УДК 512.13

Об условиях представимости полиномов четвертой и шестой степени в виде суперпозиции полиномов второй и третьей степени

Ю.В. Трубников*, В.В. Юргелас**
**Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*
***Воронежский государственный университет (Россия)*

Актуальность работы заключается в том, что благодаря данному исследованию можно получить удобный метод решения специального класса алгебраических уравнений и ответить на вопрос, разрешимо ли это уравнение в радикалах.

Цель статьи – сформулировать и обосновать необходимые и достаточные условия представимости алгебраических полиномов четвертой и шестой степени в виде суперпозиции квадратичных и кубических полиномов, как следствие, получить условие разрешимости в радикалах уравнения шестой степени.

***Материал и методы.** Материалом исследования являются алгебраические полиномы комплексного аргумента с комплексными коэффициентами*

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

а также представление этих полиномов в виде суперпозиции квадратичных и кубических полиномов.

В качестве методов исследования использованы методы алгебры, математического анализа и система компьютерной математики Maple 2017.

***Результаты и их обсуждение.** В работе доказаны три теоремы. В этих теоремах получены равенства, которые необходимы и достаточны для представимости полиномов четвертой степени в виде суперпозиции квадратичных полиномов и шестой степени в виде суперпозиции квадратичных и кубических полиномов.*

***Заключение.** В результате проделанного исследования найдены необходимые и достаточные условия представимости полиномов четвертой и шестой степени в виде суперпозиции полиномов второй и третьей степени.*

***Ключевые слова:** алгебраические уравнения, суперпозиция, разрешимость в радикалах, полином четвертой степени, полином шестой степени.*

On the Conditions of the Representability of the Fourth and Eighth Degree Polynomials as a Superposition of the Second and the Third Degree Polynomials

Yu.V. Trubnikov, V.V. Yurgelas
Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»
Voronezh State University (Russia)

The relevance of the article lies in the fact that with the help of this study, you can get a convenient method for solving algebraic equations, and answer the question whether this equation is solvable in radicals.

The purpose of the article is to formulate and justify the necessary and sufficient conditions for the representability of algebraic polynomials of the fourth and sixth degree as a superposition of quadratic and cubic polynomials, as a result, to obtain the condition of solvability in the radicals of the sixth degree equation.

***Material and methods.** The research materials are algebraic polynomials of argument z*

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

and also the representation of these polynomials as a superposition of quadratic and cubic polynomials.

As research methods we used methods of algebra, mathematical analysis and computer math system Maple 2017.

Findings and their discussion. *The article proved three theorems. In these theorems, equations are obtained that are necessary and sufficient for the fourth polynomial to be representable as a superposition of quadratic polynomials and of the sixth degree as a superposition of quadratic and cubic polynomials.*

Conclusion. *As a result of the study, necessary and sufficient conditions for the representability of polynomials of the fourth and sixth degree were found, in the form of a superposition of polynomials of the second and third degree.*

Key words: *algebraic equations, superposition, solvability in radicals, polynomial of the fourth degree, polynomial of the sixth degree.*

Актуальность работы заключается в том, что благодаря данному исследованию можно получить удобный метод решения некоторых классов алгебраических уравнений и ответить на вопрос, разрешимо ли это уравнение в радикалах.

Цель статьи – сформулировать и обосновать необходимые и достаточные условия представимости алгебраических полиномов четвертой и шестой степени в виде суперпозиции квадратичных и кубических полиномов, как следствие, получить достаточное условие разрешимости в радикалах уравнения шестой степени.

Результаты и их обсуждение. В работе найдены и обоснованы необходимые и достаточные условия представимости полиномов четвертой степени

$$P_4(z)=z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4 \tag{1}$$

и шестой степени

$$P_6(z)=z^6+a_1z^5+a_2z^4+a_3z^3+a_4z^2+a_5 \tag{2}$$

в виде

$$P_4(z)=f_2\left[f_1(z)\right], \tag{3}$$

где

$$f_1(z)=z^2+b_1z+b_2,\ f_2(z)=z^2+c_1z+c_2,$$

и

$$P_6(z)=g_2\left[g_1(z)\right], \tag{4}$$

где

$$g_1(z)=z^2+b_1z+b_2,\ g_2(z)=z^3+c_1z^2+c_2z+c_3,$$

или в виде

$$P_6(z)=h_2\left[h_1(z)\right], \tag{5}$$

где

$$h_1(z)=z^3+b_1z^2+b_2z+b_3,\ h_2(z)=z^2+c_1z+c_2.$$

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием выполнения тождества* (3) *является условие* $a_3=\frac{a_1}{2}\left(a_2-\frac{a_1^2}{4}\right)$, *выражающее связь между коэффициентами полинома* $P_4(z)$, *при этом*

$$b_1=\frac{a_1}{2},\ b_2=-\frac{a_1^2}{8}+\frac{a_2}{2}-\frac{c_1}{2},\ c_2=-\frac{\left(a_1^2-4a_2\right)^2}{64}+\frac{c_1^2}{4}+a_4.$$

Параметр c_1 *остается свободным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правая часть равенства (3) имеет вид

$$f_2\left[f_1(z)\right]=z^4+2b_1z^3+\left(b_1^2+2b_2+c_1\right)z^2+$$
$$+\left(2b_1b_2+b_1c_1\right)z+b_2^2+b_2c_1+c_2. \tag{6}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z полинома $P_4(z)$ и правой части равенства (6), получим систему уравнений

$$2b_1=a_1, \tag{7}$$

$$b_1^2 + 2b_2 + c_1 = a_2, \tag{8}$$
$$2b_1b_2 + b_1c_1 = a_3, \tag{9}$$
$$b_2^2 + b_2c_1 + c_2 = a_4. \tag{10}$$

Выражая $b_1 = \dfrac{a_1}{2}$ из уравнения (7) и подставляя в уравнения (8)–(10), получаем следующие уравнения:

$$\frac{a_1^2}{4} + 2b_2 + c_1 = a_2, \tag{11}$$
$$a_1b_2 + \frac{1}{2}a_1c_1 = a_3, \tag{12}$$
$$b_2^2 + b_2c_1 + c_2 = a_4. \tag{13}$$

Выражая

$$b_2 = -\frac{a_1^2}{8} + \frac{a_2}{2} - \frac{c_1}{2}$$

из уравнения (11) и подставляя в уравнения (12)–(13), получаем уравнение связи между коэффициентами полинома $P_4(z)$, это

$$a_3 = \frac{a_1}{2}\left(a_2 - \frac{a_1^2}{4}\right), \tag{14}$$

после чего из уравнения (13) находим

$$c_2 = -\frac{\left(a_1^2 - 4a_2\right)^2}{64} + \frac{c_1^2}{4} + a_4. \tag{15}$$

Подставляя найденные значения b_1, b_2, c_2 в правую часть равенства (3), получаем тождество

$$f_2\left[f_1(z)\right] = z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + \frac{a_1}{2}\left(a_2 - \frac{a_1^2}{4}\right)z + a_4,$$

из которого и следует необходимое и достаточное условие представления полинома $P_4(z)$ в виде суперпозиции $f_2\left[f_1(z)\right]$.

В том случае, если требуется представить полином $P_4(z)$ в виде $f\left[f(z)\right]$, где $f(z) = z^2 + b_1z + b_2$, система уравнений для определения параметров b_1, b_2 будет иметь следующий вид:

$$2b_1 = a_1, \tag{16}$$
$$b_1^2 + b_1 + 2b_2 = a_2, \tag{17}$$
$$b_1^2 + 2b_1b_2 = a_3, \tag{18}$$
$$b_1b_2 + b_2^2 + b_2 = a_4. \tag{19}$$

Выражая $b_1 = \dfrac{a_1}{2}$ из уравнения (16) и подставляя в уравнения (17)–(19), получаем

$$\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1 + 2b_2 = a_2, \tag{20}$$
$$\frac{1}{4}a_1^2 + a_1b_2 = a_3, \tag{21}$$
$$\frac{1}{2}a_1b_2 + b_2^2 + b_2 = a_4. \tag{22}$$

Выражая $b_2 = -\dfrac{1}{8}a_1^2 + \dfrac{1}{2}a_2 - \dfrac{1}{4}a_1$ из уравнения (20) и подставляя в уравнения (21)–(22), получаем равенства

$$a_3 = \frac{a_1}{8}\left(4a_2 - a_1^2\right); \tag{23}$$

$$a_4 = \frac{1}{64}\left(a_1^2 - 2a_1 - 4a_2 - 8\right)\left(a_1^2 + 2a_1 - 4a_2\right). \tag{24}$$

Таким образом, из тождества

$$\left(z^2 + \frac{a_1}{z} z - \frac{1}{8}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{4}a_1\right)^2 + \frac{a_1}{2}\left(z^2 + \frac{a_1}{z} z - \frac{1}{8}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{4}a_1\right) - \frac{1}{8}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{4}a_1 =$$

$$= z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + \frac{a_1}{8}\left(4a_2 - a_1^2\right)z + \frac{1}{64}\left(a_1^2 - 2a_1 - 4a_2 - 8\right)\left(a_1^2 + 2a_1 - 4a_2\right)$$

следует, что уравнения связи (23) и (24) являются необходимыми и достаточными условиями представления полинома $P_4(z)$ в виде $f\left[f(z)\right]$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Выполнение равенства* (14) *является достаточным условием разрешимости уравнения* $P_4(z) = 0$ *в радикалах.*

Пример 1. Пусть $a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a_4 = -10,$

$a_3 = \frac{a_1}{2}\left(a_2 - \frac{a_1^2}{4}\right) = 6,\ b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ c_1 = 4,\ c_2 = -15,$ тогда полином $P_4(z)$ примет вид

$$P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 7z^2 + 6z - 10.$$

Назовем корнями второго уровня корни уравнения

$$q^2 + c_1 q + c_2 = 0,$$

т.е. в рассматриваемом примере это корни уравнения

$$q^2 + 4q - 15 = 0.$$

Пусть

$$q_1 = -2 + \sqrt{19}, \qquad q_2 = -2 - \sqrt{19}.$$

Корнями первого уровня, т.е. корнями исходного уравнения, являются корни уравнений

$$z^2 + b_1 z + b_2 = q_1,\ z^2 + b_1 z + b_2 = q_2.$$

Эти корни имеют вид

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\sqrt{19} - 11} - 1\right), z_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{4\sqrt{19} - 11} + 1\right),$$

$$z_3 = \frac{1}{2}\left(i\sqrt{4\sqrt{19} + 11} - 1\right),\ z_4 = -\frac{1}{2}\left(i\sqrt{4\sqrt{19} + 11} + 1\right).$$

Далее рассмотрим случай суперпозиции квадратичной функции от кубической, т.е.

$$f_2\left[f_1(z)\right] = \left(z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3\right)^2 + c_1\left(z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3\right) + c_2. \tag{25}$$

Пусть

$$P_6(z) = z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + a_3 z^3 + a_4 z^2 + a_5 z + a_6. \tag{26}$$

Теорема 2. *Необходимыми и достаточными условиями представления полинома* (26) *в виде* (25) *являются равенства*

$$a_4 = \frac{5}{64}a_1^4 - \frac{3}{8}a_1^2 a_2 + \frac{1}{2}a_1 a_3 + \frac{1}{4}a_2^2, \tag{27}$$

$$a_5 = -\frac{1}{64}\left(a_1^2 - 4a_2\right)\left(a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3\right). \tag{28}$$

Коэффициенты b_1, b_2, b_3, c_2 *находятся при этом по следующим формулам:*

$$b_1 = \frac{a_1}{2},\ \ b_2 = -\frac{a_1^2}{8} + \frac{a_2}{2},\ \ b_3 = \frac{1}{16}a_1^3 - \frac{1}{4}a_1a_2 + \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{2}c_1, \tag{30}$$

$$c_2 = a_6 - \frac{1}{256}\left(a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3 - 8c_1\right)\left(a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3 + 8c_1\right). \tag{31}$$

Коэффициент c_1 *является произвольным параметром.*

Д о к а з а т е л ь с т в о использует ту же самую схему, т.е. приравниваются коэффициенты полиномов (25) и (26) и проводится анализ получающейся при этом системы уравнений. Опишем этот процесс более подробно. После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях z получим систему уравнений

$$2b_1 = a_1, \tag{32}$$

$$b_1^2 + 2b_2 = a_2, \tag{33}$$

$$2b_1b_2 + 2b_3 + c_1 = a_3, \tag{34}$$

$$2b_1b_3 + b_1c_1 + b_2^2 = a_4, \tag{35}$$

$$2b_2b_3 + b_2c_1 = a_5, \tag{36}$$

$$b_3^2 + b_3c_1 + c_2 = a_6. \tag{37}$$

Запишем результат первой подстановки: $b_1 = a_1 / 2$ в уравнения (33)–(37):

$$\frac{a_1^2}{4} + 2b_2 = a_2, \tag{38}$$

$$a_1b_2 + 2b_3 + c_1 = a_3, \tag{39}$$

$$a_1b_3 + \frac{1}{2}a_1c_1 + b_2^2 = a_4, \tag{40}$$

$$2b_2b_3 + b_2c_1 = a_5, \tag{41}$$

$$b_3^2 + b_3c_1 + c_2 = a_6. \tag{42}$$

Результатом второй подстановки $b_2 = -\frac{a_1^2}{8} + \frac{a_2}{2}$ в уравнения (39)–(42) является следующая система:

$$\frac{a_1}{2}\left(a_2 - \frac{a_1^2}{4}\right) + 2b_3 + c_1 = a_3, \tag{43}$$

$$a_1b_3 + \frac{1}{2}a_1c_1 + \frac{1}{64}a_1^4 - \frac{1}{8}a_1^2a_2 + \frac{1}{4}a_2^2 = a_4, \tag{44}$$

$$-\frac{1}{4}a_1^2b_3 + a_2b_3 - \frac{1}{8}a_1^2c_1 + \frac{1}{2}a_2c_1 = a_5, \tag{45}$$

$$b_3^2 + b_3c_1 + c_2 = a_6. \tag{46}$$

Третья подстановка заключается в том, что из уравнения (43) находим

$$c_1 = \frac{1}{8}a_1^3 - \frac{1}{2}a_1a_2 + a_3 - 2b_3 \tag{47}$$

и выражение (47) подставляем в уравнения (44)–(46). Результатом данной подстановки являются равенства:

$$a_4 = \frac{5}{64}a_1^4 - \frac{3}{8}a_1^2a_2 + \frac{1}{2}a_1a_3 + \frac{1}{4}a_2^2,$$

$$a_5 = -\frac{1}{64}\left(a_1^2 - 4a_2\right)\left(a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3\right),$$

а это и есть условия, указанные в формулировке теоремы 2. Из уравнения (36) находим

$$c_2 = b_3^2 - \frac{1}{8}a_1^3 b_3 + \frac{1}{2}a_1 a_2 b_3 - a_3 b_3 + a_6. \quad (48)$$

Необходимость и достаточность условий (27)–(28) теперь вытекает из тождества

$$\left[z^3 + \left(\frac{a_1}{2}\right)z^2 + \left(-\frac{a_1^2}{8} + \frac{a_2}{2}\right)z + b_3\right]^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{8}a_1^3 - \frac{1}{2}a_1 a_2 + a_3 - 2b_3\right)\left[z^3 + \left(\frac{a_1}{2}\right)z^2 + \left(-\frac{a_1^2}{8} + \frac{a_2}{2}\right)z + b_3\right] +$$

$$+ b_3^2 - \frac{1}{8}a_1^3 b_3 + \frac{1}{2}a_1 a_2 b_3 - a_3 b_3 + a_6 =$$

$$= z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + a_3 z^3 + \left(\frac{5}{64}a_1^4 - \frac{3}{8}a_1^2 a_2 + \frac{1}{2}a_1 a_3 + \frac{1}{4}a_2^2\right)z^2 -$$

$$- \frac{1}{64}\left(a_1^2 - 4a_2\right)\left(a_1^3 - 4a_1 a_2 + 8a_3\right)z + a_6.$$

Заметим, что в процессе подстановок можно было бы поступить и по-другому. Если из уравнения (43) выразить b_3:

$$b_3 = \frac{1}{16}a_1^3 - \frac{1}{4}a_1 a_2 + \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{2}c_1$$

и подставить в уравнения (44)–(46), то уравнения связи (44)–(45) останутся теми же самыми, а c_2 выразится равенством (31). Именно такой вариант отражен в формулировке теоремы 2.

Рассмотрим случай суперпозиции кубических полиномов от квадратных, т.е.

$$f_1(z) = z^2 + c_1 z + c_2; \quad f_2\left[f_1(z)\right] = f_1^3(z) + b_1 f_1^2(z) + b_2 f_1(z) + b_3.$$

Теорема 3. *Необходимыми и достаточными условиями представления полинома*

$$P_6(z) = z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + a_3 z^3 + a_4 z^2 + a_5 z + a_6 \quad (49)$$

в виде $f_2\left[f_1(z)\right]$ *являются равенства*

$$a_3 = -\frac{a_1}{27}\left(5a_1^2 - 18a_2\right); \; a_5 = \frac{a_1}{81}\left(a_1^4 - 3a_1^2 a_2 + 27a_4\right). \quad (50)$$

При этом

$$c_1 = \frac{a_1}{3}, \; b_1 = a_2 - \frac{a_1^2}{3} - 3c_2, \quad (51)$$

$$b_2 = -\frac{1}{9}a_1^2 a_2 - 2a_2 c_2 + \frac{1}{27}a_1^4 + \frac{2}{3}a_1^2 c_2 + 3c_2^2 + a_4, \quad (52)$$

$$b_3 = a_6 - c_2^3 - \frac{1}{3}a_1^2 c_2^2 + a_2 c_2^2 - \frac{1}{27}a_1^4 c_2 + \frac{1}{9}a_1^2 a_2 c_2 - a_4 c_2; \quad (53)$$

параметр c_2 *остается произвольным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Самое короткое доказательство вытекает из тождества

$$f_2\left[f_1(z)\right] = P_6(z),$$

если в левую часть подставить выражения (51)–(53), а в правую часть правые части равенств (50).

Следствие 2. *Одновременное выполнение равенств* (27) *и* (28) *является достаточным условием разрешимости уравнения* $P_6(z) = 0$ *в радикалах.*

Назовем корни q_1, q_2 уравнения $q^2 + c_1 q + c_2 = 0$ корнями второго уровня суперпозиции $f_2\left[f_1(z)\right]$, а корни уравнений $f_1(z) = q_1$, $f_1(z) = q_2$ корнями первого уровня, т.е. корни первого уровня – это корни уравнения $P_6(z) = 0$.

Пример 2. Данный пример иллюстрирует теорему 2.

Пусть $a_1 = 16,\ a_2 = 32,\ a_3 = 8,\ a_6 = 17420,$ тогда, вычислив коэффициенты a_4, a_5 по формулам (27)–(28), получаем следующий полином:

$$P_6(z) = z^6 + 16z^5 + 32z^4 + 8z^3 + 2368z^2 - 4224z + 17420.$$

Если взять $c_1 = 0,$ то получим $c_2 = -4$, и корни второго уровня находятся из уравнения

$$q^2 + c_1 q + c_2 = q^2 - 4 = 0,$$

т.е. $q_{12} = 2,\ q_{22} = -2.$ Далее находим $b_1 = 8,\ b_2 = -16, b_3 = 132$, и корни первого уровня определяются из уравнений

$$q^3 + 8q^2 - 16q + 132 = 2,\ q^3 + 8q^2 - 16q + 132 = -2.$$

Это корни исходного уравнения

$$z_1 = -\frac{1}{3}\left(2843 + 9\sqrt{82441}\right)^{1/3} - \frac{112}{3\left(2843 + 9\sqrt{82441}\right)^{1/3}} - \frac{8}{3};$$

$$z_2 = \frac{1}{6}\left(2843 + 9\sqrt{82441}\right)^{1/3} + \frac{56}{3\left(2843 + 9\sqrt{82441}\right)^{1/3}} - \frac{8}{3} +$$

$$+ \frac{i\sqrt{3}}{2}\left[-\frac{1}{3}\left(2843 + 9\sqrt{82441}\right)^{1/3} + \frac{112}{3\left(2843 + 9\sqrt{82441}\right)^{1/3}}\right];$$

$$z_3 = \frac{1}{6}\left(2843 + 9\sqrt{82441}\right)^{1/3} + \frac{56}{3\left(2843 + 9\sqrt{82441}\right)^{1/3}} - \frac{8}{3} -$$

$$- \frac{i\sqrt{3}}{2}\left[-\frac{1}{3}\left(2843 + 9\sqrt{82441}\right)^{1/3} + \frac{112}{3\left(2843 + 9\sqrt{82441}\right)^{1/3}}\right];$$

$$z_4 = -\frac{1}{3}\left(2897 + 3\sqrt{776409}\right)^{1/3} - \frac{112}{3\left(2897 + 3\sqrt{776409}\right)^{1/3}} - \frac{8}{3};$$

$$z_{5,6} = \frac{1}{6}\left(2897 + 3\sqrt{776409}\right)^{1/3} + \frac{56}{3\left(2897 + 3\sqrt{776409}\right)^{1/3}} - \frac{8}{3} \pm$$

$$\pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\left[-\frac{\left(2897 + 3\sqrt{776409}\right)^{1/3}}{3} + \frac{112}{3\left(2897 + 3\sqrt{776409}\right)^{1/3}}\right].$$

Пример 3. Данный пример иллюстрирует теорему 2.

Пусть $a_1 = 2i,\ a_2 = 1 + 2i,\ a_3 = 4 - 10i,\ a_6 = -27 - 36i,$ тогда, вычислив коэффициенты a_4, a_5 по формулам (27)–(28), получаем следующий полином:

$$P_6(z) = z^6 + 2i \cdot z^5 + (1+2i) \cdot z^4 + (4-10i) \cdot z^3 + (12+8i) \cdot z^2 + (18-6i) \cdot z - 27 - 36i.$$

При $c_1 = 0$ находим $c_2 = -1$, и корни второго уровня определяются из уравнения

$$q^2 + c_1 q + c_2 = q^2 - 1 = 0,$$

т.е. $q_{12} = 1,\ q_{22} = -1.$ Далее находим $b_1 = i,\ b_2 = 1 + i, b_3 = 3 - 6i$, и корни первого уровня определяются из уравнений

$$q^3 + i \cdot q^2 + (1+i) \cdot q + 3 - 6i = 0.$$

Это корни исходного уравнения

$$z_1 = \frac{(-252 + 692i - 12\sqrt{2904 + 2370i})^{1/3}}{6} - \frac{\frac{8}{3} + 2i}{(-252 + 692i - 12\sqrt{2904 + 2370i})^{1/3}} - \frac{i}{3};$$

$$z_{2,3}=-\frac{(-252+692i-12\sqrt{2904+2370i})^{1/3}}{12}+\frac{\dfrac{4}{3}+i}{(-252+692i-12\sqrt{2904+2370i})^{1/3}}-\frac{i}{3}\pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\left(i\sqrt{3}\left(\frac{(-252+692i-12\sqrt{2904+2370i})^{1/3}}{6}+\frac{\dfrac{8}{3}+2i}{(-252+692i-12\sqrt{2904+2370i})^{1/3}}\right)\right);$$

$$z_4=\frac{(-468+692i-12\sqrt{1824+4446i})^{1/3}}{6}-\frac{\dfrac{8}{3}+2i}{(-468+692i-12\sqrt{1824+4446i})^{1/3}}-\frac{i}{3};$$

$$z_{5,6}=-\frac{(-468+692i-12\sqrt{1824+4446i})^{1/3}}{12}+\frac{\dfrac{4}{3}+i}{(-468+692i-12\sqrt{1824+4446i})^{1/3}}-\frac{i}{3}\pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\left(i\sqrt{3}\left(\frac{(-468+692i-12\sqrt{1824+4446i})^{1/3}}{6}+\frac{\dfrac{8}{3}+2i}{(-468+692i-12\sqrt{1824+4446i})^{1/3}}\right)\right).$$

Близким классом к таким уравнениям являются возвратные уравнения [1]. Возвратными уравнения – это алгебраические уравнения вида

$$P_{2n}(z)=z^{2n}+a_1z^{2n-1}+a_2z^{2n-2}...+a_{2n-1}z+a_{2n}=0,$$

где a_j $(j=1,2,...,2n)$ – действительные коэффициенты, удовлетворяющие равенствам:

$$a_{n+k}=a_{n-k}r^{2k}\ (r>0, 1\le k\le n).$$

Заключение. В результате проделанного исследования найдены необходимые и достаточные условия представимости полиномов четвертой и шестой степени в виде суперпозиции полиномов второй и третьей степени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубников, Ю.В. Особенности применения алгоритма Вейерштрасса для возвратных алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2013. – № 1(73). – С. 5–11.

REFERENCES

1. Trubnikov Yu.V., Pyshnenko O.V. *Vestnik VGU* [Journal of Vitebsk State University], 2013, 1(73), pp. 5–11.

Поступила в редакцию 18.01.2019

Адрес для корреспонденции: e-mail: yurii_trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.