$$q_{13} = \frac{1}{2}\left(-1799 + \sqrt{3236369}\right); \quad q_{23} = -\frac{1}{2}\left(1799 + \sqrt{3236369}\right).$$

Корнями второго уровня назовём корни уравнений

$$q^2 + c_1 q + c_2 = q_{13}, \quad q^2 + c_1 q + c_2 = q_{23}.$$

В нашем случае $c_1 = -32, \ c_2 = 0.$ И, таким образом, корнями второго уровня являются корни

$$q_{12} = 16 + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369} - 2574}, \quad q_{22} = 16 - \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369} - 2574},$$

$$q_{32} = 16 + \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369} + 2574}, \quad q_{12} = 16 - \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369} - 2574}.$$

Корнями первого уровня будем считать корни первоначального полинома $P_8(z)$. Они находятся из уравнений

$$q^2 + b_1 q + b_2 = q_{12}, \quad q^2 + b_1 q + b_2 = q_{22},$$

$$q^2 + b_1 q + b_2 = q_{32}, \quad q^2 + b_1 q + b_2 = q_{42}.$$

Заключение. В результате проделанного исследования найдены необходимые и достаточные условия полинома восьмой степени, в виде суперпозиции трёх полиномов второй степени.

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Нелинейные матричные уравнения встречаются в многочисленных приложениях. Для их решения чаще всего используют итерационные методы, например, модификации метода Ньютона-Канторовича и алгоритма Бернулли [1–2]. Тем не менее, представляет интерес и точное аналитическое решение для некоторых типов матричных нелинейных уравнений, в частности, уравнений четвертой степени.

Таким образом, цель исследования – представить алгоритм для точного аналитического нахождения решений матричного полиномиального уравнения четвертой степени с коммутативными коэффициентами второго порядка.

Материал и методы. Материалом исследования являются матричные полиномиальные уравнения четвертой степени с коммутативными коэффициентами и методы их решения. Методы исследования – методы математического и функционального анализа.

Результаты и их обсуждение. Как известно, нахождение решения приведенного алгебраического уравнения четвертой степени вида (1) с произвольными комплексными коэффициентами по методу Феррари

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{1}$$

сводится к решению уравнения (2) [3, с. 239]

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0\right)^2 - 2\alpha_0\left(x - \frac{q}{4\alpha_0}\right) = 0, \tag{2}$$

в котором вспомогательный параметр α_0 является одним из трёх возможных корней уравнения третьей степени по α, называемого разрешающим:

$$q^2 - 8\alpha\left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0.$$

Последнее уравнение путём замены $\alpha = a - p/3$ приводится к виду

$$a^3 + p_1 a + q_1 = 0, \tag{3}$$

где

$$p_1 = -\frac{p^2}{12} - r,\ \ q_1 = -\frac{p^3}{108} + \frac{rp}{3} - \frac{q^2}{8}.$$

Уравнение (3) в общем случае решают, используя формулу Кардано (4) [3, с. 235]:

$$x = \beta + \gamma = \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{\frac{q_1^2}{4} + \frac{p_1^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} - \sqrt{\frac{q_1^2}{4} + \frac{p_1^3}{27}}} \tag{4}$$

$$\beta\gamma = -\frac{p_1}{3}.$$

Таким образом, после нахождения параметра α_0 уравнение (2) распадается на 2 квадратных уравнения, решении которых не составляет трудностей.

Рассмотрим обобщение вышесказанного на аналогичный матричный случай. Возьмём матричное полиномиальное уравнение с комплексными коммутативными матрицами-коэффициентами размера $[2\times 2]$:

$$X^4 + PX^2 + QX + R = 0. \tag{5}$$

Для этого уравнения составим матричное разрешающее уравнение по аналогии с уравнением (3) (для упрощения записи дан приведенный вид):

$$A^3 + P_1 A + Q_1 = 0, \tag{6}$$

$$P_1 = -P^2/2 - R;\quad Q_1 = -P^3/108 + RP/3 - Q^2/8.$$

Обозначим

$$D = \frac{Q_1^2}{4} + \frac{P_1^3}{27}.$$

Эту матрицу приведём к жордановой нормальной форме (в частности, в рассматриваемом примере она получается диагональной) [4, с. 148]:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

где λ_1 и λ_2 – собственные значения матрицы D ($|\lambda_1| < |\lambda_2|$).

Извлекаем квадратные корни из матрицы J (в общем случае получим 4 различные матрицы):

$$J_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Далее необходимо записать вид матрицы перехода от $D^{1/2}$ к эквивалентной ей матрице J_1. Напомним, что матрица перехода T состоит из собственных векторов матрицы D.

$$D^{1/2} = D_{1/2} = TJ_1T^{-1}.$$

Обозначим

$$Y = -\frac{Q}{2} + D_{1/2}$$

матричное выражение, подобное первому подкоренному выражению в формуле (4). Его также необходимо привести к жордановой нормальной форме J_2. Извлекаем кубические корни из элементов матрицы J_2:

$$J_3 = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{J_2[1,1]} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{J_2[2,2]} \end{pmatrix}.$$

В общем случае для каждого из чисел $J_2[1,1]$ и $J_2[2,2]$ существует 3 различные комплексные значения кубического корня. Поэтому, выписывая все возможные комбинации, получаем 9 различных матриц $J_{3,i}$ $(i=1,\dots,9)$.

Построив матрицу перехода от $J_{3,i}$ к $Y_i^{1/3}$, находим 9 значений кубического корня из матрицы Y.

Для получения решений A_i матричного разрешающего уравнения, аналогичного скалярному, осталось посчитать

$$\mathrm{A}_i = Y_i^{1/3} - \frac{P_1}{3}\left(Y_i^{1/3}\right)^{-1} - \frac{P}{3} \quad (i=1,\dots,9).$$

Таким образом, исходное матричное уравнение (5) распадается на 2 квадратных матричных уравнения

$$\left[\begin{array}{l} X^2 - \sqrt{2}\mathrm{A}_0^{1/2} X + \left(\dfrac{P}{2} + \mathrm{A}_0 + \dfrac{Q}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{A}_0^{1/2}\right)^{-1}\right) = 0 \\ X^2 + \sqrt{2}\mathrm{A}_0^{1/2} X + \left(\dfrac{P}{2} + \mathrm{A}_0 - \dfrac{Q}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{A}_0^{1/2}\right)^{-1}\right) = 0, \end{array}\right.$$

в которые необходимо подставить вычисленные ранее значения A_i. При решении получившихся квадратных матричных уравнений используется такой же прием перехода к жордановой нормальной форме, что и при решении разрешающего уравнения.

В конечном итоге, из числа полученных матриц X следует исключить повторяющиеся и те, что не обращают исходное матричное уравнение в тождество. Напомним, что в общем случае матричное уравнение (5) имеет 16 различных корней.

Заключение. В ходе выполнения работы показано, что все решения произвольного матричного полиномиального уравнения четвертой степени с коммутативными коэффициентами размера $[2\times 2]$ можно получить аналитически. Также представлен алгоритм нахождения данных решений.

1. Higham, N.J. Solving a Quadratic Matrix Equations by Newton's Method with Exact Line Searches / N.J. Higham, H.-M. Kim // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2001. – Vol. 23, № 2. – P. 303–316.
2. Bai, Z.-Z. Modified Bernoulli iteration method for quadratic matrix equation / Z.-Z. Bai, Y.-H. Gao // Journal of Computational Mathematics. – 2007. – Vol. 25, № 5. – P. 498–511.
3. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры: учеб. / А.Г. Курош. – 17-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 432 с.
4. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1988. – 655 с.

ПРОБЛЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПФАФФА

О.В. Храмцов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования являются вполне интегрируемые стационарные системы Пфаффа, которые являются линейными по входу – управлению и по выходу – состоянию системы. Такие системы исследовались на обладание ими различными свойствами, например, свойством полной управляемости, континуум управляемости, максимальной управляемости. Под стабилизацией понимается построение с помощью обратной связи такой вполне интегри-