

УДК 519

Использование сферических гармоник для исследования радиоизлучений

М.А. Гундина

Белорусский национальный технический университет

Рассматривается математическое моделирование сферической поверхности радиоизлучения Солнца, фиксируемого на поверхности Земли. Обработка астрономических данных осуществляется с помощью сферических гармоник.

Цель работы – создание методики нахождения значения уровня радиоизлучения в промежуточных точках между станциями, значения в которых известны.

Материал и методы. *Материалы исследования обработаны с помощью сферических вейвлетов для построения аппроксимирующей поверхности уровня радиоизлучения. Описан метод, позволяющий раскладывать сигнал по сферическим гармоникам.*

Результаты и их обсуждение. *Анализируется особенность геометрии источника и приемника, которые имеют форму, аппроксимируемую сферой. Приведен эффективный алгоритм, позволяющий раскладывать исходный сигнал на составляющие, учитывается условие, что составляющие сохраняют свойства исходного сигнала.*

Заключение. *Описана взаимосвязь между представлением функции на поверхности и представлением ее на касательной плоскости. Рассмотрены действие оператора стереографической проекции и его использование для организации разложения по сферическим гармоникам.*

Ключевые слова: *сферические гармоник, анализ радиоизлучения, обработка астрономических данных, восстановление сигнала, обработка сигнала, разложение функции на составляющие.*

Application of Spherical Harmonics in the Research of Radio Emissions

M.A. Hundzina

The Belarusian National Technical University

The mathematical modeling of the spherical surface of the radio emissions of the Sun, fixed on the Earth's surface, is considered. Processing of astronomical data is carried out using spherical harmonics.

The purpose of this research is creating a method of finding the radio emission level at intermediate points between the stations, whose values are known.

Material and methods. *The corresponding coefficients of the spherical harmonics are calculated, the procedure for reconstructing the signal from them is described. Research materials are processed using spherical wavelets to construct an approximating surface of the radio emission levels.*

Finding and their discussion. *A feature of the geometry of the source and the receiver, having a shape approximated by the sphere, is analyzed. An effective algorithm, that allows decompose the initial signal into components, is given. The condition, that the components preserve the properties of the signal, is taken into account.*

Conclusion. *A relationship between the representation of a function on a surface and its representation on the tangent plane is described. The action of the stereographic projection operator and its use for the organization of expansion in spherical harmonics is considered.*

Key words: *spherical harmonics, radio emission analysis, astronomical data processing, signal reconstruction, signal processing, decomposition of the function into components.*

В литературе, посвященной изучению обработки сигналов, акцент ставится на разработку эффективных алгоритмов, которые позволяют раскладывать сигнал на простые составляющие. При решении прикладных задач нередко приходится интегрировать данные, а это не всегда возможно, когда речь о работе со сложным сигналом. Не каждую функцию можно выразить в виде суммы элементарных функций, что влечет за собой сопутствующие трудности. Один из подходов к решению проблемы – это предварительное разложение исходного сигнала на более простые составляющие при условии, что

они сохраняют свойства исходного сигнала, тогда затем возникает возможность для последующего интегрирования полученного разложения.

Существует класс функций, способных к масштабированию и сдвигу по переменным. В их основе находятся специальные базовые функции, задающие общий вид и форму составляющих, которые удовлетворяют ряду специфических условий.

На практике удобно представлять рассматриваемый сигнал с помощью составляющих, содержащих разные частоты, каждой из которых соответствует свой масштаб.

Достоинствами данного подхода являются локализация и получение достаточного количества информации о сигнале по сравнению, например, с разложением по стандартным тригонометрическим функциям.

Обозначенный подход нашел широкое применение в комплексном анализе сейсмических сигналов в работах А. Гроссмана, Ж. Морле [1], А. Хаара [2], И. Мейера [3], И. Добеши [4].

В отличие от традиционно применяемого для анализа сигналов преобразования Фурье частотно-временное преобразование обеспечивает двумерную развертку исследуемого одномерного сигнала. В результате появляется возможность проводить анализ свойств сигнала. Такой анализ предусматривает рассмотрение разложения в физическом и частотном пространствах.

В настоящее время подобный подход широко применяется в задачах компьютерного распознавания образов; при обработке и синтезе сигналов различной природы (речевые сигналы, изображения медицинского назначения, спутниковые снимки, снимки, сделанные микроскопами) [5].

Выделяют класс задач, входные данные которых измеряются и определяются не на евклидовом пространстве, а на сфере. К данным, определенным на сфере, можно отнести астрофизические наблюдения, геофизические данные и др. В космологии разложения по частоте и координате используются в таких задачах, как анализ пространственного распределения галактик; построение оптимальных фильтров для изображений, представленных на сфере; определение топологии Вселенной.

Построению теории сферических гармоник, а также их практическому применению посвящено множество работ П. Шрёдера и В. Свелденса [6], Дж.Д. Мак Ивена [7–10], П. Вандерхейнста [11].

Цель работы – создание методики нахождения значения уровня радиоизлучения в промежуточных точках между станциями, значения в которых известны.

Материал и методы. Материалы исследования обработаны с помощью сферических вейвлетов для построения аппроксимирующей поверхности уровня радиоизлучения. Описан метод, позволяющий раскладывать сигнал по сферическим гармоникам.

Частотно-временное разложение сигнала. При разложении сигнала на составляющие возникает вопрос обеспечения покрытия всей вещественной оси (области существования сигнала).

Вводится на всей числовой прямой сдвиг функции. Целочисленный сдвиг будет определяться как функция $\psi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, где ψ является базовой функцией, по которой осуществляется разложение.

При рассмотрении таких волн различных частот, в случае частотного разбиения по целым степеням двойки, получаем сдвиг $\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ (двоичное растяжение в 2^j раз) и двухпараметрический сдвиг (на $k/2$).

Заметим, что выполняется условие (1):

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^j \psi(2^j x - k), k, j \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Исходный сигнал может быть представлен следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \Psi_{j,k}(x). \quad (2)$$

Роль базовых гармоник могут выполнять функции, представляющие собой импульсы со скачками уровня, синусоиды и т.п. Это обеспечивает разнообразную реализацию сигналов (с разрывами и локальными скачками), появляется большой выбор наиболее подходящих гармоник исходя из постановки решаемой задачи.

Особенности полученных разложений: они представлены в форме локализованных во времени (или (и) в пространстве) коротких волновых функций с нулевым значением интеграла; они имеют возможность сдвига по временной оси; способны к изменению масштаба.

При решении практических задач коэффициенты разложения могут оказаться настолько малыми, что их можно отбросить. Возникает возможность существенного сокращения объема обрабатываемой информации, избавления от шума в изображении, его сжатия.

При обработке черно-белого изображения те пиксели, чья насыщенность крайне близка, объединим в группы и окрасим в средний для них цвет, а разность яркости между ними сохраним в памяти как детализующие коэффициенты. Таким образом, получим сжатое изображение и разности яркости пикселей, с помощью которых возможно восстановить первоначальную картину. На этом принципе и основана работа аппарата вейвлет-преобразования при обработке изображений.

Особенности применения вейвлета Хаара. Для того чтобы наглядно рассмотреть пример вейвлет-преобразования, воспользуемся одним из самых простых вейвлетов – Хаара (рис. 1).

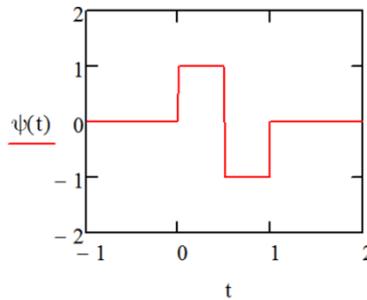


Рис. 1. График вейвлета Хаара

Построим график исходного сигнала $f(t) = \sin(t) + \sin(3t)$ (рис. 2).

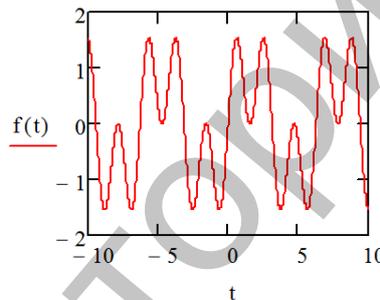


Рис. 2. Исходный сигнал

Коэффициенты разложения можно найти следующим образом:

$$c(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi(j, k, t)} dt, \quad (3)$$

$$c(1,1) = 0,096, c(1,2) = 0,18, c(1,3) = -0,114. \quad (4)$$

Тогда разложение (2) примет вид

$$f(x) = \sum_{j,k=-2}^1 c_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (5)$$

График разложения представлен на рис. 3.

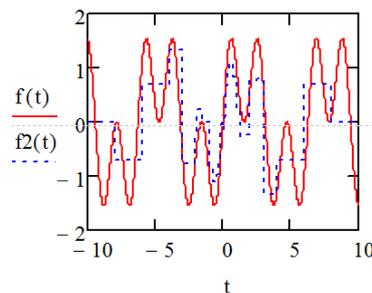


Рис. 3. Результат разложения

При решении практических задач коэффициенты вейвлет-представления зачастую существенно меньше, чем в приведенном выше примере. Иногда они оказываются настолько малыми, что их можно отбросить. Появляется возможность значительного сокращения объема информации о сигнале, его сжатии и очистке от шумов. Сейчас существует множество более сложных вейвлетов, чем вейвлет Хаара. Пользователь имеет доступ к широкому полю различных базисных функций как для точного, так и приближенного представления любых сигналов.

Геометрия сферы. Введем в рассмотрение эйлеровы углы α, β, γ , где γ – угол собственного вращения, β – угол нутации, α – угол прецессии.

Стереографическая проекция широко применяется в астрономии для проектирования земной поверхности на плоскость. Важным при этом является введение двух базовых координат – широты и долготы [12].

Принцип соответствия между сферическими и евклидовыми гармониками был подробно описан в работе Вьё, Жака и Вандерхейнста [11]. Этот принцип связывает понятия плоских евклидовых всплесков со сферическими гармониками через стереографическую проекцию.

Используя стереографическое проектирование, определим аффинные преобразования, которые способствуют построению гармоник на единичной сфере. Сферическое разложение по таким функциям может быть определено как проектирование на базис, где сферические всплески должны удовлетворять соответствующему критерию допустимости, чтобы гарантировать восстановление сигнала.

Единичная сфера, на которой найдены сферические гармоники, имеет начало отсчета ортогональной декартовой системы координат в точке (O, O_x, O_y, O_z) в трехмерном пространстве со сферическими координатами (r, θ, ϕ) . Предположим, что плоскость, на которой определены евклидовы гармоники, параллельна плоскости O_{xy} и проходит через северный полюс z_0 .

Пусть плоскость касается сферы в северном полюсе $z_0 = 1$. Возникает необходимость в построении непрерывной дифференцируемой биекции между S^2 и R^2 .

Пусть ϕ – долгота, θ – широта, Π – оператор стереографической проекции, Π^{-1} – обратный оператор стереографической проекции. Произвольная точка на единичной сфере однозначно определяется координатами (θ, ϕ) , где $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Тогда соответствующая точка на касательной плоскости представляется координатами (r, ϕ) .

Известно, что стереографическая проекция определяется проектированием точки единичной сферы в точку плоскости, касающейся сферы в северном полюсе, вдоль луча, исходящего из южного полюса.

Оператор проектирования примет вид

$$\Pi: \omega \rightarrow x = \Pi\omega = (r(\theta), \phi), \quad (6)$$

где первая координата точки выглядит следующим образом: $r(\theta) = 2tg(\theta/2)$, $\omega = (\theta, \phi) \in S^2$, $x \in R^2$ – точка на плоскости, определяемая координатами (r, ϕ) .

Существует также обратный оператор Π^{-1} , принцип действия описан в формуле (7):

$$\Pi^{-1}x = (\theta(r), \phi), \quad (7)$$

где угол $\theta(r) = 2arctg(r/2)$.

Растяжение аффинных преобразований на сфере вводится на основе стереографической проекции и задается на сфере. Естественное растяжение евклидовых преобразований на единичной сфере – это вращение. Оператор растяжения принимает вид

$$(\omega) \rightarrow f(\rho^{-1}\omega), \quad \rho \in SO(3), \quad (8)$$

где $SO(3)$ – группа растяжений, определяемая эйлеровыми углами.

Растяжение на единичной сфере строим, используя следующую последовательность действий: рассматриваем стереографическую проекцию, далее на плоскости применяем стандартное евклидово растяжение, а затем возвращаемся к сфере по формуле (7).

Сферические гармоники. Рассматривается пространство интегрируемых функций на единичной сфере $L^2(S^2, d\Omega)$ с мерой:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi. \quad (9)$$

Построим разложение функции $f \in L^2(S^2, d\Omega)$ по сферическим гармоникам:

$$f(\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\omega), \quad (10)$$

где $Y_{lm}(\omega)$ – сферические гармонические функции, $l \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq l$ из ортогонального базиса пространства $L^2(S^2, d\Omega)$ на S^2 . Сферические гармоники определяются формулой

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (11)$$

где P_l^m – многочлены Лежандра, записанные в следующей форме:

$$P_l^m(x) = (-1)^m \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l. \quad (12)$$

Тогда сферические гармоники принимают вид

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \mathfrak{Y}_{lm}(\theta) \varphi_m(\varphi), \quad -l \leq m \leq l, \quad (13)$$

где множители при гармониках могут быть представлены функциями:

$$\mathfrak{Y}_{lm}(\theta) = \left(\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\theta), \quad (14)$$

$$\varphi_m(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} e^{im\varphi}. \quad (15)$$

В данной задаче базовая функция разложения определяется как локализованная функция на единичной сфере, для которой могут быть применимы аффинные преобразования (перенос, вращение, растяжение). Условие допустимости для такой функции требует точного восстановления сигнала по его гармоническим коэффициентам.

Построение поверхности распределения значений уровня радиоизлучения Солнца. Построим математическую модель распределения потока радиоизлучения Солнца, фиксируемого на поверхности Земли, используя разложение по сферическим гармоникам. Целью данного исследования является построение поверхности распределения значений радиоизлучения Солнца, определение уровня радиоизлучения в промежуточных точках, расположенных между обсерваториями, координаты которых заданы изначально.

Алгоритм построения поверхности уровня радиоизлучения состоит из следующих шагов:

1. Представление исходных данных в виде массива (долгота, широта, уровень радиоизлучения (МГц)).
2. Построение сферических гармоник, соответствующих расположению обсерваторий.
3. Построение аппроксимирующей поверхности на основе вычисленных коэффициентов.

Для данной задачи использовались результаты фиксации радиоизлучений, полученные лабораториями и станциями, имеющими координаты: Гавана (-822.75, 2300.8), Уссурийск (4349, 13158), Торунь (1833.28, 5305.8), Троицк (3734.25, 5545.3), Нижний Новгород (4359, 5615.5), Санкт-Петербург (3019.64, 5946.3).

Результат построения стереографической проекции полученной поверхности распределения радиоизлучения представлен на рис. 4.

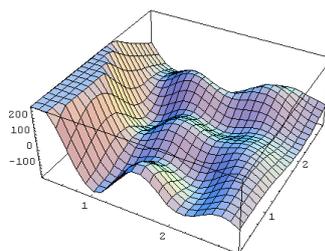


Рис. 4. Стереографическая проекция поверхности радиоизлучения

Заключение. Для определения сферических гармоник описана связь геометрии евклидова пространства и геометрии на сфере. Реализован алгоритм разложения сигнала по сферическим гармоникам для описания астрономических данных. Такой подход впервые применяется для исследования потока радиоизлучения Солнца, фиксируемого на поверхности Земли.

Были вычислены коэффициенты, и по ним восстановлен исходный сигнал, что позволило учесть особенности геометрии источника излучения и приемника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grossman, A. Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms / A. Grossman, J. Morlet // Lectures on Recent Results. – 1985. – Vol. 1. – P. 135–165.
2. Haar, A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionssysteme / A. Haar // Math. Ann. – 1910. – Vol. 69. – P. 331.
3. Meyer, Y. Wavelets: Algorithms and applications / Y. Meyer // S.I.A.M. – 1993. – Vol. 36. – P. 526–528.
4. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – М.: R\&C Dynamics, 2004. – 463 с.
5. Чуи, К. Введение в вейвлеты / К. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
6. Schröder, P. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere / P. Schröder, W. Sweldens // Siggraph. – 1995. – P. 161–172.
7. McEwen, J.D. A high-significance detection of non-Gaussianity in the WMAP 1-year data using directional spherical wavelets / J.D. McEwen, M.P. Hobson, D.J. Mortlock, A.N. Lasenby // Mon. Not. Roy. Astr. Soc. – 2005. – Vol. 359. – P. 1583–1596.
8. McEwen, J.D. A directional continuous wavelet transform on sphere / J.D. McEwen, M.P. Hobson, D.J. Mortlock, A.N. Lasenby // IEEE Trans. Sig. Proc. – 2006. – P. 1–7.
9. McEwen, J.D. Cosmological applications of a wavelet analysis on the sphere / J.D. McEwen, P. Vielva, Y. Wiaux, M.P. Hobson, R.B. Barreiro, L. Cayón, M.P. Hobson, A.N. Lasenby, E. Martínez-González, J.L. Sanz // Journal of Fourier Analysis and Applications. – 2007. – Vol. 13, no. 4. – P. 495–510.
10. McEwen, J.D. Fast directional continuous spherical wavelet transform algorithms / J.D. McEwen, M.P. Hobson, D.J. Mortlock, A.N. Lasenby // IEEE Trans. Sig. Proc. 2007. – Vol. 55, no. 2. – P. 520–529.
11. Wiaux, Y. Correspondence principle between spherical and Euclidean wavelets / Y. Wiaux, L. Jacques, P. Vanderghyest // Astrophys. J. – 2005. – Vol. 632, no. 1. – P. 15–28.
12. Розенфельд, Б.А. Стереографическая проекция / Б.А. Розенфельд, Н.Д. Сергеева. – М.: Наука, 1973. – 48 с.

REFERENCES

1. Grossman, A. Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms / A. Grossman, J. Morlet // Lectures on Recent Results. – 1985. – Vol. 1. – P. 135–165.
2. Haar, A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionssysteme / A. Haar. – Math. Ann. – 1910. – Vol. 69. – P. 331.
3. Meyer, Y. Wavelets: Algorithms and applications / Y. Meyer // S.I.A.M. – 1993. – Vol. 36. – P. 526–528.
4. Dobeshi I. *Desiat lektsi po veivletam* [Ten Wavelet Lectures], M.: R\&C Dynamics, 2004, 463 p.
5. Chewie K. *Vvedenie v veivlety* [Introduction to Wavelets], Moscow: Mir, 2001, 412 p.
6. Schröder, P. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere / P. Schröder, W. Sweldens // Siggraph. – 1995. – P. 161–172.
7. McEwen, J.D. A high-significance detection of non-Gaussianity in the WMAP 1-year data using directional spherical wavelets / J.D. McEwen, M.P. Hobson, D.J. Mortlock, A.N. Lasenby // Mon. Not. Roy. Astr. Soc. – 2005. – Vol. 359. – P. 1583–1596.
8. McEwen, J.D. A directional continuous wavelet transform on sphere / J.D. McEwen, M.P. Hobson, D.J. Mortlock, A.N. Lasenby // IEEE Trans. Sig. Proc. – 2006. – P. 1–7.
9. McEwen, J.D. Cosmological applications of a wavelet analysis on the sphere / J.D. McEwen, P. Vielva, Y. Wiaux, M.P. Hobson, R.B. Barreiro, L. Cayón, M.P. Hobson, A.N. Lasenby, E. Martínez-González, J.L. Sanz // Journal of Fourier Analysis and Applications. – 2007. – Vol. 13, no. 4. – P. 495–510.
10. McEwen, J.D. Fast directional continuous spherical wavelet transform algorithms / J.D. McEwen, M.P. Hobson, D.J. Mortlock, A. N. Lasenby // IEEE Trans. Sig. Proc. 2007. – Vol. 55, no. 2. – P. 520–529.
11. Wiaux, Y. Correspondence principle between spherical and Euclidean wavelets / Y. Wiaux, L. Jacques, P. Vanderghyest // Astrophys. J. – 2005. – Vol. 632, no. 1. – P. 15–28.
12. Rosenfeld B.A., Sergeeva N.D. *Stereograficheskaja proektsiia* [Stereographic Projection], Moscow: Nauka, 1973, 48 p.

Поступила в редакцию 10.10.2018

Адрес для корреспонденции: e-mail: maryanatolevna@mail.ru – Гундина М.А.