УДК 517.956.32

Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии

Ф.Е. Ломовцев, Е.В. Устилко
Белорусский государственный университет

В настоящей статье модификацией метода характеристик выведена формула единственного классического решения смешанной задачи для общего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии. Нестационарность косой производной означает, что в ней коэффициенты зависят от времени. Ее характеристичность указывает на то, что она направлена по критической характеристике уравнения.

Цель – исследование корректности по Адамару во множестве классических решений и нахождение классического решения этой смешанной задачи.

Материал и методы. *Материалом работы служит смешанная задача для общего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при характеристической первой косой производной с зависящими от времени коэффициентами. Эта смешанная задача для более общего уравнения с младшей частью сводится заменой неизвестного решения к соответствующей смешанной задаче для более простого уравнения, содержащего только главную часть. Исследование корректности по Адамару (существования, единственности и устойчивости) во множестве классических решений и нахождение классического решения последней смешанной задачи проводится модификацией известного метода характеристик (распространяющихся волн).*

Результаты и их обсуждение. *Установлен критерий корректности во множестве классических решений смешанной задачи для общего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии. Этот критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное и трех условий согласования между ними для однозначной и устойчивой везде разрешимости этой смешанной задачи во множестве классических решений. Выведена явная формула единственного и устойчивого классического решения искомой смешанной задачи. Устойчивость (непрерывная зависимость) решения по исходным данным (от исходных данных): правой части уравнения, начальным данным и граничному данному – непосредственно вытекает из явной формулы классического решения. Полученные результаты дают полное и окончательное исследование и решение смешанной задачи, поставленной в настоящей работе.*

Заключение. *Найден критерий корректности по Адамару для классических решений смешанной задачи с характеристической первой косой производной и зависящими от времени коэффициентами в граничном условии. Выведена явная формула единственного и устойчивого классического решения этой смешанной задачи.*

Ключевые слова: *смешанная задача, нестационарное граничное условие, характеристическая косая производная, классическое решение, критерий корректности, требование гладкости, условие согласования.*

Correctness Criterion of a Mixed Problem for the General Oscillation Equation of a Semi-Bounded String with a Nonstationary Characteristic of First Directional Derivative in a Boundary Condition

F.E. Lomovtsev, E.V. Ustilko
Belarusian State University

In this article, by modifying the method of characteristics the formula for the unique classical solution of the mixed problem for the general inhomogeneous oscillation equation for a semi-bounded string with non-stationary characteristic epy first

Репозиторий ВГУ

oblique derivative in the boundary condition is derived. The non-stationary nature of the oblique derivative means that the coefficients in it depend on the time. Its characterizability means that it is directed along the critical characteristic of the equation.

The aim of the article is to study Hadamard's correctness in the set of classical solutions and to find a classical solution of this mixed problem.

Material and methods. *The material of the paper is a mixed problem for the general inhomogeneous oscillation equation for a semi-bounded string with the characteristic first oblique derivative with time-dependent coefficients. This mixed problem for a more general equation with the lowest part is reduced by replacing the unknown solution to the corresponding mixed problem for a simpler equation containing only the principal part. The investigation of Hadamard correctness (existence, uniqueness, and stability) in the set of classical solutions and finding the classical solution of the last mixed problem is carried out by modifying the known method of characteristics (propagating waves).*

Findings and their discussion. *A correctness criterion is established in the set of classical solutions of the mixed problem for the general inhomogeneous oscillation equation for a semi-bounded string under the non-stationary characteristic first oblique derivative in the boundary condition. This correctness criterion consists of necessary and sufficient smoothness requirements on the right-hand side of the equation, the initial data and the boundary value, and three matching conditions between them for the unique and stable solvability of this mixed problem in the set of classical solutions. An explicit formula for the unique and stable classical solution of the required mixed problem is derived. The stability (continuous dependence) of the solution with respect to the input data (from the input data): the right-hand side of the equation, the initial data, and the boundary value follows directly from the explicit formula of the classical solution. The results obtained give a complete and final investigation and resolution of the mixed problem posed in this paper.*

Conclusion. *A Hadamard correctness criterion is found for classical solutions of a mixed problem with a characteristic first oblique derivative and time-dependent coefficients in the boundary condition. An explicit formula for the unique and stable classical solution of this mixed problem is derived.*

Key words: *the mixed problem, the non-stationary boundary condition, the characteristic oblique derivative, the classical solution, the correctness criterion, the smoothness requirement, the matching condition.*

В настоящей работе модификацией метода характеристик найдено в явном виде единственное устойчивое классическое решение и установлен критерий корректности (по Адамару: существование, единственность и устойчивость решения) смешанной задачи для общего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны в случае нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии. Нестационарность первой косой производной означает зависимость ее коэффициентов от времени, а характеристичность – ее направление по критической характеристике уравнения. Критерий корректности включает необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования на исходные данные (правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное) смешанной задачи, которые гарантируют ее однозначную и устойчивую везде разрешимость. Эти результаты обобщают аналогичные результаты работы [1] с простейшим уравнением колебаний струны. Достаточные условия существования единственного классического решения аналогичной смешанной задачи для простейшего однородного уравнения колебаний струны получены в [2]. Случай простейшего уравнения колебаний струны и стационарных коэффициентов характеристической первой косой производной в граничном условии рассмотрен в [3]. Ранее в работе [4] были найдены классическое решение и критерий корректности нашей смешанной задачи, но с нехарактеристической второй косой производной в граничном условии. Более полный перечень литературы, связанный с историей вопроса, приведен в [5].

Цель статьи – исследование корректности по Адамару во множестве классических решений и нахождение классического решения этой смешанной задачи.

Материал и методы. На множестве $G_\infty = [0,\infty)\times[0,\infty)$ ставится смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x,t) - a_1 a_2 u_{xx}(x,t) + \left(b_1 + b_2\right)u_t + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)u_x + b_1 b_2 u = f(x,t),\ \left(x,t\right)\in G_\infty, \quad (1)$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x),\ \ x\in R_+ = [0,\infty), \quad (2)$$

$$\left[\alpha(t)u_t(x,t) + \beta(t)u_x(x,t) + \gamma(t)u(x,t)\right]\Big|_{x=0} = \mu(t),\ t\in R_+, \quad (3)$$

Репозиторий ВГУ

где коэффициенты α, β, γ – заданные функции переменной t, исходные данные f, φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x и t, $a_1 > 0, a_2 > 0$, b_1, b_2 – вещественные постоянные. Частные производные соответствующих порядков от искомой функции u обозначаем нижними индексами по указанным переменным. Требуется найти в явном виде классические решения $u \in C^2(G_\infty)$, а также необходимые и достаточные условия, налагаемые на исходные данные f, φ, ψ, μ, для однозначной и устойчивой везде разрешимости характеристической смешанной задачи (1)–(3).

Вместо того, чтобы решать смешанную задачу (1)–(3), с помощью замены

$$u(x,t) = e^{Bx-At}\hat{u}(x,t), \quad A = (a_1b_2 + a_2b_1)/(a_1 + a_2), \quad B = (b_2 - b_1)/(a_1 + a_2) \tag{4}$$

преобразуем ее в более простую эквивалентную смешанную задачу

$$\hat{u}_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)\hat{u}_{xt}(x,t) - a_1a_2\hat{u}_{xx}(x,t) = \hat{f}(x,t), \tag{5}$$

$$\hat{u}(x,t)\big|_{t=0} = \hat{\varphi}(x), \quad \hat{u}_t(x,t)\big|_{t=0} = \hat{\psi}(x), \quad x \in R_+ = [0,\infty), \tag{6}$$

$$\left[\alpha(t)\hat{u}_t(x,t) + \beta(t)\hat{u}_x(x,t) + \hat{\gamma}(t)\hat{u}(x,t)\right]\big|_{x=0} = \hat{\mu}(t), \ t \in R_+, \tag{7}$$

с новым коэффициентом и новыми исходными данными

$$\hat{\gamma}(t) = B\beta(t) - A\alpha(t) + \gamma(t), \ \hat{f} = e^{At-Bx}f, \ \hat{\mu}(t) = e^{At}\mu(t), \ \hat{\varphi}(x) = e^{-Bx}\varphi(x), \ \hat{\psi}(x) = e^{-Bx}\left(A\varphi(x) + \psi(x)\right). \tag{8}$$

Определение 1. *Смешанная задача (5)–(7) называется вспомогательной смешанной задачей для смешанной задачи (1)–(3) в первой четверти плоскости.*

Перед непосредственным решением этой задачи введем обозначения и сформулируем некоторые необходимые требования гладкости и согласования на исходные данные. Символом $C^k(\Omega)$ обозначим множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$. Первая четверть плоскости G_∞ разбивается характеристикой $x = a_1t$ на два множества: $G_- = \{(x,t) \in G_\infty : x > a_1t > 0\}$ и $G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : 0 \le x \le a_1t\}$.

Определение 2. *Характеристика $x = a_1t$ называется критической для уравнения (1) в первой четверти плоскости.*

Из самой постановки смешанной задачи (5)–(7) для классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ вытекают очевидные необходимые требования гладкости

$$\hat{\varphi} \in C^2(R_+), \ \hat{\psi} \in C^1(R_+), \quad \hat{f} \in C(G_\infty), \quad \hat{\mu} \in C^1(R_+). \tag{9}$$

Очевидные необходимые условия согласования граничного условия (7) с начальными условиями (6) и уравнением (5) получаются из равенства (7) при $t = 0$, первой производной по t от левой и правой частей этого равенства при $t = 0$ и выражений значений производной по t от левой части через начальные условия при $x = 0$ и уравнение при $x = 0$ и $t = 0$:

$$\hat{J}_1 \equiv \alpha(0)\hat{\psi}(0) + \beta(0)\hat{\varphi}'(0) + \hat{\gamma}(0)\hat{\varphi}(0) = \hat{\mu}(0), \tag{10}$$

$$\hat{J}_2 \equiv \alpha(0)\left[a_1a_2\hat{\varphi}''(0) - (a_1 - a_2)\hat{\psi}'(0) + \hat{f}(0,0)\right] +$$

Репозиторий ВГУ

$$+\hat{\psi}(0)\left[\alpha'(0)+\hat{\gamma}(0)\right]+\beta'(0)\hat{\varphi}'(0)+\beta(0)\hat{\psi}'(0)+\hat{\varphi}(0)\hat{\gamma}'(0)=\hat{\mu}'(0). \quad (11)$$

Ниже будут найдены дополнительные необходимые требования гладкости и согласования.

Результаты и их обсуждение. На G_+ мы будем использовать частное классическое решение

$$\hat{F}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[\int_0^{t^{(1)}(x)}\int_{a_2(t-\tau)-(a_2/a_1)x}^{x+a_2(t-\tau)}\hat{f}(s,\tau)dsd\tau+\int_{t^{(1)}(x)}^{t}\int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}\hat{f}(s,\tau)dsd\tau\right],\ t^{(1)}(x)=t-\frac{x}{a_1}, \quad (12)$$

неоднородного уравнения (5) с минимальной гладкостью правой части $\hat{f}$ из работы [5]. В этой работе классическое решение (12) выводится предложенным методом корректировки пробных решений с помощью построенной корректирующей задачи Коши из решения

$$F(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\int_0^t\int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}\hat{f}(|s|,\tau)dsd\tau,\quad (x,t)\in G_+.$$

Для $(x,t)\in G_-$ это решение имеет минимальную гладкость на правую часть $\hat{f}$, так как в нем $|s|=s$.

Модификацией метода характеристик доказывается

Теорема 1. *Пусть в граничном условии (7) коэффициенты* α, β, $\hat{\gamma}\in C^2(R_+)$ *и косая производная является характеристической, т.е.* $a_1\alpha(t)=\beta(t)$, $\hat{\gamma}(t)\neq 0$, $t\in R_+$. *Для того чтобы смешанная задача (5)–(7) в* G_∞ *имела на* G_- *единственное и устойчивое по* $\hat{\varphi},\hat{\psi},\hat{f}$ *классическое решение*

$$\hat{u}_-(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\hat{\varphi}(x+a_2t)+a_2\hat{\varphi}(x-a_1t)+\int_{x-a_1t}^{x+a_2t}\hat{\psi}(s)ds+\int_0^t\int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}\hat{f}(s,\tau)dsd\tau\right],\ (x,t)\in G_-, \quad (13)$$

необходимо и достаточно справедливости требований гладкости

$$\hat{\varphi}\in C^2(R_+),\ \hat{\psi}\in C^1(R_+),\ \hat{f}\in C(G_-),\ H_1^{(p)}\equiv\int_0^t\hat{f}\left(x+(-1)^p a_p(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C^1(G_-),\ p=1,2. \quad (14)$$

Для того чтобы смешанная задача (5)–(7) в G_∞ *имела на* G_+ *единственное и устойчивое по* $\hat{\varphi},\hat{\psi},\hat{\mu},\hat{f}$ *классическое решение*

$$\hat{u}_+(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_1\left[\hat{\varphi}(x+a_2t)-\hat{\varphi}\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\right)\right]+\int_{a_2(t-x/a_1)}^{x+a_2t}\hat{\psi}(s)ds\right\}+\hat{F}(x,t)+$$

$$+a_1^{-1}\hat{\gamma}^{-1}\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\left\{a_1\hat{\mu}\left(t-\frac{x}{a_1}\right)-\beta\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\left[a_1\hat{\varphi}'\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\right)+\hat{\psi}\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\beta\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\int_0^{t-x/a_1}\hat{f}\left(a_2(t-\tau)-\frac{a_2}{a_1}x,\tau\right)d\tau\right\},\qquad (x,t)\in G_+, \quad (15)$$

Репозиторий ВГУ

необходимо и достаточно выполнения требований гладкости (9) и

$$\hat{\mu}\in C^2\left(R_+\right),\quad H_1^{(2)}\left(x,t\right)\equiv\int_0^t\hat{f}\left(x+a_2\left(t-\tau\right),\tau\right)d\tau\in C^1\left(G_+\right),$$

$$H_2\left(x,t\right)\equiv\frac{a_2}{a_1}\int_0^{t^{(1)}(x)}\hat{f}\left(a_2\left(t-\tau\right)-\frac{a_2}{a_1}x,\tau\right)d\tau-\int_{t^{(1)}(x)}^{t}\hat{f}\left(x-a_1\left(t-\tau\right),\tau\right)d\tau\in C^1\left(G_+\right),\tag{16}$$

$$\beta\left(t\right)\hat{\varphi}'''\left(a_2t\right),\quad\beta\left(t\right)\hat{\psi}''\left(a_2t\right),\quad\beta\left(t\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}H_1^{(2)}\left(0,t\right)\in C\left(R_+\right),\tag{17}$$

и условий согласования (10), (11) и

$$\hat{J}_3\equiv\alpha''(0)\hat{\psi}(0)+2\alpha'(0)\left[a_1a_2\hat{\varphi}''(0)-\left(a_1-a_2\right)\hat{\psi}'(0)+\hat{f}(0,0)\right]+$$

$$+\alpha(0)\left\{a_1a_2\hat{\psi}''(0)-\left(a_1-a_2\right)\left[a_1a_2\hat{\varphi}'''(0)-\left(a_1-a_2\right)\hat{\psi}''(0)\right]\right\}+\beta''(0)\hat{\varphi}'(0)+$$

$$+2\beta'(0)\hat{\psi}'(0)+\hat{\gamma}''(0)\hat{\varphi}(0)+2\hat{\gamma}'(0)\hat{\psi}(0)+\beta(0)\left[a_1a_2\hat{\varphi}'''(0)-\left(a_1-a_2\right)\hat{\psi}''(0)\right]+$$

$$+\hat{\gamma}(0)\left[a_1a_2\hat{\varphi}''(0)-\left(a_1-a_2\right)\hat{\psi}'(0)+\hat{f}(0,0)\right]+\alpha(0)\,\hat{f}_{\nu_2}(0,0)=\hat{\mu}''(0),\tag{18}$$

где $\hat{f}_{\nu_2}\left(0,0\right)$ *– значение производной по направлению* $\vec{\nu}_2=\{a_2,1\}$ *от* $\hat{f}$ *при* $x=0$ *и* $t=0$.

Доказательство. Классическое решение поставленной смешанной задачи (5)–(7) на множестве G_∞ совпадает на множестве G_- с решением задачи Коши (5), (6), которое единственно и устойчиво по правой части и начальным данным и выражается уже известной обобщенной формулой Даламбера–Эйлера (13) с известными необходимыми и достаточными требованиями гладкости (14) из [6]. Непрерывная зависимость найденного решения $\hat{u}_-$ от исходных данных $\hat{\varphi},\hat{\psi},\hat{f}$ выводится из формулы (13) при любом $T>0$ в банаховых пространствах $C^2\left(G_T^-\right)$, $C^2\left[0,\infty\right]$, $C^1\left[0,\infty\right]$, $\hat{C}\left(G_T\right)$, где множества $G_T^-=G^T\bigcap G_-$, $G^T=\{(x,t)\in G_\infty:0\le x<\infty,\quad 0\le t\le T\}$, соответственно с нормами

$$\left\|\hat{u}_-\right\|_{C^2\left(G_T^-\right)}=\sup_{(x,t)\in G_T^-}\sum_{0\le m+l\le 2}\left|\partial_x^m\partial_t^l\hat{u}\left(x,t\right)\right|,\left\|\hat{\varphi}\right\|_{C^2[0,\infty]}=\sup_{0\le x<\infty}\left(\left|\hat{\varphi}(x)\right|+\left|\hat{\varphi}'(x)\right|+\left|\hat{\varphi}''(x)\right|\right),$$

$$\left\|\hat{\psi}\right\|_{C^1[0,\infty]}=\sup_{0\le x<\infty}\left(\left|\hat{\psi}(x)\right|+\left|\hat{\psi}'(x)\right|\right),\ \left\|\hat{f}\right\|_{\hat{C}\left(G^T\right)}=\sup_{(x,t)\in G_T^-}\left(\left|\hat{f}\left(x,t\right)\right|+\sum_{p=1}^{2}\sum_{m+l=1}\left|\partial_x^m\partial_t^lH_1^{(p)}\left(x,t\right)\right|\right).$$

На множестве G_+ общий интеграл неоднородного уравнения (5) представляет собой сужение на G_+ всех классических решений

$$\hat{u}\left(x,t\right)=g\left(x+a_2t\right)+h\left(a_1t-x\right)+\hat{F}\left(x,t\right),\tag{19}$$

где $g=g(\xi)$ и $h=h(\eta)$ – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции своих переменных $\xi,\eta\in R$ и $\hat{F}$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция (12).

Репозиторий ВГУ

Решения смешанной задачи (5)–(7) на множестве G_+ ищутся, как решения задачи Пикара для уравнения (5) на G_+ с равенствами $u_+(x,t)=u_-(x,t)$, на критической характеристике $x=a_1t$ и граничным условием (7). Подставив функции (19) в эти равенства, получаем первое уравнение

$$g\left((a_1+a_2)t\right)+h(0)=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_1\hat{\varphi}\left((a_1+a_2)t\right)+a_2\hat{\varphi}(0)+\int_0^{(a_1+a_2)t}\hat{\psi}(s)ds\right\}. \tag{20}$$

Вторые уравнения системы находятся подстановкой функций (19) в граничное условие (7)

$$\alpha(t)\left\{a_2g'(a_2t)+a_1h'(a_1t)+\frac{\partial\hat{F}(0,t)}{\partial t}\right\}+\beta(t)\left\{g'(a_2t)-h'(a_1t)+\frac{\partial\hat{F}(0,t)}{\partial x}\right\}+$$

$$+\hat{\gamma}(t)\left\{g(a_2t)+h(a_1t)\right\}=\hat{\mu}(t), \tag{21}$$

где первые частные производные от частного решения $\hat{F}$ равны

$$\frac{\partial\hat{F}(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{a_1+a_2}\left[H_1^{(2)}(x,t)+H_2(x,t)\right],$$

$$\frac{\partial\hat{F}(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_2H_1^{(2)}(x,t)-a_1H_2(x,t)\right]. \tag{22}$$

Выразим функцию g из (20), сделав замену $y=(a_1+a_2)t\geq 0$,

$$g(y)=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_1\hat{\varphi}(y)+a_2\hat{\varphi}(0)+\int_0^y\hat{\psi}(s)ds\right\}-h(0). \tag{23}$$

Функцию h выражаем из (21), принимая во внимание значения (22), характеристичность косой производной в (7), т.е. равенство $a_1\alpha(t)=\beta(t)$, $t\in[0,\infty)$, и замену $z=a_1t\geq 0$,

$$h(z)=a_1^{-1}\hat{\gamma}^{-1}\left(\frac{z}{a_1}\right)\left\{a_1\hat{\mu}\left(\frac{z}{a_1}\right)-(a_1+a_2)\beta\left(\frac{z}{a_1}\right)g'\left(\frac{a_2z}{a_1}\right)-\beta\left(\frac{z}{a_1}\right)H_1^{(2)}\left(0,\frac{z}{a_1}\right)\right\}-g\left(\frac{a_2z}{a_1}\right). \tag{24}$$

Подставляя выражение (23) для g в (24), приходим к формальным решениям системы (20), (21):

$$h(z)=-\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\hat{\varphi}\left(\frac{a_2z}{a_1}\right)+a_2\hat{\varphi}(0)+\int_0^{(a_2/a_1)z}\hat{\psi}(s,\tau)ds\right]+a_1^{-1}\hat{\gamma}^{-1}\left(\frac{z}{a_1}\right)\left\{\hat{\mu}\left(\frac{z}{a_1}\right)-\right.$$

$$\left.-\beta\left(\frac{z}{a_1}\right)\left[a_1\hat{\varphi}'\left(\frac{a_2z}{a_1}\right)+\hat{\psi}\left(\frac{a_2z}{a_1}\right)\right]-\beta\left(\frac{z}{a_1}\right)H_1^{(2)}\left(0,\frac{z}{a_1}\right)\right\}+h(0). \tag{25}$$

Чтобы найти формальные решения задачи Пикара, подставляем функции g из (23) и h из (25) в (19)

Репозиторий ВГУ

$$\hat{u}_+(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\hat{\varphi}(x+a_2t)+a_2\hat{\varphi}(0)+\int_0^{x+a_2t}\hat{\psi}(s)ds\right]-$$

$$-\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\hat{\varphi}\left(a_2t-\frac{a_2x}{a_1}\right)+a_2\hat{\varphi}(0)\quad-\int_{a_2(t-x/a_1)}^{0}\hat{\psi}(s)ds\right]+a_1^{-1}\hat{\gamma}^{-1}\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\left\{a_1\hat{\mu}\left(t-\frac{x}{a_1}\right)-\right.$$

$$\left.\beta\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\left[a_1\hat{\varphi}'\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\right)+\hat{\psi}\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\right)\right]-\beta\left(t-\frac{x}{a_1}\right)H_1^{(2)}\left(0,t-\frac{x}{a_1}\right)\right\}+\hat{F}(x,t). \qquad (26)$$

Упрощая эти выражения (26), получаем формулу формального решения (15).

Достаточность на G_+. Убедимся в достаточности требований гладкости (9), (16), (17) для того, чтобы функция $\hat{u}_+\in C^2(G_+)$. Гладкость начальных данных $\hat{\varphi}\in C^2(R_+),\hat{\psi}\in C^1(R_+)$ из (9), очевидно, обеспечивает дважды непрерывную дифференцируемость на G_+ первого слагаемого в формуле (15). Ясно, что непрерывность функции $\hat{f}$ на G_∞ гарантирует существование и непрерывность первых частных производных (22) от функции $\hat{F}$. В этой формуле дважды непрерывная дифференцируемость следующей функции $\hat{F}$ вытекает из представлений (22) первых частных производных от $\hat{F}$ в силу интегральных требований гладкости для функций $H_1^{(2)}$ и H_2 в (16). Дважды непрерывная дифференцируемость всех оставшихся слагаемых формулы (15) следует из требования $\hat{\mu}\in C^2(R_+)$, интегрального требования гладкости на $H_1^{(2)}$ при $x=0$ в (16) и требований (17) благодаря гладкости коэффициентов α, β, $\hat{\gamma}\in C^2(R_+)$ и тому, что $\hat{\gamma}(t)\neq 0$, $t\in R_+$. В частности, для коэффициента $\beta\in C^2(R_+)$ непрерывность частных производных второго порядка от произведения

$$\beta\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\int_0^{t-x/a_1}\hat{f}\left(a_2(t-\tau)-\frac{a_2}{a_1}x,\tau\right)d\tau=\beta(\tilde{t})H_1^{(2)}(0,\tilde{t})$$

следует из интегрального требования для $H_1^{(2)}$ в (16) при $x=0$, линейности замены $\tilde{t}=t-x/a_1$ и последнего включения в (17).

Функции $\hat{u}_+$ и $\hat{u}_-$ дважды непрерывно дифференцируемы не только соответственно на G_+ и G_-, но и на критической характеристике $x=a_1t$. Действительно, в силу условий согласования (10), (11), (18) на $x=a_1t$ обращаются в ноль их разности вместе с производными первого и второго порядков:

$$\hat{u}_+\big|_{x=a_1t}-\hat{u}_-\big|_{x=a_1t}=\left(\hat{\mu}(0)-J_1\right)/\hat{\gamma}(0),$$

$$\left.\frac{\partial\hat{u}_+}{\partial x}\right|_{x=a_1t}-\left.\frac{\partial\hat{u}_-}{\partial x}\right|_{x=a_1t}=-\frac{\hat{\mu}'(0)-\hat{J}_2}{a_1\hat{\gamma}(0)}+\frac{\hat{\gamma}'(0)\left(\hat{\mu}(0)-\hat{J}_1\right)}{a_1\hat{\gamma}(0)^2},$$

$$\left.\frac{\partial\hat{u}_+}{\partial t}\right|_{x=a_1t}-\left.\frac{\partial\hat{u}_-}{\partial t}\right|_{x=a_1t}=\frac{\hat{\mu}'(0)-\hat{J}_2}{\hat{\gamma}(0)}-\frac{\hat{\gamma}'(0)\left(\hat{\mu}(0)-\hat{J}_1\right)}{\hat{\gamma}(0)^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2\hat{u}_+}{\partial x^2}\right|_{x=a_1t}-\left.\frac{\partial^2\hat{u}_-}{\partial x^2}\right|_{x=a_1t}=\frac{\hat{\mu}''(0)-\hat{J}_3}{a_1^2\hat{\gamma}(0)}-\frac{2\hat{\gamma}'(0)\left(\hat{\mu}'(0)-\hat{J}_2\right)}{a_1^2\hat{\gamma}(0)^2}-\frac{\left(\hat{\gamma}''(0)\hat{\gamma}(0)-2\hat{\gamma}'(0)^2\right)\left(\hat{\mu}(0)-\hat{J}_1\right)}{a_1^2\hat{\gamma}(0)^3},$$

Репозиторий ВГУ

$$\left.\frac{\partial^2\hat{u}_+}{\partial x\partial t}\right|_{x=a_1t}-\left.\frac{\partial^2\hat{u}_-}{\partial x\partial t}\right|_{x=a_1t}=-\frac{\hat{\mu}''(0)-\hat{J}_3}{a_1\hat{\gamma}(0)}+\frac{2\hat{\gamma}'(0)\left(\hat{\mu}'(0)-\hat{J}_2\right)}{a_1\hat{\gamma}(0)^2}+\frac{\left(\hat{\gamma}''(0)\hat{\gamma}(0)-2\hat{\gamma}'(0)^2\right)\left(\hat{\mu}(0)-\hat{J}_1\right)}{a_1\hat{\gamma}(0)^3},$$

$$\left.\frac{\partial^2\hat{u}_+}{\partial t^2}\right|_{x=a_1t}-\left.\frac{\partial^2\hat{u}_-}{\partial t^2}\right|_{x=a_1t}=\frac{\hat{\mu}''(0)-\hat{J}_3}{\hat{\gamma}(0)}-\frac{2\hat{\gamma}'(0)\left(\hat{\mu}'(0)-\hat{J}_2\right)}{\hat{\gamma}(0)^2}-\frac{\left(\hat{\gamma}''(0)\hat{\gamma}(0)-2\hat{\gamma}'(0)^2\right)\left(\hat{\mu}(0)-\hat{J}_1\right)}{\hat{\gamma}(0)^3}.$$

Единственность классического решения $\hat{u}_+$ на G_+ объясняется единственностью решения $\hat{u}_-$ задачи Коши (5), (6) на G_- и тем, что среди сужений решений (19) уравнения (5) это единственное решение $\hat{u}_+$, которое удовлетворяет двум граничным условиям поставленной выше задачи Пикара.

Необходимость на G_+. Обоснуем не столь очевидные необходимые требования гладкости, которые указаны в формулировке теоремы 1 и отсутствуют в (9), и дополнительное третье условие согласования (18). В общих интегралах (19) дважды непрерывная дифференцируемость функции $\hat{F}$ доказана методом корректировки пробных решений в [5]. Поэтому если функция $\hat{F}\in C^2\left(G_+\right)$ – классическое решение неоднородного уравнения (5) в G_+, то, очевидно, непрерывно дифференцируемы его частные производные $\partial\hat{F}/\partial x,\quad \partial\hat{F}/\partial t\in C^1\left(G_+\right)$. Ввиду соотношений (22) это означает непрерывную дифференцируемость их линейных комбинаций

$$a_1\left(\partial F(x,t)/\partial x\right)+\partial F(x,t)/\partial t=H_1^{(2)}(x,t)\in C^1\left(G_+\right),$$

$$a_2\left(\partial F(x,t)/\partial x\right)-\partial F(x,t)/\partial t=H_2(x,t)\in C^1\left(G_+\right),$$

т.е. интегральные требования гладкости на $\hat{f}$ из (16) необходимы. Заметим, что эти линейные комбинации совпадают с производными от $\hat{F}$ вдоль характеристик уравнения (5).

Общие интегралы (19) уравнения (5) должны сохранять свою гладкость при подстановке не только в уравнение (5), но и в граничное условие (7) и, в частности, при функциях $g=0,\ \hat{f}=0$ и любой $h\in C^2\left(R_+\right)$. Поэтому классическое решение $\hat{u}_2(x,t)=h\left(a_1t-x\right)$ однородного уравнения (5) должно сохранять гладкость в граничном условии (7):

$$\left[\alpha(t)a_1h'\left(a_1t-x\right)-\beta(t)h'\left(a_1t-x\right)+\hat{\gamma}(t)h\left(a_1t-x\right)\right]\Big|_{x=0}=\hat{\gamma}(t)h\left(a_1t\right)=\hat{\mu}(t).$$

Отсюда следует, что граничное данное $\hat{\mu}\in C^2(R_+)$, так как $a_1\alpha(t)=\beta(t), t\in R_+$, и $\hat{\gamma}, h\in C^2\left(R_+\right)$.

Если частное классическое решение $\hat{F}\in C^2\left(G_+\right)$ неоднородного уравнения (5) подставить в граничное условие (7) и воспользоваться равенством $a_1\hat{\alpha}(t)=\hat{\beta}(t),\ t\in[0,\infty)$, то будем иметь

$$\left[\alpha(t)\frac{\partial\hat{F}(x,t)}{\partial t}+\beta(t)\frac{\partial\hat{F}(x,t)}{\partial x}+\hat{\gamma}(t)\hat{F}(x,t)\right]\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{a_1+a_2}\Big\{\alpha(t)\left[a_2H_1^{(2)}(0,t)-a_1H_2(0,t)\right]+$$

$$+\beta(t)\left[H_1^{(2)}(0,t)+H_2(0,t)\right]\Big\}=\left(\beta(t)/a_1\right)H_1^{(2)}(0,t)=\hat{\mu}(t).$$

Репозиторий ВГУ

По выше доказанному функции $\hat{\mu}(t)\in C^2(R_+)$, $H_1^{(2)}(x,t)\in C^1(G_+)$ и, значит, для $\beta\in C^2(R_+)$ должно быть непрерывным произведение $\beta(t)\left(\partial^2 H_1^{(2)}(0,t)/\partial t^2\right)\in C(R_+)$ в последнем требовании гладкости (17) на основании формулы Лейбница для второй производной от произведения двух функций.

Подставляем в (7) решения $\hat{u}_3(x,t)=\hat{\varphi}(x+a_2t)$, которые получаются из (19) при функциях $g=\hat{\varphi}$, $h=0$, $\hat{f}=0$, так как $\hat{\varphi}\in C^2(R_+)$ согласно необходимым условиям (9), и имеем равенства:

$$a_2\alpha(t)\hat{\varphi}'(a_2t)+\beta(t)\hat{\varphi}'(a_2t)+\hat{\gamma}(t)\hat{\varphi}(a_2t)=\left(\beta(t)/a_1\right)(a_1+a_2)\hat{\varphi}'(a_2t)+\hat{\gamma}(t)\hat{\varphi}(a_2t)=\hat{\mu}(t).$$

Тогда $\beta(t)\hat{\varphi}'(a_2t)=\left[a_1/(a_1+a_2)\right]\left(\hat{\mu}(t)-\hat{\gamma}(t)\hat{\varphi}(a_2t)\right)\in C^2(R_+)$, так как коэффициент $\hat{\gamma}\in C^2(R_+)$ и по уже доказанному исходные данные $\hat{\varphi},\hat{\mu}\in C^2(R_+)$. Отсюда на основании формулы Лейбница второй производной от произведения двух функций $\beta(t)\hat{\varphi}'(a_2t)$ мы заключаем, что произведение $\beta(t)\hat{\varphi}'''(a_2t)\in C(R_+)$ для первого включения из (17), потому что коэффициент $\beta\in C^2(R_+)$.

Положив $g(y)=\int\limits_0^y\hat{\psi}(s)ds$, $h(z)=\int\limits_{(a_2/a_1)z}^0\hat{\psi}(s)ds$, $\hat{f}=0$ в общем интеграле (19), ввиду (9) находим частные классические решения $\hat{u}_4(x,t)=\int\limits_{a_2t-(a_2/a_1)x}^{x+a_2t}\hat{\psi}(s)ds\in C^2(G_+)$ $\forall\hat{\psi}\in C^1(R_+)$ однородного уравнения (5) и подставляем их в граничное условие (7)

$$\left\{\alpha(t)\left[a_2\hat{\psi}(x+a_2t)-a_2\hat{\psi}\left(a_2t-\frac{a_2}{a_1}x\right)\right]+\beta(t)\left[\hat{\psi}(x+a_2t)+\frac{a_2}{a_1}\hat{\psi}\left(a_2t-\frac{a_2}{a_1}x\right)\right]+\hat{\gamma}(t)\int\limits_{a_2t-(a_2/a_1)x}^{x+a_2t}\hat{\psi}(s)ds\right\}\Bigg|_{x=0}=$$

$$=\frac{a_1+a_2}{a_1}\beta(t)\hat{\psi}(a_2t)=\hat{\mu}(t)\in C^2(R_+).$$

Аналогично предыдущим двум случаям отсюда следует, что $\beta(t)\hat{\psi}''(a_2t)\in C(R_+)$ для второго включения из требований гладкости (17), так как функции $\beta,\hat{\mu}\in C^2(R_+)$.

Необходимость условий согласования (10), (11) граничного условия (7) с начальными условиями (6) и уравнением (5) показана перед формулировкой теоремы 1. Вывод необходимости дополнительного условия согласования (18) аналогичен выводу условия согласования (11) из значения второй производной по t левой и правой частей равенства (7) при $t=0$, при этом используются гладкость коэффициентов α, β, $\hat{\gamma}\in C^2(R_+)$, характеристичность первой косой производной в (7) и дополнительная гладкость $\hat{\mu},\hat{\varphi},\hat{\psi}$ из (16) и (17). В том числе в условии (18) используется существование выражения с производной $\hat{f}_{\nu_2}$ по вектору $\vec{\nu}_2=\{a_2,1\}$ от правой части $\hat{f}$ в начале координат:

$$\beta(0)\left(\partial\hat{f}(0,0)/\partial\nu_2\right)=a_1\alpha(0)\left(\partial\hat{f}(0,0)/\partial\nu_2\right)\in R, \tag{27}$$

конечность которого вытекает из интегрального требования гладкости на $\hat{f}$ в (17). Действительно, для любой функции $\hat{f}\in C^2(G_\infty)$ справедливо тождество

$$J(t)=\beta(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\limits_0^t\hat{f}(a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau\right)=\beta(t)\left\{\left[\hat{f}_t(x,t)+a_2\hat{f}_x(x,t)\right]\Big|_{x=0}+a_2^2\int\limits_0^t\hat{f}_{xx}(x,\tau)\Big|_{x=a_2(t-\tau)}d\tau\right\}\in C(R_+).$$

Репозиторий ВГУ

Из этого тождества при $t=0$ имеем равенство $J(0)=\beta(0)\hat{f}_{\nu_2}(0,0)$, которое предельным переходом по $\hat{f}$ распространяется с функций $\hat{f}\in C^2(G_\infty)$ на все функции $\hat{f}\in C(G_\infty)$, удовлетворяющие требованиям гладкости (16) и (17), т.е. требование (27) выполняется.

Из формулы (15) при любом $T>0$ легко выводится непрерывная зависимость найденного решения $\hat{u}_+$ в банаховом пространстве $C^2\left(G_T^+\right)$ от исходных данных $\hat{\varphi},\hat{\psi},\hat{\mu},\hat{f}$ в банаховых пространствах $\hat{C}^2\left[0,T_a\right]$, $\hat{C}^1\left[0,T_a\right]$, $C^2\left[0,T\right]$, $\hat{C}\left(G^T\right)$, в которых множества $G_T^+=G^T\cap G_+$, $G^T=\left\{(x,t)\in G_\infty : 0\le x+a_2t\le T_a, 0\le t\le T\right\}$ и постоянная $T_a=\left(a_1+a_2\right)T$, соответственно с нормами

$$\|\hat{u}_+\|_{C^2\left(G_T^+\right)}=\max_{(x,t)\in G_T^+}\sum_{0\le m+l\le 2}\left|\partial_x^m\partial_t^l\hat{u}(x,t)\right|,\ \ \|\hat{\varphi}\|_{\hat{C}^2[0,T_a]}=\max_{0\le x\le T_a}\left(\left|\hat{\varphi}(x)\right|+\left|\hat{\varphi}'(x)\right|+\left|\hat{\varphi}''(x)\right|+\left|\beta(x/a_2)\hat{\varphi}'''(x)\right|\right),$$

$$\|\hat{\psi}\|_{\hat{C}^1[0,T_a]}=\max_{0\le x\le T_a}\left(\left|\hat{\psi}(x)\right|+\left|\hat{\psi}'(x)\right|+\left|\beta(x/a_2)\hat{\psi}''(x)\right|\right),\ \ \|\hat{\mu}\|_{C^2[0,T]}=\max_{0\le t\le T}\left(\left|\hat{\mu}(t)\right|+\left|\hat{\mu}'(t)\right|+\left|\hat{\mu}''(t)\right|\right),$$

$$\left\|\hat{f}\right\|_{\hat{C}\left(G^T\right)}=\max_{(x,t)\in G^T}\left(\left|\hat{f}(x,t)\right|+\left|\beta(t)\partial_t^2H_1^{(2)}(0,t)\right|+\sum_{m+l=1}\left[\left|\partial_x^m\partial_t^lH_1^{(2)}(x,t)\right|+\left|\partial_x^m\partial_t^lH_2(x,t)\right|\right]\right).$$

Таким образом, мы доказали существование, единственность и устойчивость решения $\hat{u}\in C^2\left(G_\infty\right)$, которое выражается формулой (13) на G_- и формулой (15) на G_+.

Так же, как в работе [5] и диссертации [6], доказывается

Следствие 1. *Если правая часть $\hat{f}$ уравнения (5) зависит только от x или t, то утверждение теоремы 1 верно без интегральных требований гладкости на $\hat{f}$ в (14), (16), (17).*

На основании теоремы 1 сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Смешанная задача (1)–(3) имеет единственное и устойчивое классическое решение $u\in C^2\left(G_\infty\right)$, которое на G_- выражается формулами (4), (13) при данных $\hat{\varphi},\hat{\psi},\hat{f}$ из (8) для тех и только тех φ,ψ,f, для которых справедливы требования гладкости (14) при данных φ,ψ,f вместо данных $\hat{\varphi},\hat{\psi},\hat{f}$. Смешанная задача (1)–(3) на G_+ имеет единственное и устойчивое классическое решение, которое выражается формулами (4), (15) при данных $\hat{\varphi},\hat{\psi},\hat{\mu},\hat{f}$ из (8) для тех и только тех φ,ψ,μ,f, для которых справедливы требования гладкости (9), (16), (17) для данных φ,ψ,μ,f вместо данных $\hat{\varphi},\hat{\psi},\hat{\mu},\hat{f}$, а также условия согласования (10), (11), (18) при данных $\hat{\varphi},\hat{\psi},\hat{\mu},\hat{f}$ из (8).*

Следствие 2. *Если правая часть f уравнения (1) зависит только от x или t, то утверждение теоремы 2 верно без интегральных требований гладкости на f в (14), (16), (17).*

В случае зависимости правых частей уравнений (1) и (5) только от x или только от t интегральные требования гладкости в (14), (16), (17) на правые части автоматически выполняются и поэтому эти интегральные требования гладкости отсутствуют в формулировках следствий 1 и 2.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что для смешанной задачи (5)–(7) (смешанной задачи (1)–(3)) указанная в требованиях (14) и (16) принадлежность интегралов от непрерывной функции $\hat{f}$ в G_- (функции f в G_∞) соответственно множествам $C^1(G_-)$ и $C^1(G_+)$ эквивалентна их принадлежности соответственно множествам $C^{(1,0)}(G_-)$ и $C^{(1,0)}(G_+)$ или $C^{(0,1)}(G_-)$ и $C^{(0,1)}(G_+)$ [6]. Здесь $C^{(1,0)}(\Omega)$ и $C^{(0,1)}(\Omega)$ – соответственно множества непрерывно дифференцируемых по x и t и непрерывных по t и x функций на множестве $\Omega\subset R^2$.

Заключение. В данной работе выведена явная формула единственного и устойчивого классического решения смешанной задачи при зависящих от времени коэффициентах в граничном условии

Репозиторий ВГУ

с характеристической первой косой производной. Для однозначной и устойчивой везде разрешимости этой смешанной задачи найдены необходимые и достаточные требования гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное и три условия согласования граничного условия с начальными условиями и уравнением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломовцев, Ф.Е. Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии / Ф.Е. Ломовцев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 1. – С. 21–27.
2. Барановская, С.Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009, Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
3. Шлапакова, Т.С. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике / Т.С. Шлапакова, Н.И. Юрчук // Вестник БГУ. – 2013. – Сер. 1, № 2. – С. 84–90.
4. Ломовцев, Ф.Е. Классические решения неоднородного факторизованного гиперболического уравнения второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2015. – № 4(88). – С. 5–11.
5. Ломовцев, Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф.Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Сер., Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
6. Новиков, Е.Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косой производными: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2017. – 25 с.

REFERENCES

1. Lomovtsev F.E. *Vestsi NAN Belarusi Ser. fiz. mat. navuk* [Journal of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2016, 1, pp. 21–27.
2. Baranovskaya S.N., Yurchuk N.I. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 2009, 45(8), pp. 1188–1191.
3. Shlapakova T.S., Yurchuk N.I. *Vestnik BGU* Ser. 1 [Newsletter of BSU], 2013, 2, pp. 84–90.
4. Lomovtsev F.E., Novikov E.N. *Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga universiteta* [Newsletter of Vitebsk State University], 2015, 4(88), pp. 5–11.
5. Lomautsau F.E. *Zhurn. Belorus. gos. un-ta Matematika. Informatika*. [Journal of Belarusian State University. Mathematics and Informatics], 2017, 3, pp. 38–52.
6. Novikov E.N. *Smeshanniye zadachi dlia uravneniya vynuzhdennykh kolebanii ogranichennoi struny pri nestatsionarnykh granichnykh usloviyakh s pervoi i vtoroi kosoi proizvodnymi: Avtoref. dis. … kan-ta fiz.-mat. nauk* [Mixed Problems for the Forced Oscillation Equation of a Bounded String in the Unsteady Boundary Conditions with the First and Second Oblique Derivatives. Abstract of PhD (Physics and Mathematics)], Minsk, Institute of Mathematic of the National Academy of Sciences of Belarus, 2017, 25 p.

Поступила в редакцию 06.06.2018

Адрес для корреспонденции: e-mail: lomovcev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.

Репозиторий ВГУ