y}{3}$ было цѣлымъ числомъ. Обозначивъ его черезъ t, получимъ $1-y=3t$, откуда $y=1-3t$; $x=15-1+3t+2t$ или $x=14+5t$.

3. Если постоянный членъ c и одинъ изъ коэффиціентовъ a или b имѣютъ общаго множителя, то такое уравненіе весьма легко упрощается. Покажемъ это на примѣрѣ. Дано уравненіе $6x+7y=75$. Замѣтивъ, что 6 и 75 имѣютъ общаго множителя 3, положимъ $y=3y'$. Тогда будемъ имѣть $6x+21y'=75$ или $2x+7y'=25$, т.-е. получилось болѣе простое уравненіе. Рѣшимъ его

$$x=\frac{25-7y'}{2}=12-3y'+\frac{1-y'}{2}=12-3y'+t;$$

$\frac{1-y'}{2}=t$; $1-y'=2t$; $y'=1-2t$, а слѣдовательно $y=3y'=3-6t$;

$$x=12-3+6t+t \text{ или } x=9+7t.$$

§ **165. Формулы общихъ рѣшеній.** Если въ неопредѣленныхъ уравненіяхъ вида $ax+by=c$ (1) или $ax-by=c$ (2) извѣстна одна пара рѣшеній, то по нимъ легко можно найти *формулы общихъ рѣшеній.*

Дѣйствительно, положимъ, что уравненію $ax+by=c$ удовлетворяютъ рѣшенія $x=m$ и $y=n$, такъ что $am+bn=c$. Вычтя почленно второе уравненіе изъ перваго, получимъ

$$a(x-m)+b(y-n)=0.$$

Найденное уравненіе, считая въ немъ за неизвѣстныя $x-m$ и $y-n$, одинаково съ разсмотрѣннымъ уже (§ 162; II) уравненіемъ вида $ax+by=0$. Поэтому мы можемъ положить $x-m=bt$ и $y-n=-at$, или $x-m=-bt$ и $y-n=at$, откуда

$$x=m+bt \text{ (I)}; \quad \text{и} \quad y=n-at, \text{ (II) или}$$

$$x=m-bt \text{ (I')}; \quad \text{и} \quad y=n+at \text{ (II')}.$$

Это и будутъ общія формулы рѣшеній неизвѣстныхъ. Полезно замѣтить, что *коэффиціентъ при t для x есть коэффиціентъ при y въ данномъ уравненіи, а коэффиціентъ при t для y есть коэффиціентъ при x въ уравненіи, при чемъ какой-нибудь изъ этихъ коэффиціентовъ берется съ обратнымъ знакомъ.* Полагая въ нихъ t равнымъ различнымъ цѣлымъ числамъ (положительнымъ и отрицательнымъ), начиная съ нуля, будемъ получать цѣлыя значенія для x и y, при чемъ эти значенія могутъ быть или оба положительныя, или оба отрицательныя, или одно положительное, а другое отрицательное, смотря по значенію величины t.

Чтобы x и y были цѣлыми и положительными числами, необходимо чтобы удовлетворялись неравенства

$$m+bt>0 \ldots (1) \quad \text{и} \quad n-at>0 \ldots (2)$$

или

$$m-bt>0 \ldots (1') \quad \text{и} \quad n+at>0 \ldots (2')$$

Какое изъ этихъ двухъ паръ неравенствъ принять—совершенно безразлично. Примемъ, напр., первую пару неравенствъ (1) и (2). Чтобы получить предѣлы для t, перенесемъ члены

$$bt>-m \quad \text{и} \quad n>at,$$

откуда

$$t>-\frac{m}{b} \quad \text{и} \quad t<\frac{n}{a},$$

Такъ какъ здѣсь a, b, m и n представляютъ по условію цѣлыя и положительныя числа, то находимъ, что цѣлое (а также нулевое) значеніе t должно быть *болѣе* отрицательнаго числа $-\frac{m}{b}$ и *менѣе* положительнаго числа $\frac{n}{a}$. Этими крайними значеніями t вполнѣ опредѣляются цѣлыя и положительныя значенія x и y.

Примѣръ. Уравненію $3x+5y=47$ удовлетворяютъ рѣшенія $x=14$ и $y=1$. Слѣдовательно общія формулы рѣшеній будутъ:

$$x=14+5t \quad \text{и} \quad y=1-3t$$
$$\text{или } x=14-5t \quad \text{и} \quad y=1+3t$$

Принявъ напр., *вторую* пару рѣшеній, пишемъ неравенства

$$14-5t>0 \quad \text{и} \quad 1+3t>0$$

откуда $\quad 14>5t \quad$ и $\quad 3t>-1 \quad$ или $t<\frac{14}{5}$ и $t>-\frac{1}{3}$.

Слѣдовательно t можетъ имѣть три значенія

$$t=0;\ 1;\ 2$$

откуда
$$x=14;\ 9;\ 4;$$
$$y=1;\ 4;\ 7.$$

§ **166.** Обратимся теперь къ уравненію вида $ax-by=c$, въ которомъ извѣстна одна пара рѣшеній $x=m$ и $y=n$, такъ что $am-bn=c$. Вычитая одно уравненіе изъ другого, получимъ $a(x-m)-b(y-n)=0$. Разсуждая по предыдущему, находимъ отсюда, что $x-m=bt$ и $y-n=at$ или, что

$$x=m+bt \text{ (III)};\quad y=n+at \text{ (IV)}.$$

Мы не беремъ здѣсь t съ двойнымъ знакомъ, такъ какъ полученныя общія формулы (III и IV) имѣютъ одинаковые знаки.

Уравненія вида $ax-by=c$ имѣютъ безчисленное множество цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній.

Дѣйствительно въ этомъ случаѣ условія положительности общихъ рѣшеній

$$m+bt>0 \quad \text{и} \quad n+at>0$$

даютъ, что $t=-\frac{m}{b}$ и $t>-\frac{n}{a}$.

Отсюда видно, что, полагая t равнымъ любому цѣлому числу, превышающему бо̀льшее изъ двухъ значеній $-\frac{m}{b}$ и $-\frac{n}{a}$, будемъ получать сколько угодно цѣлыхъ и положительныхъ значеній для x и y.

Примѣръ. Уравненію $2x-7y=1$ удовлетворяютъ рѣшенія $x=4$; $y=1$. Слѣдовательно, общія рѣшенія будутъ:

$$x=4+7t;\quad y=1+2t.$$

Полагая въ нихъ $t=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots$

Получимъ, что $x=4;\ 11;\ 18;\ 25;\ \ldots$

" " $y=1;\ 3;\ 5;\ 7;\ \ldots$

§ **167. Рѣшеніе системы неопредѣленныхъ уравненій**. Если даны 2 неопредѣленныхъ уравненія съ 3-мя неизвѣстными x, y и z, то, исключивъ изъ нихъ одно неизвѣстное, напр., z, получимъ одно уравненіе съ неизвѣстными x и y. Найдя его рѣшенія, подставляемъ ихъ въ одно изъ данныхъ уравненій, тогда получимъ неопредѣленное уравненіе съ неизвѣстными z и t. Рѣшивъ его, получимъ общія формулы для z и t, а затѣмъ черезъ подстановку значеній t, найдемъ общія (однородныя съ z) рѣшенія для x и y.

Наконецъ, выразивъ условія положительности рѣшенія для x, y и z, найдемъ число цѣлыхъ и положительныхъ значеній для всѣхъ неизвѣстныхъ.

Въ частныхъ случаяхъ порядокъ рѣшенія значительно упрощается.

Примѣръ. Даны уравненія:

$$x+y+z=22 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$8x+5y+3z=111 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Исключивъ изъ нихъ неизвѣстное z, получимъ ур-іе

$$5x+2y=45.$$

Рѣшаемъ его:

$$y=\frac{45-5x}{2}=22-2x+\frac{1-x}{2}=22-2x+t.$$

$$\frac{1-x}{2}=t;\ 1-x=2t;\ x=1-2t \ldots\ldots (\mathrm{I})$$

$$y=22-2+4t+t;\ y=20+5t \ldots\ldots (\mathrm{II})$$

Подставляемъ эти значенія въ ур-іе $x+y+z=22$.

$$1-2t+20-5t+z=22;\ z=1-3t \ldots\ldots (\mathrm{III})$$

Условія положительности рѣшеній

	$1-2t>0$	$20+5t>0$	$1-3t>0$
даютъ	$t<\frac{1}{2}$	$t>-4$	$t<\frac{1}{3}$.

Слѣдовательно	$t=0$;	-1;	-2;	-3;	-4.
Откуда	$x=1$;	3;	5;	7;	9.
	$y=20$;	15;	10;	5;	0.
	$z=1$;	4;	7;	10;	13.

Приложенiе.

Числа.	Квадраты.	Числа.	Кубы.	$\sqrt{}$	$\sqrt[3]{}$
11	121	1	1	1	1
12	144	2	8	1,41	1,26
13	169	3	27	1,73	1,44
14	196	4	64	2	1,58
15	225	5	125	2,23	1,71
16	256	6	216	2,45	1,81
17	289	7	343	2,64	1,91
18	324	8	512	2,82	2
19	361	9	729	3	2,08
20	400	10	1000	3,16	2,15
21	441	11	1331	3,32	2,22
22	484	12	1728	3,46	2,29
23	529	13	2197	3,61	2,35
24	576	14	2744	3,74	2,41
25	625	15	3375	3,87	2,47
26	676	16	4096	4	2,52
27	729	17	4913	4,12	2,57
28	784	18	5832	4,24	2,62
29	841	19	6859	4,35	2,67
30	900	20	8000	4,47	2,71

$\sqrt{\pi}=1,77.$ $\sqrt{\frac{1}{\pi}}=0,56.$ $\sqrt[3]{\pi}=1,46.$ $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}=0,68.$