матричное выражение, подобное первому подкоренному выражению в формуле (4). Его также необходимо привести к жордановой нормальной форме J_2. Извлекаем кубические корни из элементов матрицы J_2:

$$J_3 = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{J_2[1,1]} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{J_2[2,2]} \end{pmatrix}.$$

В общем случае для каждого из чисел $J_2[1,1]$ и $J_2[2,2]$ существует 3 различные комплексные значения кубического корня. Поэтому, выписывая все возможные комбинации, получаем 9 различных матриц $J_{3,i}$ $\left(i = 1,\dots,9\right)$.

Построив матрицу перехода от $J_{3,i}$ к $Y_i^{1/3}$, находим 9 значений кубического корня из матрицы Y.

Для получения решений A_i матричного разрешающего уравнения, аналогичного скалярному, осталось посчитать

$$\mathrm{A}_i = Y_i^{1/3} - \frac{P_1}{3}\left(Y_i^{1/3}\right)^{-1} - \frac{P}{3} \quad \left(i = 1,\dots,9\right).$$

Таким образом, исходное матричное уравнение (5) распадается на 2 квадратных матричных уравнения

$$\left[\begin{array}{l} X^2 - \sqrt{2}\mathrm{A}_0^{1/2} X + \left(\dfrac{P}{2} + \mathrm{A}_0 + \dfrac{Q}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{A}_0^{1/2}\right)^{-1}\right) = 0 \\ X^2 + \sqrt{2}\mathrm{A}_0^{1/2} X + \left(\dfrac{P}{2} + \mathrm{A}_0 - \dfrac{Q}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{A}_0^{1/2}\right)^{-1}\right) = 0, \end{array}\right.$$

в которые необходимо подставить вычисленные ранее значения A_i. При решении получившихся квадратных матричных уравнений используется такой же прием перехода к жордановой нормальной форме, что и при решении разрешающего уравнения.

В конечном итоге, из числа полученных матриц X следует исключить повторяющиеся и те, что не обращают исходное матричное уравнение в тождество. Напомним, что в общем случае матричное уравнение (5) имеет 16 различных корней.

Заключение. В ходе выполнения работы показано, что все решения произвольного матричного полиномиального уравнения четвертой степени с коммутативными коэффициентами размера $\left[2\times 2\right]$ можно получить аналитически. Также представлен алгоритм нахождения данных решений.

1. Higham, N.J. Solving a Quadratic Matrix Equations by Newton’s Method with Exact Line Searches / N.J. Higham, H.-M. Kim // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2001. – Vol. 23, № 2. – P. 303–316.
2. Bai, Z.-Z. Modified Bernoulli iteration method for quadratic matrix equation / Z.-Z. Bai, Y.-H. Gao // Journal of Computational Mathematics. – 2007. – Vol. 25, № 5. – P. 498–511.
3. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры: учеб. / А.Г. Курош. – 17-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 432 с.
4. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1988. – 655 с.

ПРОБЛЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПФАФФА

О.В. Храмцов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования являются вполне интегрируемые стационарные системы Пфаффа, которые являются линейными по входу – управлению и по выходу – состоянию системы. Такие системы исследовались на обладание ими различными свойствами, например, свойством полной управляемости, континуум управляемости, максимальной управляемости. Под стабилизацией понимается построение с помощью обратной связи такой вполне интегрируемой стационарной системы Пфаффа, тривиальное решение которой является асимптотически устойчивым в первом квадранте плоскости изменения двумерного аргумента.

Цель работы состоит в получении необходимых, а также достаточных ранговых условий для матриц системы, при которых линейная стационарная вполне интегрируемая система Пфаффа обладает свойством стабилизируемости при наличии векторного управления.

Материал и методы. Материалом для исследования является дифференциальная модель процесса в виде линейной стационарной вполне интегрируемой системы Пфаффа в специальной форме. Методами исследования являются методы матричного анализа, методы теории систем дифференциальных уравнений Пфаффа, метод внешних форм Картана.

Результаты и их обсуждение. Рассматривается процесс, описываемый вполне интегрируемой линейной стационарной системой Пфаффа в специальной форме [1]

$$\Theta: \ dx = (A_1 x + B_1 u(s))ds_1 + (A_2 x + B_2 u(s))ds_2, \quad (1)$$

где $s = (s_1, s_2) \in \mathrm{R}^2$, $x \in \mathrm{R}^n$, $u \in \mathrm{R}^r$, $r \le n$, A_1, A_2, B_1, B_2 – постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей.

Пусть матрицы системы (1) удовлетворяют критерию полной управляемости [1]

$$rank[B_1, A_1B_1, \ldots, A_1^{n-1}B_1] = n. \quad (2)$$

Введем в рассмотрение класс Θ_{Khr} систем Пфаффа обладающих дополнительными свойствами: Свойство полноты частичного ранга (дополнительное к условию (2)): $m_1 + m_2 + \ldots + m_m = m$

$$rank[b_i, A_1b_i, \ldots, A_1^{m_1-1}b_i, A_1^{m_1}b_i = rank[b_i, A_1b_i, \ldots, A_1^{m_1-1}b_i], \ i \in \{1, \ldots, m_m\},$$

2) Свойство коллинеарности матриц B_1, B_2 : $B_2 = B_1Ek_0$, $k_0 \in \mathrm{R}^n$.

3) Свойство различимости спектра матрицы A_1 : $\exists \alpha \in \mathrm{R}^2$: что матрица $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ имеет все различные между собой собственные числа.

Теорема 1. **[2]** *Существует невырожденное преобразование* $x = Dz$, *что* **с***истема линейных вполне интегрируемых стационарных уравнений Пфаффа класса* Θ_{Khr} *представима в виде композиции линейно независимых подсистем*

$$\{d\hat{z}_i = (F_i\hat{z}_i + q_iu_i(t))1t_i + (G_i\hat{z}_i + k_iq_iu_i(t))dt_2, \ i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Матрицы F_i имеет представление: $f_{i,i+1} = 1,$, последняя сторока $f_{[m_i]}$, остальные элементы $f_{ij} = 0$, матрицы $G_i = p_i + k_{0i}F_i$, вектор $q_i = (0,0,\ldots,0,1) \in \mathrm{R}^{m_i}$, вещественные числа k_{0i} определены в свойстве коллинеарности , вещественные числа p_i произвольны.

В силу теоремы 1 имеет место

Теорема 2. **[2]** *Система линейных вполне интегрируемых стационарных систем Пфаффа класса* Θ_{Khr} *обладает свойствами*

1. В случае попарной сонаправленности векторов $b_i^{[1]}, b_i^{[2]}$ $(k_{0i} > 0)$ *матриц* B_1, B_2 *для любых вещественных чисел* $p_i \in \mathrm{R}^1$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, *система стабилизируема, при этом радиус спектра не ограничен.*

2. В случае попарной противоположной направленности векторов $b_i^{[1]}, b_i^{[2]}$ $(k_{0i} < 0)$ *матриц* B_1, B_2 *для любого вещественного числа* $p_i \neq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, *система стабилизируема, при этом радиус спектра ограничен.*

3. В случае конечного числа r_1 *пар сонаправленных векторов* $b_i^{[1]}, b_i^{[2]}$ $(k_{0i} > 0)$ *при* $p_i \in \mathrm{R}^1$, *и конечного числа* r_2 *пар противоположно направленных векторов* $b_i^{[1]}, b_i^{[2]}$ $(k_{0i} < 0)$ *при* $p_i \neq 0$, *(*$r_1 + r_2 = m$*) система стабилизируема. Для части спектра, соответствующей первому случаю, радиус спектра не ограничен. Для части спектра, соответствующей второму случаю, радиус спектра ограничен.*

4. *Система **не** стабилизируема в случае существования хотя бы одного такого номера i, что вектора* $b_i^{[1]}, b_i^{[2]}$ $(k_{0i} < 0)$ *матриц* B_1, B_2 *противоположны направлены и соответствующее вещественное число* $p_i = 0$.

Заключение. В случае векторного управления получен критерий обладания свойством стабилизации для одного класса систем Пфаффа. Критерий стабилизации носит ранговый характер от некоторой матрицы, составленной с помощью известных матриц исходной системы. Проверка критерия не вызывает затруднений, так как вычисления проводятся в рамках матричного анализа.

Исследование носит фундаментальный характер.

1. Храмцов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференц. Уравнения. – 1985.– Т.21. – N 11. – С. 1933–1939.
2. Храмцов О.В. Стабилизируемость одного класса вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Веснік Віцебскага дзярж. ун-та, 2018. – №3. – С11-23.

ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ МАРШО–АДАМАРА И РАСХОДЯЩИЕСЯ ИНТЕГРАЛЫ

С.А. Шлапаков
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования являются операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара. В работе [4] была построена конструкция? которая является модификацией дробной производной Адамара [2] на полуоси, называемая дробной производной Маршо–Адамара порядка α , $0 < \alpha < 1$.

$$\left(\mathbf{D}_{0+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x} \frac{f(x) - f(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha+1}} \frac{dt}{t}, \qquad (1)$$

Цель данного исследования состоит в распространении дробной производной Маршо–Адамара на значения порядка $\alpha \geq 1$.

Материал и методы. Материалом исследования является дробная производная Маршо–Адамара. В работе используются методы функционального анализа, а также методы дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты и их обсуждение. Сравнивая классические дробные производные Маршо [1]

$$\left(D_{\pm}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x \mp t) - f(x)}{t^{1+\alpha}} dt$$

с дробными интегралами

$$\left(I_{\pm}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} f(x \mp t) dt \, ,$$

можно заметить, что формально $D_{\pm}^{\alpha} f$ получается из $I_{\pm}^{\alpha} f$ заменой параметра-порядка α на (-α) (при этом вычитание *f(x)* обеспечивает сходимость интеграла). Напрашивается вывод о том, что дробные производные Маршо $D_{\pm}^{\alpha} f$ тесно связаны с понятиями, относящимися к расходящимся интегралам. Совершенно так же, сравнивая дробную производную Маршо–Адамара (1) с дробным интегралом Адамара [3]

$$\left(\mathfrak{I}_{0+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x} \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} f(xe^{-t}) dt, \qquad (2)$$

приходим к сопоставимым результатам. Определимся изначально с понятием интеграла в смысле Адамара [1].

<u>Определение.</u> Пусть функция $\Phi(t)$ интегрируема на отрезке $[\varepsilon; A]$ при любом $A > 0$ и $0 < \varepsilon < A$. Будем говорить, что $\Phi(t)$ обладает в точке $t = 0$ свойством Адамара, если существуют постоянные $\lambda_k > 0, a_k, b$ такие, что