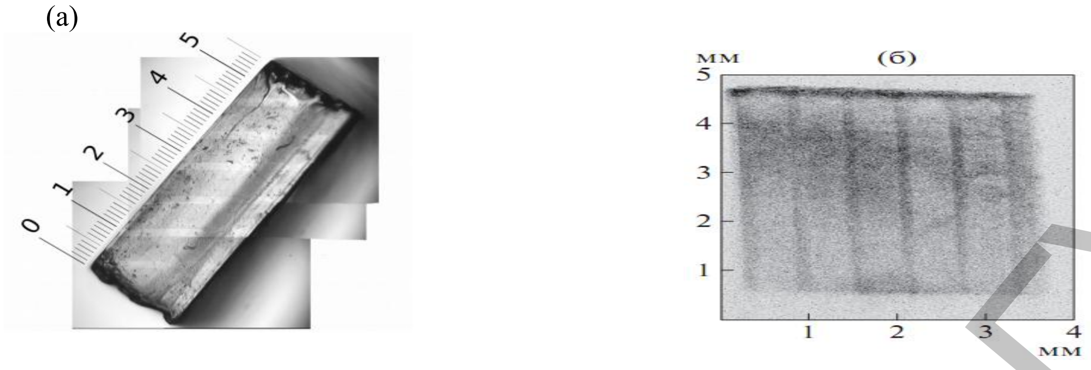

Рисунок 1 – Оптическое (а) и рентгенотопологическое (б) изображение образца TGS - TGS +Cr.

Результат РФА распределения примеси указанного образца TGS – TGS +Cr приведен на рисунке 2. Шаг передвижения рентгеновского пятна по образцу 0.1 мм и его размер 150 мкм по вертикали и 5 мм по горизонтали позволили выявить микроскопическую картину распределения примеси.

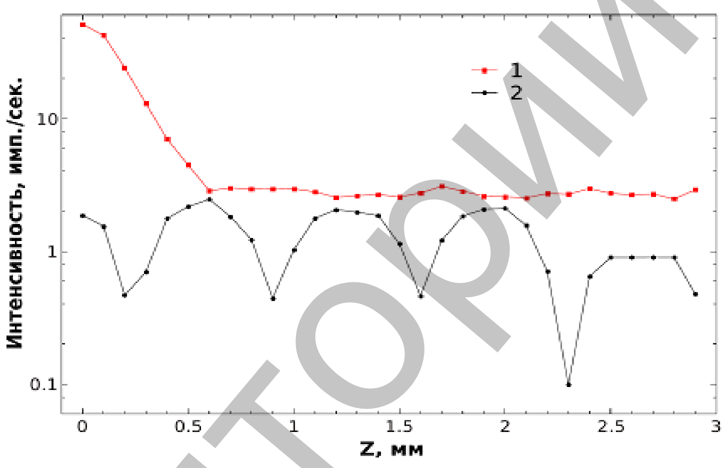

Рисунок 2 – Зависимость интенсивностей прошедшего сквозь кристалл излучения (1) и выхода флюоресцентного излучения линии Cr-Kα (2) от вертикального положения кристалла.

Полученный характер распределения примеси указывает на блочный механизм роста кристаллов при скоростном методе, а также позволяет объяснить инерционность процесса вхождения примеси в кристалл.

Заключение. Согласно проведенным исследованиям, для получения кристаллов TGS – TGS +Cr с одинаковой шириной чистых и примесных слоев и периодом роста менее 150 мкм необходимо уменьшить время роста в примесном растворе одновременно повышая скорость роста. Для получения качественных кристаллов необходимо в растворе с примесью создавать низкое пересыщение, при задании времени роста кристалла в примесном растворе нужно учитывать инерционность процесса вхождения примеси в кристалл.

ОБ УСЛОВИЯХ ПРЕДСТАВИМОСТИ ПОЛИНОМА ВОСЬМОЙ СТЕПЕНИ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ТРЕХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ

Ю.В. Трубников
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Актуальность данной работы заключается в том, чтобы получить наиболее удобный метод решения специального класса алгебраических уравнений, и ответить на вопрос разрешимо ли данное уравнение в радикалах.

Цель работы – сформулировать и обосновать необходимые и достаточные условия представимости алгебраического полинома восьмой степени в виде суперпозиции квадратичных полиномов, как следствие получить достаточное условие разрешимости в радикалах уравнения восьмой степени.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраический полином восьмой степени с комплексными коэффициентами

$$P_n(z) = z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + a_3 z^5 + a_4 z^4 + a_5 z^3 + a_6 z^2 + a_7 z + a_8,$$

а также представление этого полинома в виде суперпозиции трёх квадратичных полиномов.

А в качестве методов исследования были использованы методы алгебры, математического анализа и система компьютерной математики Maple 2017.

Результаты и их обсуждение. Пусть алгебраическое уравнение имеет вид:

$$P_8(z) = z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + a_3 z^5 + a_4 z^4 + a_5 z^3 + a_6 z^2 + a_7 z + a_8 = 0, \tag{1}$$

где $P_8(z)$ – полином восьмой степени, который является суперпозицией трёх квадратичных полиномов. То есть имеет следующий вид:

$$P_8(z) = f_3\left\{ f_2\left[f_1(z) \right] \right\}, \tag{2}$$

где $f_1(z) = z^2 + b_1 z + b_2,\ f_2(z) = z^2 + c_1 z + c_2,\ f_3(z) = z^2 + d_1 z + d_2.$

Рассмотрим задачу для полинома восьмой степени. Так как

$$f_3\left\{ f_2\left[f_1(z) \right] \right\} = z^8 + 4b_1 z^7 + 2\left(3b_1^2 + 2b_2 + c_1\right) z^6 + 2b_1\left(c_1 + 2b_2 +\right.$$

$$\left. + 2\left(b_1^2 + 2b_2 + c_1\right)\right) z^5 + \left[d_1 + 2b_2 c_1 + 2b_2^2 + 2c_2 + 4b_1^2\left(c_1 + 2b_2\right) + \left(b_1^2 + c_1 + 2b_2\right)^2 \right] z^4 +$$

$$+ \left[2b_1 d_1 + 4b_1\left(b_2 c_1 + b_2^2 + c_2\right) + 2b_1\left(c_1 + 2b_2\right)\left(b_1 + c_1 + 2b_2\right) \right] z^3 +$$

$$+ \left[d_1\left(b_1^2 + c_1 + 2b_2\right) + 2\left(b_2 c_1 + b_2^2 + c_2\right)\left(b_1^2 + c_1 + 2b_2\right) + b_1^2\left(c_1 + 2b_2\right) \right] z^2 +$$

$$+ b_1\left[d_1\left(c_1 + 2b_2\right) + 2\left(b_2 c_1 + b_2^2 + c_2\right)\left(c_1 + 2b_2\right) \right] z + d_1\left(b_2 c_1 + b_2^2 + c_2\right) +$$

$$+ \left(b_2 c_1 + b_2^2 + c_2\right)^2 + d_2,$$

то приравнивая коэффициенты полученного полинома и полинома (1) получаем систему уравнений и проведя анализ этой системы, получаем равенства:

$$a_3 = -\frac{7}{32} a_1^3 + \frac{3}{4} a_1 a_2; \tag{3}$$

$$a_5 = \frac{a_1}{256}\left(7a_1^4 - 20a_1^2 a_2 + 128a_4\right); \tag{4}$$

$$a_6 = -\frac{7}{4096} a_1^6 + \frac{1}{256} a_1^4 a_2 + \frac{3}{64} a_1^2 a_2^2 - \frac{1}{8} a_1^2 a_4 + \frac{1}{2} a_2 a_4 - \frac{1}{8} a_2^3; \tag{5}$$

$$a_7 = -\frac{a_1}{2048}\left(3a_1^2 - 8a_2\right)\left(a_1^4 - 8a_2^2 + 32a_4\right), \tag{6}$$

Пусть $f_1(z) = z^2 + (a_1/4) z + b_2,\ f_2\left[f_1(z) \right] = f_1^2(z) + c_1 f_1(z) + c_2,$

$$f_3\left\{ f_2\left[f_1(z) \right] \right\} = \left\{ f_2\left[f_1(z) \right] \right\}^2 + d_1\left\{ f_2\left[f_1(z) \right] \right\} + d_2,$$

где $c_1 = \frac{a_2}{2} - \frac{3a_1^2}{16} - 2b_2, \; d_1 = a_4 + \frac{a_1^4}{32} + \frac{3a_1^2 b_2}{8} - \frac{a_2^2}{4} - a_2 b_2 + 2b_2^2 - 2c_2,$

$$d_2 = a_8 + \frac{a_2^3 b_2}{8} + \frac{3a_1^6 b_2}{512} + a_4 b_2^2 - a_4 c_2 - \frac{a_1^4 c_2}{32} + \frac{a_2^2 c_2}{4} - \frac{a_2 a_4 b_2}{2} - \frac{a_1^4 a_2 b_2}{64} +$$

$$+ \frac{3a_1^2 a_4 b_2}{16} - \frac{3a_1^2 a_2^2 b_2}{64} - a_2 b_2^3 + \frac{17}{256} a_1^4 b_2^2 + \frac{3a_1^2 b_2^3}{8} + a_2 b_2 c_2 - \frac{3a_1^2 a_2 b_2^2}{16} -$$

$$- \frac{3a_1^2 b_2 c_2}{8} + b_2^4 + c_2^2 - 2b_2^2 c_2.$$

При вычислении с такими коэффициентами выражения $f_3\left\{ f_2\left[f_1(z) \right] \right\}$ получаем тождество

$$f_3\left\{ f_2\left[f_1(z) \right] \right\} = z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + a_3 z^5 + a_4 z^4 + a_5 z^3 + a_6 z^2 + a_7 z + a_8, \qquad (7)$$

в котором коэффициенты a_3, a_5, a_6, a_7 выражаются равенствами (3)-(6). Таким образом, доказана

Теорема. Необходимым и достаточным условием представления полинома $P_8(z)$ в виде $f_3\left\{ f_2\left[f_1(z) \right] \right\}$ являются равенства (3)-(6).

Следствие. Равенства (3)-(6) являются достаточными условиями разрешимости уравнения $P_8(z) = 0$ в радикалах.

Далее в качестве конкретного примера рассматривается уравнение восьмой степени, в котором коэффициенты удовлетворяют условиям связи (17)-(20).

Рассмотрим пример, в котором $a_1 = 16, \; a_2 = 32, \; a_4 = 7, \; a_8 = 8,$ т.е.

$$P_8(z) = z^8 + 16z^7 + 32z^6 - 512z^5 + 7z^4 + 18488z^3 - 12400z^2 - 230272z + 8. \qquad (8)$$

Корнями полинома (8) являются числа:

$$z_1 = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{80 - 2\sqrt{2\sqrt{3236369} - 2574}},$$

$$z_{2,3} = -2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{80 \mp 2\sqrt{2\sqrt{3236369} - 2574}},$$

$$z_4 = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{80 + 2\sqrt{2\sqrt{3236369} - 2574}},$$

$$z_{5,6} = -2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{80 - 2i\sqrt{2\sqrt{3236369} + 2574}},$$

$$z_{7,8} = -2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{80 + 2i\sqrt{2\sqrt{3236369} + 2574}},$$

Найти эти корни можно при помощи следующего алгоритма. Назовём корнями третьего уровня корни уравнения

$$q^2 + d_1 q + d_2 = 0.$$

В данном примере, считая, что $b_2 = c_2 = 0,$ получаем $d_1 = 1799, \; d_2 = 8.$ Обозначив эти корни через q_{13}, q_{23} (второй индекс обозначает номер уровня) получаем, что

$$q_{13} = \frac{1}{2}\left(-1799 + \sqrt{3236369}\right); \quad q_{23} = -\frac{1}{2}\left(1799 + \sqrt{3236369}\right).$$

Корнями второго уровня назовём корни уравнений

$$q^2 + c_1 q + c_2 = q_{13}, \quad q^2 + c_1 q + c_2 = q_{23}.$$

В нашем случае $c_1 = -32,\ c_2 = 0.$ И, таким образом, корнями второго уровня являются корни

$$q_{12} = 16 + \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369} - 2574}, \quad q_{22} = 16 - \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369} - 2574},$$

$$q_{32} = 16 + \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369} + 2574}, \quad q_{12} = 16 - \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369} - 2574}.$$

Корнями первого уровня будем считать корни первоначального полинома $P_8(z)$. Они находятся из уравнений

$$q^2 + b_1 q + b_2 = q_{12}, \quad q^2 + b_1 q + b_2 = q_{22},$$

$$q^2 + b_1 q + b_2 = q_{32}, \quad q^2 + b_1 q + b_2 = q_{42}.$$

Заключение. В результате проделанного исследования найдены необходимые и достаточные условия полинома восьмой степени, в виде суперпозиции трёх полиномов второй степени.

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Нелинейные матричные уравнения встречаются в многочисленных приложениях. Для их решения чаще всего используют итерационные методы, например, модификации метода Ньютона-Канторовича и алгоритма Бернулли [1–2]. Тем не менее, представляет интерес и точное аналитическое решение для некоторых типов матричных нелинейных уравнений, в частности, уравнений четвертой степени.

Таким образом, цель исследования – представить алгоритм для точного аналитического нахождения решений матричного полиномиального уравнения четвертой степени с коммутативными коэффициентами второго порядка.

Материал и методы. Материалом исследования являются матричные полиномиальные уравнения четвертой степени с коммутативными коэффициентами и методы их решения. Методы исследования – методы математического и функционального анализа.

Результаты и их обсуждение. Как известно, нахождение решения приведенного алгебраического уравнения четвертой степени вида (1) с произвольными комплексными коэффициентами по методу Феррари

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{1}$$

сводится к решению уравнения (2) [3, с. 239]

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0\right)^2 - 2\alpha_0\left(x - \frac{q}{4\alpha_0}\right) = 0, \tag{2}$$

в котором вспомогательный параметр α_0 является одним из трёх возможных корней уравнения третьей степени по α, называемого разрешающим: