

О произведениях классов Фишера

Введение. Важное место в реализации задач исследования канонических подгрупп и характеристики классов конечных групп занимают классы Фишера. Классом Фишера [1] называют класс Фиттинга \mathfrak{F} конечных групп G , удовлетворяющих условию: если $G \in \mathfrak{F}$ и H – подгруппа группы G , содержащая нормальную подгруппу N группы G , такую, что H/N является p -группой (p – некоторое простое число), то $H \in \mathfrak{F}$.

Заметим, что семейство классов Фишера обширно: оно содержит локальные классы Фиттинга (см. лемму 5 [2]), в частности, все наследственные классы Фиттинга. Основопологающим результатом в теории классов Фиттинга является теорема Локетта [3] о том, что произведение двух любых классов Фишера является снова классом Фишера. В настоящей работе мы расширяем понятие классов Фишера, используя разбиение некоторого подмножества множества всех простых чисел P и определяем Λ -классы Фишера для произвольного множества Λ . Основным результатом работы – доказательство аналога теоремы Локетта для Λ -классов Фишера. А именно, нами установлено, что произведение двух любых Λ -классов Фишера является Λ -классом Фишера. Все рассматриваемые в работе группы конечны. В терминологии и обозначениях мы следуем [4].

1. Предварительные сведения. Напомним, что *классом Фиттинга* называется класс групп \mathfrak{F} , который замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведения нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, то наибольшую нормальную \mathfrak{F} -подгруппу группы G называют \mathfrak{F} -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – классы Фиттинга. Тогда класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называют *произведением \mathfrak{F} и \mathfrak{H}* .

Приведем в качестве лемм некоторые известные утверждения, которые мы будем использовать для доказательства основного результата.

Лемма 1.1 (теорема XI.1.12 (a), [4]). Если \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – классы Фиттинга, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга.

Лемма 1.2 (теорема A.2.1 (b), (c), [4]). Справедливы следующие утверждения:

1) если U и N – подгруппы группы G и V нормализует N , то имеет место изоморфизм: $VN/N \cong VV \cap N$;

2) если M и N – нормальные подгруппы группы G и $N \subseteq M$, то справедлив изоморфизм $(G/N)/(M/N) \cong G/M$.

Лемма 1.3 (тождество Дедекинда, A.1.3, [4]). Пусть U, V, W – подгруппы группы G , причем $V \subseteq U$. Тогда справедливо равенство

$$U \cap VW = V(U \cap W).$$

Лемма 1.4 (лемма IX.1.1 (а), [4]). Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 1.5 (квази- R_0 -лемма, IX.1.13, [4]). Пусть N_1, N_2 – нормальные подгруппы группы G такие, что $N_1 \cap N_2 = 1$ и факторгруппа G/N_1N_2 – нильпотентная группа. Если \mathfrak{F} – класс Фиттинга, и $G/N_1 \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G/N_2 \in \mathfrak{F}$.

2. Λ -класс Фишера и его характеристика. Расширим понятие класса Фишера следующим образом.

Пусть π – непустое множество простых чисел и Λ – такое произвольное непустое множество, что выполняются следующие условия:

- 1) $\pi(\lambda)$ – непустое множество простых чисел для всех $\lambda \in \Lambda$;
- 2) $\pi = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi(\lambda)$;
- 3) $\pi(\lambda) \cap \pi(\mu) = \emptyset$ для каждого $\lambda \neq \mu$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$).

Определение 2.1. Класс Фиттинга \mathfrak{F} называется Λ -классом Фишера, если из условий $G \in \mathfrak{F}$, $K \triangleleft G$, $K \subseteq N \subseteq G$ и того, что N/K является нильпотентной $\pi(\lambda)$ -группой для некоторого $\lambda \in \Lambda$, всегда следует, что $N \in \mathfrak{F}$.

Очевидно, что примером Λ -класса Фишера является любой наследственный класс Фиттинга.

Заметим, что в случае, когда множество простых чисел $\pi = \Lambda = P$ и $\pi(\lambda) = \{p\}$ для всех $\lambda \in \Lambda$, мы из указанного определения получаем в точности определение класса Фишера. Таким образом, класс Фишера является специальным случаем Λ -класса Фишера.

Изучим свойства характеристики Λ -класса Фишера, которые мы будем использовать для доказательства основного результата. Напомним, что если характеристикой $\text{Char}(\mathfrak{F})$ класса групп \mathfrak{F} называется множество $\text{Char}(\mathfrak{F}) = \{p \in P \mid Z_p \in \mathfrak{F}\}$. Кроме того, через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначим множество всех различных простых делителей всех групп из \mathfrak{F} .

Следующая лемма описывает свойства характеристики Λ -класса Фишера.

Лемма 2.2. Пусть \mathfrak{F} – Λ -класс Фишера. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\text{Char}(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$;
- 2) $\mathcal{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{E}_{\pi(\mathfrak{F})}$.

Доказательство. 1) Докажем, что $\text{Char}(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$. Пусть $p \in \text{Char}(\mathfrak{F})$. Тогда циклическая группа порядка p является \mathfrak{F} -группой, т.е. $Z_p \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и поэтому $\text{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Докажем обратное включение. Пусть $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда существует группа $G \in \mathfrak{F}$ такая, что q является простым делителем порядка этой группы. В этом случае существует элемент $g \in G$ порядка q . Но тогда по определению Λ -класса Фишера циклическая группа $Z_q \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $q \in \text{Char}(\mathfrak{F})$ и, следовательно, $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \text{Char}(\mathfrak{F})$. Таким образом, $\pi(\mathfrak{F}) = \text{Char}(\mathfrak{F})$ и утверждение (1) доказано.

Справедливость утверждения (2) следует непосредственно из (1) и теоремы IX.1.9 [4].

3. Произведение Λ -классов Фишера. Докажем основной результат настоящей работы о произведениях Λ -классов Фишера, который представляет

Теорема 3.1. *Если \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – Λ -классы Фишера, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является Λ -классом Фишера.*

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – классы Фиттинга. Тогда по лемме 1.1 их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга. Поэтому для доказательства теоремы достаточно выяснить, что если G – группа из $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и K – ее нормальная подгруппа, содержащаяся в подгруппе H группы G , такая, что H/K является нильпотентной $\pi(\lambda)$ -группой для некоторого $\lambda \in \Lambda$, то $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

(1) *Докажем, что из предположения $H/K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ следует, что факторгруппы $HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}}$ и $H \cap G/K \cap G_{\mathfrak{F}}$ являются группами из класса $\mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$.*

Так как по условию $K \triangleleft H$ и $K \triangleleft G$, то подгруппа $HG_{\mathfrak{F}} = HKG_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 1.2 факторгруппа $HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}} = HKG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}} \cong H/H \cap KG_{\mathfrak{F}}$.

Но тогда, применяя утверждение 3 леммы 1.2, имеем изоморфизм $H/K \cap KG_{\mathfrak{F}}/K \cong H/H \cap KG_{\mathfrak{F}}$. Так как по условию $H/K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ и класс всех нильпотентных $\pi(\lambda)$ -групп является формацией, то группа $H/K \cap KG_{\mathfrak{F}}/K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Но тогда ей изоморфна группа $H/H \cap KG_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Кроме того, $H/H \cap KG_{\mathfrak{F}} \cong HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Покажем, что $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$.

Так как $K \triangleleft H$, то $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} = H \cap G_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}} \cap K$. Применяя утверждение 1 леммы 1.2, имеем изоморфизм $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \cong (H \cap G_{\mathfrak{F}})K/K$. Но $(H \cap G_{\mathfrak{F}})K/K$ – нормальная подгруппа группы $H/K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Так как $\mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ – класс Фиттинга, то группа $(H \cap G_{\mathfrak{F}})K/K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ и поэтому ей изоморфна группа $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$.

(2) *Используя (1), докажем, что $H/H \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$.*

Пусть $\bar{G} = G/G_{\mathfrak{F}}$, $\bar{K} = KG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$ и $\bar{H} = HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$. Тогда из того, что $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ следует, что $\bar{G} \in \mathfrak{H}$. Кроме того, $\bar{K} \triangleleft \bar{G}$ и по лемме 1.3 $\bar{H}/\bar{K} \cong HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}}$. Таким образом, ввиду (1), $\bar{G} \in \mathfrak{H}$, $\bar{K} \triangleleft \bar{G}$, $\bar{K} \subseteq \bar{H} \subseteq \bar{G}$ и $\bar{H}/\bar{K} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Но \mathfrak{H} является Λ -классом Фишера. Следовательно, $\bar{H} = HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$ и по утверждению 1 леммы 1.2 имеем $HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \cong H/H \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$.

(3) *Докажем равенство $H_{\mathfrak{F}} \cap (H \cap G_{\mathfrak{F}})K = H \cap G_{\mathfrak{F}}$.*

Вначале заметим, что $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, $K \cap G_{\mathfrak{F}} \triangleleft G_{\mathfrak{F}}$, $K \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Ввиду (1), $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Следовательно, из того, что \mathfrak{F} –

Λ -класс Фишера, вытекает, что $H \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Но $H \cap G_{\mathfrak{F}} \triangleleft H$ и поэтому по определению \mathfrak{F} -радикала группы H заключаем, что $H \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq H_{\mathfrak{F}}$. Теперь, используя лемму 1.3 (тождество Дедекинда), получаем равенство $H_{\mathfrak{F}} \cap (H \cap G_{\mathfrak{F}})K = (H \cap G_{\mathfrak{F}})(H_{\mathfrak{F}} \cap K)$. Так как $K \triangleleft H$, то по лемме 1.4 $H_{\mathfrak{F}} \cap K = K_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $H_{\mathfrak{F}} \cap (H \cap G_{\mathfrak{F}})K = (H \cap G_{\mathfrak{F}})K_{\mathfrak{F}}$. Очевидно, $K_{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap G_{\mathfrak{F}}$. Значит, $H_{\mathfrak{F}} \cap (H \cap G_{\mathfrak{F}})K = H \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

(4) Докажем, что $H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$.

По предположению $H/K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ и класс $\mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$ является формацией. Следовательно, по утверждению 2 леммы 1.2 $H/K/(H \cap G_{\mathfrak{F}})K/K \cong H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)}$. Легко видеть, ввиду теоремы Лагранжа, что

$|H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})| = |H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})/(H \cap G_{\mathfrak{F}})K/H \cap G_{\mathfrak{F}}| |(H \cap G_{\mathfrak{F}})K/H \cap G_{\mathfrak{F}}|$. Следовательно, множество всех простых делителей $\pi(\lambda)$ содержится во множестве всех простых делителей порядка группы $H/H \cap G_{\mathfrak{F}}$. Но ввиду (2), факторгруппа $H/H \cap G_{\mathfrak{F}}$ является \mathfrak{F} -группой и поэтому $\pi(\lambda) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Теперь, применяя лемму 2.2, получаем:

$$\mathfrak{N}_{\pi(\lambda)} \subseteq \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Отсюда следует, что $H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})K \in \mathfrak{F}$.

(5) Применяя (1)–(4), покажем, что $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{F}$.

Для этого применим лемму 1.5 (квази- R_0 -лемму) для групп: $\tilde{G} = H/H \cap G_{\mathfrak{F}}$, $\bar{K}_1 = (H \cap G_{\mathfrak{F}})K/H \cap G_{\mathfrak{F}}$, $\bar{K}_2 = H_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}}$. Вначале проверим выполнимость всех условий квази- R_0 -леммы для групп \tilde{G}, \bar{K}_1 и \bar{K}_2 . Очевидно, $\bar{K}_1 \triangleleft \tilde{G}$ и $\bar{K}_2 \triangleleft \tilde{G}$. Рассмотрим пересечение $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2 = ((H \cap G_{\mathfrak{F}})K/H \cap G_{\mathfrak{F}}) \cap (H_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}})$. Ввиду (3), получаем $\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2 = (H_{\mathfrak{F}} \cap (H \cap G_{\mathfrak{F}})K)/(H \cap G_{\mathfrak{F}}) = (H \cap G_{\mathfrak{F}})/(H \cap G_{\mathfrak{F}}) = 1$. Составим факторгруппу $\tilde{G}/\bar{K}_1 \bar{K}_2$ и покажем ее нильпотентность. Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{G}/\bar{K}_1 \bar{K}_2 &= (H/H \cap G_{\mathfrak{F}})/((H \cap G_{\mathfrak{F}})K/(H \cap G_{\mathfrak{F}})(H_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}})) = \\ &= (H_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}})/((H \cap G_{\mathfrak{F}})KH_{\mathfrak{F}}/(H \cap G_{\mathfrak{F}})). \end{aligned}$$

Учитывая, что в (3) установлено, что $H \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq H_{\mathfrak{F}}$, по утверждению 2 леммы 1.2 мы получаем, что

$$\tilde{G}/\bar{K}_1 \bar{K}_2 = (H/H \cap G_{\mathfrak{F}})/(H_{\mathfrak{F}}K/H \cap G_{\mathfrak{F}}) \cong H/H_{\mathfrak{F}}K \in \mathfrak{N}_{\pi(\lambda)} \subseteq \mathfrak{N}.$$

Остается проверить, что $\tilde{G}/\bar{K}_1 \in \mathfrak{F}$. Применяя утверждение 2 леммы 1.3, получаем $\tilde{G}/\bar{K}_1 = (H/H \cap G_{\mathfrak{F}})/((H \cap G_{\mathfrak{F}})K/H \cap G_{\mathfrak{F}}) \cong H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})K$. Но, ввиду (4), имеем $H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})K \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\tilde{G}/\bar{K}_1 \in \mathfrak{F}$. Таким образом, все условия квази- R_0 -леммы выполняются. Теперь, ввиду (2), имеем $\tilde{G} \in \mathfrak{F}$ и по заключению леммы это равносильно тому, что $\tilde{G}/\bar{K}_2 \in \mathfrak{F}$. Это означает по

утверждению 2 леммы 1.2, что $(H/H \cap G_{\mathfrak{F}})/(H_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}}) \cong H/H_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{F}$ и произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{F}$ является Λ -классом Фишера.

Теорема доказана.

В случае $\Lambda = P$ и $\pi(\lambda) = \{p\}$ для всех $\lambda \in \Lambda$ из теоремы 3.1 вытекает известный результат Локетта, который приведем как

Следствие 3.2 (Локетт [3], теорема IX.3.8 [4]) Произведение двух любых классов Фишера является классом Фишера.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hartley, B.** On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
2. **Воробьев Н.Т.** О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, вып. 2. – С. 161–168.
3. **Lockett, F.P.** On the theory of Fitting classes of finite solvable groups / F.P. Lockett. – Ph. D. thesis, University of Warwick, 1971.
4. **Doerk, K.** Finite Soluble Groups / K. Doerk, T.O. Hawkes // Walter de Gruyter. – N. Y.–Berlin, 1992. – 891 p.

S U M M A R Y

In this paper we extended the concept of Fisher class and defined the concept of Λ -Fisher class for arbitrary set Λ .

We proved that the product of two arbitrary Λ -Fisher class is a Λ -Fisher class.

Поступила в редакцию 6.03.2008