О КРАТНО σ-ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССАХ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н.Н. Воробьев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ является некоторым разбиением множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Если n – целое число, символ $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n)\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$. Целые числа n и m называются σ-взаимно простыми, если $\sigma(n) \cap \sigma(m) = \emptyset$.

Следуя [1, 2] назовем некоторую функцию f вида

$$f\colon \sigma \to \{\text{классы Фиттинга}\} \qquad (1)$$

σ-функцией и полагаем

$LR_\sigma(f) = (G \mid G = 1$ или $G \neq 1$ и $G/O^{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, где $O^{\sigma_i',\sigma_i}(G)$ – наименьшая σ_i-замкнутая нормальная подгруппа группы G.

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой σ-функции f вида (1), то класс $\mathfrak{F}$ назовем *σ-локальным* с *σ-функцией Хартли f* (более кратко, *H_σ-функцией f*). Следуя [1, 2] будем полагать, что всякий класс Фиттинга является 0-кратно σ-локальным. При $n > 0$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *n-кратно σ-локальным*, если либо $\mathfrak{F} = (1)$ – класс всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, где все значения $f(\sigma_i)$ являются $(n-1)$-кратно σ-локальными классами Фиттинга для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$. H_σ-функция называется *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LR_\sigma(f)$ для всех i.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{F} = \cap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ и $\mathfrak{F}_j = LR_\sigma(f_j)$ для всех $j \in J$, тогда $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \cap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) = \cap_{j \in J} \sigma(\mathfrak{F}_j)$ и $f(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{F})$. Более того, если f_j – внутренняя H_σ-функция для всех $j \in J$, тогда f также является внутренней H_σ-функцией.*

Пусть f – σ-функция. Тогда символом $\mathrm{Supp}(f)$ обозначается множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \emptyset$. σ-функция f называется *l_σ^n-значной*, если $f(\sigma_i)$ является n-кратно σ-локальным классом Фиттинга для всех $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)$. Заметим, что для любого множества групп $\mathfrak{X}$, $l_\sigma^n\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ является n-кратно σ-локальным классом Фиттинга. Будем называть данный класс Фиттинга *n-кратно σ-локальным классом Фиттинга, порожденным* $\mathfrak{X}$.

Для любых двух классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ будем полагать $\mathfrak{M} \vee_\sigma^n \mathfrak{H} = l_\sigma^n\mathrm{fit}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Если m и h являются l_σ^n-значными σ-функциями, тогда $m \vee_n^\sigma h$ является σ-функцией такой, что $(m \vee_\sigma^n h)(\sigma_i) = m(\sigma_i) \vee_\sigma^n h(\sigma_i)$ для всех i; мы используем также $m \cap h$ для обозначения σ-функции такой, что $(m \cap h)(\sigma_i) = m(\sigma_i) \cap h(\sigma_i)$ для всех i.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}_j = LR_\sigma(f_j)$, где f_j является внутренней l_σ^{n-1}-значной H_σ-функцией $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_\sigma^n \mathfrak{F}_2 = LR_\sigma(f)$, где $f = f_1 \vee_\sigma^{n-1} f_2$ является внутренней H_σ-функцией.*

1. Chi, Zhang. On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups / Zhang Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 2 (35). – P. 85–88.
2. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

КЛАССЫ ФИТТИНГА И ФОРМАЦИИ ЛОКЕТТА

С.Н. Воробьев, Н.Т. Воробьев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем [1]. При построении структурной теории классов Фиттинга ключевым объектом в исследованиях является оператор Локетта «*» [2]. Напомним, что оператор «*» сопоставляет каждому непустому классу Фиттинга F наименьший из классов Фиттинга F^*, содержащий F такой, что для любых групп G и H F^*-радикал их прямого произведения совпадает с прямым произведением F^*-радикалов этих групп. Класс Фиттинга F называют *классом Локетта* [2], если $F = F^*$.

Дуализируя оператор «*» Дёрк и Хоукс [3] в теории формаций групп определяют оператор «^{0}». Каждой непустой формации F оператор «^{0}» сопоставляет наименьшую формацию F^0, содержащую F такую, что для любых групп G и H F^0-корадикал прямого произведения G и H

совпадает с прямым произведением F^0-корадикалов этих групп. Формацию F называют *формацией Локетта* $F = F^0$.

Основная цель настоящей работы – описание необходимого и достаточного условия, когда частично локальный класс Фиттинга является формацией Локетта.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Класс Фиттинга F называют ω-*локальным* [4], если локальный класс Фиттинга, порожденный F, содержится в фиттинговом произведении $F\,N_{\omega'}$, где $N_{\omega'}$ – класс Фиттинга всех нильпотентных групп ω′-групп. Как установлено в работе [5], каждый ω-локальный класс Фиттинга F можно определить посредством функции *F* такой, что для всех $p \in \omega$, что $F(p) = F(p)\,N_p \subseteq F$ и классы $F(p)$ являются классами Локетта, а $f(\omega') = F$. Такую функцию будем называть *канонической* для F.

Развитие и усиление результатов первого автора из [6] представляет

ТЕОРЕМА. ω-*Локальный класс Фиттинга* F *является формацией Локетта тогда и только тогда, когда все значения его канонической функции – формации Локетта.*

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes // Berlin–New York : Walter de Gruyter. – 1992. – P.891.
2. Lockett, P. The Fitting class F^* / P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137. – S. 131–136.
3. Doerk, K. On the residual of a direct product / K. Doerk, T. O. Hawkes // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30. – S. 458–468.
4. Skiba, A. N. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups / A. N. Skiba, L. A. Shemetkov // Siberian. Adv. Math. – 2000. – Vol. 10, № 2. – P. 112–141.
5. Воробьёв, Н. Т. О наибольшей приведенной функции Хартли / Н. Т. Воробьёв // Вопросы алгебры. – 1999 – Т. 15, № 1. – С. 14–17.
6. Guo, W. Formations defined by Doerk-Hawkes operation / W. Guo, S. N. Vorob'ev // J. Algebra. Appl. – 2018. – Vol. 17, № 12. // doi.org/10.1142/S0219498818502298.

КАНОНИЧЕСКОЕ АФФИННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ ЛИ $G_4 I$

А.К. Гуц[1], М.Н. Подоксенов[2]

[1]Омск, ОмГУ имени Ф.М. Достоевского

[2]Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе [1] был изложен метод построения аффинных представлений разрешимых вещественных групп Ли по коммутационным соотношениям соответствующей алгебры Ли. Результат, т.е. вид представления естественно зависит от вида коммутационных соотношений, и было бы полезно получить аффинное представление четырехмерных разрешимых групп Ли для коммутационных соотношений, используемых в классической монографии А.З.Петрова [2]. Цель данной работы: на примере группы Ли $G_4 I$ показать, как с помощью метода Ямагучи [1] решается задача получения желанного аффинного представления. Группа Ли $G_4 I$ интересна тем, что она фигурирует в качестве группы движений у пространств максимальной подвижности T_2, $\overset{*}{T}_2$ и T_3, $\overset{*}{T}_3$ [2].

Материал и методы. Рассматривается вещественная четырехмерная разрешимая алгебра Ли $\mathfrak{g}_4 I$ типа Бианки в форме [2]. Методом Ямагучи находится аффинное представление ее группы Ли в аффинном арифметическом пространстве R^n.

Результаты и их обсуждение. Пусть G вещественная связная группа Ли. Она допускает *аффинное представление в* R^n, если существует гомоморфизм

$$\alpha : G \to Aff(\mathsf{R}^n) \cong GL(\mathsf{R}^n), \;\; G \ni g :\to \alpha(g) \in Aff(\mathsf{R}^n),$$

где $Aff(\mathsf{R}^n)$ − группа афинных преобразований n-мерного арифметического пространства R^n, или, равно, общих линейных преобразований пространства R^n.

Пусть дана n-мерная группа Ли G_n, ее алгебра Ли $\mathfrak{g}_n$ с базисом $X_1,\ldots,X_n$. Строим представление

$$\Lambda : \mathfrak{g}_n \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_n), \;\; \Lambda(X_i) : \mathfrak{g}_n \ni X_j \to \Lambda(X_i) X_j \in \mathfrak{g}_n,$$

такое, что