УДК 371.315:514.116

Обучение школьников методам решения тригонометрических уравнений в контексте укрупнения дидактических единиц

В.В. Устименко, О.А. Попп
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В методике преподавания математики в настоящее время учеными реализуется идея рассмотрения взаимосвязанных уравнений. В связи с этим возникает проблема обучения учащихся методам решения тригонометрических уравнений, которая может быть решена с помощью технологии укрупнения дидактических единиц. За дидактическую единицу, которая будет укрупняться, допустимо взять действие, соответствующее методу решения уравнения.

Цель статьи – выявить методы решения тригонометрических уравнений и способы отбора корней, определить приемы укрупнения тригонометрических уравнений.

Материал и методы. *Материалом исследования послужил опыт работы с учащимися на базе ГУО «СШ № 45 г. Витебска», ГУО «Мазоловская средняя школа Витебского района», Аграрного колледжа УО «ВГАВМ». При этом использовались эмпирические и логические методы.*

Результаты и их обсуждение. *Проанализировав научную литературу, изучив опыт работы учителей математики профильных классов, а также собственный подход, авторы пришли к выводу, что можно выделить следующие этапы изучения тригонометрических уравнений: на первом этапе повторяется тригонометрический материал, изученный ранее; на втором этапе учитель знакомит учеников с методами решений тригонометрических уравнений, на третьем этапе демонстрируются способы отбора корней в тригонометрических уравнениях; на четвертом этапе учащиеся знакомятся с приемами укрупнения тригонометрических уравнений.*

Процесс решения любого уравнения не должен заканчиваться только после его выполнения. Необходимо дальше работать с уравнением, образуя на его основе блоки укрупненных тригонометрических уравнений, связанных между собой, что позволяет разнообразить процесс обучения с точки зрения методики преподавания дисциплины.

Применение подобных блоков в учебном процессе параллельно с обучением школьников методам решений помогает учащимся эффективно усваивать и иной материал алгебры.

Заключение. *В методике изучения тригонометрических уравнений целесообразно придерживаться определенной последовательности изложения материала: подготовка к изучению тригонометрических уравнений, знакомство с всевозможными методами решения, отбор корней и рассмотрение блоков укрупненных тригонометрических уравнений. Использование подобных блоков предполагает реализацию следующих этапов: работа учащихся с готовыми блоками, составление последних учащимися под руководством учителя и самостоятельно.*

Ключевые слова: *методика, тригонометрические уравнения, методы решения, блоки взаимосвязанных уравнений, приемы укрупнения уравнений.*

Teaching Pupils the Methods of Trigonometry Equation Solving in the Context of Enlarging Didactic Units

V.V. Ustimenko, O.A. Popp
Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

In Methods of Teaching Math contemporary scholars are implementing the idea of considering mutually dependent equations. Consequently, the problem of teaching pupils the methods of trigonometry equation solution arises, which can be solved with the help of the technology of enlarging didactic units. The didactic unit, which will be enlarged, can be the operation, which corresponds the method of equation solution.

The purpose of the work is to identify methods of trigonometry equation solution and ways of selection of roots, and to find out ways of trigonometry equation enlargement.

Material and methods. *The research is based on the experience of work with Secondary School No45 of the City of Vitebsk, Mazolovo Secondary School of Vitebsk Region, and Agrarian College of Vitebsk State Veterinary Medicine Academy students. Empiric and Logical methods were used.*

Findings and their discussion. *After analyzing scientific literature, studying the experience of advanced Math teachers as well as the author's own approach we came to the conclusion that the following stages of teaching trigonometry equations can be singled out: at the first stage the trigonometry material studied previously is reviewed; at the second stage the teacher introduces students to the methods of trigonometry equation solution; at the third stage ways of root selection in trigonometry equations is presented; at the fourth stage students are introduced to the ways of trigonometry equation enlargement.*

The process of any equation solution should not finish as soon as it is done. It is necessary to work with the equation further, building blocks of enlarged interconnected trigonometry equations on its basis, which makes it possible to diversify the process of teaching from the point of view of Methods of the Course teaching.

The application of such blocks in the academic process alongside with teaching students the solution methods helps them master other Algebra material efficiently.

Conclusion. *In methods of studying trigonometry equation solution one should stick to a certain sequence of material presentation: preparation for the study of trigonometry equations, consideration of different solution methods, selection of roots and consideration of bocks of enlarged trigonometry equations. The application of such blocks means the implementation of the following stages: students' work with ready blocks, building of the latter by students guided by the teacher and independently.*

Key words: *Methods, trigonometry equations, solution methods, block of interconnected equations, ways of equation enlargement.*

Одной из важнейших проблем методики преподавания математики в школе является проблема обучения учащихся методам решения уравнений.

В настоящее время существуют различные подходы в обучении учащихся решению тригонометрических уравнений, в зависимости от того, на каком уровне изучается математика. На базовом уровне школьников обучают решению простейших тригонометрических уравнений, а также уравнений, решаемых с помощью нескольких тригонометрических формул и одного-двух методов (метод группировки, метод введения новой переменной). В профильных математических классах учителя знакомят школьников с большим количеством методов решения, не показывая взаимосвязи между различными уравнениями. Однако данную проблему возможно реализовать на основе обращения к технологии укрупнения дидактических единиц путем составления блоков взаимосвязанных уравнений по линии их решений.

По мнению П.М. Эрдниева, укрупненная дидактическая единица – это ячейка процесса обучения, состоящая из логически различных элементов, характеризуемых информационной общностью, и обладающая качествами системности и целостности, устойчивости к сохранению во времени и быстрым проявлением в памяти [1].

Цель исследования – выявить методы решения тригонометрических уравнений и способы отбора корней, определить приемы укрупнения тригонометрических уравнений.

Материал и методы. Теоретической основой исследования является технология укрупнения дидактических единиц, практической – опыт работы со школьниками 10 класса (учитель математики Л.И. Буринская) на базе ГУО «Мазоловская средняя школа Витебского района», с учащимися I курса (преподаватели математики О.А. Попп, И.А. Карелина) Аграрного колледжа УО «ВГАВМ», со школьниками 10 «А» класса (учитель Л.Р. Вольняк) на базе ГУО «СШ № 45 г. Витебска». При этом использованы эмпирические и логические методы.

Результаты исследовательской работы нашли применение на практических занятиях по элементарной математике и практикуму по решению задач (ПРЗ), методике преподавания математики со студентами очной формы обучения факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова (доцент В.В. Устименко).

Результаты и их обсуждение. Проанализировав научную литературу, изучив опыт учителей математики профильных классов, а также собственный подход, мы пришли к выводу, что можно выделить следующие этапы изучения тригонометрических уравнений:

– на первом этапе рассматривается материал, где раскрывается вся теория, предшествующая тригонометрическим уравнениям: определения числовой единичной окружности, радиана, синуса, косинуса, тангенса, котангенса; основные свойства функций $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$; графики этих функций; тригонометрические формулы; а также таблица значений функций при некоторых значениях аргумента;

– на втором этапе учитель с помощью объяснительно-иллюстративного метода (школьной лекции) знакомит учеников с методами решений тригонометрических уравнений: методом введения новой переменной, методом группировки, методом почленного деления для однородных уравнений, методом универсальной тригонометрической подстановки, методом введения вспомогательного аргумента, функциональным (методом оценок левой и правой частей уравнения) [2; 3]. Однако не все методы решения тригонометрических уравнений представлены в учебнике, причем отсутствуют их полный список и описание.

Поэтому рассмотрим подробнее некоторые из них.

Метод введения новой переменной (подстановки). Суть метода заключается в том, что в уравнении находят некоторое повторяющееся выражение, которое обозначают новой неизвестной, упрощая, таким образом, вид уравнения. В отдельных случаях сразу видно, *что* необходимо обозначить новой переменной. В других случаях подстановка видна только после определенных преобразований выражений, входящих в уравнение. В ряде случаев удобную подстановку желательно знать заранее.

Уравнения вида

$$A\sin^2 x + B\cos^2 x + C\sin x + D = 0, \quad (1)$$

$$A\sin^2 x + B\cos^2 x + C\cos x + D = 0 \quad (2)$$

при помощи тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \equiv 1$ сводятся к следующим видам:

$$A\sin^2 x + B(1-\sin^2 x) + C\sin x + D = 0, \quad (1_1)$$

$$A(1-\cos^2 x) + B\cos^2 x + C\cos x + D = 0. \quad (2_1)$$

Заменяя в (1_1) $\sin x = t$, а в (2_1) $\cos x = t$, получим квадратное уравнение относительно t (при $A \neq B$):

$$(A-B)t^2 + Ct + D + B = 0, \quad (1_2)$$

$$(B-A)t^2 + Ct + D + A = 0. \quad (2_2)$$

Уравнения вида

$$A\cos 2x + B\cos x + C = 0, \quad (3)$$

$$A\cos 2x + B\sin x + C = 0 \quad (4)$$

сводятся к квадратному уравнению с использованием формул двойного аргумента $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ соответственно:

$$A(2\cos^2 x - 1) + B\cos x + C = 0, \quad (3_1)$$

$$A(1-2\sin^2 x) + B\sin x + C = 0. \quad (4_1)$$

Заменяя в (3_1) $\cos x = t$, а в (4_1) $\sin x = t$, получим квадратное уравнение относительно t (при $A \neq B$):

$$2At^2 + Bt + C - A = 0, \quad (3_2)$$

$$-2At^2 + Bt + C + A = 0. \quad (4_2)$$

Рассмотрим уравнения, для решения которых удобную подстановку нужно знать заранее.

Пример 1. Найти корни уравнения $5(1-\sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0.$

Решение. В примере встречаются разность синуса и косинуса и их произведение. Обозначим $\sin x - \cos x = t$. Отсюда следует

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2, \text{ т.е.}$$

$$2\sin x\cos x = \sin 2x = 1 - t^2.$$

Уравнение принимает вид $5(1-(1-t^2)) - 16t + 3 = 0$. Решаем его. $5t^2 - 16t + 3 = 0,\ t_1 = 3,\ t_2 = \frac{1}{5}$. Стало быть,

$$\sin x - \cos x = 3,\ x \in \varnothing, \text{ т.к. } |\sin x - \cos x| \le \sqrt{2},$$

$$\text{или } \sin x - \cos x = \frac{1}{5}, \text{ т.е. } \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{5}.$$

Отсюда $x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{10} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+\pi n,\ n\in Z$.

Метод группировки. Действия, которые выполняют на основе этого метода, позволяют привести уравнение к такому виду, чтобы его левая часть представляла произведение нескольких множителей, а правая равнялась нулю. Затем приравнивают к нулю каждый из множителей. Уравнение распадается на несколько более простых уравнений. Например: $\sin x-1=\sin x\cos x-\cos x$.

Метод почленного деления. Используется для решения однородных уравнений вида

$$a\cos x+b\sin x=0,$$

$$a\cos^2 x+b\sin x\cos x+c\sin^2 x=0$$

и т.д. (все члены уравнения имеют одинаковую степень). Путем замены переменной приводятся к рациональным уравнениям 1-й, 2-й и т.д. степени.

Некоторые уравнения можно привести к однородным путем использования формул тригонометрии. Например:

$$a\cos x+b\sin x=c,$$

$$a\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)+2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=c\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right),$$

$$(a-c)\cos^2\frac{x}{2}+2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-(a+c)\sin^2\frac{x}{2}=0,$$

получили однородное уравнение. Например: $2\sin^2 x-6\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

Метод введения вспомогательного аргумента. Рассмотрим уравнение вида:

$$A\sin f(x)+B\cos f(x)=C. \qquad (5)$$

Подчеркнем, что функции синус и косинус в уравнении (5) имеют одинаковый аргумент – функцию $f(x)$. В этом случае можно привести левую часть уравнения (5) к виду, содержащему только косинус или только синус некоторого аргумента. Считая, что $A\neq 0$ и $B\neq 0$ (иначе уравнение (5) является простейшим тригонометрическим уравнением), совершим тождественное преобразование левой части:

$$A\sin f(x)+B\cos f(x)\equiv$$

$$\equiv\sqrt{A^2+B^2}\cdot\left(\sin f(x)\cdot\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}+\cos f(x)\cdot\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right). \qquad (6)$$

Из тождества $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2+\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2\equiv 1$ следует, что точки $M_1\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ и $M_2\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ расположены на единичной окружности. Тогда их координаты могут быть записаны в виде $M_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$ и $M_2(\cos\beta,\sin\beta)$, где

$$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\\ \sin\alpha=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\end{cases}, \qquad (7)$$

$$\begin{cases}\cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin\beta = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\end{cases}. \qquad (8)$$

После подстановки систем (7) и (8), соответственно, в тождество (6), оно примет вид:

$$A\sin f(x) + B\cos f(x) \equiv \sqrt{A^2+B^2}\cdot(\sin f(x)\cdot\cos\alpha + \cos f(x)\cdot\sin\alpha) \equiv$$
$$\equiv \sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin(f(x)+\alpha) \qquad (9)$$

и

$$A\sin f(x) + B\cos f(x) \equiv \sqrt{A^2+B^2}\cdot(\sin f(x)\cdot\sin\beta + \cos f(x)\cdot\cos\beta) \equiv$$
$$\equiv \sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos(f(x)-\beta) \qquad (10)$$

Теперь уравнение (5) сводится к простейшему уравнению

$$\sin(f(x)+\alpha) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (11)$$

или

$$\cos(f(x)-\beta) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (12)$$

соответственно.

Выбор равносильного уравнения (5) уравнения (11) или (12) обычно диктуется особенностями поставленной задачи.

Отметим также, что из тождеств (9) и (10) вытекает, что множеством значений выражения $A\sin x + B\cos x,\ x\in[\alpha,\alpha+2\pi]$ является отрезок $[-\sqrt{A^2+B^2};\sqrt{A^2+B^2}]$. Например: $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$.

Функциональный метод (метод оценок левой и правой частей уравнения). Если требуется решить уравнение

$$f(x) = \varphi(x) \qquad (13)$$

и на общей области определения E функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ выполняются неравенства $f(x)\le A; (f(x)\ge A)$ и $\varphi(x)\ge A; (\varphi(x)\le A)$, то уравнение (13) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = A \\ \varphi(x) = A\end{cases}. \qquad (14)$$

Рассмотрим пример: $\cos 3x + \cos\frac{5}{2}x = 2$.

Из неравенств $\cos 3x \le 1$ и $\cos\frac{5}{2}x \le 1$, которые верны для всех $x\in R$, следует оценка $\cos 3x + \cos\frac{5}{2}x \le 2$. Итак, в данном случае $A=1$. Тогда данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 3x = 1 \\ \cos\frac{5}{2}x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x = 2\pi k \\ \frac{5}{2}x = 2\pi n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi k}{3} \\ x = \dfrac{4\pi n}{5}\end{cases},\ k,n\in Z. \qquad (15)$$

В результате приходим к следующему:

$$\begin{cases}\dfrac{2\pi k}{3} = \dfrac{4\pi n}{5} \\ k,n\in Z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5k = 6n \\ k,n\in Z\end{cases}.$$

Отсюда следует, что $n = 5l,\ l \in Z$ и $x = 4\pi l$.

Ответ: $4\pi l,\ l \in Z$.

– На третьем этапе учитель показывает отбор корней в тригонометрических уравнениях, который можно осуществить при помощи различных способов.

Если требуется отобрать корни уравнения, принадлежащие некоторому промежутку, то в формулу корней уравнения вместо параметра *n* последовательно подставляют его целочисленные значения и определяют, принадлежит ли полученное решение данному промежутку или нет.

Пример 2. Найти все корни уравнения $\sin 2x = \cos x$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0.$$

Следовательно, $\cos x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

1. $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

При $n = 0$ $x = \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

При $n = 1$ $x = \frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

При $n = -1$ $x = -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

При $n = -2$ $x = -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

2. $\sin x = \frac{1}{2},\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

При $n = 0$ $x = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$ или $x = \frac{5\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

При $n = 1$ для первого множества решений $x = \frac{13\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

При $n = -1$ $x = -\frac{11\pi}{6},\ -\frac{11\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$ или $x = -\frac{7\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Ответ: $\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}$.

Для отбора корней из промежутка, длина которого от 0 до 2π, целесообразно использовать единичную окружность.

Пример 3. Указать число решений уравнения $ctg 3x \cdot \sin 6x - \cos 6x - \cos 12x = 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 12x = 1, \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{6}, \\ x \neq \frac{\pi k}{3}, \end{cases} n, k \in Z.$$

На единичной окружности (рис.) сначала отметим точками решения уравнения, соответствующие целочисленным значениям *n* на промежутке от 0 до 2π, а затем отбросим те решения, которые соответствуют условию $x \neq \frac{\pi k}{3}$. В ответ запишем количество оставшихся решений.

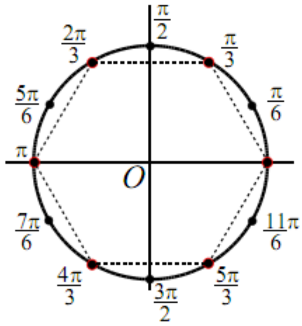

Рис. **Отбор корней на тригонометрической окружности**

Ответ: 6.

– На четвертом этапе учитель знакомит учащихся с приемами укрупнения тригонометрических уравнений, которые основываются на укрупнении действий, соответствующих методам решения [4].

Большинство уравнений, взятых из разных учебных пособий, в значительной степени дублируют друг друга, отличаясь лишь числовыми значениями, физическим содержанием, обозначениями или другими не очень существенными деталями, тогда как их математическая сущность одна и та же. Поэтому на данном этапе преподаватель показывает укрупнение тригонометрических уравнений с использованием всех приемов укрупнения.

Наиболее распространенным приемом укрупнения тригонометрических уравнений является прием, когда условие остается прежним, а требование изменяется. В качестве примера обратимся к следующему блоку уравнений:

1.1. Найти корни уравнения $\sin 3x + 3\sin 2x = 3\sin x$.

1.2. Найти корни уравнения $\sin 3x + 3\sin 2x = 3\sin x$, принадлежащие промежутку [-π;π].

1.3. Найти среднее арифметическое корней уравнения $\sin 3x + 3\sin 2x = 3\sin x$, принадлежащее промежутку [-π;π].

У всех уравнений, составляющих данный блок, одинаковые условия, но различные требования. Проиллюстрируем укрупнения действий, соответствующих решению каждого уравнения в виде табл.

Таблица

Действия, соответствующие решению уравнения

<table>
<tr><th>Уравнения</th><th>1.1</th><th>1.2</th><th>1.3</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Действия, соответствующие решению уравнения</td><td colspan="3">1) применение формулы тройного аргумента $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$;
2) применение формулы двойного аргумента $\sin 2x = 2\sin x \cos x$;
3) использование метода группировки;
4) решение двух уравнений $\sin x = 0$ и $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$;</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">5) отбор корней. Нахождение корней уравнения, принадлежащих промежутку [-π;π];</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>6) вычисление среднего арифметического найденных корней уравнения.</td></tr>
</table>

Из табл. видно, что изменение требования при решении уравнения способствует его укрупнению путем использования новых действий с сохранением первоначальной последовательности.

Еще одним приемом укрупнения уравнений может быть прием, который основывается на изменении условия уравнения с использованием тригонометрических формул при сохранении требования. Для подтверждения обратимся к примеру:

2.1. Найти корни уравнения $2\sin^2 x - 6\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$, принадлежащие промежутку [-π;π].

2.2. Найти корни уравнения $2\sin^2 x - 3\sin 2x + \cos^2 x = 0$, принадлежащие промежутку [-$\pi;\pi$].

2.3. Найти корни уравнения $\sin^2 x - 3\sin 2x + 1 = 0$, принадлежащие промежутку [-$\pi;\pi$].

2.4. Найти корни уравнения $2\sin^2 x - 6\sin 2x + 2 = 0$, принадлежащие промежутку [-$\pi;\pi$].

2.5. Найти корни уравнения $6\sin 2x + \cos 2x = 3$, принадлежащие промежутку [-$\pi;\pi$].

Уравнения, составляющие этот блок, имеют одинаковые требования, но разные условия.

Следующим приемом укрупнения уравнений может быть прием решения уравнения разными методами. Так, уравнение $6\sin 2x + \cos 2x = 3$ можно решить методом введения вспомогательного угла, методом универсальной подстановки, методом сведения к однородному уравнению. После решения некоторого количества подобных уравнений можно записать их общий вид ($a\sin x + b\cos x = c$) и решить его вышеперечисленными методами. Это также будет приемом укрупнения уравнений. Однако если начинать с решения уравнения в общем виде, а затем осуществлять его конкретизацию, то это будет новым приемом укрупнения уравнений. Кроме того, отбор корней в тригонометрических уравнениях, рассмотренный ранее, также можно отнести к приемам укрупнения тригонометрических уравнений.

Следовательно, образование блоков тригонометрических уравнений, которые связаны между собой через укрупнение действий, соответствующих различным методам их решений, будет наиболее эффективным, если использовать следующие приемы укрупнения:

1) замена требования по решению уравнения каким-либо новым требованием;
2) замена условия уравнения каким-либо новым условием;
3) решение одного и того же уравнения разными методами;
4) обобщение уравнений;
5) конкретизация уравнений;
6) отбор корней.

Заключение. Таким образом, в методике изучения тригонометрических уравнений целесообразно придерживаться определенной последовательности изложения материала: подготовка к изучению тригонометрических уравнений, знакомство с всевозможными методами решения, отбор корней и рассмотрение блоков укрупненных тригонометрических уравнений. Первые три этапа традиционны, а четвертый этап является новым в методике изучения тригонометрических уравнений. В процессе его реализации необходимо составлять блоки укрупненных тригонометрических уравнений, которые должны быть связаны между собой через укрупнение действий, соответствующих различным методам их решений, которые образуются с использованием набора методических приемов. Применение таких блоков предполагает работу учащихся с готовыми блоками, составление последних учащимися под руководством учителя и самостоятельно. Использование подобных блоков при изучении тригонометрических уравнений подразумевает деятельностный подход в трех значениях, наиболее встречаемых в методике обучения математике: во-первых, происходит выделение действий, соответствующих методам их решений, которые (методы), в свою очередь, определяются содержанием учебной программы по математике, во-вторых, устанавливается последовательность решения тригонометрических уравнений, в-третьих, учащимися осуществляются контроль и самоконтроль за действиями, которые они выполняют при решении уравнений. Поэтому можно утверждать, что разработанная методическая схема изучения тригонометрических уравнений правомерно является тем средством обучения, которое способствует сознательному и прочному усвоению изучаемого материала, умственному развитию школьников, раскрытию их творческих способностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эрдниев, П.М. Обучение математике в школе: кн. для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – 2-е изд. – М.: «Столетие», 1996. – 320 с.
2. Методы решения задач по алгебре: от простых до сложных / С.В. Кравцев [и др.]; под общ. ред. С.В. Кравцева. – М.: Экзамен, 2001. – 544 с.
3. Письменный, Д.Т. Готовимся к экзамену по математике / Д.Т. Письменный. – 12-е изд., доп. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 352 с.
4. Устименко, В.В. Методика работы с логарифмическими уравнениями в контексте укрупнения дидактических единиц / В.В. Устименко, О.А. Попп // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2016. – № 3(92). – С. 88–94.

REFERENCES

1. Erdniyev P.M., Erdniyev B.P. *Obucheniye matematike v shkole: Kn. dlia uchitelia* [Teaching Math at School: Teacher's Book], M.: «Stoletiye», 1996, 320 p.
2. Kravtsev S.V. *Metodi resheniya zadach po algebre: ot prostykh to slozhnykh* [Methods of Algebra Problem Solution: from the Simple to the Complicated], M.: Ekzamen, 2001, 544 p.
3. Pismenny D.T. *Gotovimsia k ekzamenu po matematike* [Getting Ready for Math Exam], M.: Airis-press, 2008, 352 p.
4. Ustimenko V.V., Popp O.A. *Vesnik Vitsebskaga dziarzhunaga universiteta* [Journal of Vitebsk State University], 2016, 3(92), pp. 88–94.

Поступила в редакцию 27.06.2018

Адрес для корреспонденции: e-mail: poppolga18@gmail.com – Попп О.А.