4. *Система **не** стабилизируема в случае существования хотя бы одного такого номера i, что вектора* $b_i^{[1]}, b_i^{[2]}$ $(k_{0i} < 0)$ *матриц* B_1, B_2 *противоположны направлены и соответствующее вещественное число* $p_i = 0$.

Заключение. В случае векторного управления получен критерий обладания свойством стабилизации для одного класса систем Пфаффа. Критерий стабилизации носит ранговый характер от некоторой матрицы, составленной с помощью известных матриц исходной системы. Проверка критерия не вызывает затруднений, так как вычисления проводятся в рамках матричного анализа.

Исследование носит фундаментальный характер.

1. Храмцов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференц. Уравнения. – 1985.– Т.21. – N 11. – С. 1933–1939.
2. Храмцов О.В. Стабилизируемость одного класса вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Веснік Віцебскага дзярж. ун-та, 2018. – №3. – С11-23.

ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ МАРШО–АДАМАРА И РАСХОДЯЩИЕСЯ ИНТЕГРАЛЫ

С.А. Шлапаков

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования являются операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара. В работе [4] была построена конструкция? которая является модификацией дробной производной Адамара [2] на полуоси, называемая дробной производной Маршо–Адамара порядка α, $0 < \alpha < 1$.

$$\left(\mathbf{D}_{0+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x} \frac{f(x) - f(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha+1}} \frac{dt}{t}, \qquad (1)$$

Цель данного исследования состоит в распространении дробной производной Маршо–Адамара на значения порядка $\alpha \geq 1$.

Материал и методы. Материалом исследования является дробная производная Маршо–Адамара. В работе используются методы функционального анализа, а также методы дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты и их обсуждение. Сравнивая классические дробные производные Маршо [1]

$$\left(D_{\pm}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x \mp t) - f(x)}{t^{1+\alpha}} dt$$

с дробными интегралами

$$\left(I_{\pm}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} f(x \mp t) dt,$$

можно заметить, что формально $D_{\pm}^{\alpha} f$ получается из $I_{\pm}^{\alpha} f$ заменой параметра-порядка α на (-α) (при этом вычитание *f(x)* обеспечивает сходимость интеграла). Напрашивается вывод о том, что дробные производные Маршо $D_{\pm}^{\alpha} f$ тесно связаны с понятиями, относящимися к расходящимся интегралам. Совершенно так же, сравнивая дробную производную Маршо–Адамара (1) с дробным интегралом Адамара [3]

$$\left(\mathfrak{I}_{0+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x} \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} f(xe^{-t}) dt, \qquad (2)$$

приходим к сопоставимым результатам. Определимся изначально с понятием интеграла в смысле Адамара [1].

<u>Определение.</u> Пусть функция $\Phi(t)$ интегрируема на отрезке $[\varepsilon; A]$ при любом $A > 0$ и $0 < \varepsilon < A$. Будем говорить, что $\Phi(t)$ обладает в точке $t = 0$ свойством Адамара, если существуют постоянные $\lambda_k > 0, a_k, b$ такие, что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{A}\Phi(t)dt=\sum_{k=1}^{N}a_k\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\lambda_k}+b\ln\frac{1}{\varepsilon}+J_0(\varepsilon), \qquad (3)$$

где предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}J_0(\varepsilon)$ существует и конечен. По определению

$$p.f.\int\limits_{0}^{A}\Phi(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}J_0(\varepsilon). \qquad (4)$$

Предел (4) называется конечной частью (в смысле Адамара) расходящегося интеграла $\int\limits_{0}^{A}\Phi(t)dt$ или просто интегралом в смысле Адамара.

Интеграл в смысле Адамара введён для интегрирования функций со степенными особенностями. Данное Адамаром определение конечной части расходящегося интеграла есть частный случай общего понятия регуляризации расходящихся интегралов, иными словами, выделение из них конечной части, содержащей в себе всю зависимость интеграла от параметра. В этой связи построение функции $J_0(\varepsilon)$ называют иногда регуляризацией интеграла $\int\limits_{0}^{A}\Phi(t)dt$.

Нетрудно заметить, что постоянные величины $\lambda_k>0,\ a_k,\ b$ в соотношении (3) не зависят от *A*. Если функция $\Phi(t)$ интегрируема в окрестности бесконечности, то полагаем по определению

$$p.f.\int\limits_{0}^{\infty}\Phi(t)dt=p.f.\int\limits_{0}^{A}\Phi(t)dt+\int\limits_{A}^{\infty}\Phi(t)dt.$$

Разумеется, что это определение не зависит от выбора числа *A*.

Принимая во внимание дробную производную Маршо–Адамара (1), будем теперь рассматривать расходящийся интеграл $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{f(xe^{-t})}{t^{1+\alpha}}dt$.

Теорема. Пусть $0<\alpha<1$, функция $f(x)$ является локально гёльдеровой [1] порядка $\lambda>\alpha$. Тогда функция $\Phi(t)=f(xe^{-t})t^{-(1+\alpha)}$ обладает в точке $t=0$ свойством Адамара при любом *x*. Если к тому же при $t\to 0+$ и $\varepsilon>0$ имеет место оценка $|f(t)|\le C|\ln(t)|^{\alpha-\varepsilon}$, $C-$постоянная, то

$$p.f.\int\limits_{0}^{\infty}\frac{f(xe^{-t})}{t^{1+\alpha}}dt=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{f(xe^{-t})-f(x)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

В теореме фактически утверждается тот факт, что $\mathbf{D}_{0+}^{\alpha}f=p.f.\,\mathfrak{I}_{0+}^{-\alpha}f$, $0<\alpha<1$. Такая трактовка дробных производных Маршо–Адамара (1) указывает способ распространения их на значения порядка $\alpha\ge 1$.

Заключение. Важность исследования свойств операторов дробного интегрирования и дифференцирования обусловлена их обширным применением в прикладных задачах физики. В работе предложен способ, позволяющий придавать смысл дробной производной Маршо-Адамара, когда её порядок $\alpha\ge 1$.

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. О дробном интегродифференцировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций / С.А. Шлапаков // Веснiк ВДУ. – 2009. – Т. 53, № 3.– С. 132–135.
3. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 16–17 марта 2011 г. – Витебск, 2011. – Т. 1. – С. 71–73.
4. Шлапаков, С.А. Производные Маршо-Адамара дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XX (67) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 12–13 марта 2015 г. – Витебск, 2015.– Т. 1. – С. 27–28.