# О СВОЙСТВЕ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*А.А. Козлов*
*Новополоцк, УО «ПГУ»*

Одним из активно развивающихся разделов дифференциальных уравнений на сегодняшний день является теория управления асимптотическими характеристиками линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Основными действенными инструментами, используемыми в ней и появившимися изначально в теории управления конечномерными линейными динамическими системами [2], стали матрица управляемости (матрица Калмана), а также свойство равномерной полной управляемости линейной управляемой динамической системы. Полученные результаты планируется в дальнейшем использовать при решении задачи управления асимптотическими характеристиками таких уравнений.

Цель данной работы состоит во введении и изучении для бесконечномерного гильбертова пространства некоторых свойств как оператора Калмана, так и равномерно вполне управляемых уравнений.

**Материал и методы.** В представленной работе материалом для исследования являются линейные управляемые уравнения в гильбертовом пространстве и изучается свойство их равномерной полной управляемости. При исследовании применяются методы функционального анализа, теории дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и тео-рии управления динамическими системами.

**Результаты и их обсуждение.** Рассмотрим линейное управляемое дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)v, \quad x \in \mathcal{H}_1, \quad v \in \mathcal{H}_2, \quad t \ge 0, \qquad (1)$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$. Линейную оператор-функцию $A(\cdot): \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ будем считать интегрально ограниченной, т.е. для нее выполняется неравенство $\sup\{\int_t^{t+1} \| A(\tau) \| d\tau \le a, t \ge 0\}$ (здесь и далее под нормой оператора $C: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ подразумевается величина $\|C\| = \sup\{\frac{\|Cy\|_2}{\|y\|_1}, y \in \mathcal{H}_1, y \ne 0\} = \; = \sup\{\|Cy\|_2, y \in \mathcal{H}_1, \|y\|_1 = 1\}$, где $\|\cdot\|_k$ – норма в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_k$, $k = 1,2$). Линейную оператор-функцию $B(\cdot): \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ будем полагать непрерывной и ограниченной. В качестве управлений $v(\cdot)$ в уравнении (1) будем рассматривать измеримые по Лебегу и интегрально ограниченные на всей своей области определения функции.

**Определение 1** [2]**.** Состояние $x_0 \in \mathcal{H}_1$ системы (1) называется *управляемым в момент времени* $t_0$, если его можно перевести за конечное время $[t_0, t_1]$ в нуль вдоль решения системы (1), т.е. существуют $t_1 > t_0$ и управление $v: [t_0, t_1] \to \mathcal{H}_2$ такие, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ и этим управлением удовлетворяет равенству $x(t_1) = 0$.

**Определение 2** [2]**.** Система (1) называется вполне управляемой в мо-мент времени $t_0$, если всякое состояние $x_0 \in \mathcal{H}$ управляемо в этот момент.

Пусть $U(t, \tau)$, $t, \tau \ge 0$, – эволюционный (разрешающий) оператор[3] дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathcal{H}_1$, $t \ge 0$, т.е. оператор, удовлетворяющий системе $\frac{dX}{dt} = A(t)X$, $X: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, $X(\tau) = I$, где $I$ – тождественный оператор в пространстве $\mathcal{H}_1$.

**Теорема 1.** *Состояние* $x_0 \in \mathcal{H}_1$ *системы* (1) *управляемо в момент времени* $t_0$ *тогда и только тогда, когда найдется такие момент времени* $t_1 > t_0$ *и допустимое управление* $v:[t_0,t_1] \to \mathcal{H}_2$, *что справедливо равенство*

$$x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} U(t_0,\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Поскольку линейная оператор-функцию $B(\cdot): \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ является непрерывным и ограниченным оператором, то для нее существует сопря-женная непрерывная линейная оператор-функция $B^*(\cdot): \mathcal{H}_2^* \to \mathcal{H}_1^*$, поэтому корректно следующее

**Определение 3.** *Оператором управляемости* (*оператором Калмана*) уравнения (1) на отрезке $[t_0,t_1]$ назовем оператор $\mathcal{W}(t_0,t_1): \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ вида

$$\mathcal{W}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} U(t_0,\tau)B(\tau)B^*(\tau)U^*(t_0,\tau)d\tau.$$

**Замечание 1.** Очевидно, что при любых $t_0, t_1 \geq 0$ оператор $\mathcal{W}(t_0,t_1)$ является линейным оператором.

**Теорема 2.** *При всех* $t_0, t_1 \geq 0$ *оператор Калмана* $\mathcal{W}(t_0,t_1)$ *является эрмитовым.*

**Следствие 1.** *При всех* $t_0, t_1 \geq 0$ *форма* $(\mathcal{W}(t_0,t_1)x, x)$ *принимает только вещественные значения.*

**Замечание 2.** Здесь и далее символ $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве.

**Определение 4** [3]**.** Точка комплексной плоскости называется *регулярной точкой* оператора $H: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, если в существует оператор (*резольвента* оператора $H$) $R_\lambda = (H - \lambda I)^{-1}$. Множество всех регулярных точек оператора $H$ открыто. Его дополнение $\sigma(H)$ называтся *спектром* оператора $H$.

**Замечание 3** [3]**.** Спектр эрмитова оператора $\sigma(H)$ представляет собой замкнутое ограниченное множество на вещественной оси. Наименьший сегмент, содержащий в себе спектр $\sigma(H)$, обозначают $[\lambda_m(H), \lambda_M(H)]$, при этом $\lambda_m(H) = \inf\{(Hx,x), \|x\| = 1\}$, $\lambda_M(H) = \sup\{(Hx,x), \|x\| = 1\}$.

**Определение 5** [3]. Оператор $H: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ называется *неотрицательным,* если форма $(Hx, x)$ неотрицательна при любом $x \neq 0$.

**Теорема 3.** *При всех* $t_0, t_1 \geq 0$ *оператор Калмана* $\mathcal{W}(t_0,t_1)$ *является неотрицательным.*

**Определение 6** [3]. Оператор $H: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ называют *равномерно положительным*, если его форма $(Hx, x)$ равномерно положительна на единичной сфере $S = \{x, \|x\| = 1\}$ в $\mathcal{H}_1$, т.е. если $\lambda_m(H) > 0$.

**Определение 7.** Уравнение (1) называется *равномерно вполне управляемым*, если найдутся такие $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что при каждых $t_0 \geq 0$ и $\xi \in \mathcal{H}_1$ для оператора Калмана уравнения (1) выполнено неравенство

$$(\mathcal{W}(t_0, t_0 + \sigma)\xi, \xi) \geq \alpha \|\xi\|^2$$

и $\sigma$*-равномерно вполне управляемым*, если уравнение (1) равномерно вполне управляемо на отрезках длины $\sigma$. Иначе, называется *равномерно вполне управляемым*, если найдется такое $\sigma > 0$, что при всяком $t_0 \geq 0$ оператор Калмана уравнения (1) равномерно положительный.

**Теорема 4.** *Если уравнение* (1) *является* $\sigma$*-равномерно вполне управляемым, то существует такое положительное число* $\beta$*, что при каждом* $t_0 \geq 0$ *выполнено неравенство* $(\mathcal{W}^{-1}(t_0, t_0+\sigma)\xi, \xi) \leq \beta$.

**Определение 8.** Уравнение (1) называется *равномерно вполне управляемым*, если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in \mathcal{H}_1$ найдется измеримое и ограниченное управление $v:[t_0, t_0+\sigma] \to \mathcal{H}_2$, при всех $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ удовлетворяющее $\|u(t)\| \leq \gamma \|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

**Теорема 5.** *Уравнение* (1) *равномерно вполне управляемо если и только, если оператор Калмана равномерно положителен для всякого* $t_0 \geq 0$.

**Заключение.** Представленные результаты в дальнейшем позволят обобщить результаты по управлению асимптотическими характеристиками конечномерных динамических систем на случай гильбертова пространства.

*Работа выполнялась в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).*

1. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. – Минск: Беларус. навука, 2012.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М., 2004.
3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М., 1970.

## БИОМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЧЕЛОВЕКА

*Е.А. Корчевская, Л.В.Маркова*
*Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Биометрические технологии основаны на измерении некоторых уникальных характеристик отдельного человека, или биометрии. Эти уникальные признаки могут быть врождёнными (например, ДНК или отпечатки пальцев), приобретёнными со временем (почерк), а также изменяющимися с возрастом или при внешнем воздействии (голос). Подобные технологии активно применяются в областях, связанных с обеспечением безопасности доступа к защищённой информации, и задачах уникальной идентификации личности.

Идентификация по отпечаткам пальцев является самой распространённой, надёжной и эффективной биометрической технологией и основывается на уникальности рисунка папиллярных узоров на пальцах. Надёжность состоит в нереальности создания идентичного отпечатка, а практичность заключается в невозможности утери отпечатка и отсутствии необходимости носить с собой дополнительный предмет.

Голосовая идентификация относится к динамическим методам биометрии и позволяет удалённо идентифицировать человека, но, в тоже время, ряд факторов влияет на результат распознавания (помехи в микрофонах, влияние среды записи, различные эмоциональные состояния).

Целью исследования является разработка рекомендаций по применению методов искусственного интеллекта при реализации системы биометрической идентификации

**Материал и методы.** В качестве методов исследования использовались сверточная нейронная сеть, дискретное преобразование Фурье [1] и методы объектно-ориентированного программирования. Сверточная нейронная сеть – это особенная архитектура искусственной нейронной сети, использующая особенности зрительной коры, в которой были открыты простые клетки, которые реагируют под разными углами на прямые линии, и так называемые сложные клетки, чья реакция связана с активацией строго определенного множества простых клеток. Идея сверточных нейронных сетей заключается в чередовании субдискретизирующих и сверточных слоев. Структура данной сети не имеет обратных связей (однонаправленная) и имеет много слоев. Сверточные нейронные сети уподобляются биологическим процессам и явля-