Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

**М.Н. Подоксёнов, Ю.В. Трубников
А.Н. Кабанов**

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ И СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Методические рекомендации

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2019*

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.34я13
П44

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 19.12.2018 г.

Авторы: заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов;** профессор кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, профессор **Ю.В. Трубников;** доцент кафедры кибернетики ОмГУ имени Ф.М. Достоевского, кандидат физико-математических наук **А.Н. Кабанов**

Р е ц е н з е н т :
заведующий кафедрой высшей математики УО «ПГУ»,
кандидат физико-математических наук, доцент *А.А. Козлов*

Подоксёнов, М.Н.

П44 Задачи на построение в аксонометрической проекции и сечения многогранников : методические рекомендации / М.Н. Подоксёнов, Ю.В. Трубников, А.Н. Кабанов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – 38 с.

Данное издание подготовлено для студентов факультета МиИТ в соответствии с учебными программами по дисциплинам «Начертательная геометрия и инженерная графика» (специальность «Программное обеспечение информационных технологий»), «Методы изображения фигур» (специальность «Прикладная информатика (Веб-программирование и компьютерный дизайн)»), «Методы изображения фигур и основания геометрии» (специальность «Математика и информатика»). Излагаются теоретический материал и примеры решения задач.

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.34я73

Оглавление

Введение

Данное издание предназначено для студентов 3 курса дневного отделения и 2–3 курсов дневного и заочного отделений факультета МиИТ, обучающихся по специальности «Программное обеспечение информационных технологий», 3 курса дневного отделения, обучающихся по специальностям «Математика и информатика» и «Прикладная информатика (веб-программирование и компьютерный дизайн)».

Издание включает в себя теоретический материал, вопросы и упражнения для самоконтроля и задания для самостоятельного решения. Задания делятся на три уровня сложности согласно второй цифре в номере задания. В контрольную работу как на дневном, так и на заочном отделении будут включены задания, подобные приведённым в данном издании. Для получения минимальной удовлетворительной оценки студент должен уметь решать задания первого и второго уровней сложности.

Основным видом работы по освоению материала курса является самостоятельная работа студента. Изучение следует начинать с проработки теоретического учебного материала и только после этого приступать к выполнению практических заданий. Для понимания материала, изложенного в главе 2 настоящего издания, следует сначала изучить материал, изложенный в [1].

Задания следует выполнять карандашами с помощью чертёжных инструментов: треугольников, циркулей. Все вспомогательные построения, в том числе и линии связи, выполняются тонкими линиями. В качестве линий видимого контура используются сплошные основные линии, невидимый контур изображается штриховыми линиями. Толщина тонких, штриховых и штрихпунктирных линий должна быть в 2–3 раза тоньше основных линий.

Более подробно требования по оформлению контрольной работы можно найти в системе дистанционного обучения Витебского государственного университета *sdo.vsu.by*.

Рекомендуется проработать все вопросы и упражнения для самоконтроля. На зачёте студенту может быть задан любой из этих вопросов или любое из этих упражнений.

ГЛАВА 1. АКСОНОМЕТРИЯ

§1. *Аксонометрия. Изображение точек.*

Напомним, что аффинным репером в пространстве называется произвольная упорядоченная четвёрка точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Аффинный репер определяет в пространстве аффинную систему координат. Если репер является ортонормированным и имеет правую ориентацию, то он задаёт декартову СК.

Фигуру, расположенную в пространстве, мы называем оригиналом и обозначаем с черточкой сверху: $\bar{\Phi}$. Пусть Φ_o – проекция оригинала на плоскость изображений σ. Всякая фигура Φ, подобная Φ_o, называется *изображением фигуры* $\bar{\Phi}$.

Пусть $\bar{\mathcal{R}} = (\bar{O}, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$ – аффинный репер в пространстве.

Теорема Польке-Шварца. *Вершины произвольного четырёхугольника $OE_1E_2E_3$ в плоскости изображений σ могут служить изображением аффинного репера, равного данному реперу $\bar{\mathcal{R}}$.*

Поясним формулировку. Для того чтобы проекция данного репера на данную плоскость изображений оказалась подобна $OE_1E_2E_3$, возможно понадобится данный репер в пространстве повернуть. Тогда получится, что четырёхугольник $OE_1E_2E_3$ является изображением не данного репера, а равного ему.

Равносильная формулировка. *Каков бы ни был четырёхугольник $OE_1E_2E_3$ и аффинный репер $\bar{\mathcal{R}} = (\bar{O}, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$, существует такая плоскость σ, что проекция репера $\bar{\mathcal{R}}$ на эту плоскость подобна $OE_1E_2E_3$.*

В дальнейшем предполагаем, что репер задаёт декартову СК $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. Плоскость $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ будем называть горизонтальной, $\bar{O}\bar{x}\bar{z}$ – фронтальной, $\bar{O}\bar{y}\bar{z}$ – профильной. Пусть $\bar{M}$ – произвольная точка в пространстве с координатами (x_1, x_2, x_3). Это означает, что

$$\overrightarrow{\bar{O}\bar{M}} = x_1\vec{\mathbf{i}} + x_2\vec{\mathbf{j}} + x_3\vec{\mathbf{k}}\,.$$

Проекцию точки $\bar{M}$ на горизонтальную плоскость $\bar{O}\bar{E}_1\bar{E}_2$ параллельно вектору $\vec{\mathbf{k}}$ обозначим $\bar{M}_1$, и пусть $\bar{M}_x$ – проекция точки $\bar{M}_1$ на ось Ox параллельно вектору $\vec{\mathbf{j}}$ (рисунок 1). Тогда ломаная $\bar{O}\bar{M}_x\bar{M}_1\bar{M}$ называется *координатной ломаной* точки $\bar{M}$. Для её звеньев выполнено

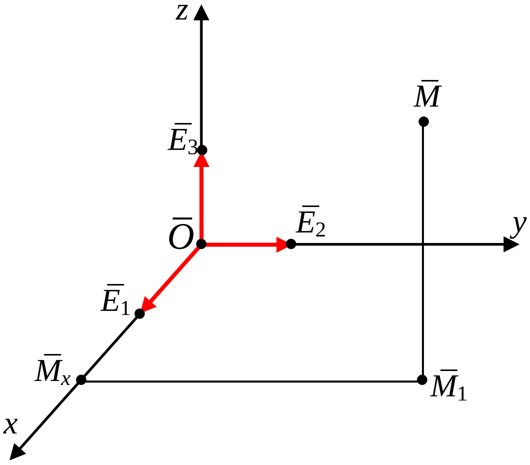


*рис.*1

$|\bar{O}\bar{M}_x| = |x_1|$, $|\bar{M}_x\bar{M}_1| = |x_2|$,

$$|\bar{M}_1\bar{M}| = |x_3|.$$

Выберем плоскость изображений σ и направление проецирования не параллельно координатным плоскостям. Спроецируем на плоскость репер вместе с координатной ломаной и применим преобразование подобия. Получим изображение $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2, E_3)$ репера и изображение OM_xM_1M координатной ломаной (рисунок 2). При изображении сохраняется соотношение отрезков, принадлежащих параллельным прямым. Поэтому

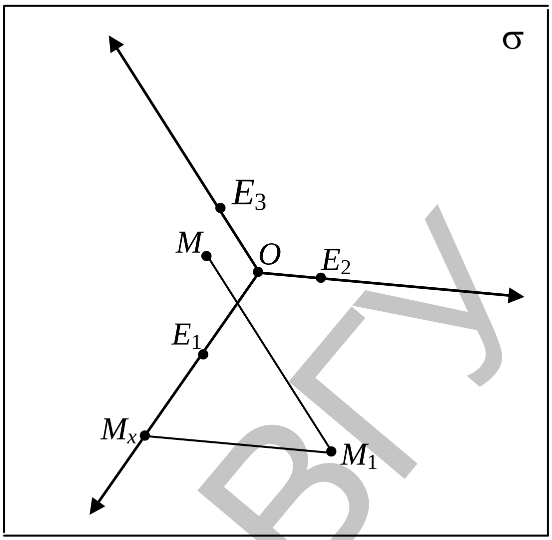


*рис.*2

$$|OM_x| = |x_1||OE_1|,\ |M_xM_1| = |x_2||OE_2|,\ |M_3M| = |x_3||OE_3|.$$

Из этого вытекает следующее утверждение.

Если на плоскости σ дано изображение аффинного репера, то мы можем построить изображение M данной точки $\bar{M}$ по её координатам. Если даны изображения аффинного репера ***и координатной ломаной****, то мы можем определить координаты точки $\bar{M}$.*

Заметим, что само изображение M точки не $\bar{M}$ даёт возможности найти координаты этой точки. Если даны на изображении две точки M и M_1, то мы можем восстановить изображение всей координатной ломаной, и тем самым, найти координаты $\bar{M}$.

Если мы умеем строить изображения точек в системе координат, то мы можем строить и изображение пространственных фигур. Этот метод называется *методом аксонометрического проецирования*. Точку O называют началом аксонометрической СК, а оси Ox, Oy, Oz – аксонометрическими осями. Изображения координатных плоскостей *называют аксонометрическими плоскостями*.

Пусть $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$ – проекции точки M на фронтальную и профильную плоскость соответственно параллельно координатным осям $\bar{O}\bar{y}$ и $\bar{O}\bar{x}$ (рисунок 3). Пусть M_2, M_3 – изображения этих точек. Тогда точка M называется *аксонометрической проекцией точки* $\bar{M}$, а M_1, M_2, M_3 называются её *вторичными проекциями*.

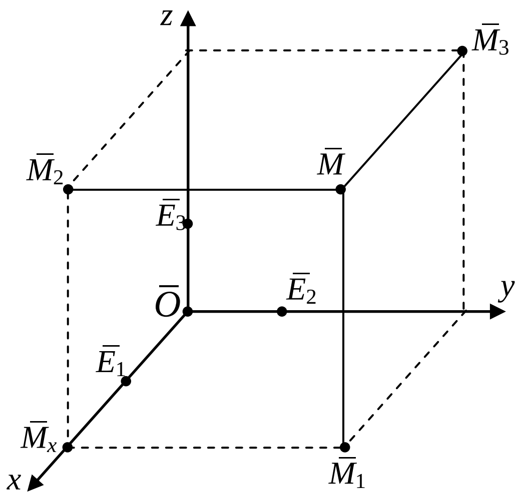


*рис.*3

Для того чтобы определить координаты точки $\overline{M}$ по её изображению, достаточно иметь на чертеже её аксонометрическую проекцию и любую из вторичных. Но, если не оговорено, о какой вторичной проекции идёт речь, то предполагается, что это точка M_1.

Вместо утверждения «*в пространстве дана точка* $\overline{M}$, *аксонометрическая проекция которой есть* M, *а вторичная* M_1» будем говорить «*дана точка* (M, M_1)».

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется оригиналом, и что называется изображением оригинала?
2. Что может служить изображением пространственного аффинного репера, либо равного ему репера?
3. Что такое «координатная ломаная»?
4. Что такое аксонометрическая, и что такое вторичная проекция точки? На какой аксонометрической плоскости по умолчанию выбирается вторичная проекция точки?
5. Что означает фраза «*дана точка* (M, M_1)»?

§2. *Изображение прямых и плоскостей в аксонометрической проекции.*

Будем предполагать, что направление проецирования не параллельно рассматриваемым прямым и плоскостям. Тогда изображением прямой будет прямая, а изображение плоскости будет накрывать всю плоскость изображений σ.

Прямая $\overline{a}$ на плоскости изображений задаётся двумя своими точками (M, M_1) и (N, N_1) или аксонометрической проекцией a и вторичной a_1. Тогда говорим, что дана прямая (MN, M_1N_1) или прямая (a, a_1). Если прямая $\overline{a}$ не параллельна оси $\overline{O}\overline{z}$, то её вторичная проекция есть прямая (рисунок 4). Если $\overline{a} \parallel \overline{O}\overline{z}$, то её вторичная проекция есть точка. В последнем случае, мы подписываем эту точку всё равно, как a_1 (рисунок 5). Сама ось $\overline{O}\overline{z}$ задаётся на изображении как (OE_3, O) или (Oz, O).

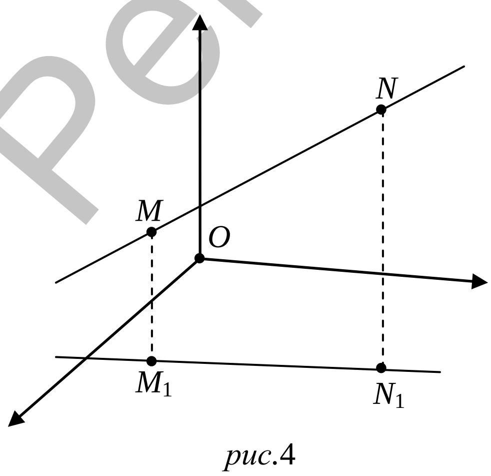


*рис.*4

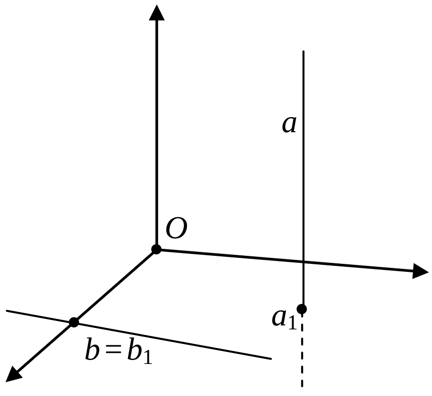


*рис.*5

Если прямая $\overline{b}$ лежит в горизонтальной плоскости, то её аксонометрическая и вторичная проекции совпадают: $b = b_1$ (рисунок 5).

Рассмотрим возможные варианты расположения двух прямых (a, a_3) и (b, b_3). Как у пересекающихся прямых (рисунки 6 а-в), так и у параллельных (рисунки 7 а-в), могут совпадать либо аксонометрические, либо вторичные проекции. Если совпадают и те и другие проекции, то совпадают и сами прямые.

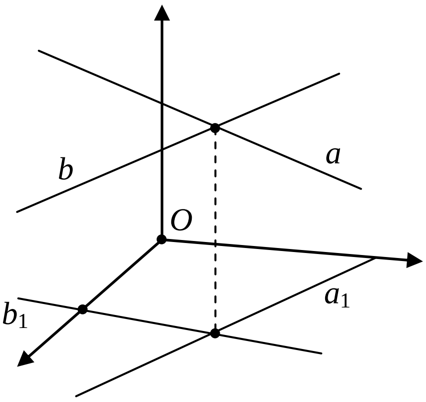


*рис.*6*а*

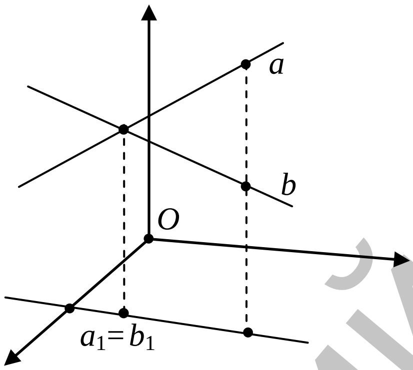


*рис.*6*б*

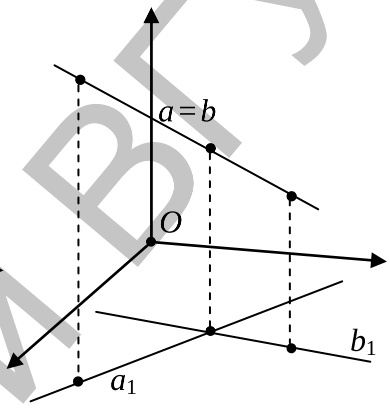


*рис.*6*в*

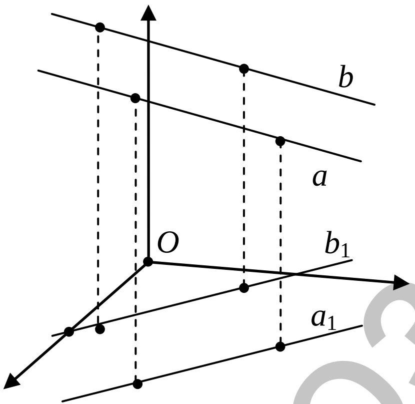


*рис.*7*а*

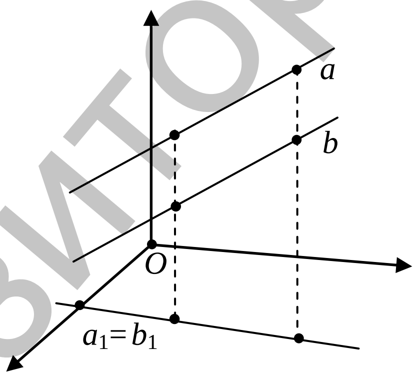


*рис.*7*б*

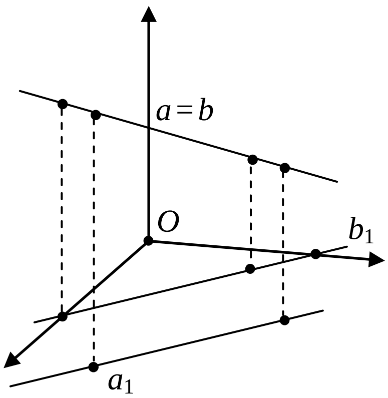


*рис.*7*в*

Плоскость может быть задана тремя своими точками, либо двумя своими прямыми, либо прямой и не лежащей на ней точкой.

Пусть $\overline{p}$ – прямая, по которой данная плоскость $\overline{\pi}$ пересекает горизонтальную плоскость, а p – её изображение. Тогда прямая p называется *следом плоскости*. Пусть $\overline{P}$ – точка пересечения плоскости $\overline{\pi}$ с координатной осью $\overline{O}\overline{z}$, (P, O) – её изображение. Наиболее удобным считается способ

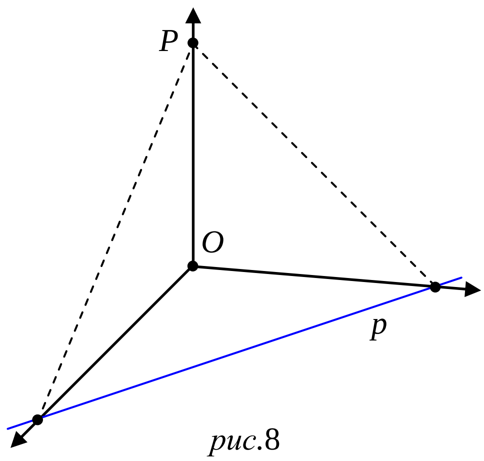


*рис.*8

изображения плоскости именно с помощью этих элементов: следа p и точки (P, O) (рисунок 8). Можно также говорить о следах данной плоскости на других координатных плоскостях; на чертеже они изображены пунктиром. Но если не сказано, о каком следе идёт речь, то предполагается, что это след на горизонтальной плоскости.

Возможны варианты расположения плоскости, при которых один из вышеупомянутых элементов отсутствует (рисунки 9 а,б).

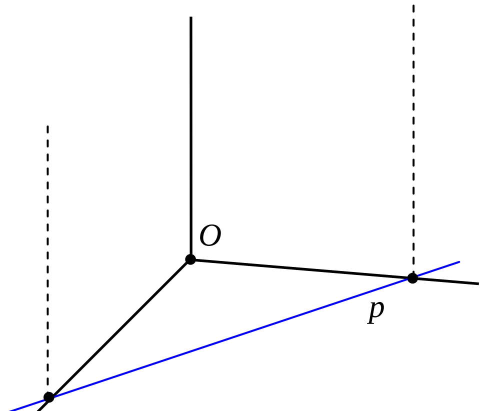


*рис.*9*а*

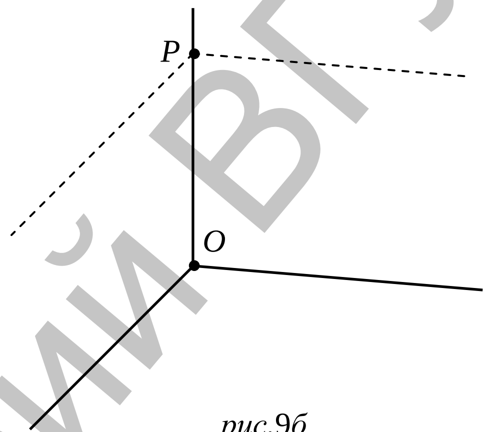


*рис.*9*б*

Пусть прямая $\overline{a}$ пересекает горизонтальную плоскость в точке $\overline{X}$. Аксонометрическая и вторичная проекции этой точки совпадают – это точка X (рисунок 10). Точка X называется *следом прямой* $\overline{a}$. Если прямая $\overline{a}$ параллельна $\overline{O}\overline{x}\overline{y}$, то след у неё будет отсутствовать. Можно также говорить о следах прямой на других координатных плоскостях. Если говорится просто «след прямой», то подразумевается, что это след на горизонтальной плоскости.

Ключом к решению многих задач на построение является следующее очевидное утверждение. *Если прямая лежит на плоскости, то её след лежит на следе плоскости* (рисунок 11).

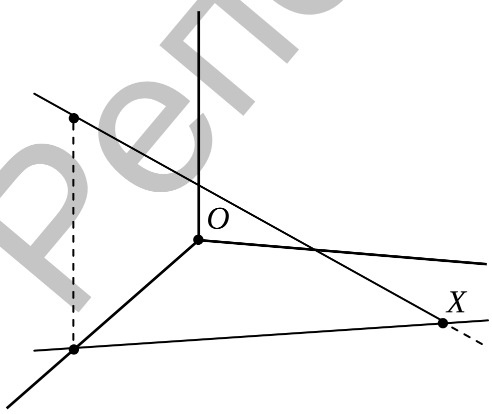


*рис.*10

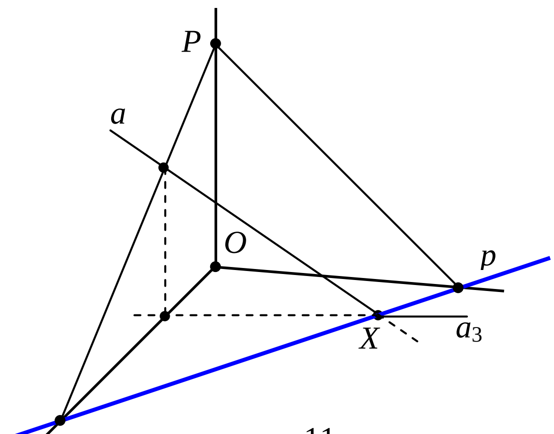


*рис.*11

Вопросы для самоконтроля

1. Какими способами в аксонометрической проекции задаются прямая и плоскость? Какой способ задания плоскости считается наиболее удобным?

2. Могут ли аксонометрические, либо вторичные проекции различных прямых совпадать, если эти прямые: а) пересекающиеся; б) параллельные? Могут ли для этих прямых совпадать одновременно и аксонометрические и вторичные проекции?

3. Что такое след прямой и что такое след плоскости? На какой аксонометрической плоскости по умолчанию выбирается след прямой или плоскости?

4. Какая фраза служит ключом к решению многих задач на построение в аксонометрической проекции?

§3. *Задачи на построение в аксонометрической проекции.*

Следующие задачи мы будем использовать при построении сечений многогранников.

***Задача* 1.** *Прямая* (a, a_1) *лежит в плоскости, заданной тремя точками* (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), *не лежащими на одной прямой. По заданной прямой* a *построить* a_1.

Решение. Строим прямые AB, A_1B_1, AC, A_1C_1, BC, B_1C_1. Мы договорились, что направление проецирования не параллельно рассматриваемым прямым и плоскостям. Поэтому точки A, B, C не лежат на одной прямой и прямые AB, AC, BC не совпадают. Прямая a пересекает две из этих прямых в точках M и N. По этим точкам мы можем построить вторичные проекции M_1 и N_1 (для этого необходимо провести прямые параллельные Oz). Тогда $a_1 = M_1N_1$ (рисунок 12).

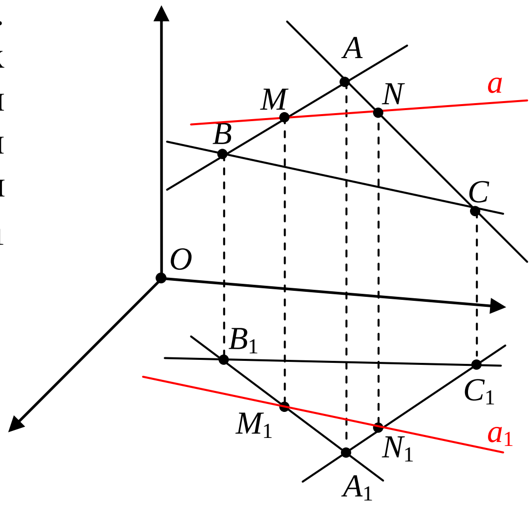


*рис.*12

И, наоборот, если задана прямая a_1, мы можем найти M_1 и N_1, по ним найти M и N. Тогда $a = MN$. Но здесь возможна ситуация, что A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. Тогда задача не имеет решения.

***Задача* 2.** *Точка* (X, X_1) *лежит в плоскости, заданной тремя точками* (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), *не лежащими на одной прямой. По заданной точке* X_1 *построить* X.

Решение. Точка (X, X_1) лежит в одной плоскости с точками (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1). Поэтому прямые (XC, X_1C_1) и (AB, A_1B_1) лежат в одной плоскости. Пусть они пересекаются в точке (M, M_1) (если эти прямые не пересекаются, то пересекаются прямые (XA, X_1A_1) и (BC, B_1C_1), и мы рассмотрим их).

Строим (рисунок 13):

1. $M_3=X_3C_3\cap A_3B_3$;
2. $m||OE_3$, $M_3\in m$;
3. $AB\cap m=M$;
4. $l||OE_3$, $X_3\in l$;
5. $l\cap CD=X$.

Аналогично по точке X можем найти X_3. Самостоятельно разберите случай, когда A_3, B_3, C_3 лежат на одной прямой.

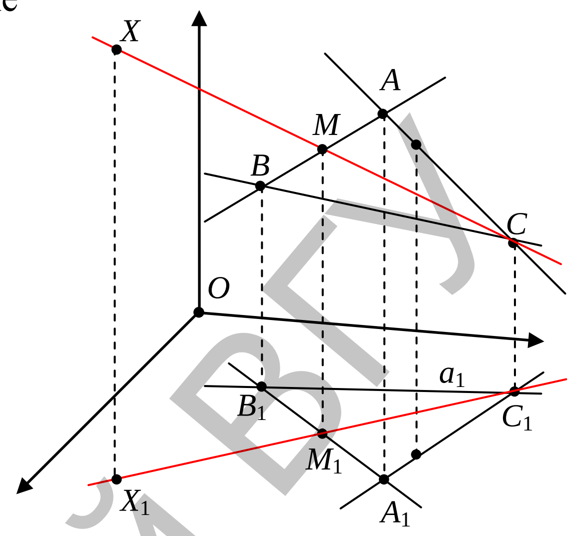


*рис.*13

***Задача* 3.** *Построить следы прямой* (a, a_1) *на всех координатных плоскостях.*

Решение. Очевидно, что $X=a\cap a_1$ есть след прямой на горизонтальной плоскости (рисунок 14). Пусть (C, C_1) – точка пересечения прямой с фронтальной плоскостью. Тогда $C_1\in OE_3$ и $C_1\in a_1$ $\Rightarrow$ $C_1\in a_1\cap Ox$. Для того чтобы найти C, проводим прямую, параллельную OE_3.

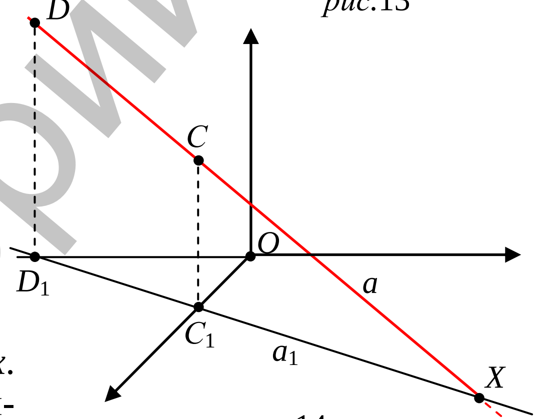


*рис.*14

Аналогично строится след прямой на профильной плоскости.

***Задача* 4.** *Плоскость задана тремя точками* (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), *не лежащими на одной прямой. Построить её след.*

Решение. Прямые (AB, A_1B_1) и (AC, A_1C_1) лежат на плоскости $\Rightarrow$ их следы лежат на следе плоскости. Строим (рисунок 15):

1. $X=AB\cap A_1B_1$, $Y=AC\cap A_1C_1$;
2. $p=XY$ – след.

Если какая-либо из прямых не имеет следа, то вместо неё рассмотрим прямую (BC, B_1C_1).

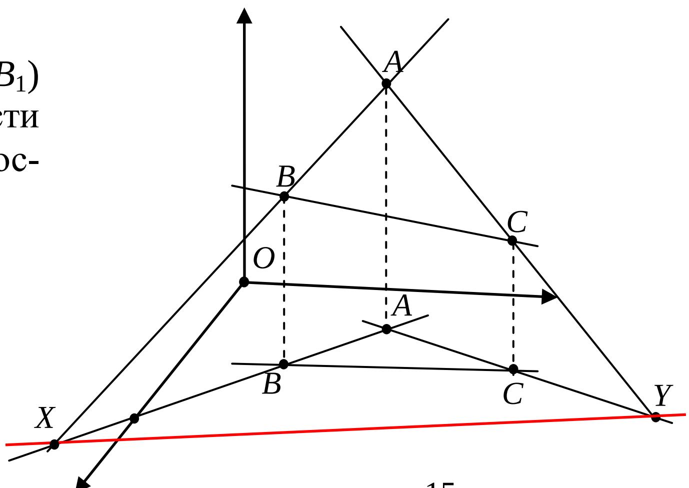


*рис.*15

Упражнение. Используя рисунок 12, постройте след плоскости.

Задача 4. *Плоскость задана своим следом p и точкой (P, O). Точка (M, M_1) лежит на плоскости (рисунок 16). Дана точка M. Построить M_1.*

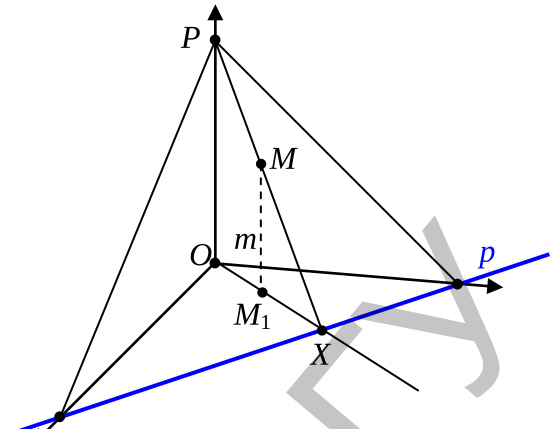


*рис.*16

Решение. Точки (P, O) и (M, M_1) лежат на плоскости. Значит, прямая (PM, OM_1) тоже лежит на плоскости. Следовательно, её след X лежит на следе плоскости, причём, $X=PM\cap OM_1$. Строим:

1. $X=PM\cap p$;
2. $m||Oz$, $M\in m$;
3. $m\cap OX=M_1$.

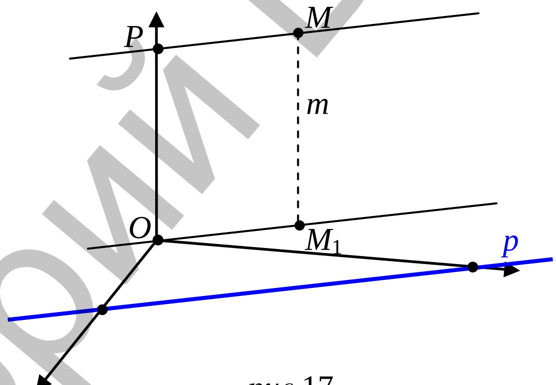


*рис.*17

Возможен случай, когда прямые PM и p не пересекаются. Это означает, что прямая $\overline{P}\overline{M}$ не имеет следа. Тогда она параллельна плоскости $\overline{O}\overline{E}_1\overline{E}_2$. В этом случае $OM_3||PM$ и мы можем её построить.

Аналогично, по имеющейся точке M_1 мы можем построить M.

Упражнения для самоконтроля

1.1. С помощью рисунка 16 разберитесь, как решается следующая задача. Даны след p плоскости и точка (M, M_1), принадлежащая плоскости. Найти точку (P, O) на аксонометрической оси Oz. Выполните это построение на рисунке 18.

1.2. На рисунке 15 найдите точку, изображающую пересечение заданной плоскости с осью $\overline{O}\overline{z}$.

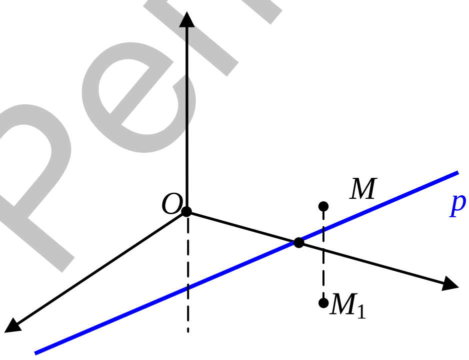


*рис.*18

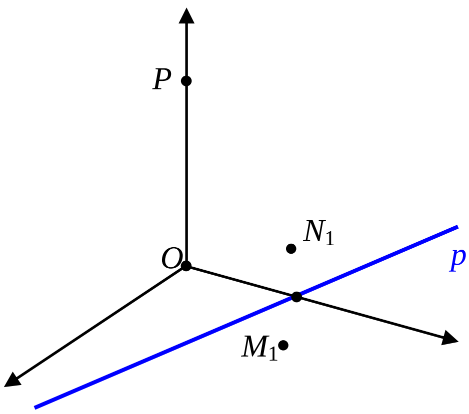


*рис.*19

1.3. На рисунке 20 найдите след плоскости и точку, изображающую пересечение заданной плоскости с осью $\overline{O}\overline{z}$.

2.1. На рисунке 19 постройте точки M и N, если (M, M_1) и (N, N_1) лежат в плоскости, заданной следом и точкой (P, O).

3.2. На рисунке 21 найдите след плоскости, проходящей через данные на чертеже точки.

3.3. На рисунке 21 найдите след плоскости и точку, изображающую пересечение заданной плоскости с осью $\overline{O}\overline{z}$.

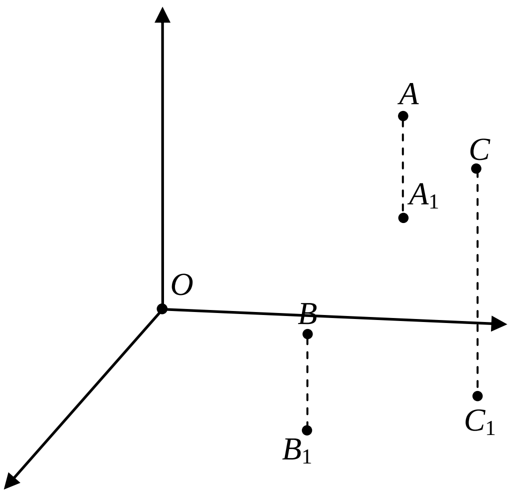


*рис.*20

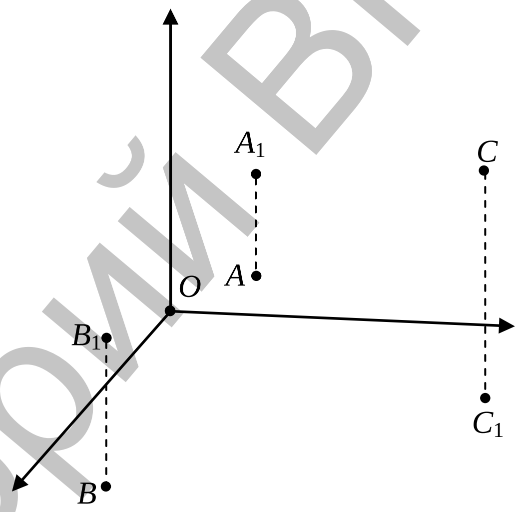


*рис.*21

§4. *Изображение многогранников в параллельной проекции*

Рассмотрим изображение некоторых многогранников. При этом мы предполагаем, что ни одна из граней многогранника не параллельна направлению проецирования. Тогда каждая из граней будет изображаться многоугольником, и изображение многогранника состоит из нескольких многоугольников.

1. Из теоремы Польке-Шварца следует, что в качестве изображения вершин треугольной пирамиды можно выбрать вершины любого четырёхугольника. Если для наглядности невидимые линии изобразить пунктиром, то получатся следующие возможные варианты (рисунок 22).

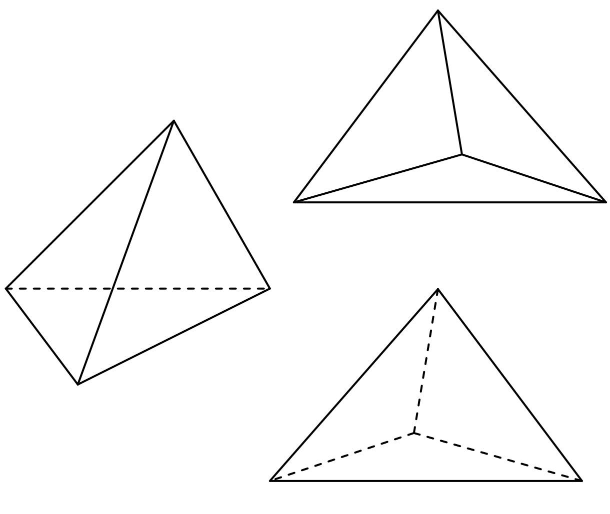


*рис.*22

2. Каждая из граней параллелепипеда изображается параллелограммом. При этом противоположные грани изображаются равными параллелограммами. Поэтому изображение параллелепипеда состоит из трёх пар параллелограммов, причём параллелограммы в каждой паре получаются друг из друга параллельным переносом (рисунок 23).

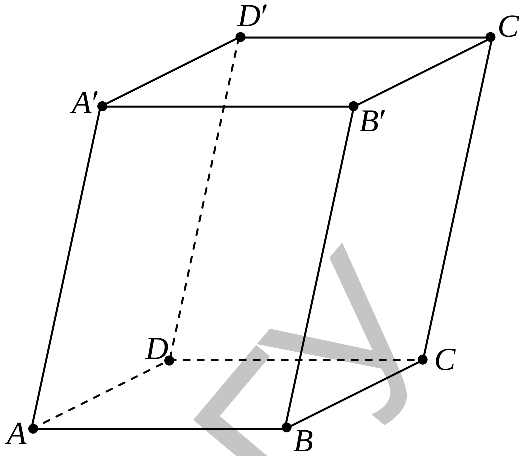


*рис.*23

Согласно теореме Польке-Шварца, мы можем в качестве изображения трёх вершин нижнего основания и одной вершины верхнего основания выбрать вершины произвольного четырёхугольника (например, *ABDA′*). Затем, изображения остальных вершин можно достроить однозначно.

3. Изображение *n*-угольной призмы состоит из двух одинаковых *n*-угольников, которые получаются друг из друга параллельным переносом, и *n* параллелограммов. В качестве изображения трёх вершин нижнего основания и одной вершины верхнего основания мы можем выбрать вершины произвольного четырёхугольника (на рисунке 24 мы эти точки выделили). После этого остальные вершины достраиваются однозначно.

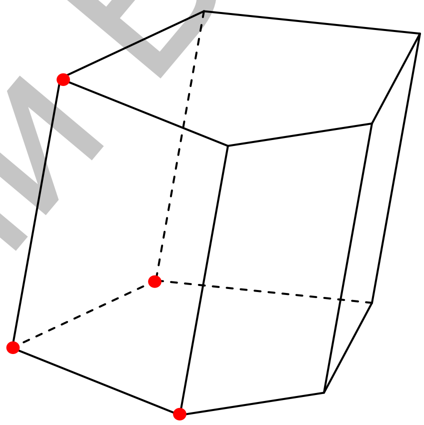


*рис.*24

4. Изображение *n*-угольной пирамиды состоит из многоугольника, изображающего основание и треугольников с общей вершиной, изображающих боковые грани (рисунок 25). Согласно теореме Польке-Шварца, мы можем в качестве изображения трёх вершин нижнего основания и одной вершины верхнего основания выбрать любые 4 точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Остальные вершины основания строятся по правилам построения изображений плоских многоугольников.

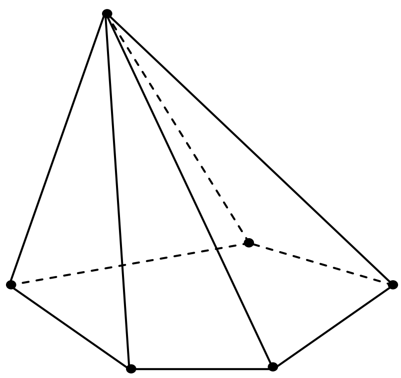


*рис.*25

Если пирамида является правильной, то принято ещё изображать высоту, падающую в центр основания (рисунок 26).

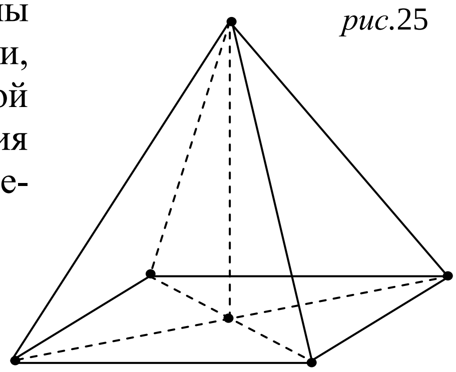


*рис.*26

Вопросы для самоконтроля

1. Что можно выбрать в качестве изображения вершин треугольной пирамиды?

2. Сколько точек можно выбирать произвольно при построении произвольной: а) призмы; б) пирамиды? Какому единственному требованию должны удовлетворять выбранные точки?

3. Что следует добавить к изображению пирамиды, чтобы подчеркнуть, что она правильная?

§5. *Построение сечений многогранников. Метод соответствия*

В дальнейшем, ради удобства изложения, мы не будем отличать оригинал от изображения. Например, если A – изображение вершины многогранника, то мы называем её вершиной. Плоскость нижнего основания призмы или пирамиды мы будем считать горизонтальной плоскостью и вторичные проекции точек строятся именно на этой плоскости.

Изображение многогранника называется *полным*, если мы для каждой его вершины можем однозначно построить вторичную проекцию.

Определение. Плоскость называется *секущей* для многогранника, если по обе стороны от этой плоскости есть точки этого многогранника. Каждая грань многогранника пересекается секущей плоскостью по отрезку. Объединение этих отрезов образует многоугольник, который называется *сечением многогранника*.

Например, сечением тетраэдра может быть треугольник или четырёхугольник. Поскольку граней всего 4, то других вариантов быть не может (рисунки 27 а,б).

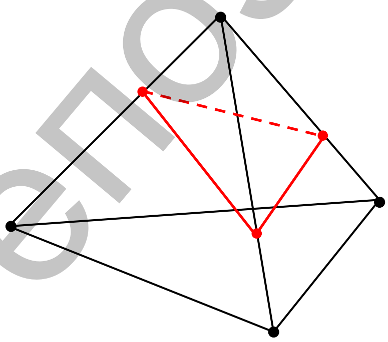


*рис.*27 *а*

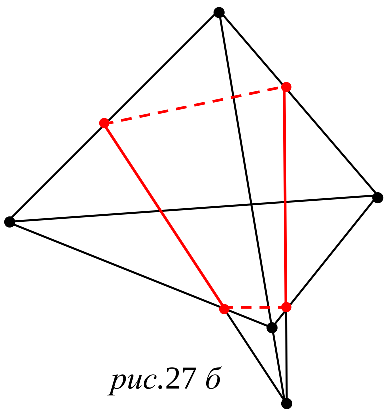


*рис.*27 *б*

Сечением куба может быть трех-, четырёх-, пяти- или шестиугольник (рисунки 28 а, б). Поскольку граней всего 6, то других вариантов быть не может.

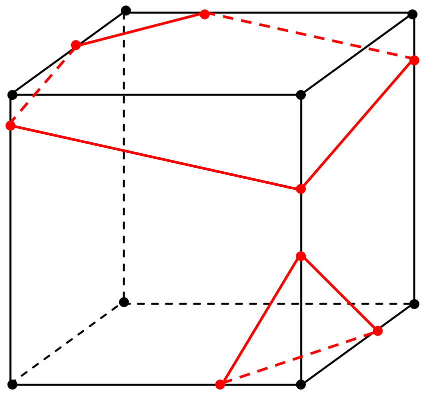


рис. 28 *а*

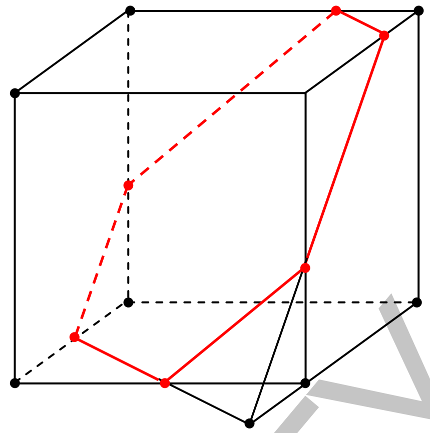


рис. 28 *б*

***Задача* 1.** *Дано изображение треугольной призмы* $ABCA_1B_1C_1$ *и трёх точек* M, N, P, *которые лежат соответственно на ребре* AA_1 *и гранях* ABB_1A_1, BCC_1B_1. *Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через* M, N, P.

Решение. На чертеже данные точки выделены крупно. Для примера мы показали, как построить вторичную проекцию N_1 точки N (рисунок 29).

Точки M и N принадлежат одной грани ABB_1A_1, поэтому они принадлежат одной стороне сечения. Проводим через них прямую линию до пересечения с ребром, но только с тем, которое принадлежит данной грани (на данном чертеже это ребро BB_1). Получим точку X.

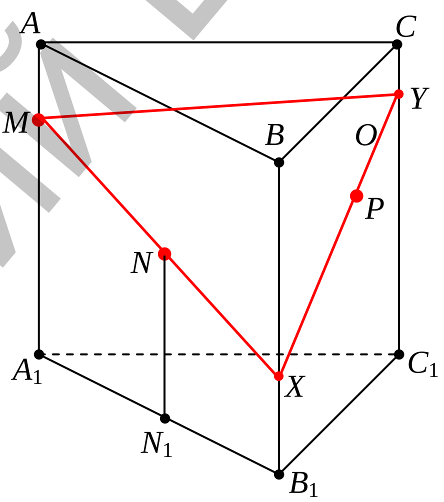


*рис.*29

Точки X и P принадлежат одной грани ABB_1A_1. Проводим через них прямую линию до пересечения с ребром, которое принадлежит данной грани. Получим точку Y. Точки Y и M принадлежат одной грани. Поэтому можем соединить их отрезком. Треугольник MXY – искомое сечение.

Возможны варианты, когда MN пересечёт ребро AB, а не BB_1 (рисунок 30). В этом случае нам нужно найти точку, которая лежит в плоскости одной грани с точкой P. Для этого мы найдём точку X, которая получается в пересечении прямой MN с продолжением ребра BB_1. Построение тогда записывается следующим образом.

1. $MN \cap BB_1 = X$, $MN \cap AB = D$;
2. $XP \cap CC_1 = Y$, $XP \cap BC = E$;
3. $MDEY$ – искомое сечение.

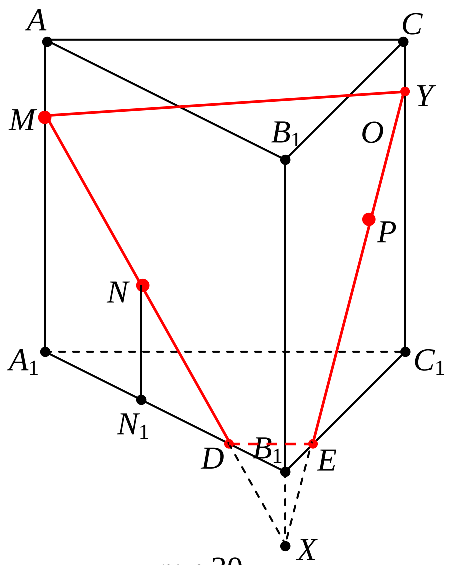


*рис.*30

Точно также точка Y может оказаться на продолжении ребра CC_1. Этот случай разберите самостоятельно.

Не всегда среди данных точек можно найти две, лежащие в одной грани. Задача 2 из §3 даёт нам способ нахождения точки, принадлежащей секущей плоскости, на любом из вертикальных рёбер призмы (либо на продолжении ребра). Прежде, чем продолжить чтение, внимательно изучите эту задачу ещё раз.

Задача 2. *Дано изображение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и трёх точек M, N, P, которые лежат соответственно на ребре CC_1 и гранях ABB_1A_1, BCC_1B_1. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через M, N, P.*

Решение. Мы будем искать точку X, в которой секущая плоскость пересекает ребро BB_1. Нам известна её вторичная проекция $X_1 = B_1$ и даны три точки, через которые проходит секущая плоскость. Сначала построим вторичные проекции этих точек M_1, N_1, P_1 (рисунок 31). Это очевидное действие мы, как правило, в процесс построения включать не будем. Далее точно так же, как и в задаче 2 из §3 строим:

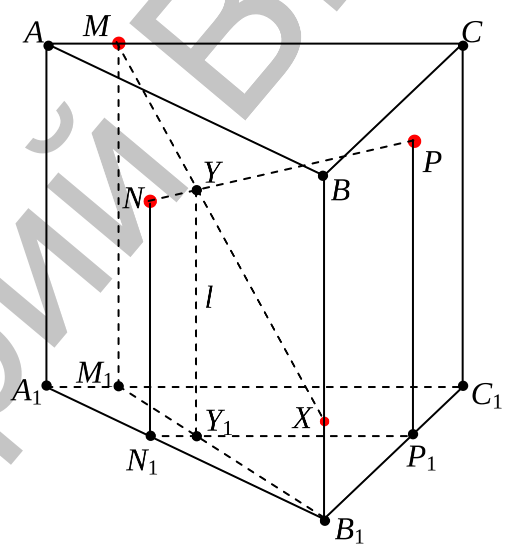


рис. 31

1. $M_1B \cap N_1P_1 = Y_1$;
2. $l \| AA_1$, $Y_1 \in l$;
3. $l \cap N_1P = Y$;
4. $MY \cap BB_1 = X$.

Действия под номерами 2 и 3 в дальнейшем будем записывать так: поднимаем точку Y_1 до прямой NP и получаем Y. Дальнейшие действия смотрите в задаче 1. Здесь мы записывать их не будем, но выполним эти действия на чертеже (рисунок 32).

Описанный в этой задаче метод построения сечения будем называть *метоdом соответствия*. Главное его преимущество заключается в том, что все построения осуществляются внутри изображения многогранника (т.е. не требуют дополнительного пространства).

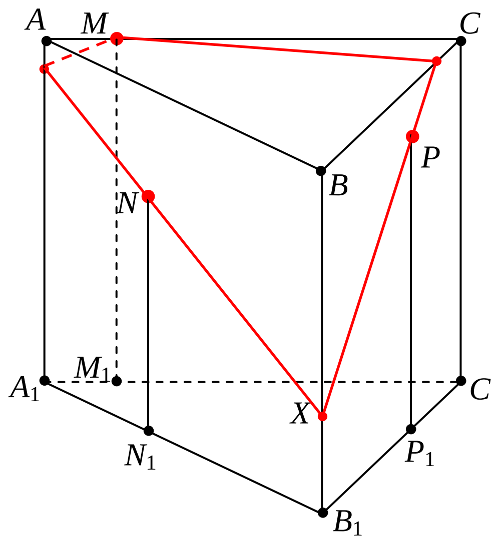


рис. 32

Этот метод позволяет найти пересечение секущей плоскости не только с одним ребром, а сразу с несколькими вертикальными рёбрами (или с их продолжениями), как показано в следующем примере.

***Задача* 3.** *Дано изображение (рисунок 33) пятиугольной призмы* $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ *и трёх точек* M, N, P, *которые лежат соответственно на рёбрах* EE_1, DD_1 *и грани* ABB_1A_1. *Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через* M, N, P.

Решение. Мы будем искать пересечение секущей плоскости с рёбрами BB_1 и CC_1. Строим (рисунок 33):

1. $BE \cap P_1D = Q_1$,
   $CE \cap P_1D = R_1$;
2. поднимаем Q_1, R_1 до PN и получаем точки Q и R;
3. $MQ \cap BB_1 = X$,
   $MR \cap CC_1 = Y$;
4. $XP \cap AA_1 = F$,
   $XY \cap BC = G$,
   $NY \cap DC = H$;
5. $MNHGXF$ – искомое сечение.

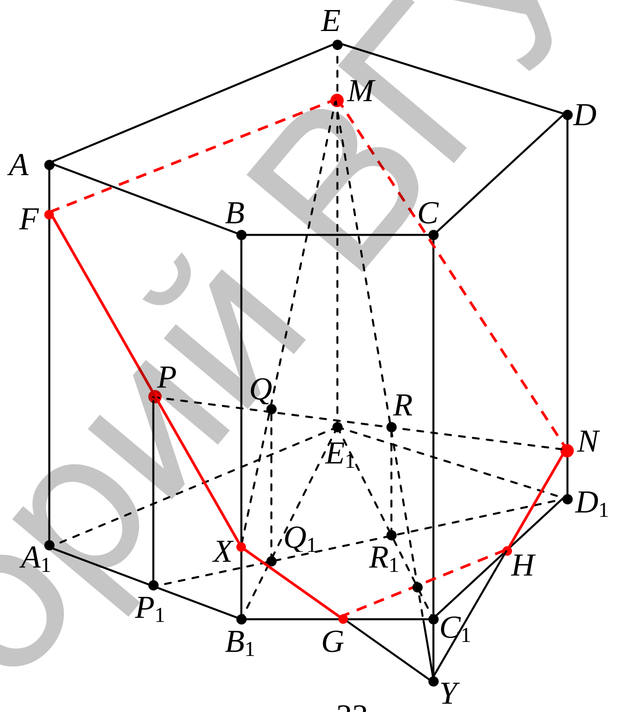


*рис.*33

Данный путь решения не является единственным. На рисунке 34 показано, как можно было найти пересечение секущей плоскости с ребром AA_1. Затем, используя линии FN и AD, мы можем найти пересечение с ребром CC_1. Сделайте это самостоятельно.

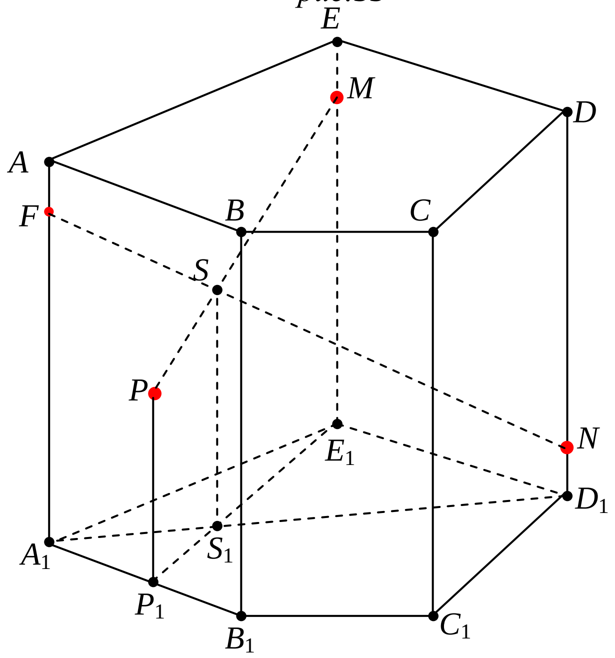


*рис.*34

При построении сечений пирамиды все построения совершаются аналогично. Отличие лишь в том, что вторичные проекции точек строятся из вершины (а не с помощью вертикальных линий). Поэтому мы их обозначаем по-другому: проекция точки P на основание обозначается P_o.

***Задача* 4.** *Дано изображение четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и трёх точек M, N, P, которые лежат соответственно на ребре SC и гранях SAB, SAD. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через M, N, P.*

Решение. Строим сначала вторичные проекции данных точек: $SP \cap AD = P_0$, $SN \cap AB = N_0$ (рисунок 35). Вторичная проекция точки M уже есть – это C. В дальнейшем, мы это действие в описание построения включать не будем.

Далее мы ищем пересечение секущей плоскости с ребром SA.

Строим (рисунок 36):

1. $CA \cap P_0N_0 = Y_0$;
2. $SY_0 \cap PN = Y$;
3. $MY \cap SA = X$;
4. $XP \cap SD = F$, $XN \cap SB = E$;
5. $XEMF$ – искомое сечение.

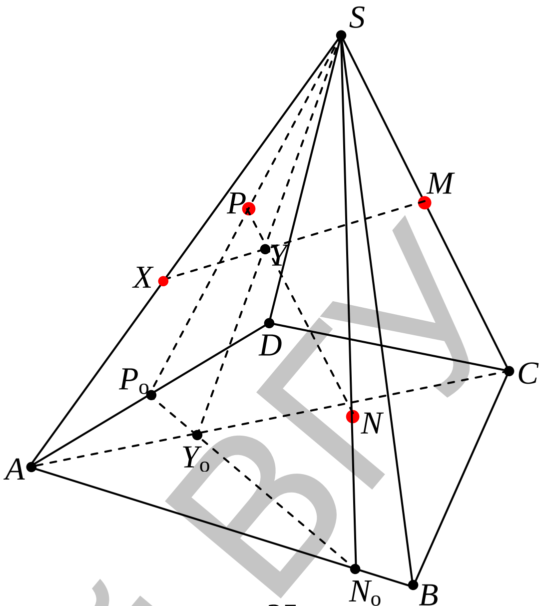


*рис.*35

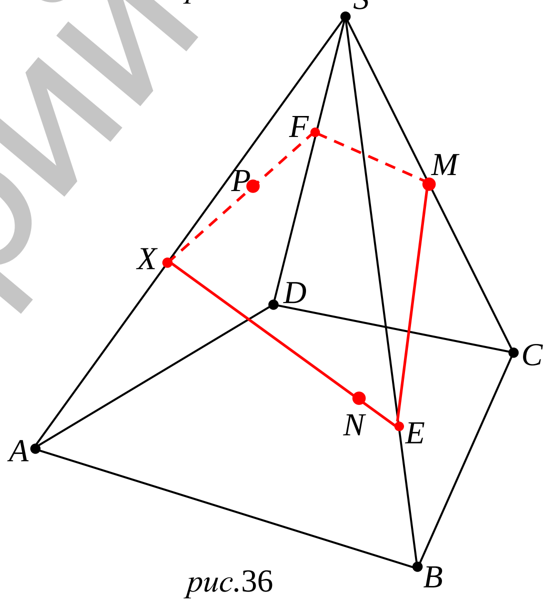


*рис.*36

Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Какая плоскость называется секущей для многогранника? Что называется сечением многогранника?

2. Сколько сторон может иметь сечение: а) треугольной пирамиды; б) куба?

3. В чём заключается главное преимущество метода соответствия?

4. Каким образом строятся вторичные проекции точек в задачах на пирамиду?

5.1. На рисунке 37 дано изображение треугольной призмы и трёх точек M, N, P на её поверхности. Найдите точку X, изображающую пересечение плоскости MNP с ребром CC_1. При этом на чертеже уже проведены все необходимые линии, кроме двух, и найдена точка Y_1.

5.2. На рисунке 39 дано изображение четырёхугольной призмы и трёх точек M, N, P на её поверхности. Найдите точки X и W, изображающие пересечение плоскости MNP с рёбрами CC_1 и DD_1 соответственно (или с продолжениями этих рёбер). При этом, на чертеже уже проведены все необходимые линии, кроме четырёх, и найдены точки Y_1 и Z_1.

5.3. Выполните задание 5.2 и завершите построение сечения на отдельном чертеже, перенеся на новый чертёж только точки M, N, P и уже построенные точки (без вспомогательных линий).

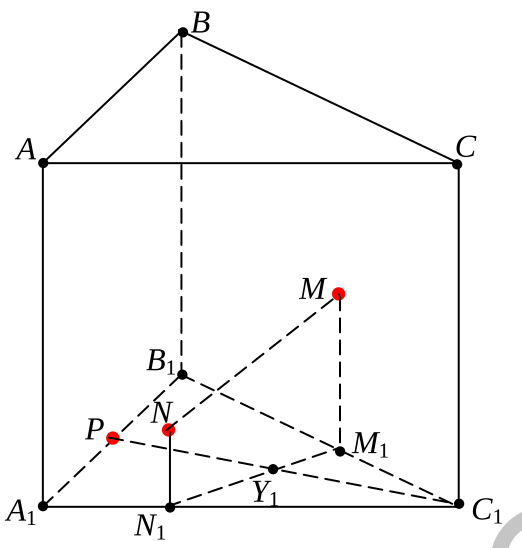


*рис.*37

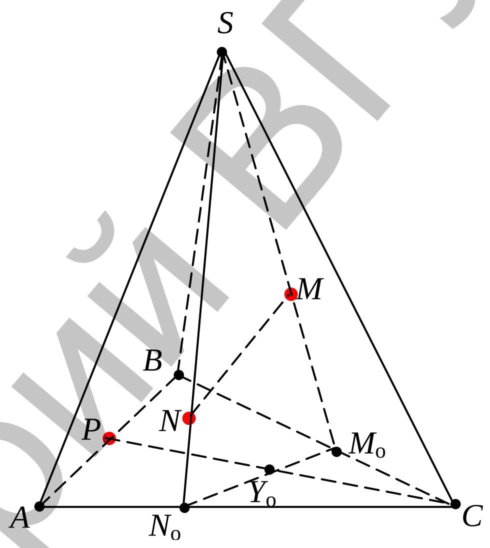


*рис.*38

6.1. На рисунке 38 дано изображение треугольной пирамиды и трёх точек M, N, P на её поверхности. Найдите точку X, изображающую пересечение плоскости MNP с ребром SC. При этом на чертеже уже проведены все необходимые линии, кроме двух, и найдена точка Y_o.

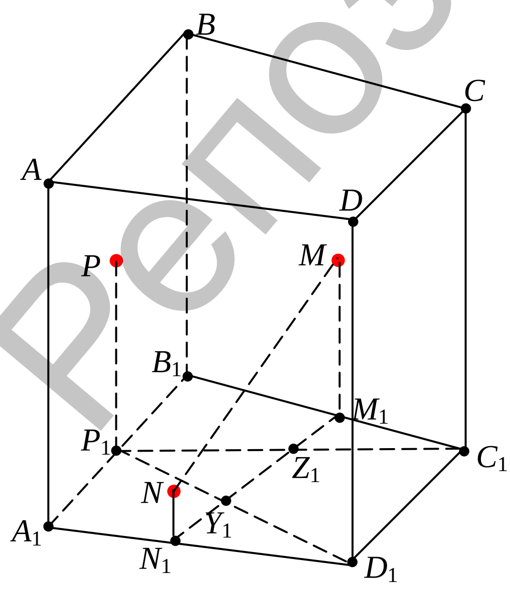


рис. 39

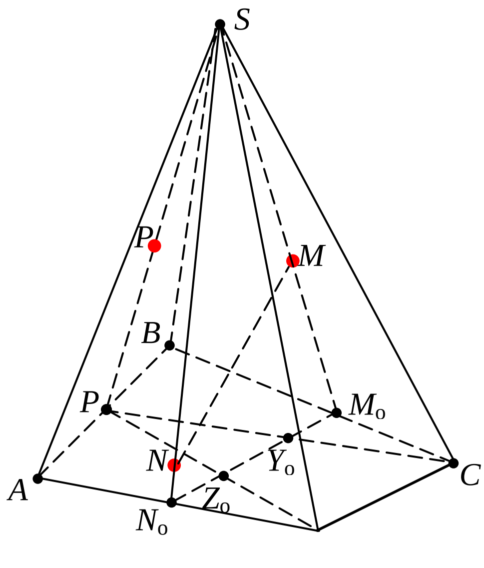


рис. 40

6.2. На рисунке 40 дано изображение четырёхугольной пирамиды и трёх точек M, N, P на её поверхности. Найдите точку X и W, изображающую пересечение плоскости MNP с рёбрами SC и OD соответственно (или с продолжениями этих рёбер). При этом, на чертеже уже проведены все необходимые линии, кроме двух, и найдены точки Y_o и Z_o.

6.3. Выполните задание 6.2 и завершите построение сечения на отдельном чертеже, перенеся на новый чертёж только точки M, N, P и уже построенные точки (без вспомогательных линий).

§6. *Построение сечений многогранников. Метод следов*

В этом методе мы первым действием (после нахождения вторичных проекций данных точек) строим след секущей плоскости на плоскости верхнего или нижнего основания призмы или усечённой пирамиды или на основании пирамиды. В качестве примеров мы рассмотрим те же задачи, что и в параграфе 5.

В некоторых случаях удобнее считать горизонтальной плоскостью плоскость верхнего основания.

Задача* 2. *Решение. Мы уже имеем одну точку на верхнем основании призмы, поэтому горизонтальной плоскостью считаем плоскость верхнего основания и след мы будем строить на этой плоскости.

Строим вторичные проекции N_1 и P_1 точек N и P на верхнее основание (рисунок 41).

Затем:

1. $NP \cap N_1P_1 = X$;
2. $MX = p$ – след;
3. $p \cap B_1C_1 = D$.

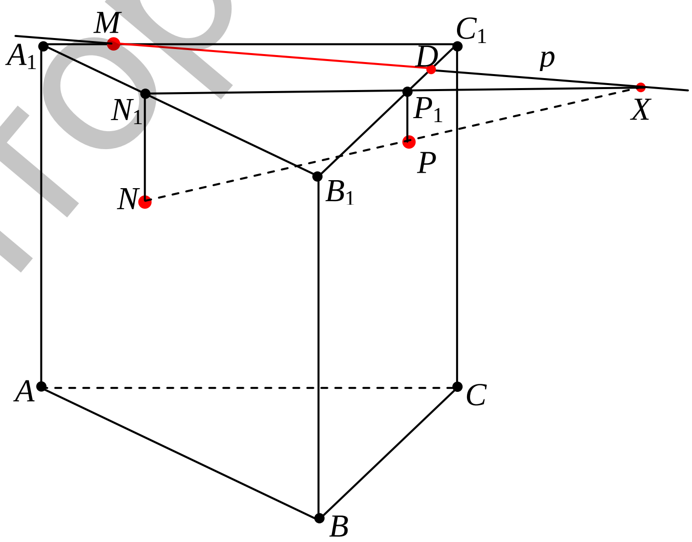


рис. 41

Дальнейшие действия уже были показаны на рисунке 32.

Задача* 3. *Решение. Мы будем строить след секущей плоскости на нижнем основании призмы (рисунок 42).

Строим:

1. $MN \cap ED = X$, $MP \cap EP_3 = Y$;
2. $p = XY$ – след;
3. $p \cap BC = G$, $p \cap DC = H$.

Найденных точек G и H недостаточно, чтобы завершить построение. Нам нужно найти точку на ребре BB_1 или на ребре AA_1. Поэтому применяем далее следующий метод, который будем называть основным методом работы со следом.

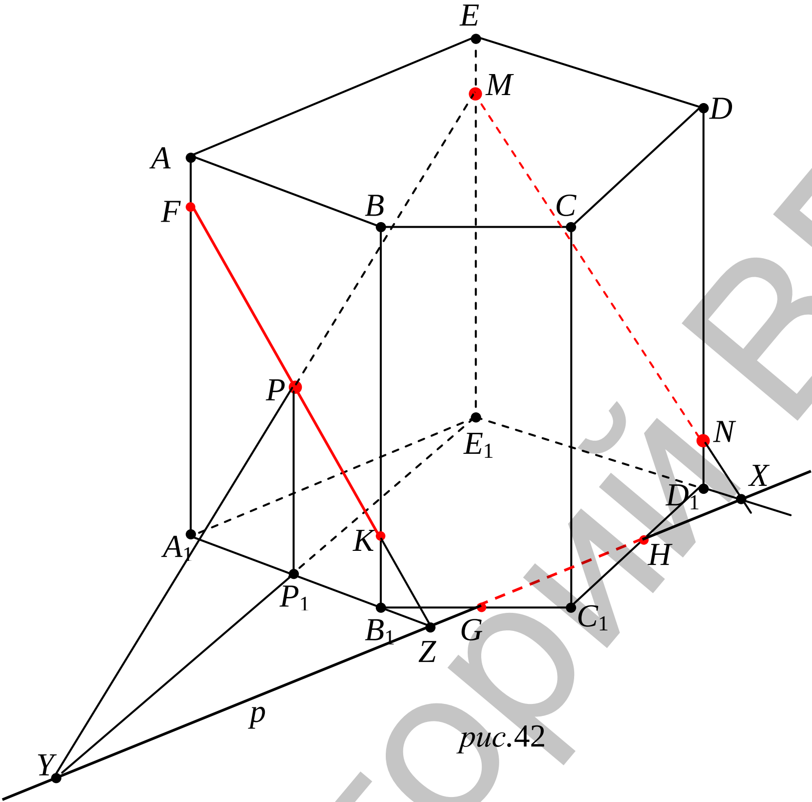


*рис.*42

В грани ABB_1A_1 мы уже имеем одну точку P. Поэтому нижнее ребро этой грани, т.е. AB, мы продолжаем до пересечения со следом. Эти две линии должны пересечься, т.к. они лежат в одной плоскости:

4. $AB \cap p = Z$.

Точки P и Z лежат одновременно в плоскости одной грани и в секущей плоскости. Поэтому они лежат на линии пересечения плоскостей. Строим:

5. $PZ \cap AA_1 = F$; $PZ \cap BB_1 = K$.

Дальнейшие действия уже показаны выше. Если окажется, что линия AB не пересекается со следом, то искомая линия FK тоже будет параллельна следу.

Недостаток метода следов заключается в том, что построение зачастую далеко уходит за пределы чертежа и не помещается на лист бумаги.

Задача* 4. *Решение. Строим (рисунок 43):

1. $PN \cap P_oN_o = X$;
2. $MN \cap CN_o = Y$;
3. $p = XY$ – след;
3. $CB \cap p = Z$;
4. $ZM \cap SB = E$;

5. $EN \cap SA = G$
6. $GEMF$ – искомое сечение.

Для тех, кто не запомнил процесс построения, попробуем описать его ещё раз словами.

Выбираем любые две заданные точки и соединяем их. Получается первая прямая. Соединяем вторичные проекции этих точек. Получается вторая прямая. В пересечении этих прямых получается точка, лежащая на следе. Затем мы берём другую пару заданных точек и находим вторую точку на следе. Соединяем найденные точки и получаем след секущей плоскости.

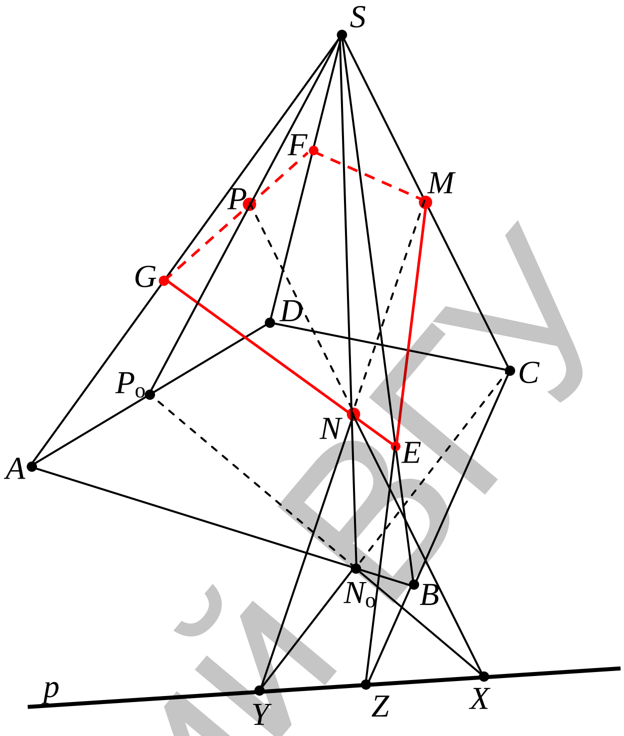


рис.43

Затем, мы продолжаем до пересечения со следом любое ребро нижнего основания, лежащее в той боковой грани, где есть данная или уже найденная точка. Эту точку и точку пересечения ребра со следом мы можем соединить прямой.

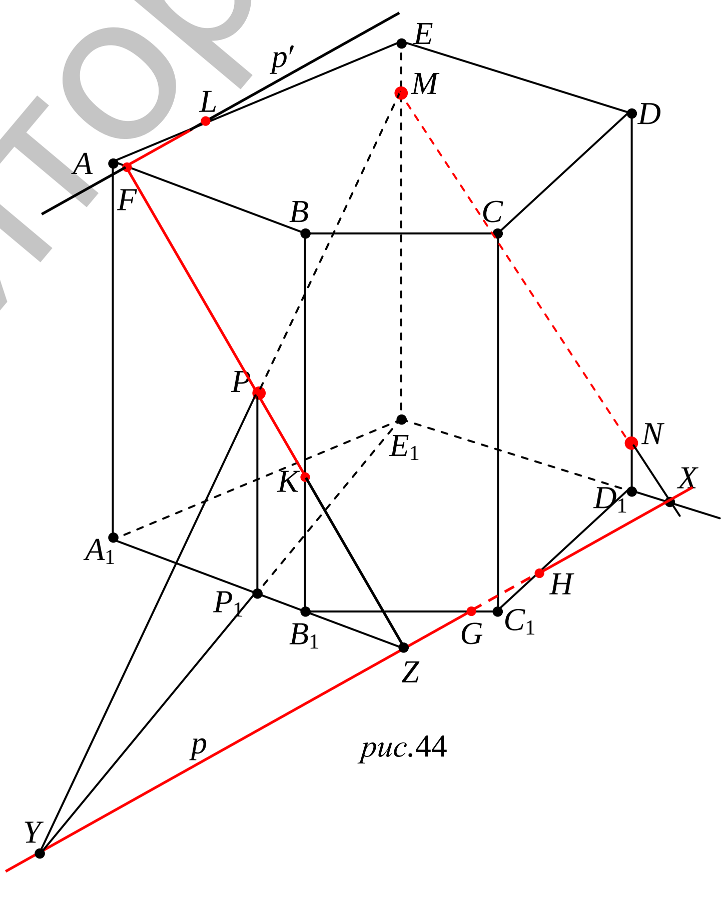


рис.44

При построении сечений призмы и усечённой пирамиды иногда бывает полезно использовать следующий факт: следы секущей плоскости на нижнем и на верхнем основании параллельны. Для того чтобы продемонстрировать данный приём на примере, мы немного изменим данные в задаче 3.

Точка F оказывается не на ребре AA_1, а на ребре A_1B_1 (рисунок 44).

Далее мы проводим прямую $p'||p$ через F и находим точку L на ребре A_1E_1. Остаётся соединить между собой все найденные вершины сечения.

Аналогично, при построении сечения куба или правильной четырёхугольной призмы можно использовать тот факт, что противоположные боковые грани параллельны, и поэтому секущая плоскость пересекает их по параллельным отрезкам (рисунки 28 а, б).

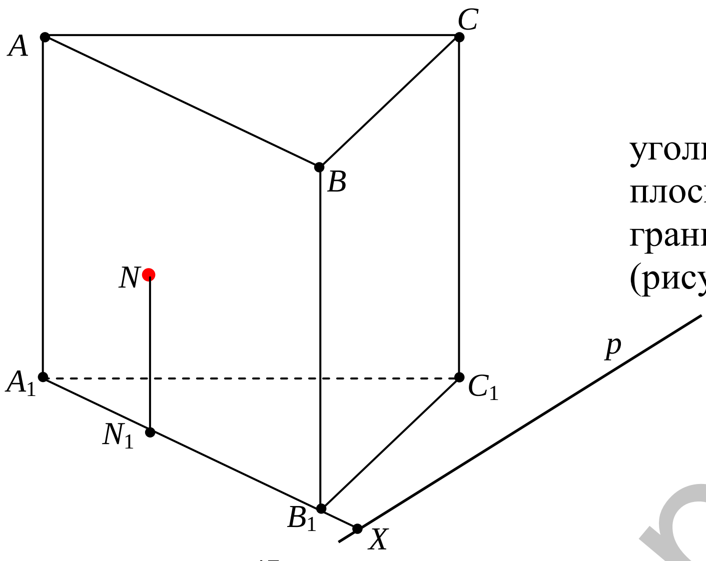


*рис.*45

Упражнения для самоконтроля

1.1. Дано изображение треугольной призмы и следа секущей плоскости. Дана точка на боковой грани. Построить сечение призмы (рисунок 45).

В качестве подсказки уже совершено первое действие (найдена точка X на следе).

1.2. Для фигуры, изображённой на рисунке 39, постройте след плоскости, проходящей через данные точки M, N, P, на нижнем основании призмы и найдите пересечение секущей плоскости с любой из боковых граней.

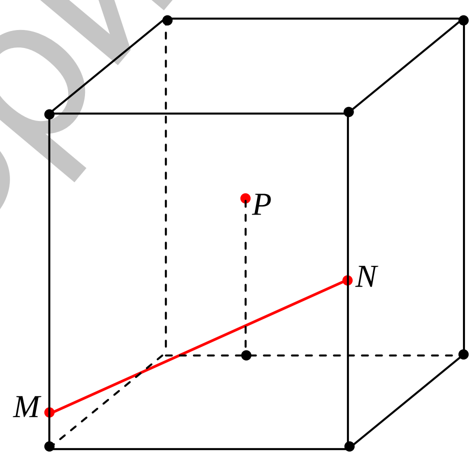


*рис.*46

1.3. Для фигуры, изображённой на рисунке 39, постройте сечение плоскостью, проходящей через данные точки M, N, P, с помощью метода следов.

2.1. Дано изображение правильной четырёхугольной призмы. На одной из боковых граней уже построена сторона сечения. Дана точка, принадлежащая противоположной боковой грани (рисунок 46). Завершите построение сечения.

2.2. Для фигуры, изображённой на рисунке 40, постройте сечение плоскостью, проходящей через данные точки M, N, P, на основании пирамиды и найдите пересечение секущей плоскости с любой из боковых граней.

2.3. Для фигуры, изображённой на рисунке 40, постройте сечение плоскостью, проходящей через данные точки M, N, P, с помощью метода следов.

ГЛАВА 2. МНОГОГРАННИКИ В СИСТЕМЕ НЕСКОЛЬКИХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

§1. *Построение проекций прямых и точек*

***Задача* 1.** Дано изображение треугольной призмы $ABCA'B'C'$ и дана фронтальная проекция M_2 точки M на её грани (рисунок 47). Построить горизонтальную проекцию M_1.

Решение. Проведём прямую D_2D_2', параллельную фронтальным проекциям боковых рёбер призмы через M_2. Найдём горизонтальную проекцию этой прямой. На ней с помощью линии связи найдём M_1.

Для решения задачи можно провести через M_2 любую другую прямую, которая пересечёт фронтальные проекции любых двух рёбер. Аналогично, имея M_1, можем найти M_2.

Если рёбра призмы являются проецирующими, то построение недостающих проекций точек делается проще. На рисунке 48 рёбра являются горизонтально-проецирующими. Поэтому горизонтальные проекции точек, лежащих на боковых гранях, попадают на рёбра основания.

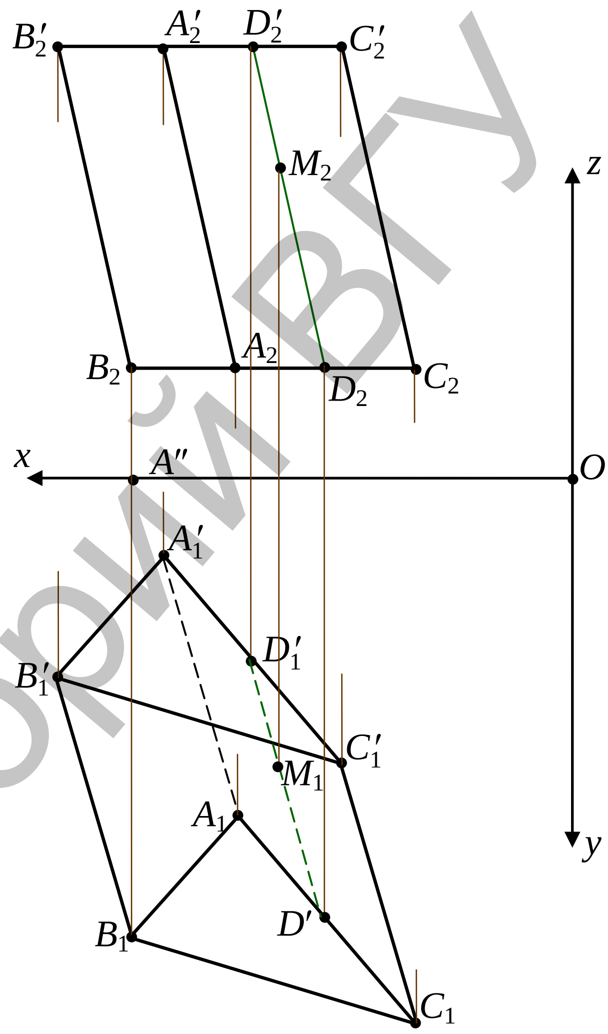


*рис.*47

***Задача* 2.** Дано изображение треугольной пирамиды и дана фронтальная проекция точки, лежащей на её боковой грани (рисунок 49). Построить горизонтальную и профильную проекции точки.

Решение. Мы рассмотрим два варианта действий. Через точку M мы проводим горизонталь (h_1, h_2) до пересечения с боковыми ребрами и с помощью линий связи по одной проекции можем найти остальные. Через точку N мы проводим образующую SF и сначала находим проекции точки F.

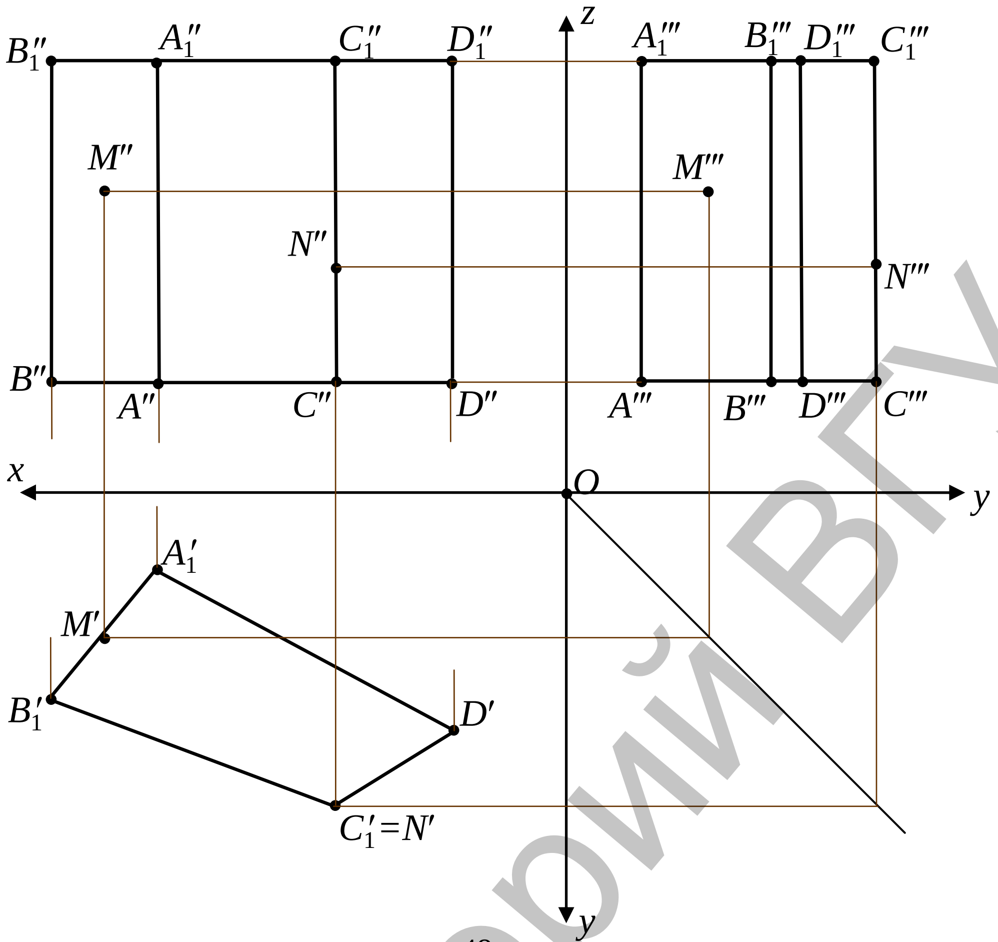

z
B_1'' A_1'' C_1'' D_1'' A_1''' B_1''' D_1''' C_1'''
M'' M'''
N'' N'''
B'' A'' C'' D'' A''' B''' D''' C'''
x O y
A_1' M' B_1' D'
$C_1'=N'$
y

рис. 48

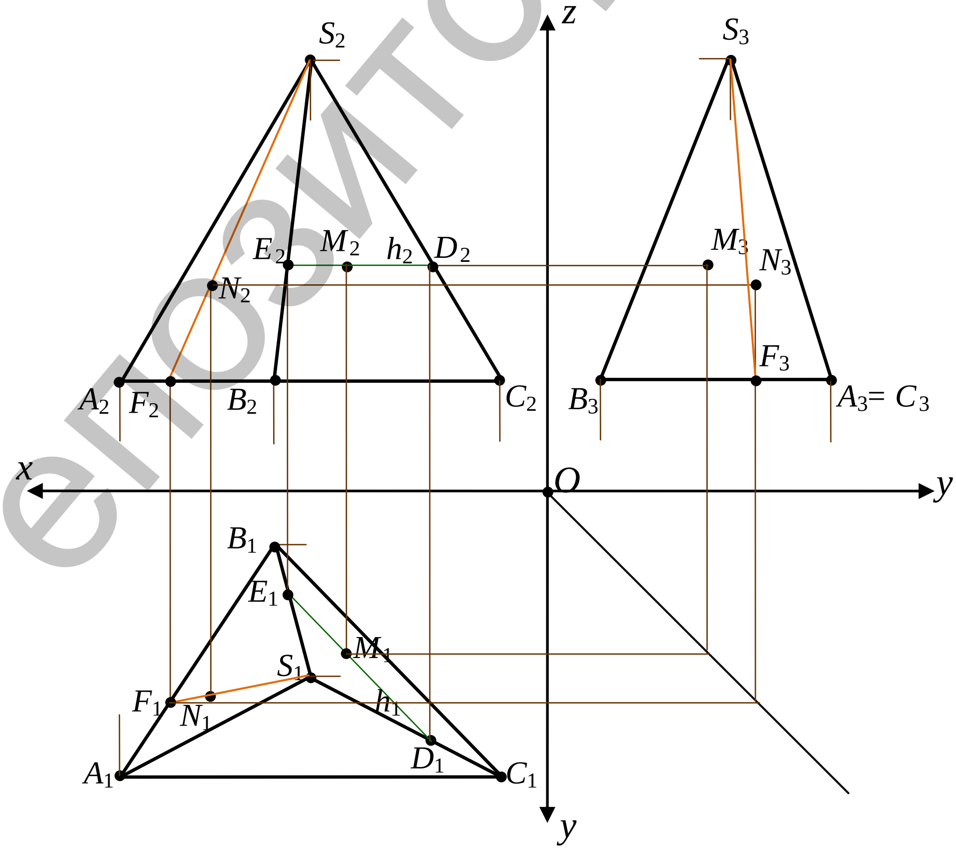

S_2 z S_3
E_2 M_2 h_2 D_2 M_3 N_3
N_2
F_3
A_2 F_2 B_2 C_2 B_3 $A_3= C_3$
x O y
B_1 E_1 M_1 S_1
F_1 N_1 h_1
D_1
A_1 C_1
y

рис. 49

Задача упрощается, если точка лежит на ребре. Этот случай мы рассмотрим на лабораторных занятиях.

§ 2. *Сечения многогранников. Развёртки*

Определение секущей плоскости и сечения многогранника приведены в §5 главы 1. Наша задача – научиться строить сечения на эпюре. Легко построить сечение и определить его натуральные размеры в том случае, когда плоскость является проецирующей. На рисунке 50 показано сечение четырёхугольной призмы фронтально-проецирующей плоскостью.

Если преобразовать эту плоскость в плоскость уровня, то увидим натуральные размеры сечения. Для этого мы копию отрезка N_2Q_2 (вместе с точками M_2P_2 на нём) вынесли отдельно, расположив горизонтально. Затем из точек N_2, M_2, P_2, Q_2 мы проводим вертикальные линии, а из точек A_1', B_1', C_1', D_1' мы проводим горизонтальные линии. На их пересечении находятся вершины многоугольника, равного сечению. Мы их подписали, словно это и есть сами вершины сечения.

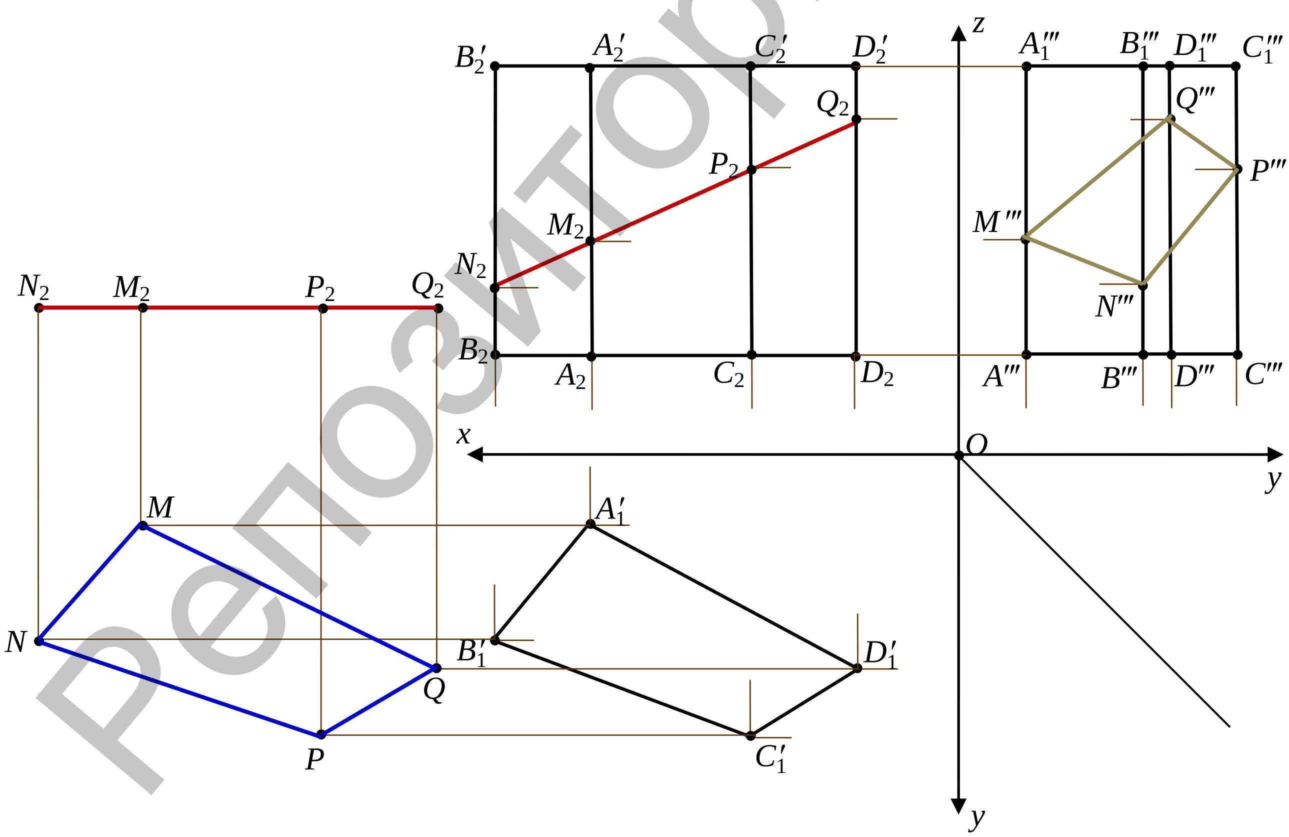


рис. 50

На рисунке 51 показано, как это делается по всем правилам для сечения треугольной пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью. Самостоятельно разберитесь, что метод действий, использованный на рисунке 47, тоже даёт правильный результат (по сути, это одно и то же).

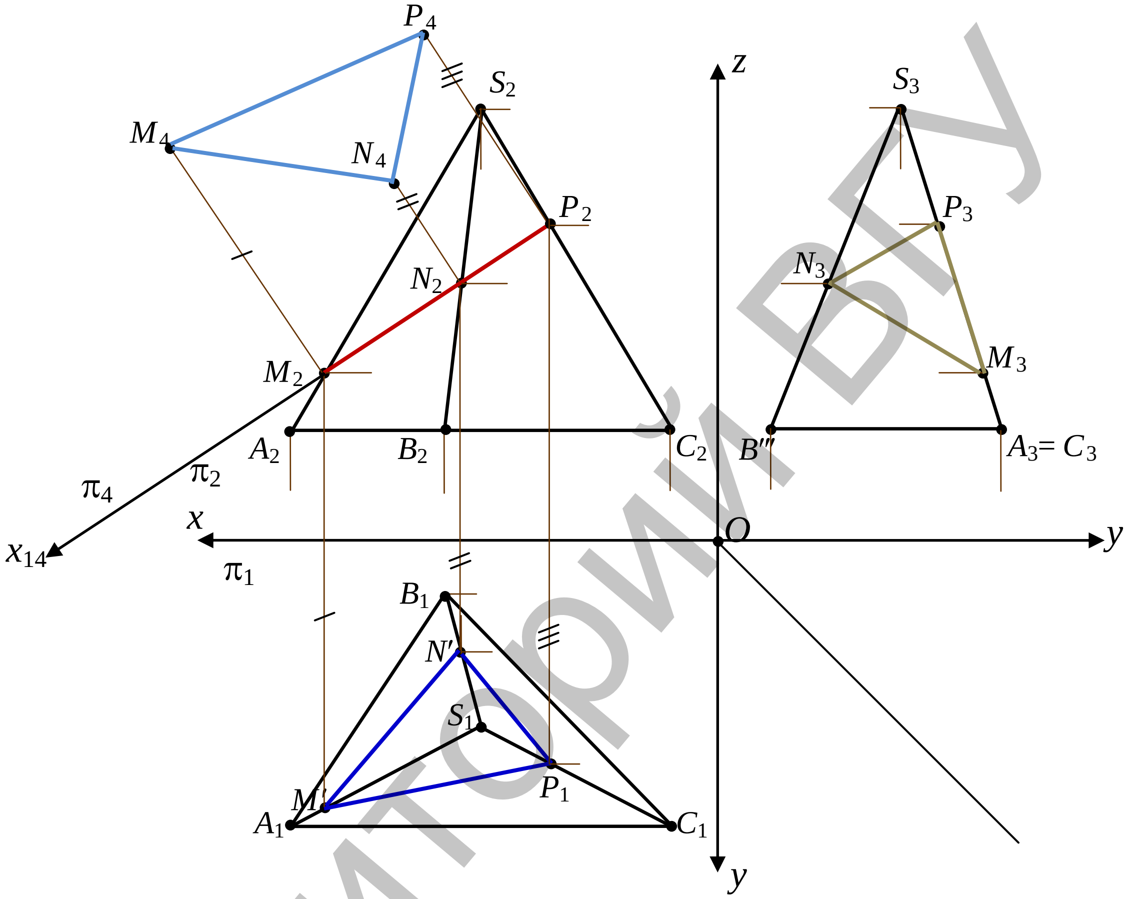


рис. 51

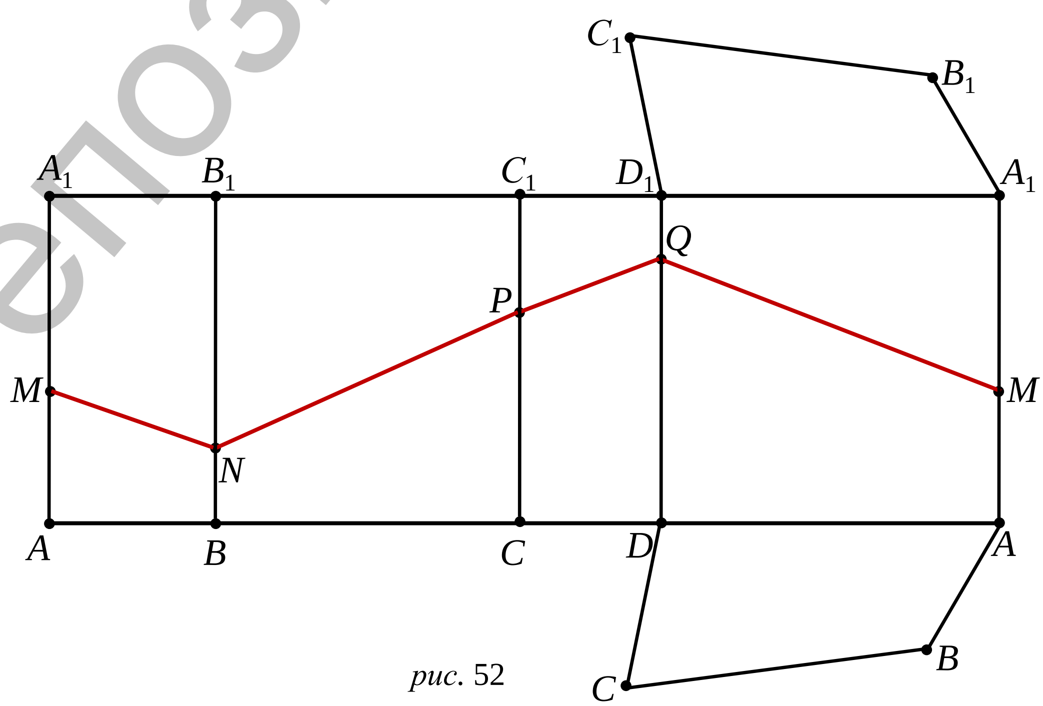


рис. 52

Одна из задач, связанных с изображением многогранников – это построение их развёрток. Иногда на развёртке следует изобразить стороны сечения. Если основание призмы и её боковые рёбра параллельны одной из плоскостей проекций, то эта задача решается легко, потому что мы знаем их натуральные размеры. Например, для многогранника, изображённого на рисунке 48, развертка выглядит так, как показано на рисунке 52.

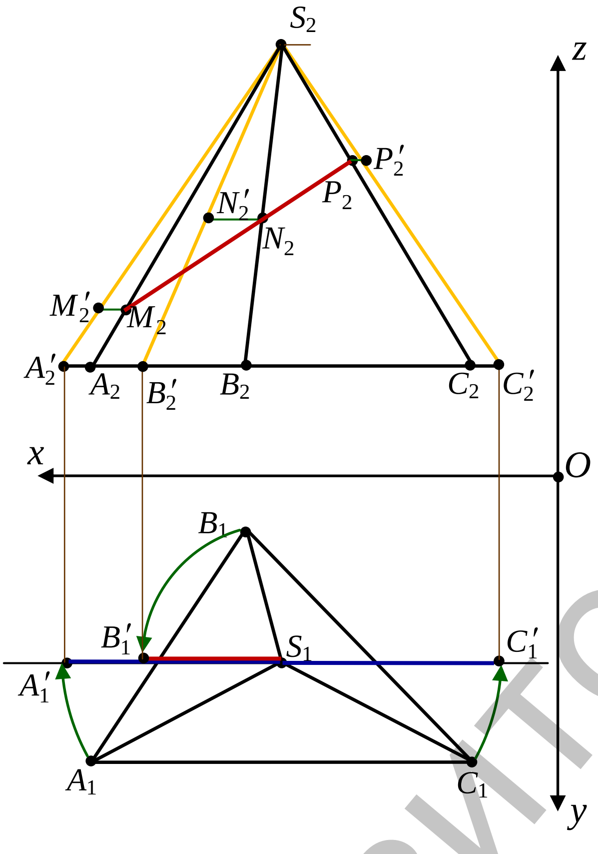


рис. 53

Боковые рёбра призмы могут иметь общее положение, но мы уже изучали, как находить в этом случае их натуральный размер. На рисунке 53 показано, как найти натуральный размер боковых рёбер пирамиды с помощью поворота вокруг высоты пирамиды. Натуральный размер рёбер основания нам известен, т.к. основание параллельно горизонтальной плоскости. Для того чтобы построить вершины сечения на развёртке пирамиды, нам следует повернуть боковые рёбра вместе с вершинами сечения. При этом можно использовать тот факт, что вершины сечения движутся в горизонтальной плоскости уровня. Поэтому их проекции в плоскости π_2 смещаются по горизонтали.

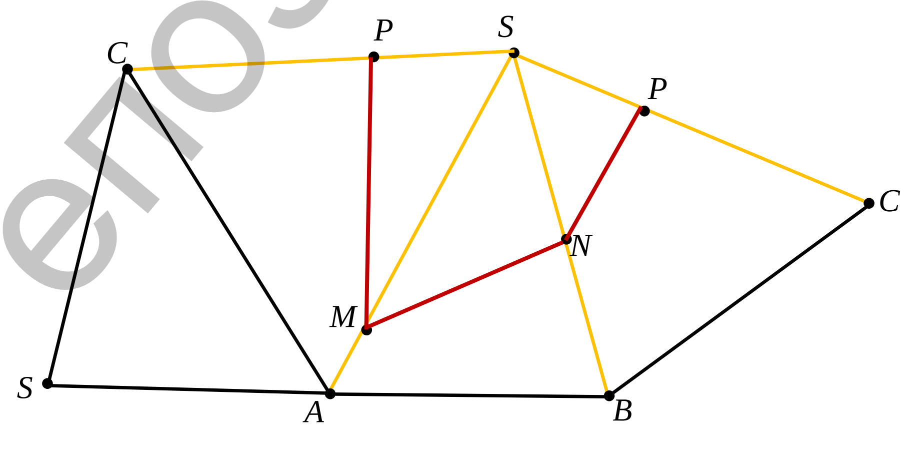


*рис.*54

На рисунке 54 показан результат построения развёртки.

В плоскости общего положения мы всегда можем выбрать фронталь и горизонталь. В связи с этим, мы можем считать, что секущая плоскость α задана двумя такими прямыми (h_1, h_2) и (f_1, f_2). На рисунке 55 показано построение сечения треугольной пирамиды плоскостью, заданной именно так.

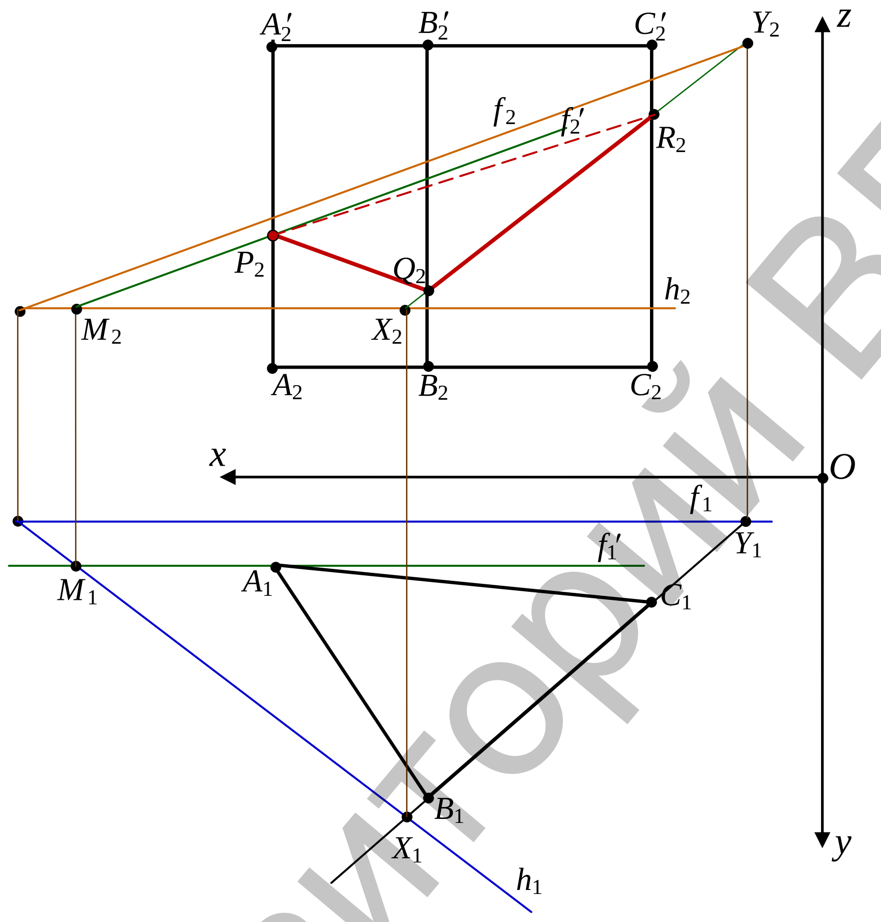


*рис.*55

Мы рассматриваем вспомогательную фронтальную плоскость уровня β, проходящую через ребро AA', f_1' – её след-проекция; она параллельна f_1 и проходит через A_1. Находим пересечение этой плоскости с горизонталью – точку (M_1, M_2). Через M_2 проводим линию, параллельную f_2. Мы получаем прямую (f_1', f_2'), которая лежит в секущей плоскости и пересекает ребро AA'. Тем самым, мы находим первую точку (P_1, P_2) на сечении.

Далее мы найдём пересечение секущей плоскости α с боковой гранью BCC_1B_1. Для этого мы рассмотрим плоскость, в которой лежит эта грань. Её след-проекция проходит через отрезок B_1C_1. Найдём точки её пересечения с прямыми (h_1, h_2) и (f_1, f_2). Обе точки (X_1, X_2) и (Y_1, Y_2) лежат одновременно в секущей плоскости и в плоскости β, следовательно, ребро сечения лежит на линии, соединяющей эти точки. Остаётся соединить найденные точки.

Для построения сечения треугольной пирамиды плоскостью общего положения удобно заменить фронтальную плоскость проекций, сделав секущую плоскость фронтально-проецирующей (рисунок 56). Мы сначала получим вертикальную проекцию сечения на плоскость π_4, затем горизонтальную проекцию сечения на плоскость π_1, а с её помощью получим вертикальную проекцию сечения на плоскость π_2. Этот же приём применим для построения сечения наклонной призмы.

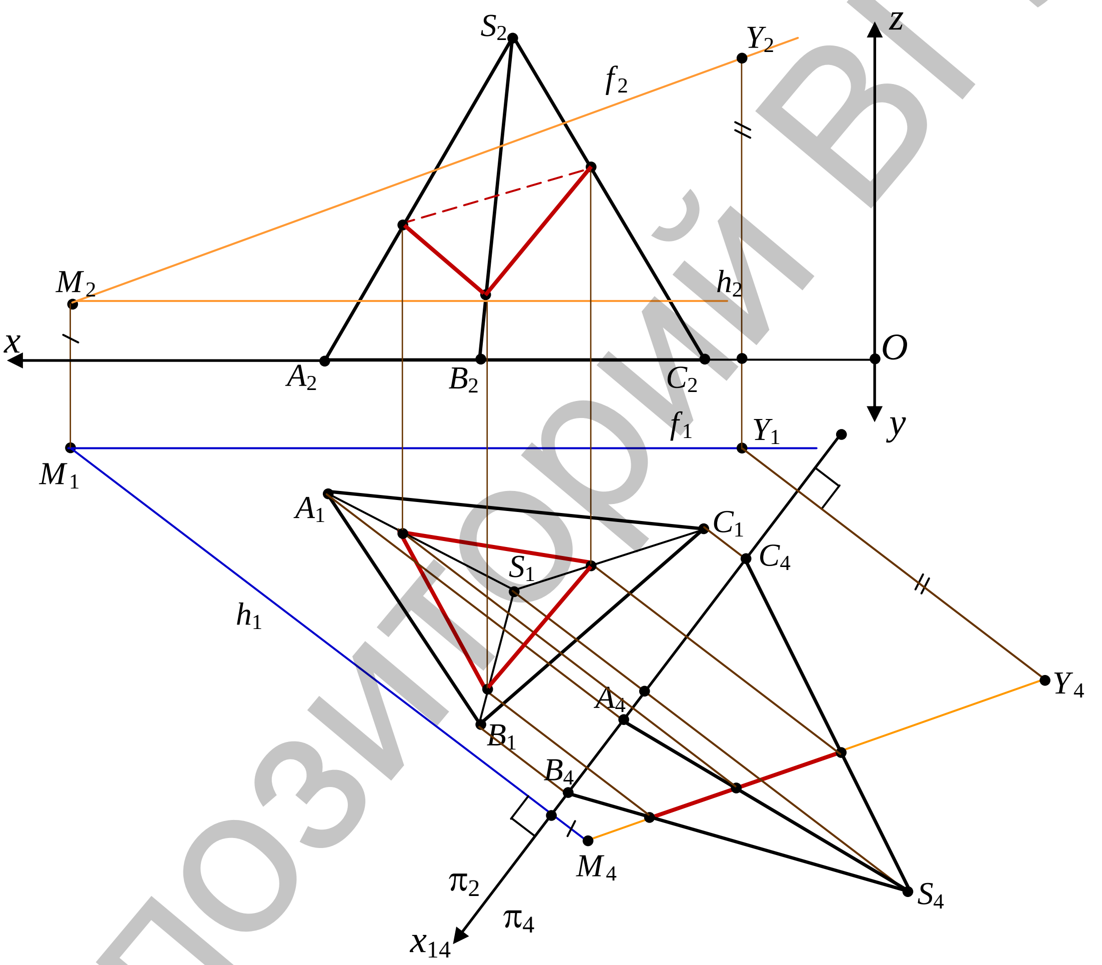


*рис.*56

Задания для самостоятельного решения

1. На боковой грани изображения правильной четырёхугольной пирамиды даны точки M и N. Построить изображение сечения пирамиды плоскостью, проходящей через M и N перпендикулярно плоскости одного из диагональных сечений пирамиды.

2. На боковой грани изображения правильной четырёхугольной пирамиды даны точки M и N. Построить изображение сечения пирамиды плоскостью, проходящей через M и N перпендикулярно плоскости основания пирамиды.

3. Дано изображение правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания. Построить изображение сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно скрещивающемуся боковому ребру.

4. Построить изображение сечения правильной четырёхугольной призмы плоскостью, проходящей через диагональ призмы параллельно диагонали основания.

5. Построить изображение сечения правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно апофеме боковой грани.

6. Построить изображение сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через среднюю линию основания параллельно апофеме боковой грани, не пересекающейся с этой средней линией.

7. На боковой грани изображения правильной треугольной пирамиды даны точки M и N. Построить изображение сечения пирамиды плоскостью, проходящей через M и N перпендикулярно плоскости основания.

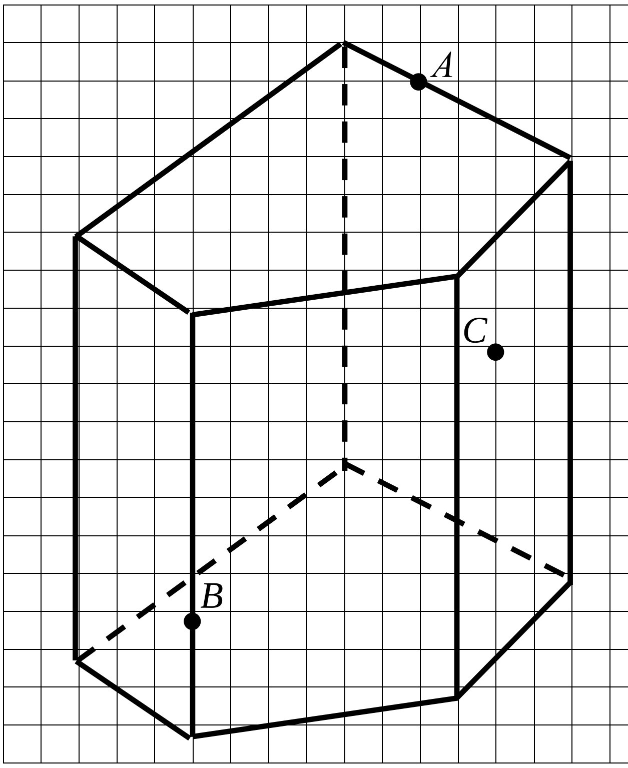
8. Дано изображение куба $ABCDA'B'C'D'$ и двух точек M, N на рёбрах AB и $A'B'$ (прямая MN не параллельна боковым рёбрам). Построить изображение сечения куба плоскостью, проходящей через M и N параллельно диагонали AC'.

9. Дано изображение $ABCA'B'C'$ правильной треугольной призмы и точки M на ребре $A'B'$. Построить изображение сечения призмы плоскостью, проходящей через M параллельно плоскости треугольника $A'BC$.

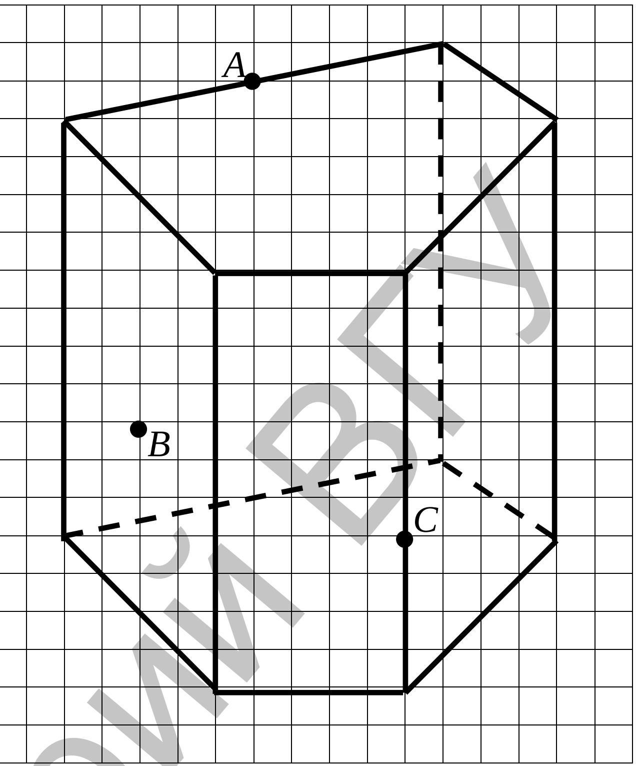
10. Дано изображение $SABC$ треугольной пирамиды, у которой ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. Дано изображение точки N на ребре AC. Построить изображение сечения призмы плоскостью, проходящей через N перпендикулярно апофеме грани SBC.

11–20. Дано изображение пятиугольной призмы (или пирамиды) и трёх точек на её *видимых гранях*. Построить изображение сечения призмы плоскостью, проходящей через данные точки. Изображение переносить в тетрадь строго по клеточкам.

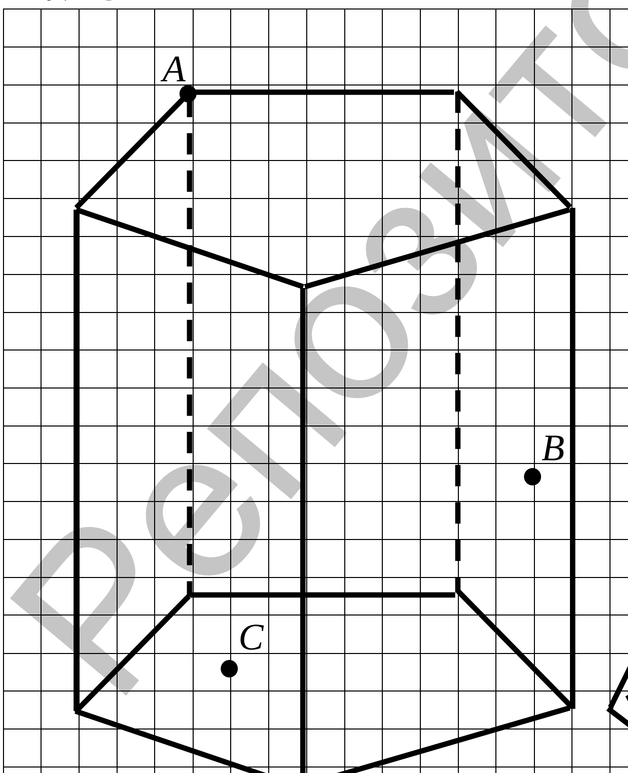
№11



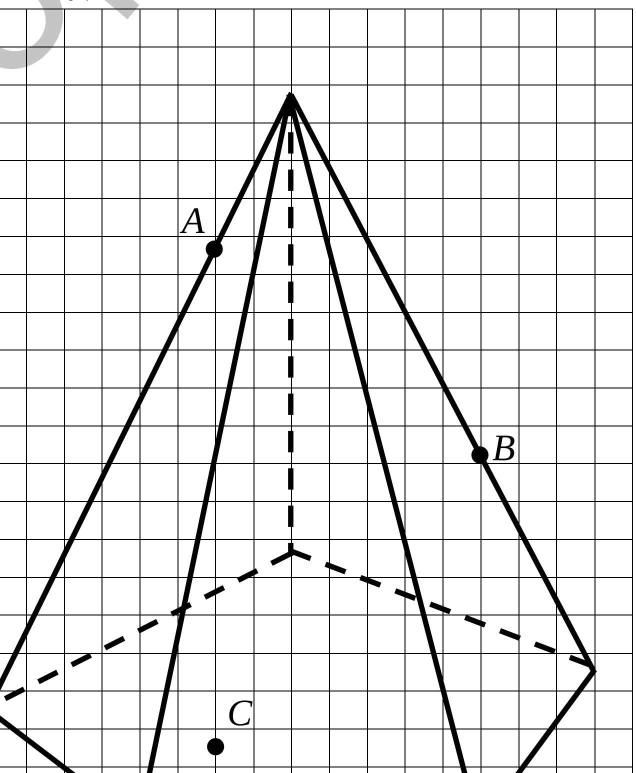
№12



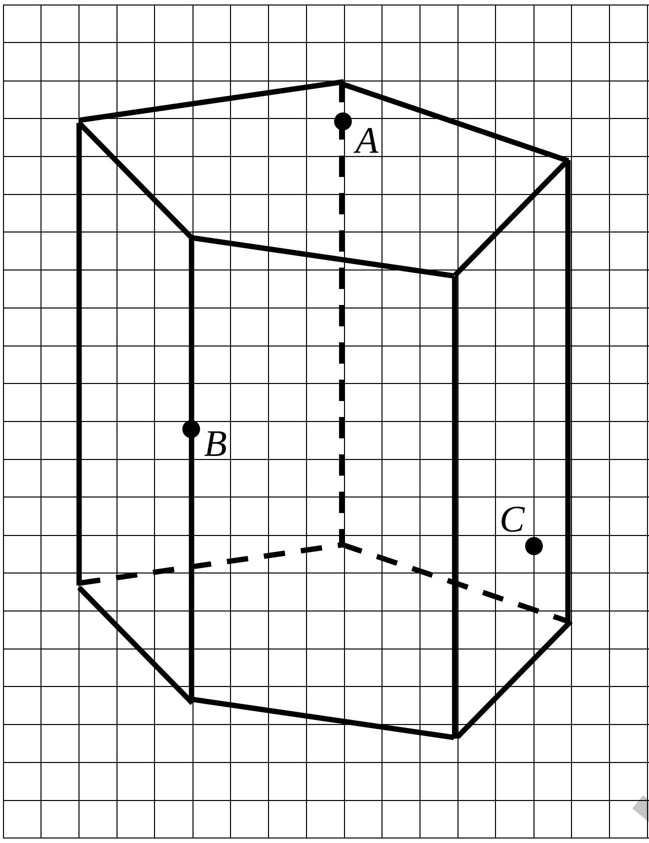
№13



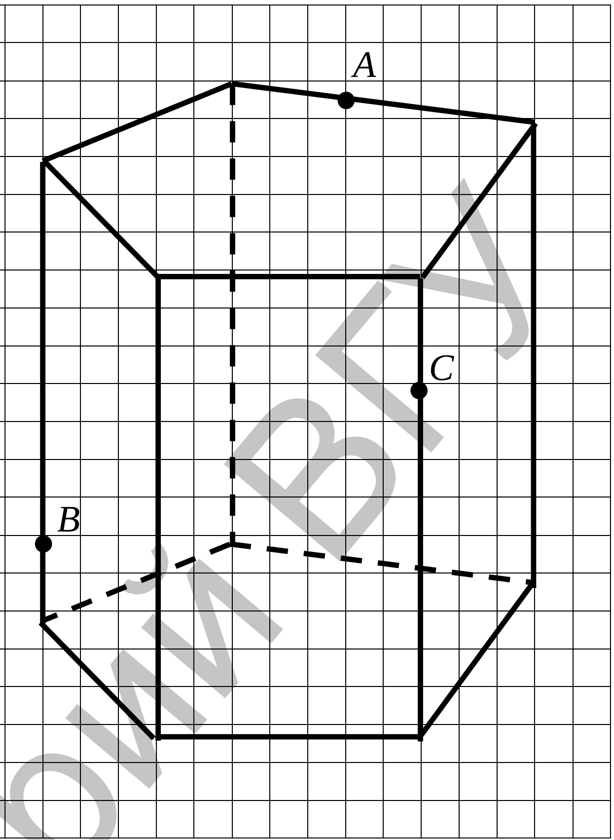
№14



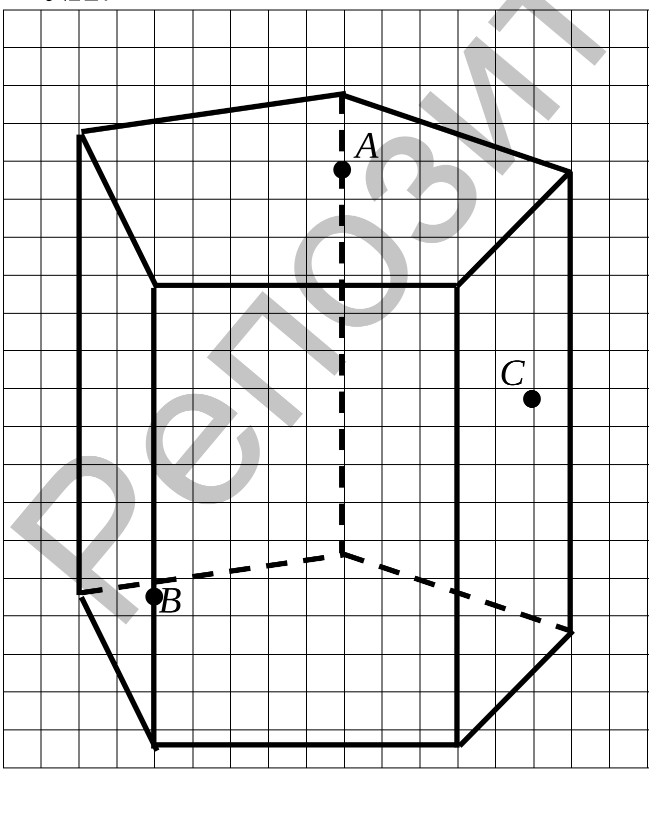
№15



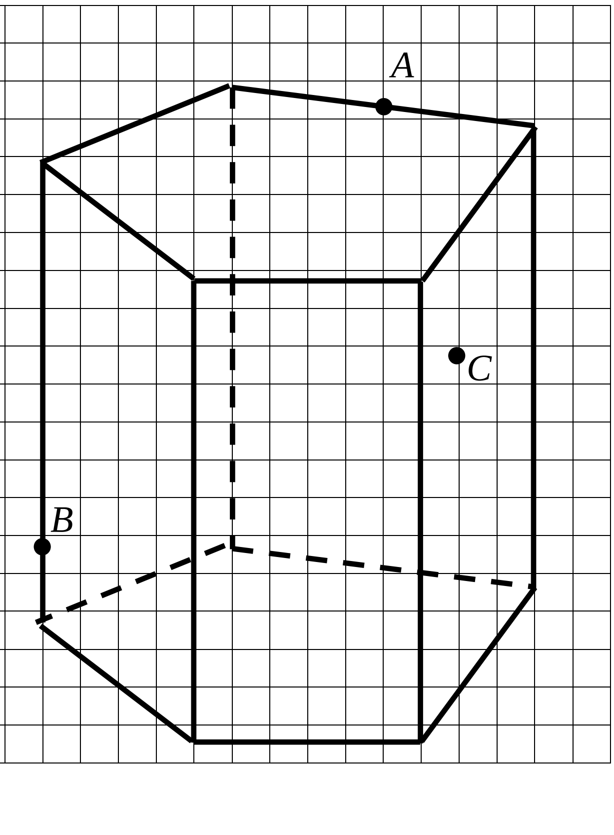
№16



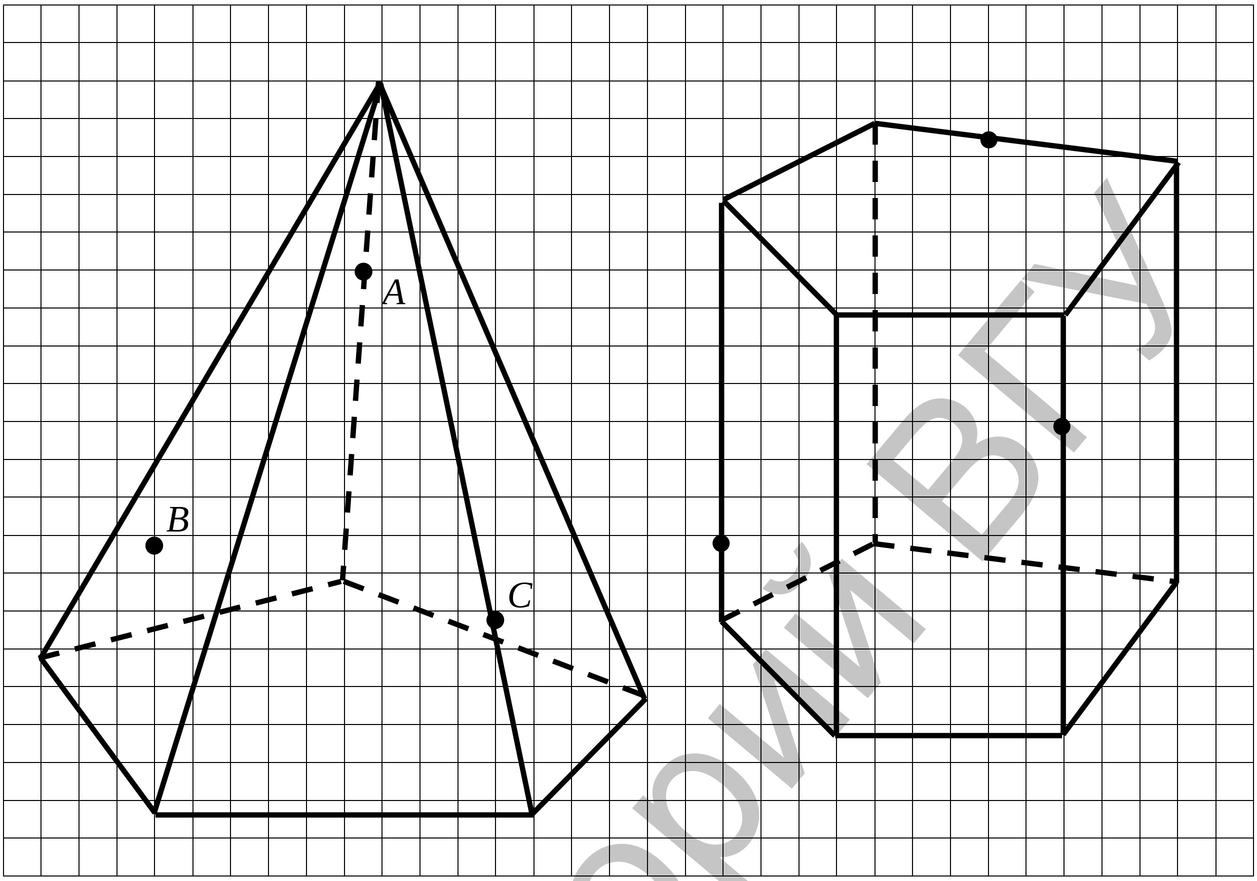
№17



№18



№19 №20



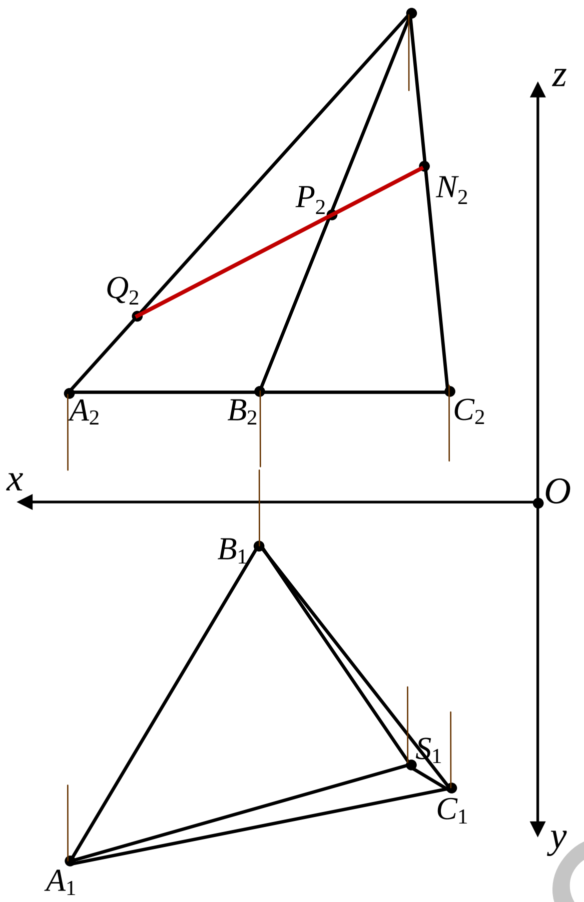
21–25. Дано изображение многогранника в системе двух плоскостей проекций и изображение его сечения фронтально-проецирующей плоскостью на фронтальной плоскости проекций.

21.1–25.1. Построить изображение многогранника на профильной плоскости.

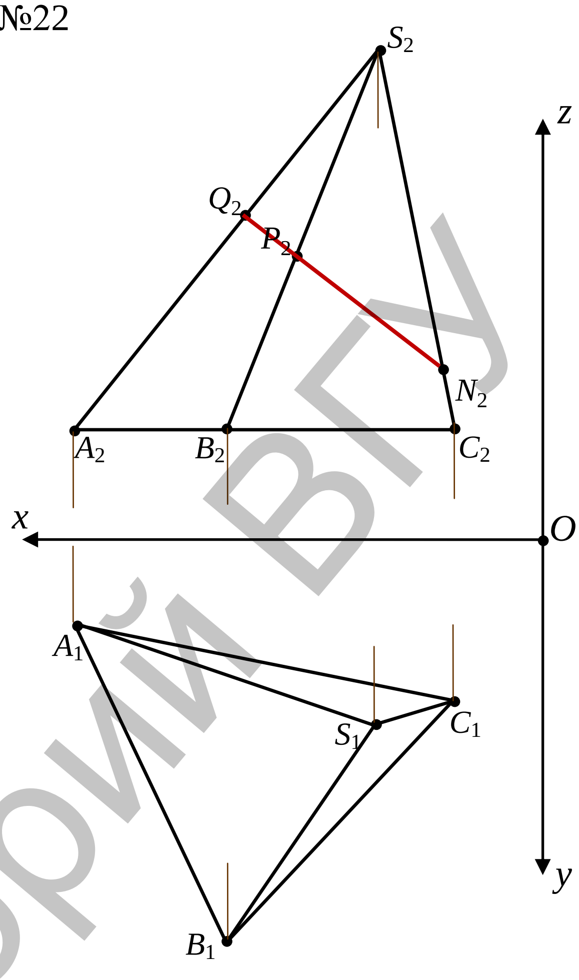
21.2–25.2. Построить изображение сечения на горизонтальной и профильной плоскостях.

21.3–25.3. а) Найти натуральную форму сечения.
б) Построить развёртку этого многогранника.

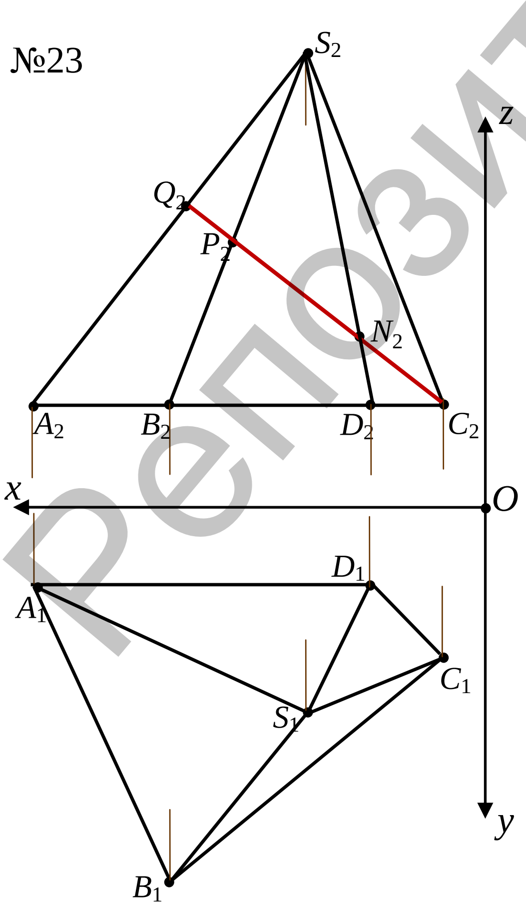
№21


S_2
z
N_2
P_2
Q_2
A_2
B_2
C_2
x
O
B_1
S_1
C_1
y
A_1

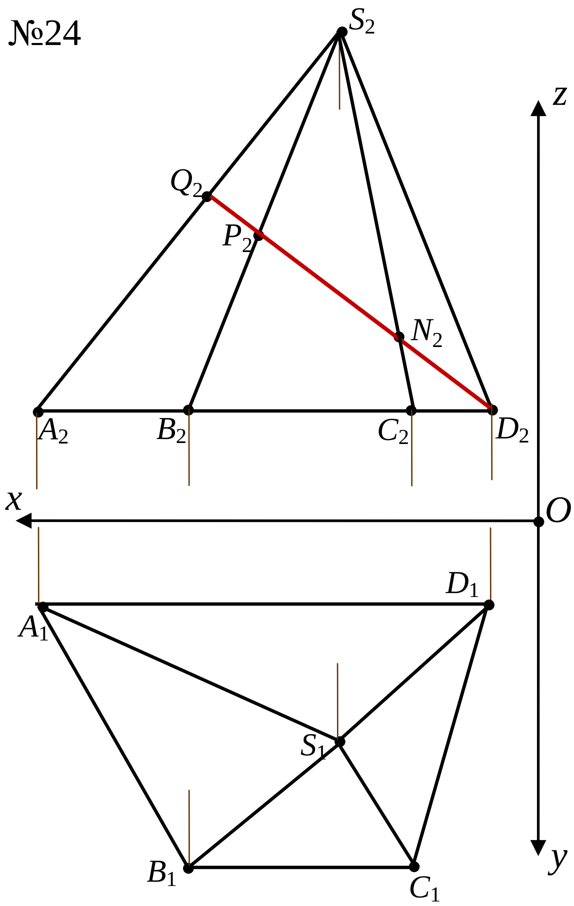
№22


S_2
z
Q_2
P_2
N_2
A_2
B_2
C_2
x
O
A_1
S_1
C_1
y
B_1

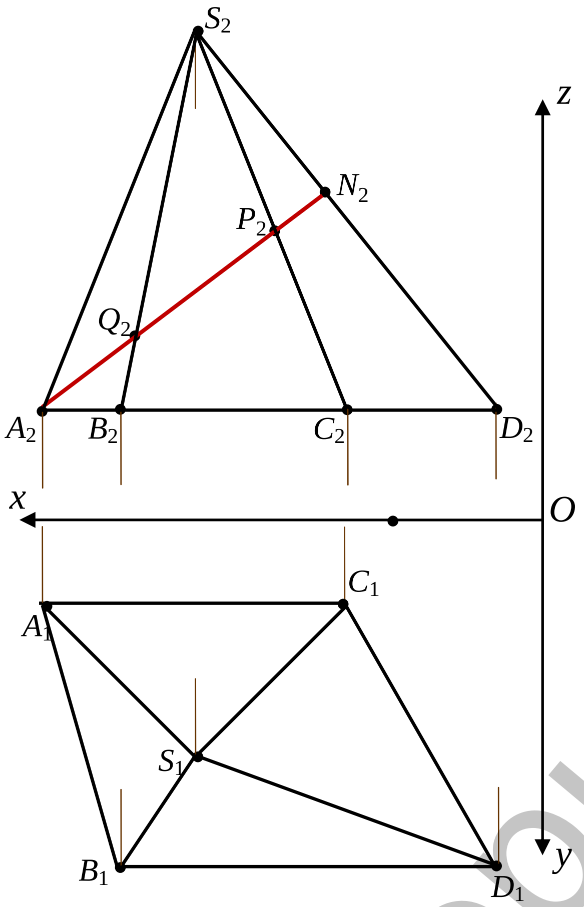
№23


S_2
z
Q_2
P_2
N_2
A_2
B_2
D_2
C_2
x
O
D_1
A_1
C_1
S_1
y
B_1

№24


S_2
z
Q_2
P_2
N_2
A_2
B_2
C_2
D_2
x
O
D_1
A_1
S_1
y
B_1
C_1

№25



Список рекомендованной литературы

1. Подоксёнов, М.Н. Начертательная геометрия / М.Н.Подоксёнов.– Витебск: Изд-во ВГУ имени П.М. Машерова.– 2016.– 50 с.
2. Яговдик, К.П. Начертательная геометрия. Практикум. / К.П. Яговдик. – ГрГУ им. Я.Купалы, 2012.
3. Виноградов, В.Н.Начертательная геометрия / В.Н. Виноградов.– Мн.: Амалфея, 2001.
4. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский.– М: Наука, 2000.
5. Атанасян, Л.С. Геометрия. Ч.II. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев.– М.: Просвещение, 1987.
6. Атанасян, Л.С. Сборник задач по геометрии. Ч.II. / Л.С. Атанасян, В.А. Атанасян.– М.: Просвещение, 1975.

Учебное издание

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич
ТРУБНИКОВ Юрий Валентинович
КАБАНОВ Александр Николаевич

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ И СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *И.В. Волкова*

Подписано в печать 2019. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,83. Уч.-изд. л. 3,62. Тираж экз. Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.