УДК 512.542

Е.Н. Залесская, С.Н. Воробьев

О произведениях классов Фишера

Введение. Важное место в реализации задач исследования канонических подгрупп и характеризации классов конечных групп занимают классы Фишера. Классом Фишера [1] называют класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ конечных групп G, удовлетворяющих условию: если $G \in \mathfrak{F}$ и H – подгруппа группы G, содержащая нормальную подгруппу N группы G, такую, что H/N является p-группой (p – некоторое простое число), то $H \in \mathfrak{F}$.

Заметим, что семейство классов Фишера обширно: оно содержит локальные классы Фиттинга (см. лемму 5 [2]), в частности, все наследственные классы Фиттинга. Основополагающим результатом в теории классов Фиттинга является теорема Локетта [3] о том, что произведение двух любых классов Фишера является снова классом Фишера. В настоящей работе мы расширяем понятие классов Фишера, используя разбиение некоторого подмножества множества всех простых чисел P и определяем Λ-классы Фишера для произвольного множества Λ. Основной результат работы – доказательство аналога теоремы Локетта для Λ-классов Фишера. А именно, нами установлено, что произведение двух любых Λ-классов Фишера является Λ-классом Фишера. Все рассматриваемые в работе группы конечны. В терминологии и обозначениях мы следуем [4].

1. Предварительные сведения. Напомним, что *классом Фиттинга* называется класс групп $\mathfrak{F}$, который замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведения нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то наибольшую нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу группы G называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называют *произведением* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$.

Приведем в качестве лемм некоторые известные утверждения, которые мы будем использовать для доказательства основного результата.

Лемма 1.1 (теорема XI.1.12 (a), [4]). *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга.*

Лемма 1.2 (теорема A.2.1 (b), (c), [4]). *Справедливы следующие утверждения:*

1) если U и N – подгруппы группы G и V нормализует N, то имеет место изоморфизм: $VN/N \cong V/V \cap N$;

2) если M и N – нормальные подгруппы группы G и $N \subseteq M$, то справедлив изоморфизм $(G/N)/(M/N) \cong G/M$.

Лемма 1.3 (тождество Дедекинда, A.1.3, [4]). *Пусть U,V,W – подгруппы группы G, причем $V \subseteq U$. Тогда справедливо равенство*

$$U \cap VW = V(U \cap W).$$

Лемма 1.4 (лемма IX.1.1 (а), [4]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и N – нормальная подгруппа группы G. Тогда* $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 1.5 (квази-R_0-лемма, IX.1.13, [4]). *Пусть N_1, N_2 – нормальные подгруппы группы G такие, что $N_1 \cap N_2 = 1$ и факторгруппа G/N_1N_2 – нильпотентная группа. Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, и $G/N_1 \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G/N_2 \in \mathfrak{F}$.*

2. Λ-класс Фишера и его характеристика. Расширим понятие класса Фишера следующим образом.

Пусть π – непустое множество простых чисел и Λ – такое произвольное непустое множество, что выполняются следующие условия:

1) $\pi(\lambda)$ – непустое множество простых чисел для всех $\lambda \in \Lambda$;

2) $\pi = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi(\lambda)$;

3) $\pi(\lambda) \cap \pi(\mu) = \varnothing$ для каждого $\lambda \neq \mu$ $(\lambda, \mu \in \Lambda)$.

Определение 2.1. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *Λ-классом Фишера*, если из условий $G \in \mathfrak{F}$, $K \lhd G$, $K \subseteq H \subseteq G$ и того, что H/K является нильпотентной $\pi(\lambda)$-группой для некоторого $\lambda \in \Lambda$, всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

Очевидно, что примером Λ-класса Фишера является любой наследственный класс Фиттинга.

Заметим, что в случае, когда множество простых чисел $\pi = \Lambda = P$ и $\pi(\lambda) = \{p\}$ для всех $\lambda \in \Lambda$, мы из указанного определения получаем в точности определение класса Фишера. Таким образом, класс Фишера является специальным случаем Λ-класса Фишера.

Изучим свойства характеристики Λ-класса Фишера, которые мы будем использовать для доказательства основного результата. Напомним, что если характеристикой Char($\mathfrak{F}$) класса групп $\mathfrak{F}$ называется множество Char($\mathfrak{F}$) = $= \{p \in P \mid Z_p \in \mathfrak{F}\}$. Кроме того, через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначим множество всех различных простых делителей всех групп из $\mathfrak{F}$.

Следующая лемма описывает свойства характеристики Λ-класса Фишера.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – Λ-класс Фишера. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Char($\mathfrak{F}$)= $\pi(\mathfrak{F})$;

2) $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{F})}$.

Доказательство. 1) Докажем, что Char($\mathfrak{F}$)= $\pi(\mathfrak{F})$. Пусть $p \in$ Char($\mathfrak{F}$). Тогда циклическая группа порядка p является $\mathfrak{F}$-группой, т.е. $Z_p \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и поэтому Char($\mathfrak{F}$) $\subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Докажем обратное включение. Пусть $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда существует группа $G \in \mathfrak{F}$ такая, что q является простым делителем порядка этой группы. В этом случае существует элемент $g \in G$ порядка q. Но тогда по определению Λ-класса Фишера циклическая группа $Z_p \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $q \in$ Char($\mathfrak{F}$) и, следовательно, $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq$ Char($\mathfrak{F}$). Таким образом, $\pi(\mathfrak{F})$ =Char($\mathfrak{F}$) и утверждение (1) доказано.

Справедливость утверждения (2) следует непосредственно из (1) и теоремы IX.1.9 [4].

3. Произведение Λ-классов Фишера. Докажем основной результат настоящей работы о произведениях Λ-классов Фишера, который представляет

Теорема 3.1. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – Λ-классы Фишера, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является Λ-классом Фишера.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда по лемме 1.1 их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга. Поэтому для доказательства теоремы достаточно выяснить, что если G – группа из $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и K – ее нормальная подгруппа, содержащаяся в подгруппе H группы G, такая, что H/K является нильпотентной $\pi(\lambda)$-группой для некоторого $\lambda \in \Lambda$, то $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

(1) Докажем, что из предположения $H/K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ следует, что факторгруппы $HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}}$ и $H \cap G/K \cap G_{\mathfrak{F}}$ являются группами из класса $\mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$.

Так как по условию $K \lhd H$ и $K \lhd G$, то подгруппа $HG_{\mathfrak{F}} = HKG_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 1.2 факторгруппа

$$HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}} = HKG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}} \cong H/H \cap KG_{\mathfrak{F}}.$$

Но тогда, применяя утверждение 3 леммы 1.2, имеем изоморфизм $H/K/H \cap KG_{\mathfrak{F}}/K \cong H/H \cap KG_{\mathfrak{F}}$. Так как по условию $H/K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ и класс всех нильпотентных $\pi(\lambda)$-групп является формацией, то группа $H/K/H \cap \cap KG_{\mathfrak{F}}/K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Но тогда ей изоморфна группа $H/H \cap KG_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Кроме того, $H/H \cap KG_{\mathfrak{F}} \cong HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Покажем, что $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$.

Так как $K \lhd H$, то $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} = H \cap G_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}} \cap K$. Применяя утверждение 1 леммы 1.2, имеем изоморфизм $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \cong (H \cap G_{\mathfrak{F}})K/K$. Но $(H \cap G_{\mathfrak{F}})K/K$ – нормальная подгруппа группы $H/K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Так как $\mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ – класс Фиттинга, то группа $(H \cap G_{\mathfrak{F}})K/K \in$ $\in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ и поэтому ей изоморфна группа $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$.

(2) Используя (1), докажем, что $H/H \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$.

Пусть $\bar{G} = G/G_{\mathfrak{F}}$, $\bar{K} = KG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$ и $\bar{H} = HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$. Тогда из того, что $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ следует, что $\bar{G} \in \mathfrak{H}$. Кроме того, $\bar{K} \lhd \bar{G}$ и по лемме 1.3 $\bar{H}/\bar{K} \cong HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}}$. Таким образом, ввиду (1), $\bar{G} \in \mathfrak{H}$, $\bar{K} \lhd \bar{G}$, $\bar{K} \subseteq \bar{H} \subseteq \bar{G}$ и $\bar{H}/\bar{K} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Но $\mathfrak{H}$ является Λ-классом Фишера. Следовательно, $\bar{H} = HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$ и по утверждению 1 леммы 1.2 имеем $HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \cong$ $\cong H/H \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$.

(3) Докажем равенство $H_{\mathfrak{F}} \cap (H \cap G_{\mathfrak{F}})K = H \cap G_{\mathfrak{F}}$.

Вначале заметим, что $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, $K \cap G_{\mathfrak{F}} \lhd G_{\mathfrak{F}}, K \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Ввиду (1), $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Следовательно, из того, что $\mathfrak{F}$ –

Λ-класс Фишера, вытекает, что $H\bigcap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Но $H\bigcap G_{\mathfrak{F}} \lhd H$ и поэтому по определению $\mathfrak{F}$-радикала группы H заключаем, что $H\cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq H_{\mathfrak{F}}$. Теперь, используя лемму 1.3 (тождество Дедекинда), получаем равенство $H_{\mathfrak{F}} \cap (H\cap G_{\mathfrak{F}})K=(H\cap G_{\mathfrak{F}})(H_{\mathfrak{F}} \cap K)$. Так как $K\lhd H$, то по лемме 1.4 $H_{\mathfrak{F}} \cap K=K_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $H_{\mathfrak{F}} \cap (H\cap G_{\mathfrak{F}})K=(H\cap G_{\mathfrak{F}})K_{\mathfrak{F}}$. Очевидно, $K_{\mathfrak{F}} \subseteq H\cap G_{\mathfrak{F}}$. Значит, $H_{\mathfrak{F}} \cap (H\cap G_{\mathfrak{F}})K=H\cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$.

(4) *Докажем, что* $H/(H\bigcap G_{\mathfrak{F}})K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$.

По предположению $H/K\in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ и класс $\mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ является формацией. Следовательно, по утверждению 2 леммы 1.2 $H/K/(H\cap G_{\mathfrak{F}})K/K\cong H/(H\cap G_{\mathfrak{F}})K\in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Легко видеть, ввиду теоремы Лагранжа, что

$|H/(H\cap G_{\mathfrak{F}})|=|H/(H\cap G_{\mathfrak{F}})/(H\cap G_{\mathfrak{F}})K/H\cap G_{\mathfrak{F}}||(H\cap G_{\mathfrak{F}})K/H\cap G_{\mathfrak{F}}|$. Следовательно, множество всех простых делителей $\pi(\lambda)$ содержится во множестве всех простых делителей порядка группы $H/H\cap G_{\mathfrak{F}}$. Но ввиду (2), факторгруппа $H/H\cap G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{H}$-группой и поэтому $\pi(\lambda)\subseteq \pi(\mathfrak{H})$. Теперь, применяя лемму 2.2, получаем:

$$\mathfrak{N}_{\pi(\lambda)} \subseteq \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{H}.$$

Отсюда следует, что $H/(H\bigcap G_{\mathfrak{F}})K \in \mathfrak{H}$.

(5) *Применяя (1)–(4), покажем, что* $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$.

Для этого применим лемму 1.5 (квази-R_0-лемму) для групп: $\tilde{G}=H/H\bigcap G_{\mathfrak{F}}, \bar{K}_1=(H\bigcap G_{\mathfrak{F}})K/H\bigcap G_{\mathfrak{F}}, \bar{K}_2=H_{\mathfrak{F}}/H\bigcap G_{\mathfrak{F}}$. Вначале проверим выполнимость всех условий квази-R_0-леммы для групп $\tilde{G}, \bar{K}_1$ и $\bar{K}_2$. Очевидно, $\bar{K}_1 \lhd \tilde{G}$ и $\bar{K}_2 \lhd \tilde{G}$. Рассмотрим пересечение $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2=((H\cap G_{\mathfrak{F}})K/H\cap G_{\mathfrak{F}})\cap(H_{\mathfrak{F}}/H\cap G_{\mathfrak{F}})$. Ввиду (3), получаем $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2=(H_{\mathfrak{F}} \cap (H\cap G_{\mathfrak{F}})K)/(H\cap G_{\mathfrak{F}})=(H\cap G_{\mathfrak{F}})/(H\cap G_{\mathfrak{F}})=1$. Составим факторгруппу $\tilde{G}/\bar{K}_1\bar{K}_2$ и покажем ее нильпотентность. Действительно,

$$\tilde{G}/\bar{K}_1\bar{K}_2=(H/H\cap G_{\mathfrak{F}})/((H\cap G_{\mathfrak{F}})K)/(H\cap G_{\mathfrak{F}})(H_{\mathfrak{F}}/H\cap G_{\mathfrak{F}}))=$$
$$(H_{\mathfrak{F}}/H\cap G_{\mathfrak{F}})/((H\cap G_{\mathfrak{F}})KH_{\mathfrak{F}})/(H\cap G_{\mathfrak{F}}).$$

Учитывая, что в (3) установлено, что $H\cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq H_{\mathfrak{F}}$, по утверждению 2 леммы 1.2 мы получаем, что

$$\tilde{G}/\bar{K}_1\bar{K}_2=(H/H\cap G_{\mathfrak{F}})/(H_{\mathfrak{F}}K/H\cap G_{\mathfrak{F}})\cong H/H_{\mathfrak{F}}K\in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)} \subseteq \mathfrak{N}.$$

Остается проверить, что $\tilde{G}/\bar{K}_1 \in \mathfrak{H}$. Применяя утверждение 2 леммы 1.3, получаем $\tilde{G}/\bar{K}_1=(H/H\cap G_{\mathfrak{F}})/((H\cap G_{\mathfrak{F}})K/H\cap G_{\mathfrak{F}})\cong H/(H\cap G_{\mathfrak{F}})K$. Но, ввиду (4), имеем $H/(H\cap G_{\mathfrak{F}})K\in\mathfrak{H}$ и поэтому $\tilde{G}/\bar{K}_1 \in \mathfrak{H}$. Таким образом, все условия квази-R_0-леммы выполняются. Теперь, ввиду (2), имеем $\tilde{G} \in\mathfrak{H}$ и по заключению леммы это равносильно тому, что $\tilde{G}/\bar{K}_2 \in\mathfrak{H}$. Это означает по

утверждению 2 леммы 1.2, что $(H/H\cap G_{\mathfrak{F}})/(H_{\mathfrak{F}}/H\cap G_{\mathfrak{F}})\cong H/H_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{H}$. Следовательно, $H\in\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является Λ-классом Фишера.

Теорема доказана.

В случае Λ=P и $\pi(\lambda)=\{p\}$ для всех $\lambda\in\Lambda$ из теоремы 3.1 вытекает известный результат Локетта, который приведем как

Следствие 3.2 (**Локетт [3]**, **теорема IX.3.8 [4]**) *Произведение двух любых классов Фишера является классом Фишера.*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Hartley, B.*** On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P.193–207.
2. ***Воробьев Н.Т.*** О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, вып. 2. – С.161–168.
3. ***Lockett, F.P.*** On the theory of Fitting classes of finite solvable groups / F.P. Lockett. – Ph. D. thesis, University of Warwick, 1971.
4. ***Doerk, K.*** Finite Soluble Groups / K. Doerk, T.O. Hawkes // Waltor de Gryeter. – N. Y.–Berlin, 1992. – 891 p.

SUMMARY

In this paper we extended the concept of Fisher class and defined the concept of Λ-Fisher class for arbitrary set Λ.

We proved that the product of two arbitrary Λ-Fisher class is a Λ-Fisher class.

Поступила в редакцию 6.03.2008