Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Т.Л. Сурин
Ж.В. Иванова

ПРАКТИКУМ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
(ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ПРОИЗВОДНАЯ)

Репозиторий ВГУ

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2019

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.0я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 19.12.2019 г.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова**

Р е ц е н з е н т :
доцент кафедры математики и информационных технологий УО «ВГТУ», кандидат физико-математических наук *В.Н. Загурский*

Сурин, Т.Л.

С90 Практикум по математическому анализу (Введение в анализ. Производная) / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – 52 с.

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов первого курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальностям «Прикладная информатика (по направлениям)», «Прикладная математика».

Практикум содержит разбор наиболее типичных примеров, демонстрирующих применение на практике результатов теории, задания для аудиторной и домашней работы, задания для самостоятельной работы.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.0я73

© Сурин Т.Л., Иванова Ж.В., 2019
© ВГУ имени П.М. Машерова, 2019

Репозиторий ВГУ

СОДЕРЖАНИЕ

Репозиторий ВГУ

ВВЕДЕНИЕ

«Практикум по математическому анализу (Введение в анализ. Производная)» предназначен для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов первого курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальностям «Прикладная информатика (по направлениям)», «Прикладная математика». Данное издание является переработанным и дополненным с учетом учебной программы и специфики выпущенных ранее пособий [11], [12].

Основное назначение задачника-практикума – помочь студентам вышеназванных специальностей в освоении курса математического анализа. По этой дисциплине существует ряд хороших задачников, список которых приведен в конце издания. Однако из-за слишком большого объема материала в них зачастую трудно ориентироваться и выбрать нужный материал для подготовки к экзамену. Кроме того, имеющиеся сборники задач не дают возможности индивидуализировать процесс обучения, поскольку не содержат достаточного количества однотипных задач.

Издание охватывает следующие разделы математического анализа: «Теория действительных чисел», «Последовательность. Предел последовательности», «Функция. Предел функции», «Непрерывность функции», «Производная». Материал каждого раздела разбит на два пункта. В пункте I – «Примеры решения задач» – разобраны наиболее типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. В пункте II – «Практические задания» – приведены задания для аудиторной и домашней работы.

В конце издания приведен список задач для самостоятельной работы студентов. Данный список охватывает все разделы и состоит из типичных задач, предлагаемых на экзамене.

Материал, приведенный в практикуме, соответствует учебным программам по математическому анализу по вышеперечисленным специальностям.

Данное издание может быть полезно для студентов других специальностей, изучающих высшую математику.

Репозиторий ВГУ

1. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ГРАНИЦЫ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Доказать, что не существует такого рационального числа, что* $r^2 = 2$.

Решение. Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что число r рациональное. Тогда существует такая несократимая рациональная дробь $\frac{m}{n}$, где m и n – взаимно простые натуральные числа, что $r = \frac{m}{n}$. Возведем обе части данного равенства в квадрат, тогда $\frac{m^2}{n^2} = 2$ или $m^2 = 2n^2$. Значит, m – число четное, $m = 2k$ (k – натуральное число). Тогда $n^2 = 2k^2$, следовательно, n – четное число. Это противоречит предположению, что m и n – взаимно простые натуральные числа.

Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

***Пример* 2.** *Доказать, что если* r *– рациональное число* ($r \neq 0$)*, а* α *– иррациональное число, то число* $r \cdot \alpha$ *– иррациональное.*

Решение. Пусть $r \cdot \alpha = \beta$. Предположим, что β рациональное число. Тогда число $\alpha = \frac{\beta}{r}$ должно быть рациональным, так как частное двух рациональных чисел есть число рациональное. Получаем противоречие. Следовательно, число β – иррациональное.

***Пример* 3.** *Доказать, что множество чисел* $E = \left\{\frac{n^2+1}{2n^2}, n \in N\right\}$ *ограничено. Найти точную верхнюю и точную нижнюю грани множества* ($sup\, E$, $inf\, E$).

Решение. Оценим выражение $\left|\frac{n^2+1}{2n^2}\right| = \frac{n^2+1}{2n^2}$. Докажем, что существует такое действительное число $A > 0$, для которого выполняется неравенство $\left|\frac{n^2+1}{2n^2}\right| \le A$ при всех $n \in N$. Так как $\frac{n^2+1}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, то

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \le 1. \qquad (1)$$

Следовательно, множество E ограничено.

Покажем, что $inf\, E = \frac{1}{2}$. Для этого воспользуемся определением точной нижней грани множества ([6], с. 17).

Репозиторий ВГУ

1) Из формулы (1) следует, что $\forall n \in N: \dfrac{n^2+1}{2n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n^2} \ge \dfrac{1}{2}$.

2) Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Решим неравенство $\dfrac{n^2+1}{2n^2} < \dfrac{1}{2} + \varepsilon$. Преобразуем левую часть неравенства: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n^2} < \dfrac{1}{2} + \varepsilon$ или $\dfrac{1}{2n^2} < \varepsilon$. Отсюда получаем, что $n^2 > \dfrac{1}{2\varepsilon}$. При $n > \sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon}}$ данное неравенство верно. Следовательно, $inf\,E = \dfrac{1}{2}$.

Покажем, что $sup\,E = 1$.

1) Ранее показано, что для всех натуральных чисел выполняется: $\dfrac{n^2+1}{2n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n^2} \le 1$. Значит, число $M = 1$ является верхней гранью множества.

2) Поскольку при $n = 1$ выполняется равенство $\dfrac{n^2+1}{2n^2} = 1$, т.е. $1 \in E$, то число $M = 1$ является точной верхней гранью.

Пример 4. *Доказать, что множество чисел* $E = \left\{ \dfrac{2n^2+3}{n+1}, n \in N \right\}$ *неограниченно сверху.*

***Решение*.** Пусть M – любое действительное число. Докажем, что найдется натуральное число n такое, что будет выполняться неравенство $\dfrac{2n^2+3}{n+1} > M$.

Решаем данное неравенство. Получаем: $2n^2 + 3 > Mn + M$ или $2n^2 - Mn + (3 - M) > 0$. Очевидно, что данное неравенство выполняется при $n > \dfrac{M + \sqrt{M^2 + 8M - 24}}{4}$, а это и означает, что множество E неограниченно сверху.

II. Практические задания

1. Укажите, какие из данных чисел являются рациональными:

1) 3; 2) $2\dfrac{1}{4}$; 3) 0,(354); 4) $\sqrt[3]{64\sqrt[3]{16}} \cdot 2^{-\frac{4}{9}}$; 5) $(128)^{\frac{2}{3}}$; 6) $2^{\log_8 5}$; 7) $\sqrt{51 + 14\sqrt{2}} \cdot (7 - \sqrt{2})$.

2. Докажите, что не существует рационального числа r такого, что: *а*) $r^2 = 3$; *б*) $r^2 = 5$; *в*) $r^3 = 3$; *г*) $r = \log_2 5$; *д*) $r = \log_3 2$.

3. Указать два иррациональных числа, таких что: *а*) их сумма рациональна; *б*) их разность рациональна; *в*) их произведение рационально.

4. Пусть r – рациональное число, α – иррациональное число. Докажите, что сумма этих чисел иррациональна.

Репозиторий ВГУ

5. Пусть α и β – иррациональные числа, $\alpha+\beta$ – рациональное число. Докажите, что числа $\alpha-\beta$, $\alpha+2\beta$ – иррациональные.

6.Доказать, что следующие множества являются ограниченными. Найти точные нижние и точные верхние грани этих множеств:

1) $E = (-2; 3]$;

2) $E=\left\{\dfrac{2}{n+1}, n\in N\right\}$;

3) $E=\left\{\dfrac{2n-1}{n^2+4}, n\in N\right\}$;

4) $E=\left\{3+\dfrac{1}{n+5}, n\in N\right\}$.

7. Выяснить, какие из нижеследующих числовых множеств ограничены сверху, какие ограничены снизу, какие не ограничены. Найти точные верхние и нижние грани для ограниченных множеств.

1) множество действительных чисел, принадлежащих отрезку $[-1; 2]$, интервалу $[-1; 2)$, полупрямой $(-\infty; 2]$, полупрямой $(2; +\infty)$.

2) множество рациональных чисел $r=\dfrac{p}{q}$, для которых $0 < p < q$;

3) множество рациональных чисел $r=\dfrac{p}{q}$, для которых $0 < q < p$;

4) множество иррациональных чисел, лежащих на отрезке $[-1; 2]$.

Множества чисел вида:

5) $\left\{\dfrac{2n}{3n-5}, n\in N\right\}$;

6) $\left\{\dfrac{n^2+1}{2n-1}, n\in N\right\}$;

7) $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}, n\in N\right\}$;

8) $\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{3n}, n\in N\right\}$.

8. Пусть $X=\{x : x\in Q, x^2<2\}$. Доказать, что множество X не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элемента. Найти $sup\, X$ и $inf\, X$.

9. Пусть $X\subset R$ и $-X=\{x : -x\in X\}$. Доказать, что $sup\,(-X) = -\,inf\, X$, $inf\,(-X) = -\,sup\, X$.

2. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Для числовых последовательностей*

1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \equiv\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \ldots,\ \dfrac{1}{n}, \ldots$.

2) $\{1+(-1)^n\} \equiv 0,\ 2,\ 0,\ 2, \ldots$.

3) $\{n\} \equiv 1, 2, 3, \ldots$.

Репозиторий ВГУ

определить, какие из этих последовательностей являются а) возрастающими, б) убывающими, в) ограниченными сверху, г) ограниченными снизу, д) ограниченными.

Решение. 1) Для последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Так как для всех натуральных n выполняется неравенство $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, то $x_n > x_{n+1}$. Следовательно, по определению убывающей последовательности, эта последовательность является убывающей.

Так как для любого элемента последовательности выполняются неравенства $x_n \le 1$, $x_n > 0$ ($x_n = 1$ при $n = 1$), то последовательность ограничена и сверху и снизу, следовательно, она ограничена. Последовательность имеет наибольший элемент $x_1 = 1$ и не имеет наименьшего.

2) Последовательность $\{1 + (-1)^n\}$ не является монотонной, так как для всех элементов последовательности выполняются неравенства $x_{2k-1} \le x_{2k}$, $x_{2k} \ge x_{2k+1}$. Последовательность ограничена.

3) Последовательность $\{n\}$ является возрастающей, так как для всех элементов последовательностей выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$.

Последовательность ограничена снизу, так как все элементы последовательности больше или равны 1 ($x_1 = 1$ – наименьший элемент последовательности). Последовательность неограниченна сверху, так как, очевидно, для любого наперед заданного числа A, всегда найдется такой элемент последовательности, который будет больше A.

Пример **2.** Доказать, что последовательность $\{a^n\}$ является:

а) бесконечно большой, при $|a| > 1$;

б) бесконечно малой, при $|a| < 1$.

Решение. а) Пусть $|a| > 1$. Докажем, что последовательность $\{a^n\}$ удовлетворяет определению бесконечно большой последовательности, т.е. для любого числа $A > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a|^n > A$.

Для $0 < A \le 1$, неравенство выполняется для любых n.

Зададим произвольное $A > 1$. Для отыскания номера N решим относительно n неравенство $|a|^n > A$. Получим $n > \log_{|a|} A$. Положим $N = [\log_{|a|} A]$. Тогда для любого $n > N$ выполняется неравенство $n > \log_{|a|} A$, а следовательно, и неравенство $|a|^n > A$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть $|a| < 1$. Если $a = 0$, последовательность $\{a^n\} = \{0\}$ – бесконечно малая. Пусть $a \ne 0$. Представим a в виде $a = \frac{1}{k}$, где $|k| > 1$. Тогда $a^n = \frac{1}{k^n}$. Так как $|k| > 1$, то последовательность $\{k^n\}$ является бесконечно большой, а последовательность $\left\{\frac{1}{k^n}\right\}$ – бесконечно малой. Таким образом, последовательность $\{a^n\}$ при $|a| < 1$ – бесконечно малая.

Пример 3. *Используя определение предела последовательности, доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+5}=\frac{2}{3}$.

Решение. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}=\left\{\frac{2n-1}{3n+5}\right\}$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n-\frac{2}{3}|=\left|\frac{2n-1}{3n+5}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$\left|\frac{2n-1}{3n+5}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{-13}{3(3n+5)}\right|=\frac{13}{3(3n+5)}.$$

$$\frac{13}{3(3n+5)}<\frac{13}{(3n+5)}<\frac{13}{n}<\varepsilon.$$

Решив неравенство относительно n, получим $n>\frac{13}{\varepsilon}$. Положим $N=\max\left\{1,\left[\frac{13}{\varepsilon}\right]\right\}$, тогда для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|x_n-\frac{2}{3}\right|<\frac{13}{n}<\frac{13}{N}<\varepsilon$. Следовательно, по определению предела последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+5}=\frac{2}{3}$.

II. Практические задания

1. Даны следующие последовательности:

1) $1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \dots$;

2) $1, 2, 3, 4, 5, \dots$;

3) $\{(-1)^n n\}$;

4) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \dots$;

5) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$;

6) $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$.

Ответить на вопросы:

а) является ли последовательность ограниченной сверху, ограниченной снизу, ограниченной;

б) имеет ли последовательность наибольший или наименьший элементы;

Репозиторий ВГУ

в) является ли последовательность монотонной?

2. Используя определение бесконечно малой последовательности, доказать что последовательности: 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, 2) $\left\{\frac{(-1)^n}{2n+1}\right\}$, 3) $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$, 4) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ – являются бесконечно малыми.

3. Используя определение бесконечно большой последовательности, доказать что последовательности: 1) $\{n\}$, 2) $\{2^n\}$, 3) $\{\ln n\}$, 4) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$ – являются бесконечно большими.

4. Используя определение предела последовательности, доказать что: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-2}=1$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=0$.

3. ТЕХНИКА НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Найти* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2+1}$.

Решение. При $n\to\infty$, числитель и знаменатель дроби также стремятся к бесконечности. Получим неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы ее раскрыть, разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=2.$$

(Здесь принимается во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$).

***Пример* 2.** *Найти* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

Решение. В данном случае имеет место неопределенность типа **$(\infty-\infty)$.** Для раскрытия этой неопределенности умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение $\sqrt{n^2+n}+n$:

Репозиторий ВГУ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-(n)^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

***Пример* 3.** *Доказать, что последовательность* $\{(-1)^n\}$ расходится.

Решение. Рассмотрим две подпоследовательности данной последовательности: $\{x_{2n}\}\equiv\{1\}$ и $\{x_{2n+1}\}\equiv\{-1\}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=1$, а $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=-1$, то последовательность $\{(-1)^n\}$ имеет две предельные точки: 1 и -1. Следовательно, последовательность $\{(-1)^n\}$ расходится.

***Пример* 4.** *Найти*
а) *все предельные точки последовательности* $\{\sin n°\}$;
б) *верхний и нижний пределы этой последовательности.*

Решение. *а*) Учитывая свойства функции $y=\sin x$, получаем, что при любом натуральном n данная функция принимает одно из 181 значений: 0, $\pm\sin 1°$, $\pm\sin 2°$, $\pm\sin 3°$, … , $\pm\sin 89°$, ± 1. При этом, каждое из этих чисел встречается в последовательности бесконечное число раз. Следовательно, каждое указанное число является предельной точкой последовательности $\{\sin n°\}$. Других предельных точек последовательность не имеет.

б) Из указанных 181 предельных точек наименьшей является -1, а наибольшей 1. Значит, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sin n°=1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sin n°=-1$.

II. Практические задания

1. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(5n^3-n^2)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+3n^2-6n+7}{n^3-5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+n^3+2n^2-3n+1}{5n^4-4n^2+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-4n+5}{n^3+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-2n^2+8}{2n^3-1}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^{20}(n-5)^{50}}{(2n-3)^{70}}$;

Репозиторий ВГУ

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4-3n^2-6n+7}-1}{n^2-5}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}-n}{n+1}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-5\cdot 2^{n+1}}{2\cdot 3^n+2^n}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+a^{n-1}+\ldots+a+1}{b^n+b^{n-1}+\ldots+b+1}$, где $a>1$, $b>1$.

2. Найти все предельные точки последовательности, а также $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, если:

1) $x_n=(-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$;

2) $x_n=\operatorname{arctg}\left(-1\right)^n\cdot n$;

3) $x_n=n^{(-1)^n}$;

4) $x_n=1+n\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

5) $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

6) $x_n=1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

4. ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Дана функция* $f(x)=\dfrac{2x+1}{1-x^2}$. *Найти* $f(3)$, $f(1-t)$, $f(t^{-1})$. *Определена ли функция при* $x=1$, $x=-1$?

Решение. Для нахождения частных значений функции надо подставить вместо x его значения: $x=3$, $x=1-t$ и $x=t^{-1}$ и произвести вычисления:

$$f(3)=\frac{2\cdot 3+1}{1-3^2}=-\frac{7}{8};\qquad f(1-t)=\frac{2(1-t)+1}{1-(1-t)^2}=\frac{3-2t}{2t-t^2};$$

$$f(t^{-1})=\frac{2t^{-1}+1}{1-t^{-2}}=\frac{t(2+t)}{t^2-1}.$$

При $x=1$ или $x=-1$ знаменатель обращается в нуль, а на нуль делить нельзя. Значит, при $x=\pm 1$ функция не определена.

Пример 2. *Найти область определения функции* $y=\sqrt{\log_2\sin x}$.

Решение. Область определения функции задается неравенством $\log_2\sin x\ge 0$. Но так как данное неравенство равносильно неравенству

Репозиторий ВГУ

$\sin x \geq 1$, то единственно возможным будет случай $\sin x = 1$, т.е. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Таким образом, областью определения данной функции является множество $D(f) = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z\right\}$.

***Пример* 3.** *Доказать, что функция* $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ *является нечетной.*

Решение. Область определения данной функции является симметричным относительно начала координат множеством. Проверим выполнение условия $y(-x) = -y(x)$. Получаем $y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x^3}{x^2+1} = -y(x)$, следовательно, данная функция является нечетной.

***Пример* 4.** *Найти основной период функции* $y = 2\sin(3x + 1)$.

Решение. Пусть T – период функции. Тогда для всех значений x имеем:

$$2\sin(3(x + T) + 1) = 2\sin(3x + 1),$$

или

$$2\sin(3(x + T) + 1) - 2\sin(3x + 1) = 0.$$

Получаем $4\cos(3x+1+3T/2)\sin(3T/2) = 0$. Так как последнее равенство является тождеством, т.е. выполняется при всех допустимых значениях x, то делаем вывод, что $\sin(3T/2) = 0$. Значит $3T/2 = \pi n$, где $n \in Z$. Следовательно, $T = \dfrac{2\pi n}{3}$. Наименьшим положительным числом, удовлетворяющим этому условию, является $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

Покажем, что $T = \dfrac{2\pi}{3}$ период функции:

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right) = 2\sin(3x + 1 + 2\pi) = 2\sin(3x + 1) = f(x),$$

а это и означает, что число $T = \dfrac{2\pi}{3}$ является периодом функции.

***Пример* 5.** *Доказать, что функция* $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ *ограничена на всей числовой оси.*

Репозиторий ВГУ

Решение. Воспользуемся неравенством $2|x| \le x^2 + 1$, которое выполняется для всех действительных *x*. Тогда для любого $x \in R$: $|\ f\ (x)| = \left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{|x|}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$. Это и означает, что функция ограничена.

Пример 6. *Доказать, что существует функция, обратная для функции* $y = \sqrt{x-2}$ *. Найти эту функцию.*

Решение. Функция $y = \sqrt{x-2}$ определена при $x \ge 2$ и монотонно возрастает на интервале [2; +∞). Следовательно, функция $y = \sqrt{x-2}$ имеет обратную на интервале [2; +∞). Множеством значений этой функции является промежуток $[0; +\infty)$.

Решая уравнение относительно *x,* получим единственное решение: $x = y^2 + 2$. Эта функция и будет обратной для данной функции. Меняя обозначения в обратной функции на общепринятые, получим для нее выражение $y = x^2 + 2$. Эта функция определена на промежутке $[0;+\infty)$ и принимает значения из промежутка [2; +∞).

Пример 7. *Доказать, что функция* $y = x^2 - 4x + 2$
а) *необратима на всей числовой прямой*;
б) *обратима на интервале* $(-\infty;\ 2]$.

Решение. *а*) Уравнение $x^2 - 4x + 2 = y_0$ имеет решения $x_1 = 2 + \sqrt{y_0 + 2}$ и $x_2 = 2 - \sqrt{y_0 + 2}$ для любого $y_0 \ge -2$. При $y_0 > -2$ эти решения различны, т.е. каждая прямая $y = y_0$ пересекает график функции в двух точках. Значит, данная функция необратима на всей числовой прямой.

б) Уравнение $x^2 - 4x + 2 = y_0$ для любого $y_0 \ge -2$ имеет лишь одно решение $x = 2 - \sqrt{y_0 + 2}$ из промежутка $(-\infty;\ 2]$. Значит, на данном промежутке функция обратима. Функцией обратной для функции $y = x^2 - 4x + 2$ на интервале $(-\infty;\ 2]$ является функция $x = 2 - \sqrt{y+2}$.

II. Практические задания

1. Дана функция $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 5x + 6}$. Найти: 1) $f(5)$; 2) $f(-t)$; 3) $f(t+2)$; 4) $f\left(\frac{1}{x}\right)$; 5) $\frac{1}{f(x)}$. Найти точки, в которых функция не определена.

2.Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{4 - x^2}$; 2) $y = \sqrt{3 - 2x - x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$; 3) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x - 6}}$;

Репозиторий ВГУ

4) $y=\dfrac{x^2-1}{\sqrt[4]{x}-2}$; 5) $y=\sqrt{x\sqrt{x+1}}$; 6) $y=\arccos\dfrac{1}{x^3}$;

7) $y=\arcsin\dfrac{x^2-2}{x}$; 8) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}x-1}$; 9) $y=\log_x\left(\dfrac{2}{x}-x\right)$;

10) $y = \lg\cos x$; 9) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{9-x^2}$.

3. Дана функция $y=\begin{cases}-1, \text{ если } x\le -1,\\ x^2, \text{ если } -1<x\le 1,\\ \lg x, \text{ если } x>1.\end{cases}$ Найти значения функции в точках $x_1 = -7$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = 100$. Нарисовать график этой функции.

4. Нарисовать график функции:

1) $y=\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{1+2x+x^2}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}$;

3) $y=\begin{cases}(1/2)^x, & \text{если} \quad x\le 0,\\ 2, & \text{если} \quad 0<x\le\pi,\\ \sin x, & \text{если} \quad x>\pi.\end{cases}$

5. Какие из данных функций являются тождественными?

1) $f(x) = x$; 2) $f(x) = |x|$; 3) $f(x)=\sqrt{x^2}$; 4) $f(x) = \lg 10^x$; 5) $f(x) = 10^{\lg x}$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{2}\lg x^2$; 7) $f(x) = \lg x$; 8) $f(x) = \lg|x|$.

6. Исследовать функции на четность, нечетность:

1) $y = x^2$, $x\in[-3; 5]$; 2) $y=\dfrac{2^x+2^{-x}}{x}$; 3) $y = x^3\sin x$;

4) $y=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$; 5) $y=|2x+\operatorname{tg} x|$; 6) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

7. Найти основной период функции:

1) $y=\operatorname{tg}\pi x$; 2) $y = \cos^2 x$;

3) $y = 3\cos 2x + 5\sin 2x + 4$; 4) $y=\{2x-1\}$.

8. Функция $f(x)$ имеет период $T = 2$ и, для $x\in[0; 2]$, задана формулой $y = 2x - x^2$. Построить график функции. Найти $f(2019)$.

9. Найти множество значений функции. Чему равны *sup f*, *inf f*, а также *max f*, *min f*, если последние существуют?

1) $y = -x^2 + 2x + 5$; 2) $y=\dfrac{2}{1+|x|}$; 3) $y = 5 + 2\cos x$.

10. Найти область определения и множество значений функции Дирихле $D(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x - \text{иррациональное число},\\ 1, \text{ если } x - \text{рациональное число}.\end{cases}$

Репозиторий ВГУ

Ответить на следующие вопросы:

а) Существуют ли $\sup D(x)$, $\inf D(x)$, $\max D(x)$, $\min D(x)$? Является ли функция ограниченной?

б) Является ли функция периодической? Чему равен наименьший положительный период функции?

в) Является ли функция четной, нечетной?

11. Найти обратную функцию $y = g(x)$ для функции:

1) $f(x) = x^2 + 1, \ x \le 0$; 2) $f(x) = -x^2 + 2x + 3, \ x \in (-\infty; 1]$;

3) $f(x) = e^{x-1}$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}, \ x \in (-\infty; 0]$;

5) $f(x) = \ln\sqrt{x}$; 5) $f(x) = \sin x$, *а*) $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, *б*) $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

12. Построить графики функций:

1) $y = \cos \arccos x$; 2) $y = \arccos \cos x$; 3) $y = [x^2]$;

4) $y = \{\sqrt{x}\}$; 5) $y = \operatorname{sgn} \log_2|x|$; 6) $y = \operatorname{sgn} \cos x$.

5. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Используя определение предела функции, доказать, что*

1) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{11 - x} = 3$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

Решение.

1) Используем определение предела функции по Коши. Выберем произвольным образом $\varepsilon > 0$. Найдем такое $\delta > 0$ (δ зависит от ε), чтобы для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 2| < \delta$, выполнялось неравенство $|\sqrt{11 - x} - 3| < \varepsilon$ (1).

По определению модуля:

$$|\sqrt{11 - x} - 3| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \sqrt{11 - x} - 3 < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - \varepsilon < \sqrt{11 - x} < 3 + \varepsilon.$$

Так как все части данного неравенства при достаточно малом ε являются положительными, то неравенство можно возвести в квадрат:

$$(3 - \varepsilon)^2 < 11 - x < (3 + \varepsilon)^2 \quad \Leftrightarrow \quad -(6\varepsilon + \varepsilon^2) < x - 2 < 6\varepsilon - \varepsilon^2 \quad (2)$$

Выберем в качестве $\delta(\varepsilon)$ число $\delta = 6\varepsilon - \varepsilon^2$. Очевидно, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \delta$, выполняется неравенство (2), а, следовательно, и неравенство (1). Следовательно, $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{11 - x} = 3$.

2) Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \to 0$ ($x_n \neq 0$) и, соответствующую ей последовательность значений функции $\{x_n \cdot \sin\frac{1}{x_n}\}$. Эта последовательность является бесконечно малой ($\{x_n\}$ – бесконечно малая, $\{\sin\frac{1}{x_n}\}$ – ограниченная). Следовательно, по определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$.

Пример 2. *Доказать, что* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \infty$.

Решение. По определению $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если для любого $M > 0$ можно найти $\delta > 0$, так, что для всех значений $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$. В нашем случае по заданному $M > 0$ будем подбирать δ из условия $|f(x)| = \frac{1}{|x-1|} > M$, или $|x-1| < \frac{1}{M}$. Следовательно, положив $\delta = \frac{1}{M}$, получим, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x-1| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Значит, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$.

Пример 3. *Найти следующие пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x-3}{x^2-3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3-x^2-3}{3x^3+2x^2+x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$.

Решение.

1) Знаменателем дроби является функция $g(x) = x^2 + 3x + 3$. Так как $g(3) = 3^2 + 3\cdot 3 + 3 = 21 \neq 0$, то можно применить теорему о пределе частного:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^3-2x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+3)} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}.$$

2) Числителем дроби является функция $f(x) = x^3 - 2x - 3$, знаменателем дроби – функция $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Так как $f(2) = 1$, а $g(2) = 0$, то теорему о пределе частного применять нельзя. Но, так как функция

Репозиторий ВГУ

$g(x) = x^2 - 3x + 2$ – бесконечно малая при $x \to 2$ функция, а $f(x) = x^3 - 2x - 3$ – ограниченная функция, отделенная от нуля при $x \to 2$, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-3}{x^2-3x+2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty.$$

3) Учитывая, что $\frac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$, получим $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3 - x^2 - 3) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3(2 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^3 + 2x^2 + x) = \infty$, следовательно, имеет место неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, для раскрытия которой в числителе и знаменателе дроби вынесем за скобки x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-6}{3x^3+2x^2+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3})}{x^3(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3}.$$

4) Так как $f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$, $g(2) = 2^2 - 4 = 0$, то имеет место неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x+2)} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

5) Под знаком предела имеем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Умножим числитель и знаменатель на выражение сопряжённое выражению $\sqrt{1-x} - 1$ и выражение, дополняющее $\sqrt[3]{x+1} - 1$ до формулы разности кубов. Тогда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt[3]{x+1}-1)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)(\sqrt{1-x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{((1-x)-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{((x+1)-1)(\sqrt{1-x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)} = -\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{(\sqrt{1-x}+1)} = -\frac{3}{2}.$$

Репозиторий ВГУ

6) Под знаком предела имеет место неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, раскроем ее с помощью первого замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x} = |\ 7x = t,\ t\to 0| = \lim_{t\to 0}\frac{7\sin t}{t} = 7.$$

7) Имеем неопределенность (1^{∞}). Для раскрытия этой неопределённости используется второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\left(-\frac{2}{x}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

8) Имеет место неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Преобразуем выражение так, чтобы можно было использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}) =$$

$$= \log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

II. Практические задания

1. Докажите, пользуясь определением предела функции в точке и на бесконечности, что:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(1-2x) = -3$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-5) = 4$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x) = 0$;

4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{2x-8} = \infty$; 5) $\lim\limits_{x\to +0}\ln x = -\infty$; 6) $\lim\limits_{x\to -\infty}2^x = 0$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}2^x = +\infty$.

2. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{7x^2+2x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x-x^2}{3-2x-3x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+1}{10x^2+2x-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{1+x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+x-1}{10x^4+2x^3-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-1}{\sqrt{4x^6+x+1}}$;

Репозиторий ВГУ

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1} - \sqrt[3]{x^2 - x}}{\sqrt[4]{x^4+x} - \sqrt[5]{x^4+1}}$;

8) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{2x^3-1}}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-2} - \sqrt{x^4-2x^2-2}\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^4+2x^2-1} - 3x^2\right)$;

11) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3x^2-5x-2}$;

12) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^2+x+6}{x^2-6x+9}$;

13) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{1+8x^3}{20x^2+8x-1}$

14) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{2x-x^2} + \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3-3}{x^3+x^2-x-1}$;

16) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}$;

17) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{6-x}-1}{x^2-25}$;

18) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}-1}$;

19) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{x+2}-2}$;

20) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{4+x}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

21) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x+6}-2}$;

22) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x^2-4}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

24) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{4x^2}$;

26) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{x^2}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{x}$;

29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$;

30) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin \frac{x}{2}}{(x-\pi)^2}$;

31) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin 3\pi x}{1-x^2}$;

32) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 3x}{1+\cos 3x}$;

33) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{3x-\pi}{1-2\cos x}$;

34) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{2-x}-1}$;

35) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-3x^3\right)^{\frac{1}{2x^3}}$;

36) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2x-3}\right)^{5x}$;

37) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)^{x^2}$;

38) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{3x+1}\right)^{x^2}$;

39) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1-3x}{2-3x}\right)^{2x}$;

40) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

Репозиторий ВГУ

41) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)(\ln\,(3x+1)-\ln\,(3x-2))$; 42) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\ln(x-1)}$;

43) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$; 44) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\cos 2x}$.

6. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Доказать, что* $\operatorname{tg} x \sim x$ *при* $x\to 0$.

***Решение*.** Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x\to 0$.

***Пример* 2.** *Даны две бесконечно малые при* $x\to 0$ *функции* $\alpha(x)=x^2\sin^2 x$ *и* $\beta(x)=x\operatorname{tg} x$. *Доказать*, что $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2 x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin^2 x = 1\cdot 0 = 0,$$

то функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем функция $\beta(x)$, т.е. $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

***Пример* 3.** *Найти* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-4}$, *используя эквивалентные бесконечно малые функции.*

Решение. Так как $\operatorname{tg} x\sim x$ при $x\to 0$, то $\operatorname{tg}(x-2)\sim(x-2)$ при $x\to 2$. Следовательно:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

II. Практические задания

1. Какие из следующих пар функций являются эквивалентными при $x\to 0$:

1) $f(x)=\sin^2 x^2$, $g(x)=x^4$; 2) $f(x)=\sqrt{1+2x}-1$, $g(x)=x$;

3) $f(x)=1-\cos x$, $g(x)=x^2$; 4) $f(x)=\sin\left(\sqrt{1+x}-1\right)$, $g(x)=x$.

Репозиторий ВГУ

2. Определить, какие из нижеследующих функций при $x \to 0$ будут бесконечно малыми одного порядка, высшего порядка, низшего порядка по сравнению с x:

1) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;
2) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$;
3) $f(x) = \sqrt{4 + x} - 2$;
4) $f(x) = \cos 5x - \cos 3x$;
5) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$;
6) $f(x) = \dfrac{2^{\sin x} - 1}{\ln 2}$.

3. Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x + \operatorname{arctg} 2x}{\ln(1+6x)}$;
2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x \ln(1+x)}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos x}{\arcsin x^2}$;
4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg}(1-x) + \sin(x-1)^2}{x^2 - 1}$.

7. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Найти односторонние пределы функции* $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}$ в точке $x = 1$. *Существует ли предел функции в точке* $x = 1$?

Решение. Найдем правый предел функции $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}$ в точке $x = 1$. Для этого вначале рассмотрим функцию $z = \dfrac{1}{x-1}$. Так как при $x \to 1+0$ (при $x \to 1$ справа) функция $x - 1 \to 0$, оставаясь больше нуля, то, $\lim\limits_{x\to 1+0} z = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$. Тогда,

$$\lim_{x\to 1+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1} = \lim_{z\to +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично находим левый предел функции:

$$\lim_{x\to 1-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1} = \lim_{z\to -\infty} \operatorname{arctg} z = -\frac{\pi}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1+0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$, то предел функции $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}$ в точке $x = 1$ не существует.

Репозиторий ВГУ

***Пример* 2.** Исследовать функции

1) $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$; 2) $y=\begin{cases} x, & \text{если } x<0, \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } 0\le x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } x\ge\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

на непрерывность и определить характер точек разрыва.

Решение. 1) $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$. Данная функция определена на множестве $(-\infty, 2)\cup(2, 3)\cup(3, +\infty)$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна на всей области определения.

В точках $x=2$ и $x=3$ функция не определена. Следовательно, эти точки являются точками разрыва.

Определим характер точки разрыва $x=2$. Для этого найдем левый и правый пределы функции в данной точке:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-9}{(x-2)(x-3)}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-9}{(x-2)(x-3)}=-\infty.$$

Следовательно, точка $x=2$ – точка разрыва второго рода.

Рассмотрим точку $x=3$. Найдем предел функции в этой точке.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=6.$$

Так как в точке $x=3$ существует предел функции, а функция в этой точке не определена, то $x=3$ – точка устранимого разрыва.

Итак, функция непрерывна на интервалах $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$, $x=2$ – точка разрыва второго рода, $x=3$ – точка устранимого разрыва

2) Областью определения функции является вся числовая прямая. Данная функция будет элементарной на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$, следовательно, она непрерывна на этих интервалах. Точками возможного разрыва являются точки $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$.

Найдем левый и правый пределы функции в точке $x=0$:

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}x=0, \qquad \lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 0=0,$$

Репозиторий ВГУ

так как левый и правый пределы функции равны и $f(0) = 0$, то данная точка – это точка непрерывности функции.

Найдем левый и правый пределы функции в точке $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = +\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} 1 = 1.$$

Так как левый предел функции равен $-\infty$, то точка $x = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва второго рода.

Значит, функция непрерывна на интервалах $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$. Точка $x = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва второго рода.

II. Практические задания

1. Найти левый и правый пределы функции и исследовать функцию на непрерывность в указанных точках. Существуют ли пределы функции в данных точках?

1) $y = \frac{|x|}{x}$, $x_0 = 0$; 2) $y = \frac{x^2}{|x|}$, $x_0 = 0$;

3) $y = \frac{\sin x}{x(x - \frac{\pi}{2})}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$; 4) $y = \frac{|\sin x|}{x}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

2. Доказать, что в любой точке $x \in (-\infty; \infty)$ функция Дирихле $y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ – рациональное число} \end{cases}$ имеет точку разрыва второго рода.

3. Исследовать на непрерывность функции:

1) $y = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 4}$; 2) $y = e^{1/(x-1)}$; 3) $y = \frac{\sin x}{x}$;

4) $y = \cos\frac{1}{x}$; 5) $y = x \cdot \cos\frac{1}{x} 4$; 6) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

7) $y = \frac{1}{\ln|x|}$; 7) $y = \{x\}$; 8) $y = [x]$.

3. Исследуйте на непрерывность, укажите тип точек разрыва, схематически постройте графики следующих функций:

1) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$; 2) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$;

Репозиторий ВГУ

3) $y=\begin{cases} x, & \text{если } x<0, \\ \sin x, & \text{если } 0<x<\pi, \\ (x-\pi)^2+1, & \text{если } x\ge\pi; \end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} x, & \text{если } x<0, \\ 2^x, & \text{если } 0\le x<3, \\ 3-x, & \text{если } x\ge 3; \end{cases}$

5) $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$; 6) $y = \ln|x|$;

7) $y=\dfrac{|x|}{x}$; 8) $y=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

8. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Исходя из определения, найти производную функции* $y=x(x^2-1)$.

Решение. Найдем приращение $\Delta f(x)$ функции при переходе из точки x в точку $x+\Delta x$. Так как $f(x)=x(x^2-1)$, то $f(x+\Delta x)=$ $=(x+\Delta x)((x+\Delta x)^2-1)$. Тогда $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=$ $=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2-\Delta x+(\Delta x)^3$.

Составим отношение

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot\Delta x^2+\Delta x^3-\Delta x}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x-1+\Delta x^2.$$

По определению:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x-1+\Delta x^2)=3x^2-1.$$

***Пример* 2.** *Найти производные следующих функций*:

1) $y=3x^2+2\sqrt{x^3}+\dfrac{1}{x}-5$; 2) $y=x\cdot\sin x$; 3) $y=\dfrac{2^{x+1}-3^{x+2}}{x^2}$.

Решение. 1) Воспользуемся тем, что $(Cu)'=Cu'$, $(u+v)'=u'+v'$, тогда

$$y'=(3x^2+2\sqrt{x^3}+\frac{1}{x}-5)'=3(x^2)'+2(x^{\frac{3}{2}})'+(x^{-1})'-(5)'=$$

$$=6x+3(x)^{\frac{1}{2}}-x^{-2}+0=6x+3\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}.$$

2) Воспользуемся формулой производной произведения $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$.

$$y'=(x\cdot\sin x)'=x'\cdot\sin x+x\cdot(\sin x)'=\sin x+x\cdot\cos x.$$

3) Воспользуемся формулой производной частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$.

Репозиторий ВГУ

$$y' = \left(\frac{2^{x+1}}{x^2}\right)' = \left(\frac{2 \cdot 2^x}{x^2}\right)' = 2\left(\frac{2^x}{x^2}\right)' = 2\frac{(2^x)' \cdot x^2 - (x^2)'(2^x)}{x^4} =$$

$$= 2\frac{2^x \ln 2 \cdot x^2 - 2x \cdot 2^x}{x^4} = \frac{2 \cdot 2^x \, x(x \cdot \ln 2 - 2)}{x^4} = \frac{2^{x+1}(x \cdot \ln 2 - 2)}{x^3}.$$

***Пример* 3**. *Составить уравнение касательной к графику функции* $y = x \cdot \ln x$, *которая параллельна прямой* $y = x - \frac{1}{2}$.

Решение. Угловые коэффициенты параллельных прямых равны. У данной прямой $k_1 = 1$, следовательно, угловой коэффициент искомой касательной $k_2 = 1$. Из геометрического смысла производной следует, что $k_2 = y'(x_0) = (x \cdot \ln x)'\big|_{x = x_0} = \ln(x_0) + 1$. Следовательно, $k_2 = \ln(x_0) + 1 = 1$, где x_0 – абсцисса точки касания. Решая уравнение, получим $x_0 = 1$. Тогда $y_0 = y(1) = 0$.

Зная точку касания $M_0(1, 0)$ и угловой коэффициент касательной, запишем уравнение касательной по формуле

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad \text{т.е.} \quad y = x - 1.$$

***Пример* 4 .** *Определить среднюю скорость движения тела за промежуток времени* $2 \le t \le 2 + \Delta t$, *если закон движения задан формулой* $s = t^2 - t + 1$, *где t – время (в секундах), s – расстояние (в метрах). Подсчитать среднюю скорость для: а)* $\Delta t = 0{,}01$ *с; б)* $\Delta t = 0{,}001$ *с; в)* $\Delta t = 0{,}0001$ *с. Найти мгновенную скорость в момент времени* $t_0 = 2$ с.

Решение. Известно, что $v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, $v_{мгн} = s'(t_0)$.

Учитывая, что

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = ((t + \Delta t)^2 - (t + \Delta t) + 1)) - (t^2 - t + 1) =$$
$$= 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - \Delta t = (2t - 1)\Delta t + (\Delta t)^2,$$

получим

$$\upsilon_{ср} = \frac{(2t - 1)\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 2t - 1 + \Delta t.$$

Результаты расчётов занесём в таблицу

t	Δt	$2t - 1$	$\upsilon_{ср}$
2	0,1	3	3,1
2	0,01	3	3,01
2	0,001	3	3,001
2	0,0001	3	3,0001

Репозиторий ВГУ

Из рассмотрения таблицы видно, что для $t = 2$ с при $\Delta t \to 0$, средняя скорость $\upsilon_{ср}$ стремится к скорости равной $v_{мгн} = s'(2) = (t^2 - t + 1)'\big|_{t=2} = (2t-1)\big|_{t=2} = 3$ м/с.

II. Практические задания

1. Найти приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0, если:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = 3$;
2) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = \frac{1}{2}$;
3) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 3$;
4). $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

2. Пользуясь определением производной, найдите производную функции в указанной точке:

1) $y = x^2 - 4x + 2$ в точке $x_0 = 1$;
2) $y = x^3 - 5x$ в точке x_0;
3) $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 9$;
4) $y = \ln x$ в точке $x_0 = 1$;
5) $y = e^x$ в точке $x_0 = 0$;
6) $y = \sin 2x$ в точке x_0.

3. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Найти производную этой функции в точке $x_0 = 0$.

4. Пользуясь таблицей производных и общими правилами нахождения производных, найти производные данных функций:

1) $y = x^3 + 5x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$;
2) $y = \frac{1+x^2}{1-x^3}$;
3) $y = x^2(x + 3\sqrt{x})$;
4) $y = \frac{x - 5x^3}{6x\sqrt{x} + 1}$;
5) $y = \frac{\ln x^2 + \ln 5}{x^2}$;
6) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}\sin x}{2^x}$;
7) $y = \frac{\operatorname{tg} x + ctg\, x}{\sin x \cdot \cos x}$;
8) $y = \operatorname{arctg} x(\arcsin x + \arccos x)$.

5. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если

1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = 1$;
3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$;
4) $f(x) = arctgx$, $x_0 = 1$.

6. В каких точках касательная к параболе $y = -x^2 + 2x - 3$ наклонена к оси Ox под углом: *а*) $0°$; *б*) $30°$; *в*) $45°$?

Репозиторий ВГУ

7. В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ параллельна прямой: 1) $y = x + 2$; 2) $y = 2x - 5$?

8. Найти точки, в которых касательные к кривым $y = x^3 - x - 1$ и $y = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны.

9. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (2; -1) и касающейся параболы $y = x^2 - 1$.

10. Тело движется прямолинейно по закону $s = 1 + 3t + 4t^2$. Определить его скорость в момент времени $t = 2$.

11. Расстояние *s*, пройденное телом за *t с* определяется по формуле $s = t^3 + 3t^2 - 1$. Найти скорость и ускорение при $t = 4$.

9. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Найти производные следующих функций*:

1) $y = \dfrac{3}{(x+5)^2} - \sqrt[3]{2x^3 + 5x + 1}$; 2) $y = \sin^4 5x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3$; 3) $y = \dfrac{e^{tg\,4x}}{(5x-8)}$.

Решение. 1) Воспользуемся тем, что $(f(u(x)))' = f'_u \cdot u'(x)$, а также формулой дифференцирования $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$. Тогда

$$y' = \left(\frac{3}{(x+5)^2}\right)' + (\sqrt[3]{2x^3 + 5x + 1})' = (3(x+5)^{-2})' + ((2x^3 + 5x + 1)^{1/3})' =$$

$$= -6(x+5)^{-3}(x+5)' + \frac{1}{3}(2x^3 + 5x + 1)^{-2/3}(2x^3 + 5x + 1)' =$$

$$= -\frac{6}{(x+5)^3} + \frac{6x^2 + 5}{3\sqrt[3]{(2x^3 + 5x + 1)^2}}.$$

2) $y' = (\sin^4 5x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3)' = (\sin^4 5x)' \cdot \operatorname{arctg} 2x^3 + \sin^4 5x \cdot (\operatorname{arctg} 2x^3)' =$

$$= 4\sin^3 5x \cdot (\sin 5x)' \cdot \operatorname{arctg} 2x^3 + \sin^4 5x \cdot \frac{1}{1 + 4x^6} \cdot (2x^3)' =$$

$$= 20\sin^3 5x \cdot \cos 5x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3 + \frac{6x^2 \cdot \sin^4 5x}{1 + 4x^6}.$$

3) $y' = \left(\dfrac{e^{\operatorname{tg} 4x}}{(5x - 8)^3}\right)' = \dfrac{(e^{\operatorname{tg} 4x})'(5x-8)^3 - e^{\operatorname{tg} 4x}((5x-8)^3)'}{(5x-8)^6} =$

$$= \frac{e^{\operatorname{tg} 4x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 4x} \cdot 4(5x-8)^3 - e^{\operatorname{tg} 4x} \cdot 3(5x-8)^2 \cdot 5}{(5x-8)^6} = \frac{e^{tg\,4x}(4(5x-8) - 15\cos^2 4x)}{\cos^2 x\,(5x-8)^4}.$$

***Пример* 2.** *Найти производную функции*

Репозиторий ВГУ

$$y = (\sin x)^x. \tag{1}$$

Решение. Прологарифмируем равенство (1): $\ln y = x \ln(\sin x)$, и найдем производные от обеих частей полученного равенства:

$$(\ln y)' = (x \ln \sin x)', \quad \text{или} \quad \frac{y'}{y} = \ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Тогда $y' = (\sin x)^x \left(\ln(\sin x) + x\dfrac{\cos x}{\sin x} \right)$.

II. Практические задания

Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1. $y = (1 + 2x^3)^5$;
2. $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 1}$;
3. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(4x+3)^2}}$;
4. $y = \sin 4x$;
5. $y = \cos^2 2x$;
6. $y = x \cdot \mathrm{tg}^3 6x$;
7. $y = \dfrac{tg\ x^2}{\sqrt{x^3 + 1}}$;
8. $y = \sqrt{\sin^2 3x + 1}$;
9. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$;
10. $y = \cos x^2 \cdot \ln^2(1 + 2x)$;
11. $y = e^{2x} \ln^3 (4x - 1)$;
12. $y = \dfrac{x^2 - 1}{2^{3x^2}}$;
13. $y = \ln(\ln(\ln x))$;
14. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;
15. $y = \ln^3 \sin^2(5x + 1)$;
16. $y = \ln \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 + x^2}}$;
17. $y = \sin^3 x^3 - e^{x^2} \cos x$;
18. $y = 10^{\cos 3x} \cdot \mathrm{arcctg}(5x^3 - 2x + 1)$;
19. $y = xe^{arctg^3 \sqrt{2x+3}}$;
20. $y = \arccos^3(2x^5 + 7) \cdot \mathrm{ctg} 7x^4$;
21. $y = x^x$;
22. $y = (x^2 + 1)^{2x}$;
23. $y = x^{\sin x}$;
24. $y = x^{x^x}$;
25. $y = (\sin x)^{\frac{1}{x}}$;
26. $y = (x + 1)^{\frac{1}{\sin x}}$.

10. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Доказать, что функция* $y = x^3 + 2x$ *дифференцируема на всей числовой оси. Чему равен дифференциал функции*?

Репозиторий ВГУ

Решение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если приращение функции в этой точке представимо в виде $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$, где A – постоянная, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая высшего порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

Зафиксируем произвольную точку x и вычислим приращение функции в этой точке.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x) - (x^3 + 2x) =$$
$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - x^3 - 2x =$$
$$= (3x^2 + 2)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 .$$

Функция $\alpha(\Delta x) = 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ при фиксированном x является бесконечно малой высшего порядка, чем Δx, при $\Delta x \to 0$. Функция $(3x^2 + 2)\Delta x$ линейна относительно Δx. Следовательно, $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$, а это и означает, что функция $y = x^3 + 2x$ дифференцируема при любом действительном x и $dy = (3x^2 + 2)\Delta x$.

Пример 2. *Найти дифференциал функции* $y = \cos(\ln x)$.

Решение. Дифференциал функции равен: $dy = y'dx$. Значит,

$$dy = (\cos(\ln x))'dx = -\sin(\ln x)\cdot(\ln x)'\,dx = -\frac{\sin(\ln x)}{x}dx.$$

Пример 3. *Заменяя приращение функции её дифференциалом, найти приближённое значение* $\sqrt{0{,}98}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{1+x}$. Так как $y(0) = 1$, $y(-0{,}02) = \sqrt{0{,}98}$, $y' = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $y'(0) = \frac{1}{2}$, то, воспользовавшись формулой $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, получаем

$$\sqrt{0{,}98} = f(-0{,}02) \approx f(0) + f'(0)(-0{,}02) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

II. Практические задания

1. Доказать, что функции: 1) $y = 2x^2 - x + 3$; 2) $y = x^3 - x + 1$ дифференцируемы на всей числовой оси.

2. Доказать, что функция $y = \sqrt{x-2}$ не дифференцируема в точке $x = 2$.

3. Найти дифференциалы следующих функций:

1) $y = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^3+2}$;

3) $y = (x^2 + x + 3)\,\mathrm{tg}^2 x$; 4) $y = \sin 3x + \sqrt[3]{2x+1}$;

Репозиторий ВГУ

5) $y = x\cdot \ln \sin^3(\pi - x)$; 6) $y = 5^{\sqrt{\sin x^2}}$;

7) $y = \dfrac{\arcsin x}{\ln(1 - x^2)}$; 8) $y = (\sin x)^x$;

9) $y = x^{\cos x}$; 10) $y = (\mathrm{tg}\, x)^{\ln x}$.

5. Пользуясь понятием дифференциала, найти приближённое значение функции $y = x^3 + 3x^5 - 2x^2 - 3x + 5$ при $x = 1{,}001$.

6. Вычислить приближённые значения:
1) $\sqrt[3]{27{,}01}$; 2) $\sin 29°$; 3) $\cos 151°$; 4) $\arcsin 0{,}501$; 5) $\mathrm{tg}\, 45°4'$.

11. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

I. Примеры решения задач

***Пример* 1.** *Найти* $y'''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, *если* $y = 5 - 4\cos^2 x$.

***Решение*.** Последовательно находим:

$y' = 8\cos x \cdot \sin x = 4\sin 2x$; $y'' = 8\cos 2x$; $y''' = -16\sin 2x$.

Тогда: $y'''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -16\sin\dfrac{\pi}{3} = -16\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -8\sqrt{3}$.

***Пример* 2.** *Пользуясь формулой Лейбница, найти пятую производную от функции* $y = x^5 e^{2x}$.

***Решение*:** Формула Лейбница имеет вид

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(k)} \cdot v^{(n-k)} .$$

Пусть $u = x^5$, $v = e^{2x}$, тогда $(x^5 e^{2x})^{(5)} = \sum_{k=0}^{5} C_5^k (x^5)^{(k)} \cdot (e^{2x})^{(5-k)}$.

Найдём: $u' = 5x^4$, $u'' = 20x^3$, $u''' = 60x^2$, $u^{(4)} = 120x$, $u^{(5)} = 120$.

$v' = 2e^{2x}$, $v'' = 4e^{2x}$, $v''' = 8e^{2x}$, $v^{(4)} = 16e^{2x}$, $v^{(5)} = 32e^{2x}$.

Подставим в формулу Лейбница, получим

$$y^{(5)} = uv^{(5)} + 5u'v^{(4)} + 10u''v''' + 10u'''v'' + 5u^{(4)}v' + u^{(5)}v =$$
$$= 32x^5\cdot e^{2x} + 25x^4 \cdot 16e^{2x} + 10\cdot 20x^3\cdot 8e^{2x} + 10\cdot 60x^2\cdot 4e^{2x} + 5\cdot 120x\cdot 2e^{2x} +$$
$$+ 120e^{2x} = e^{2x}(32x^5+400x^4+1600x^3+2400x^2+1200x+120).$$

Репозиторий ВГУ

***Пример* 3.** *Найти дифференциалы* dy *и* d^2y *от функции* $y = xe^{-2x}$ *в случае, когда*: 1) x – *независимая переменная*; 2) x – *функция от другой независимой переменной.*

Решение. 1) Пусть x – независимая переменная, тогда $dy = y'dx$,

$$dy = (xe^{-2x})'dx = (e^{-2x} - 2xe^{-2x})dx = (1-2x)e^{-2x}dx;$$

$$d^2y = y''dx^2;$$

$$y'' = ((1-2x)e^{-2x})' = -2e^{-2x} - 2(1-2x)e^{-2x} = (4x-4)e^{-2x};$$

$$d^2y = (4x-4)e^{-2x}dx^2.$$

2. Пусть x – функция от другой независимой переменной. Тогда

$$dy = y'dx = (1-2x)e^{-2x}dx.$$

В данном случае под dx мы понимаем не приращение независимой переменной x, а дифференциал функции x.

$$d^2y = d(dy) = d((1-2x)e^{-2x}dx) = d((1-2x)e^{-2x})\cdot dx +$$
$$+ (1-2x)e^{-2x}d(dx) = (4x-4)e^{-2x}dx^2 + (1-2x)e^{-2x}d^2x.$$

II. Практические задания

1. Найти производную второго порядка:

1) $y = x^2 + 13x + 1$; 2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

3) $y = \cos^2 x$; 4) $y = \mathrm{arctg}\,(x + \sqrt{x^2+1})$.

2. Найти производные указанного порядка:

1) $(e^{-x^2})^{(3)}$; 2) $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^{(6)}$; 3) $\left(\sqrt{x+1}\right)^{(10)}$;

4) $(x\,e^{5x})^{(10)}$; 5) $(x^2 \sin 2x)^{(10)}$; 6) $(x^2 \cos 3x)^{(15)}$.

3. Найдите $y^{(n)}$, если:

1) $y = \sqrt{2x-3}$; 2) $y = (1+x)^n$; 3) $y = x^3 + 2x + e^{2x}$;

4) $y = \ln(3x-1)$; 5) $y = \cos x$; 6) $y = \sin^2 x$.

4. Определить, удовлетворяет ли функция $y = y(x)$ заданному уравнению:

функция	уравнение
1) $y = 1 + \cos(e^x) + \sin(e^x)$;	$y'' - y' + e^{2x}y = 0$;
2) $y = e^{10\arcsin x}$;	$(1-x^2)y'' - xy' - 100y = 0$;
3) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$;	$y'' + y = 0$.

Репозиторий ВГУ

5. Найти дифференциалы указанного порядка от следующих функций в точке x_0:

1) $y = \sqrt[3]{x^2+4}$, найти $d^2y(2)$; 2) $y = \sin^3 2x$, найти $d^2y\left(\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+3}\right)$, найти $d^3y(1)$; 4) $y = \sin 3x$, найти $d^5y\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

6. Даны функции:

1) $y = \ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; 2) $y = (x+1)e^{-3x}$; 3) $y = \sin x^2$; 4) $y = x^2 \sin x$.

Найти d^2y при условии, что: 1) x – независимая переменная; 2) x – функция от другой переменной.

12. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

I. Примеры решения задач

Пример 1. *Найти первую и вторую производные функции $y = f(x)$, если эта функция задана параметрически системой уравнений* $\begin{cases} x = 5t^3 + t, \\ y = 4t^2 - 1. \end{cases}$

Решение. Учитывая, что производная функции, заданной параметрически, находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, получаем $y'_x = \dfrac{8t}{15t^2} = \dfrac{8}{15t}$.

Запишем производную y'_x как функцию, заданную параметрически $\begin{cases} x = 5t^3 + t, \\ y'_x = \dfrac{8}{15t}. \end{cases}$ Найдем y''_{x^2}, как производную полученной функции

$$y''_{x^2} = \left(\frac{8}{15t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -\frac{8}{15t^2}\cdot\frac{1}{15t^2} = -\frac{8}{225t^4}.$$

Пример 2. *Найти y' и y'', если функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $y = 1 + xe^y$.*

Решение. Продифференцируем обе части равенства, полагая, что $y = f(x)$. Получаем $y' = e^y + xe^y y'$.

Выражаем y': $y' = \dfrac{e^y}{1 - xe^y}$. Так как из условия следует, что $xe^y = y - 1$, то $y' = \dfrac{e^y}{2-y}$.

$$y'' = \left(\frac{e^y}{2-y}\right)' = \frac{e^y y' + y' e^y}{(2-y)^2} = \frac{2e^y y'}{(2-y)^2} = 2e^y \frac{e^y}{2-y} : (2-y)^2 = \frac{2e^{2y}}{(2-y)^3}.$$

II. Практические задания

1. Найти $y'(x)$, $y''(x)$ для функций $y = y(x)$, заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $0 < t < \pi$;

2) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases}$ $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

3) $\begin{cases} x = e^{t^2}, \\ y = t^3, \end{cases}$ $0 < t < +\infty$;

4) $\begin{cases} x = \ln\cos t, \\ y = \ln\sin t, \end{cases}$ $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

5) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2), \end{cases}$ $-1 < t < 1$;

6) $\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,3t, \\ y = a\,\mathrm{sh}\,3t, \end{cases}$ $-\infty < t < +\infty$;

7) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = t^3, \end{cases}$ $0 < t < 1$;

8) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $0 < t < 2\pi$.

2. Найти x'_y для функций $x = x(y)$, заданных параметрически системами уравнений:

1) $\begin{cases} x = t^3 + 2t + t, \\ y = -t^3 + 3t - 2, \end{cases}$ $-1 < t < 1$;

2) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t}, \\ y = \mathrm{tg}\, t, \end{cases}$ $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Существуют ли функции $y = y(x)$, заданные параметрически этими системами?

3. Найти $y'(x)$, $y''(x)$ для функций $y = y(x)$, заданных параметрически в точке $M_0(x_0, y_0)$:

1) $x = (t^2 + 1)e^t$, $y = t^2 e^{2t}$, $M_0(1, 0)$; 2) $x = \dfrac{2t - t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$, $M_0(0, 4)$.

4. Доказать, что функции $y = y(x)$, заданные параметрически, удовлетворяют заданным уравнениям :

1) $x = \dfrac{1}{t^2}(\ln t + C)$, $y = (\ln t + C) + \dfrac{1}{t}$, $\qquad y = 2y'x + \dfrac{1}{y'}$;

2) $x = \ln t - \arcsin t + C$, $y = t + \sqrt{1-t^2}$, $\qquad y = y' + \sqrt{1-(y')^2}$;

3) $x = t^3 + t$, $y = \dfrac{3}{4}t^4 + \dfrac{1}{2}t^2 + 1$, $\qquad y''(1 + 3y'^2) = 1$;

4) $x = e^t\cos t$, $y = e^t \sin t$, $-\dfrac{\pi}{4} < t < \dfrac{\pi}{4}$, $\qquad (x-y)^2 y'' = 2(xy' - y)$.

5. Для функций $y = y(x)$, заданных неявно, найти y' и y'':

1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $x^2 = y - \mathrm{arctg}\, y$;

Репозиторий ВГУ

4) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = C$; 5) $y^2 = e^{x^2 + y^2}$; 6) $\ln y - \frac{x}{y} = 1$.

6. Написать уравнение касательной к кривой, заданной параметрически или неявно, в данной точке:

1) $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$, в точке $x = 0$ ($y > -3$);

2) $x^y = y^x$ в точке (1, 1);

3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, в точке $(a(\frac{\pi}{2} - 1), a)$;

4) $x = te^t$, $y = te^{-t}$, ($t > -1$), в точке $t = t_0$.

Репозиторий ВГУ

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. ***Найти область определения функции y = f (x).***

вариант		вариант	
1.	$y=\sqrt{16-x^2}\,\log_2(x^2-5x+6)$;	16.	$y=\lg\dfrac{x+6}{x^2-4x+3}$;
2.	$y=\sqrt{\log_2(x^2-3)}$;	17.	$y=\arccos\dfrac{2}{2+\sin x}$;
3.	$y=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{4-3x-x^2}}$;	18.	$y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$;
4.	$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$;	19.	$y=\sqrt{\ln\left(2-\sqrt{x-1}\right)}$;
5.	$y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{x-2}$;	20.	$y=\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert-2\lvert x-1\rvert}}$;
6.	$y=\lg(1-\lg(x^2-5x+16))$;	21.	$y=\lg\dfrac{2x^2+x-1}{1-x}$;
7.	$y=\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert-x}}$;	22.	$y=\sqrt{9^x-2\cdot 3^x-63}$
8.	$y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$;	23.	$y=\dfrac{1}{\sin x}+\sqrt{6x-x^2}$;
9.	$y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$;	24.	$y=\dfrac{\lg\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-x-2}}$;
10.	$y=\arccos\dfrac{2x}{x^2+3}$;	25.	$y=\lg(\operatorname{arctg} x)+\sqrt{16-x^2}$;
11.	$y=\arcsin\dfrac{x^2-2x+2}{x-2}$;	26.	$y=\sqrt{\dfrac{\log_{0,5}(x^2-3)}{x^2(x-5)^2}}$;
12.	$y=\sqrt{\dfrac{16-16x+4x^2}{1-x}}+(x+4)^{-\frac{1}{6}}$;	27.	$y=\sqrt{25^x+5^{x+1}-50}-\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$;
13.	$y=\sqrt{\log_{0,5}\dfrac{x}{x^2-1}}$;	28.	$y=\dfrac{\lg x}{\arcsin\lvert x-3\rvert}$;
14.	$y=\lg\sin x+\sqrt{16-x^2}$;	29.	$y=\dfrac{\sqrt{8+2x-x^2}}{\arccos(x-2)}$;

Репозиторий ВГУ

15.	$y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;	30.	$y=\sqrt{\dfrac{x^4-9x^2}{x^2-3x-10}}$.

4. ***Найдите указанные пределы.***

вари-ант	*а*	*б*	*в*
1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^4+1}{x^5-1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-1}{x^4+1}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-x}$;
2.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^3}{2x^3-x^2+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3+1)(x^3-1)}{1-x^7}$	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^6-3x^4+3x^2-9}$;
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2}{x^2-5}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^6}{(x^2-2)(x^2+2)}$;	$\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;
4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100-0{,}1x^{10}}{0{,}01x^{10}-10}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^5-1)(x^5+1)}{(x^3+1)^3}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$;
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2(x^3+5)}{5-x^5}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{(x^2+1)(x^2+2)}$;	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+8}{x^2-3x+2}$;
6.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{3-2x}\right)^3$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^7-1}{1-x^8}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$;
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2}{1+(2x)^2}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^{10}-1}{1-0{,}01x^{11}}$;	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^3+8}$;
8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2}{3+\frac{x^2}{4}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3-2)(x^5+1)}{(x^2-1)(x^4-1)}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{3x^2-x-2}$;
9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{(2x^2-1)^2}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-100x^2+1}{100x^4+15x}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-4x+3}$;
10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3-x)^2}{3x^6+x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x+2)^3}{(x+1)^3+(x-2)^3}$;	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^3+27}$;
11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{5-x}\right)^4$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-5x+2}\right)$;
12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}-5x}{x^{10}-10x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}-5x}{(x^2-1)^6}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-3x^2}{x^6-1}$;
13.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{x^3+3x-7}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(x^2+1)}{(x^2-7)^2}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^4-1}$;

Репозиторий ВГУ

14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{1+2x^2}\right)^3;$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^3-1}-x\right);$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x-6}{x^3-8};$
15.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4-x^3-1}{x^3}-x\right);$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{(x^2-7)^2};$	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{2x^2+3x-9};$
16.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4-3}}{x^2-1};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{20}+(x+1)^{30}}{(x+1)^{50}};$	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{1+x^3};$
17.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{100}-x^{10}+1}{x^{10}(x^{100}+1)};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^8-2}}{3x^3+1};$	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{125-x^3}{2x^2-9x-5};$
18.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-3x}{1+4x}\right)^2;$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2-1};$	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{x^2-\frac{1}{9}}{3x^2-4x+1};$
19.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{1+x-3x^2};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-5}}{x+1};$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{3x^2-x-2};$
20.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)^{20}-1}{(x^2+1)^{10}};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^7-1}}{2x+3};$	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+2}{5x^2-x-6}.$
21.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{15}-2x^{10}+1}{x^{15}+2x^{11}+1};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{15}-2x^{10}+1}{x^{12}+2x^{11}+1};$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2+x-1};$
22.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2+3x-x^3}{2x^3-x^2+3};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^4+1)(x^4-1)}{1-x^9};$	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^3-3x}{x^6-3x^4+x^2-3};$
23.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^{10}+1)^2}{x^{20}-5};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^{16}}{(x^2-2)(x^{10}+2)};$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^3-2x^2+x-2};$
24.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{200-x^{10}}{x^{10}-10x^5+1};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^6-1)(x^5+2)}{x^{13}+1};$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+2x-1};$
25.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(x^3+5)^3}{5-x^{11}};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^4-1)^3}{(x^6+1)(x^5+2)};$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-5x+6};$
26.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x^3+x-1}{x^4-x^5};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x^3+x-1}{x^4-x^3};$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-x^3+x-1}{x^4-x^3};$
27.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^{10}-1)^3}{1-x^{30}};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^9+1}{1+(2x)^8};$	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^3+1};$
28.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+27x-27}{x^3-27};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{x^4-81};$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{x^3-27};$
29.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{3-2x+5x^2-x^3};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-1)(x^4+1)}{(x^3-2)(x^4-1)};$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-17x^2+16}{x^2-8x+16};$

Репозиторий ВГУ

30.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)^4-(x+2)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x+1)^3+(x-1)^3}$;	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^3+27}$.

5. ***Найдите пределы функций.***

вариант	*а*	*б*
1.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{8+x^2}-3}{\sqrt[3]{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$;
2.	$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{x^2-x}$;
3.	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;	$\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{(1-\cos\alpha)}}$;
4.	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-3}{\sqrt[3]{x+6}-2}$;	$\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$;
5.	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+\sin 5x}{x}$;
6.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin x-1}$;
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\cos x-\cos 7x}$;
8.	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\pi-x}$;
9.	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{2x+1}-3}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\arcsin 3x}$;
10.	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{\sqrt{x+4}-1}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$;
11.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}$;
12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$;
13.	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$;

Репозиторий ВГУ

14.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+2}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2+1}\ -1}$;	$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;
15.	$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}\ -3}{2+\sqrt[3]{x}}$;	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$;
16.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}\ -\sqrt[3]{1-x}}{x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$;
17.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^4-x^2-12}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\mathrm{tg}\, x}$;
18.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}\ -2}{2-\sqrt[3]{x+6}}$;	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$;
19.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}\ -x}{x^3-x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{\sin 5x-\sin 3x}$;
20.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\sin x+1}}{x\sin x}$;
21.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{x^4-1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\cos 5x}{2x^2}$;
22.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$;
23	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}-2}{x^2-1}$;	$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$;
24.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x^3}\ -3}{x^2-3x+2}$;	$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}x$;
25.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}\ -1}{\sqrt{1+x}\ -1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, 6x}{2x^2-3x}$;
26.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2-x}\ -1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$;
27.	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\, x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;

Репозиторий ВГУ

28.	$\lim\limits_{x\to\infty} x\,(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1});$	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(2(x-1))}{x^2-7x+6};$
29.	$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{x-3}-1}{x^2-5x+4};$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arcsin 5x};$
30.	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{\sqrt[3]{3-x}-1};$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}.$

6. ***Найдите пределы, используя второй замечательный предел***

вариант		вариант	
1.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}};$	16.	$\lim\limits_{x\to\infty} 3x\,[\ln(x+2)-\ln(x+1)];$
2.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^{2x-1};$	17.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-x+6}\right)^{x};$
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{x^2-x}\right)^{3x};$	18.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}};$
4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{3x+x^2}\right)^{\frac{x}{2}};$	19.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{2x+7}{x+5}\right)^{3-x};$
5.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}};$	20.	$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)}}.$
6.	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}};$	21.	$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(3x+1)-$ $-\ln(3x-1)];$
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}};$	22.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-5x}{2-5x}\right)^{5x-1};$
8.	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot[\ln(x+1)-$ $-\ln(x-1)];$	23.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{ctg}\,x};$
9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2};$	24.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\right)^{x};$
10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x};$	25.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x-1}{x+5}\right)^{1-x};$

Репозиторий ВГУ

11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x(\sqrt{x^2+1}-1)}$;	26.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin x}}$;
12.	$\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)[\ln(x+1)-$ $-\ln(x-1)]$;	27.	$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-1}{x-4}\right)^{(x+1)}}$
13.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$;	28.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{1-x^2}$;
14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3x+1}{3x+2}\right)^{1-x}$;	29.	$\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)[\ln(2x+3)-$ $-\ln(2x+1)]$;
15.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^{x}$;	30.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. Исследовать на непрерывность функцию в указанных точках. Определить вид точек разрыва.

вариант		вариант	
1.	$y=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$, $x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=5$;	16.	$y=\dfrac{x^2-2}{x^2-5x+6}$, $x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=3$;
2.	$y=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=3$;	17.	$y=\dfrac{x^3+27}{x^2+x-6}$, $x_1=-3,\ x_2=0,\ x_3=2$;
3.	$y=\dfrac{1+x}{x^3-x^2-x+1}$, $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=4$;	18.	$y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}$, $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=2$;
4.	$y=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$; $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=1$;	19.	$y=\dfrac{x^2-3x}{x^3-x}$, $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3$;
5.	$y=\dfrac{x^2-9}{(x-2)(x-3)}$; $x_1=-3,\ x_2=2,\ x_3=3$;	20.	$y=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$, $x_1=0,\ x_2=-3,\ x_3=3$;
6.	$y=\dfrac{x^2-16}{x^2+4x}$; $x_1=-4,\ x_2=0,\ x_3=1$;	21.	$y=\dfrac{x-5}{x^2-25}$, $x_1=-5,\ x_2=2,\ x_3=5$;

Репозиторий ВГУ

7.	$y=\dfrac{1-x}{\lvert x\rvert-1}$, $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=4$;	22.	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$, $x_1=-1,\ x_2=1, x_3=4$;
8.	$y=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$, $x_1=3,\ x_2=-3, x_3=5$;	23.	$y=\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$, $x_1=-5,\ x_2=5,\ x_3=4$;
9.	$y=\dfrac{x-1}{x^2-x}$, $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$;	24.	$y=\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}$; $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=1$;
10.	$y=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$, $x_1=2,\ x_2=1, x_3=-2$	25.	$y=\dfrac{x^2-9}{x^2+x-6}$; $x_1=-3,\ x_2=2,\ x_3=3$;
11.	$y=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, $x_1=0,\ x_2=1;\ \ x_3=2$;	26.	$y=\dfrac{x+4}{x^2+3x-4}$; $x_1=-4,\ x_2=0,\ x_3=1$;
12.	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$, $x_1=-1,\ x_2=1;\ x_3=3$;	27.	$y=\dfrac{9-x^2}{x^2+x-6}$, $x_1=-3,\ x_2=2,\ x_3=3$;
13.	$y=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, $x_1=1,\ x_2=0;\ x_3=-1$;	28.	$y=\dfrac{x^3+64}{x^2-16}$, $x_1=-4,\ x_2=4, x_3=5$;
14.	$y=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}$, $x_1=-2,\ x_2=0; x_3=1$;	29.	$y=\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$, $x_1=0,\ x_2=-1,\ x_3=2$;
15.	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, $x_1=-1,\ x_2=1;\ x_3=2$;	30.	$y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$, $x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=-2$.

8. ***Исследовать на непрерывность функцию. Указать вид точек разрыва. Схематически изобразить график функции.***

вариант		вариант	
1.	$y=\begin{cases}x^2+1, & \text{при } x<1,\\ 0, & \text{при } 1\le x\le\pi,\\ \sin x, & \text{при } x>\pi;\end{cases}$	16.	$y=\begin{cases}2, \text{ при } x<-\pi/2,\\ \sin x, \text{ при } -\pi/2<x\le 0,\\ x, \text{ при } x>0;\end{cases}$

Репозиторий ВГУ

2.	$y=\begin{cases}\cos x, \text{при } x\le 0,\\ 1-x, \text{при } 0<x\le 1,\\ x^2, \text{при } x>1;\end{cases}$	17.	$y=\begin{cases}x, \text{при } x\le 0,\\ \operatorname{tg} x, \text{при } 0<x\le \pi/4,\\ \cos x, \text{при } x>\pi/4;\end{cases}$
3.	$y=\begin{cases}1-x^2, \text{при } x\le 0,\\ e^x, \text{при } 0<x\le 1,\\ \ln x, \text{при } x>1;\end{cases}$	18.	$y=\begin{cases}0, \text{при } x=-2,\\ \dfrac{x^2-4}{x^2-4}, \text{при } x\ne \pm 2,\\ 1, \text{при } x=2;\end{cases}$
4.	$y=\begin{cases}x+1, \text{при } x<-1,\\ \cos\dfrac{\pi}{2}x, \text{при } \lvert x\rvert\le 1;\\ x^3, \text{при } x>1;\end{cases}$	19.	$y=\begin{cases}x^2, \text{при } x\le 0,\\ \log_2(1+x), \text{при } 0<x\le 1;\\ 2^x \text{ при } x>1;\end{cases}$
5.	$y=\begin{cases}2^x, \text{при } x\le -1,\\ 2-x, \text{при } \lvert x\rvert>1,\\ x^2, \text{при } x\ge 1;\end{cases}$	20.	$y=\begin{cases}1-x^2, \text{при } x\le -1\\ \arcsin x, \text{при } -1<x<1,\\ \pi/2, \text{при } x\ge 1;\end{cases}$
6.	$y=\begin{cases}1, \text{при } x\le 0\\ \dfrac{\sin x}{x}, \text{при } 0<x<\pi/2,\\ x+2, \text{при } x\ge \pi/2;\end{cases}$	21.	$y=\begin{cases}x, \text{при } x\le 0\\ \operatorname{arctg} x, \text{при } 0<x<1,\\ x-1, \text{при } x\ge 1;\end{cases}$
7.	$y=\begin{cases}\log_2\lvert x\rvert, \text{при } \lvert x\rvert\le 2,\\ x-1, \text{при } \lvert x\rvert>2;\end{cases}$	22.	$y=\begin{cases}1, \text{при } x\le 0\\ \lg x, \text{при } 0<x<10,\\ x-9, \text{при } x\ge 10;\end{cases}$
8.	$y=\begin{cases}x^2, \text{при } x<0,\\ x, \text{при } 0\le x\le \pi/2,\\ \sin x, \text{при } x>\pi/2;\end{cases}$	23.	$y=\begin{cases}0, \text{при } x\le 0\\ 3^x, \text{при } 0<x<2,\\ x-1, \text{при } x\ge 10;\end{cases}$
9.	$y=\begin{cases}0, \text{при } x<0,\\ \dfrac{x^2-1}{x-1}, \text{при } x\ge 0,\ x\ne 1,\\ 3, \text{при } x=1;\end{cases}$	24.	$y=\begin{cases}x+1, \text{при } x<0\\ (x-1)^3, \text{при } 0<x\le 1,\\ 3, \text{при } x>1;\end{cases}$
10.	$y=\begin{cases}\operatorname{arcctg} x, \text{при } x\le 0\\ \pi/2, \text{при } 0<x<1,\\ x-1, \text{при } x\ge 1;\end{cases}$	25.	$y=\begin{cases}x, \text{при } x>-10,\\ \lg\lvert x\rvert, \text{при } -10\le x\le 10,\\ x-9, \text{при } x>10;\end{cases}$
11.	$y=\begin{cases}-1, \text{при } x\le -1,\\ \operatorname{arctg} x, \text{при } -1<x\le 1,\\ \pi/4, \text{при } x>1;\end{cases}$	26.	$y=\begin{cases}\sin x, \text{при } \lvert x\rvert\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, \text{при } \lvert x\rvert\ge \dfrac{\pi}{2};\end{cases}$
12.	$y=\begin{cases}0, \text{при } x\le 0,\\ \operatorname{tg} x, \text{при } 0<x<\pi/2,\\ -1, \text{при } x\ge \pi/2;\end{cases}$	27.	$y=\begin{cases}-\cos x, \text{при } x\le 0\\ \cos x, \text{при } 0<x<\pi,\\ -1, \text{при } x\ge \pi;\end{cases}$

Репозиторий ВГУ

13.	$y=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le -1, \\ (1+x)^2, \text{ при } -1<x\le 1, \\ \ln(x-1), \text{ при } x>1; \end{cases}$	28.	$y=\begin{cases} -x, \text{ при } x\le 0 \\ \sin x, \text{ при } 0<x<\pi, \\ -1, \text{ при } x\ge \pi; \end{cases}$
14.	$y=\begin{cases} \pi/4, \text{ при } x\le -1, \\ \arcsin x, \text{ при } -1<x\le 1, \\ \pi/2, \text{ при } x>1; \end{cases}$	29.	$y=\begin{cases} -x, \text{ при } x\le 0 \\ \log_{1/2} x, \text{ при } 0<x<8, \\ -3, \text{ при } x\ge 8; \end{cases}$
15.	$y=\begin{cases} 2\lvert x\rvert, \text{ при } \lvert x\rvert\le 1, \\ 2-x^2, \text{ при } \lvert x\rvert>1; \end{cases}$	30.	$y=\begin{cases} -x+1, \text{ при } x\le 0, \\ x^2+1, \text{ при } 0<x\le 1, \\ (x+1)^2, \text{ при } x>1. \end{cases}$

4. ***Продифференцировать данные функции***

вари-ант				
1.	*a*	$y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$	*b*	$y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$
	c	$y=\dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$	*d*	$y=(\mathrm{cth}3x)^{\arcsin x}$
2.	*a*	$y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$	*b*	$y=\cos^5 3x\cdot\mathrm{tg}(4x+1)^3$
	c	$y=\dfrac{(x-4)^2}{e^{\mathrm{arcctg}x}}$	*d*	$y=(\cos(x+2))^{\ln x}$
3.	*a*	$y=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{(2x^2+4x-1)^2}$	*b*	$y=\mathrm{tg}^4 x\cdot\arcsin 4x^5$
	c	$y=\dfrac{e^{-x^3}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$	*d*	$y=(\sin 3x)^{\arccos x}$
4.	*a*	$y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$	*b*	$y=\arcsin^3 2x\cdot\mathrm{ctg}7x^4$
	c	$y=\dfrac{e^{-\mathrm{ctg}5x}}{(3x^2-4x+2)}$	*d*	$y=(\mathrm{th}5x)^{\arcsin(x+1)}$
5.	*a*	$y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\dfrac{3}{(x-5)^4}$	*b*	$y=\mathrm{ctg}3x\cdot\arccos 3x^2$
	c	$y=\dfrac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{\cos x}}$	*d*	$y=(\mathrm{sh}(x+2))^{\arcsin 2x}$
6.	*a*	$y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$	*b*	$y=\arccos^2 4x\times$ $\times\ln(x-3)$

Репозиторий ВГУ

	c	$y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$	*d*	$y=(\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$
7.	*a*	$y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$	*b*	$y=\ln^5 x\cdot\operatorname{arctg}7x^4$
	c	$y=\dfrac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$	*d*	$y=(\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arcctg}3x}$
8.	*a*	$y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{2}{2x^2-3x+7}$	*b*	$y=\operatorname{arctg}^3 4x\cdot 3^{\sin x}$
	c	$y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$	*d*	$y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$
9.	*a*	$y=\dfrac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$	*b*	$y=2^{\cos x}\cdot\operatorname{arcctg}5x^3$
	c	$y=\dfrac{\sqrt{x^3+4x-5}}{e^{x^3}}$	*d*	$y=(\log_2(x+4))^{\operatorname{ctg}7x}$
10.	*a*	$y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\dfrac{2}{(x-3)^5}$	*b*	$y=4^{-x}\cdot\ln^5(x+2)$
	c	$y=\dfrac{e^{\operatorname{ctg}5x}}{(x+4)^3}$	*d*	$y=(\operatorname{sh}3x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$
11.	*a*	$y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$	*b*	$y=3^{tgx}\cdot\arcsin 7x^4$
	c	$y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$	*d*	$y=(\operatorname{ch}3x)^{\operatorname{ctg}1/x}$
12.	*a*	$y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}-\dfrac{4}{(x-4)^4}$	*b*	$y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$
	c	$y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$	*d*	$y=(\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$
13.	*a*	$y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$	*b*	$y=\sin^4 3x\cdot\operatorname{arctg}2x^3$
	c	$y=\dfrac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$	*d*	$y=(\arccos 5x)^{\ln x}$
14.	*a*	$y=\dfrac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$	*b*	$y=\cos^3 4x\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{x}$
	c	$y=\dfrac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$	*d*	$y=(\operatorname{arctg}2x)^{\sin x}$
15.	*a*	$y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\dfrac{4}{7x^2-3x+2}$	*b*	$y=\operatorname{tg}^3 2x\cdot\arcsin x^5$

Репозиторий ВГУ

	c	$y=\dfrac{(2x+5)^3}{e^{\operatorname{tg}x}}$	*d*	$y=(\ln(x+7))^{\operatorname{ctg}2x}$
16.	*a*	$y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\dfrac{3}{7x^3-x^2-4}$	*b*	$y=\operatorname{ctg}^7 x\cdot\arccos 2x^3$
	c	$y=\dfrac{e^{-\operatorname{tg}3x}}{4x^2-3x+5}$	*d*	$y=(\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$
17.	*a*	$y=\dfrac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$	*b*	$y=e^{-\sin x}\operatorname{tg}7x^6$
	c	$y=\dfrac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$	*d*	$y=(\operatorname{th}\sqrt{x+1})^{\operatorname{arctg}2x}$
18.	*a*	$y=\dfrac{2}{(x-1)^3}-\dfrac{8}{6x^2+3x-7}$	*b*	$y=e^{\cos x}\operatorname{ctg}8x^3$
	c	$y=\dfrac{3x^2-5x+10}{e^{-x^4}}$	*d*	$y=\left(\operatorname{cth}\dfrac{1}{x}\right)^{\arcsin 7x}$
19.	*a*	$y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\dfrac{3}{(x-3)^4}$	*b*	$y=\cos^5 x\cdot\arccos 4x$
	c	$y=\dfrac{e^{-x}}{(2x^2-x+4)^2}$	*d*	$y=(\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$
20.	*a*	$y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\dfrac{5}{(x+1)^3}$	*b*	$y=\sin^3 7x\cdot\operatorname{arcctg}5x^2$
	c	$y=\dfrac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$	*d*	$y=(\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$
21.	*a*	$y=\dfrac{2}{(x+1)^5}+\sqrt{5x-1+x^2}$	*b*	$y=e^{\cos x}\operatorname{ctg}3x^4$
	c	$y=\dfrac{4x^2-2x+7}{e^{-x^2}}$	*d*	$y=(\log_2(x+6))^{\operatorname{tg}3x}$
22.	*a*	$y=\sqrt[3]{(x-1)^4}-\dfrac{1}{3x^3+x-2}$	*b*	$y=3^{x^2}\cdot\arcsin 2x^3$
	c	$y=\dfrac{(3x-4)^3}{e^{\operatorname{ctg}x}}$	*d*	$y=(\operatorname{th}(3x+4))^{\arcsin 5x}$
23.	*a*	$y=\sqrt[4]{(x-2)^5}-\dfrac{2}{x^2-3x+6}$	*b*	$y=\sin^3 3x\cdot\cos 5x^4$
	c	$y=\dfrac{e^{\sin 3x}}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$	*d*	$y=(\cos 5x)^{\arcsin(x+3)}$
24.	*a*	$y=\dfrac{3}{(x+3)^3}+\dfrac{5}{4x^2-3x-2}$	*b*	$y=\operatorname{tg}^2 3x\cdot\arcsin x^2$

Репозиторий БГУ

	c	$y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+3x-5}}{e^x}$	d	$y=(\arccos(4x+1))^{\ln 2x}$
25.	a	$y=\sqrt[5]{x^2+6x-3}-\dfrac{3}{(x-2)^4}$	b	$y=\arccos 5x\cdot\cos^3 x$
	c	$y=\dfrac{\sqrt{3x^3-2x+7}}{e^{\cos x}}$	d	$y=(\operatorname{ch}(3x+7))^{\arccos 4x}$
26.	a	$y=\dfrac{2}{(x-3)^6}-\sqrt{3x^2-5x+7}$	b	$y=\ln(x+2)\times$ $\times\arccos^2 5x$
	c	$y=\dfrac{e^{4x}}{\sqrt{2x^2-4x+5}}$	d	$y=(\cos(4x+5))^{\sqrt{x-3}}$

5. ***Найти*** y' ***и*** y'':

вариант	a	b
1.	$y^2=8x$	$\begin{cases}x=(2t+3)\cos t\\ y=3t^3\end{cases}$
2.	$x^2/5+y^2/7=1$	$\begin{cases}x=2\cos^2 t\\ y=3\sin^2 t\end{cases}$
3.	$y=x+\operatorname{arctg} y$	$\begin{cases}x=6\cos^3 t\\ y=2\sin^3 t\end{cases}$
4.	$x^2/5+y^2/3=1$	$\begin{cases}x=1/(t+2)\\ y=(t/(t+2))^2\end{cases}$
5.	$y^2=25x-4$	$\begin{cases}x=e^{-2t}\\ y=e^{4t}\end{cases}$
6.	$\operatorname{arcctg} y=4x+5y$	$\begin{cases}x=\sqrt{t}\\ y=\sqrt[5]{t}\end{cases}$
7.	$y^2-x=\cos y$	$\begin{cases}x=2t/(1+t^3)\\ y=t^2/(1+t^2)\end{cases}$
8.	$3x+\sin y=5y$	$\begin{cases}x=\sqrt{t^2-1}\\ y=(t+1)/\sqrt{t^2-1}\end{cases}$
9.	$\operatorname{tg} y=3x+5y$	$\begin{cases}x=4t+2t^2\\ y=5t^3-3t^2\end{cases}$
10.	$xy=\operatorname{ctg} y$	$\begin{cases}x=(\ln t)/t\\ y=t\ln t\end{cases}$

Репозиторий ВГУ

11.	$y = e^y + 4x$	$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$
12.	$\ln y - y / x = 7$	$\begin{cases} x = t^4 \\ y = \ln t \end{cases}$
13.	$y^2 + x^2 = \sin y$	$\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$
14.	$e^y = 4x - 7y$	$\begin{cases} x = 5\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$
15.	$4\sin^2(x+y) = x$	$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$
16.	$\sin y = 7x + 3y$	$\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$
17.	$\operatorname{tg} y = 4y - 5x$	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$
18.	$y = 7x - \operatorname{ctg} y$	$\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t) \\ y = 3(\cos t + t\sin t) \end{cases}$
19.	$xy - 6 = \cos y$	$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$
20.	$3y = 7 + xy^3$	$\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{-3t} \end{cases}$
21.	$(2-x)y^2 = x^3$	$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3 \end{cases}$
22.	$\ln y + xy = 1$	$\begin{cases} x = t + 2t^2 \\ y = -t^3 + 3t - 2 \end{cases}$
23.	$y = \operatorname{ctg} y - 3x$	$\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5 \\ y = t^3 - 5 \end{cases}$
24.	$x^2 / 7 + y^2 / 2 = 1$	$\begin{cases} x = 2\sin^2 t \\ y = 5\cos^2 t \end{cases}$
25.	$y^2 - y = 3x$	$\begin{cases} x = \sqrt[3]{t-1} \\ y = \sqrt{t+2} \end{cases}$
26.	$y - x = \sin^2 y$	$\begin{cases} x = (1-3t)\sin t \\ y = 2t^3 \end{cases}$

Репозиторий ВГУ

6. ***Для данной функции*** y ***и аргумента*** x_0 ***вычислить*** $y'''(x_0)$:

вариант		вариант	
1.	$y=\sin^2 x,\quad x_0=\pi/2$	14.	$y=\arcsin x,\quad x_0=0$
2.	$y=\mathrm{arctg}x,\quad x_0=1$	15.	$y=(5x-4)^5,\quad x_0=2$
3.	$y=\ln(2+x^2),\quad x_0=0$	16.	$y=x\sin x,\quad x_0=\pi/2$
4.	$y=e^x\cos x,\quad x_0=0$	17.	$y=x^2\ln x,\quad x_0=1/3$
5.	$y=e^x\sin 2x,\quad x_0=0$	18.	$y=x\sin 2x,\quad x_0=-\pi/4$
6.	$y=e^{-x}\cos x,\quad x_0=0$	19.	$y=x\cos 2x,\quad x_0=\pi/12$
7.	$y=\sin 2x,\quad x_0=\pi$	20.	$y=x^4\ln x,\quad x_0=1$
8.	$y=(2x+1)^5,\quad x_0=1$	21.	$y=x+\mathrm{arctg}x,\quad x_0=1$
9.	$y=\ln(1+x),\quad x_0=2$	22.	$y=\cos^2 x,\quad x_0=\pi/4$
10.	$y=\frac{1}{2}x^2e^x,\quad x_0=0$	23.	$y=\ln(x^2-4),\quad x_0=3$
11.	$y=e^{-x}\cos 3x,\quad x_0=0$	24.	$y=\ln(2x^2-3),\quad x_0=1$
12.	$y=(2-3x)^4,\quad x_0=1$	25.	$y=x\ln(x+3),\quad x_0=-2$
13.	$y=\cos 4x,\quad x_0=\pi/8$	26.	$y=3x^2e^{2x},\quad x_0=0$

Репозиторий ВГУ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т.. Основы математического анализа. Ч.1. – М. Наука, 1982.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов В.Л. К. Математический анализ. Т.1.– М. Наука, 1979.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Наука, 1990.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1.– М. Наука, 1989.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1.– Физматгиз, 1960.
6. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная. Курс лекций. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.

Сборники задач и упражнений

7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. Наука, 1985.
8. Сборник задач по математическому анализу.: под редакцией Демидовича Б.П. – М.Наука, 1990.
9. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. .– М. Высшая школа, 1986. – Ч. 1.
10. Индивидуальные задания по высшей математике / Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е.: Под редакцией Рябушко А.П. – Мн. Вышэйшая школа, 2008.– Ч. 1.
11. Сурин Т.Л., Иванова Ж.В., Шерегов С.В. Математический анализ (Практическое пособие). – Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2012.
12. Сурин Т.Л., Иванова Ж.В., Шерегов С.В. Сборник практических заданий по математическому анализу (Дифференциальное исчисление функции одной переменной). – Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2013.

Репозиторий ВГУ

Учебное издание

СУРИН Татьяна Леонидовна
ИВАНОВА Жанна Викторовна

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ПРОИЗВОДНАЯ)

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Е.В. Крайло*

Подписано в печать 2019. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,21. Уч.-изд. л. 1,22. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.

Репозиторий ВГУ