МАТЭМАТЫКА

УДК 517.537.32

Расходящиеся степенные ряды и формулы приближенного аналитического нахождения решений алгебраических уравнений

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Актуальность работы определяется тем, что приближенное представление корней алгебраических полиномов в виде рациональных функций от коэффициентов дает возможность управлять движением корней, изменяя нужным образом коэффициенты полинома, что может найти применение в некоторых задачах управления.

Цель статьи – получить простой и эффективный алгоритм представления корней алгебраического полинома произвольной степени в виде рациональной функции от коэффициентов, используя возможности систем компьютерной математики, а также дать обоснование его применимости и привести ряд примеров.

Материал и методы. *Материалом исследования являются алгебраические полиномы* $P_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n$ *, а также представления в виде рядов функции* $\frac{1}{P_n(z)}=c_0+c_1z+\ldots+c_mz^m+\ldots$ *;* $\frac{1}{P_n(z)}=h_1z^{-1}+\ldots+h_mz^{-m}+\ldots$ *. Использованы методы математического анализа и система компьютерной математики Maple 2016.*

Результаты и их обсуждение. *Доказаны две теоремы. В теореме 1 утверждается, что если на окружности радиуса r=|z₁| (z₁ – минимальный по модулю корень) нет других корней, то* $z_1=\lim\limits_{j\to\infty}\frac{c_j}{c_{j+1}}$*. В теореме 2 аналогичный результат получен для максимального по модулю корня, т.е. если на окружности радиуса R (R=|z₁|, где z₁ – максимальный по модулю корень) нет других корней, то* $z_1=\lim\limits_{j\to\infty}\frac{h_{j+1}}{h_j}$ *.*

Заключение. *Предложен новый алгоритм для получения формул приближенного нахождения наименьшего и наибольшего по модулю корней алгебраического уравнения произвольной степени через его коэффициенты. На конкретных примерах показана прямая связь разработанного алгоритма с формулами Никипорца приближенного нахождения корня полинома через его коэффициенты.*

Ключевые слова: *алгебраические уравнения, приближенное решение, расходящийся ряд, степенной ряд, решение через коэффициенты.*

Divergent Power Series and Formulas of the Approached Analytical Solution of Algebraic Equations

Yu.V. Trubnikov, M.M. Chernyavsky
Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

The current problem is approximate representation of the solutions of the algebraic polynomials in the form of rational functions of the coefficients that makes it possible to direct the shift of the radicals, when changing the polynomial coefficients in the right way, which can be used in some problems of controlling.

The purpose of the article is getting a simple and efficient algorithm for the representation of the radicals of the algebraic polynomials of the arbitrary degree through the rational function of the coefficients, using the capabilities of system of computer mathematics as well as giving justification of its application and showing some examples.

Material and methods. *The algebraic polynomials* $P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ *and the representations in the forms of series of the function* $\frac{1}{P_n(z)} = c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m + \ldots$; $\frac{1}{P_n(z)} = h_1 z^{-1} + \ldots + h_m z^{-m} + \ldots$ *were research materials. Methods of the mathematical analysis and system of computer mathematics Maple 2016 were used in the research.*

Findings and their discussion. *Two theorems are proved. Theorem 1 claims that if a circle of radius r = |*z_1*| (*z_1 *– the least modulo radical) has no other radicals then* $z_1 = \lim\limits_{j\to\infty} \frac{c_j}{c_{j+1}}$. *In theorem 2, a similar result is obtained for the maximum modulo solution, i.e. if there are no other roots on the circle of radius R(R = |*z_1*| where the maximum modulo root), then the formula is* $z_1 = \lim\limits_{j\to\infty} \frac{h_{j+1}}{h_j}$.

Conclusion. *A new algorithm for deriving formulas of the approached determination of the maximum and minimum modulo the radicals of the algebraic equation of the third degree through its coefficients is offered. Specific examples show a direct link of the algorithm with the formulas of Nikiports approximate calculation of a root of a polynomial through its coefficients.*

Key words: *algebraic equations, approximate solution, divergent series, power series, solution through coefficients.*

Актуальность работы определяется тем, что приближенное представление корней алгебраических полиномов в виде рациональных функций от коэффициентов дает возможность управлять движением корней, изменяя нужным образом коэффициенты полинома. Результаты такого представления могут найти применение в некоторых задачах управления.

Цель статьи – используя возможности систем компьютерной математики, получить простой и эффективный алгоритм представления корней алгебраического полинома произвольной степени в виде рациональной функции от коэффициентов, дать обоснование его применимости и привести ряд примеров.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы комплексного аргумента z

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

а также представления в виде степенных рядов функции

$$\frac{1}{P_n(z)} = c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m + \ldots; \quad \frac{1}{P_n(z)} = h_1 z^{-1} + \ldots + h_m z^{-m} + \ldots$$

с целью установления связи между поведением коэффициентов этих рядов и формулами для минимального (максимального) по модулю корня уравнения

$$P_n(z) = 0.$$

Методы исследования: методы математического анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2016.

Результаты и их обсуждение. Доказаны две теоремы. В теореме 1 утверждается, что если на окружности радиуса $r=|z_1|$ (z_1 – минимальный по модулю корень) нет других корней, то $z_1=\lim\limits_{j\to\infty}\frac{c_j}{c_{j+1}}$, где числитель и знаменатель – коэффициенты ряда, представленного выше.

В теореме 2 аналогичный результат получен для максимального по модулю корня, т.е. если на окружности радиуса R ($R=|z_1|$, где z_1 – максимальный по модулю корень) нет других корней, то $z_1=\lim\limits_{j\to\infty}\frac{h_{j+1}}{h_j}$.

Сам факт, что в некоторых случаях (например, при отсутствии других корней на соответствующих окружностях, что и выясняется в данной статье) эти пределы дают значение корней, был известен еще Д. Бернулли и Л. Эйлеру. Однако реализовать такой простой по сути факт для получения рациональных приближений для корней долгое время не удавалось из-за отсутствия требуемой вычислительной техники. Отметим, что Л. Эйлер, который долгое время изучал полученный впервые Д. Бернулли данный факт, так и не смог сформулировать и доказать соответствующие теоремы об условиях его применимости. В своем известном труде «Введение в анализ бесконечных» он писал: «Достославный Даниил Бернулли указал в Записках Петербургской академии (т. III) на замечательное применение рекуррентных рядов к нахождению корней уравнений любой степени; он показал, каким образом при помощи рекуррентных рядов можно выразить весьма близко к истине значения корней любого алгебраического уравнения какой бы то ни было степени. Это открытие часто приносит весьма большую пользу… Дело в том, что иногда сверх ожидания оказывается, что посредством этого метода нельзя узнать никакого корня уравнения…» [1, с. 251].

В настоящее время, когда разложения в ряды можно доводить до нескольких тысяч слагаемых, отношения коэффициентов членов ряда дают возможность с любой степенью точности прослеживать движение корней в зависимости от изменения коэффициентов полинома, т.е. управлять поведением корней.

В многочисленных работах, обзор которых имеется в монографии В.И. Шмойлова, коэффициенты рядов находятся при помощи определителей [2]. В примерах, рассмотренных авторами настоящей статьи, выражения вида c_j / c_{j+1} находятся прямым разложением функции $1/P_n(z)$ в ряд с использованием систем компьютерной математики. Это дает простой и быстрый в программировании алгоритм получения приближенных выражений корня алгебраического уравнения через коэффициенты в виде дробно-рациональных функций.

Ниже представлены осуществленные авторами статьи доказательства основных теорем, применяемых в работе для получения искомых формул выражения корней алгебраического уравнения через коэффициенты.

Лемма 1. *Ряд Тейлора для функции комплексного аргумента* z

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_1)^n}\quad (n=1,2,\dots) \tag{1}$$

имеет вид

$$\frac{1}{(z-z_1)^n}=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{1}{z_1^n}\sum_{j=0}^{\infty}(1+j)(2+j)\cdot\ldots\cdot(n-1+j)\left(\frac{z}{z_1}\right)^j. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n=1$

$$\frac{1}{z-z_1}=-\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}}.$$

и при $|z|<|z_1|$ видим, что второй множитель в последнем выражении представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем z/z_1. С учетом этого получаем

$$-\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}}=-\frac{1}{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^k .$$

Далее при $n=2$

$$\frac{1}{\left(z-z_1\right)^2}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)=\frac{\left(-1\right)^2}{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{z}{z_1}\right)^{k-1}\frac{1}{z_1}=\frac{\left(-1\right)^2}{z_1^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{z}{z_1}\right)^{k-1},$$

так как при $k=0$ первое слагаемое равно нулю.

При $n=3$

$$\frac{1}{\left(z-z_1\right)^3}=-\frac{1}{2!}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)^2=-\frac{1}{2!}\frac{\left(-1\right)^2}{z_1^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(k-1\right)\left(\frac{z}{z_1}\right)^{k-2}\frac{1}{z_1}=\frac{\left(-1\right)^3}{2!}\frac{1}{x_1^3}\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)\left(\frac{z}{z_1}\right)^{k-2}.$$

Сделаем предположение индукции:

$$\frac{1}{\left(z-z_1\right)^{n-1}}=\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(n-2\right)!}\cdot\frac{1}{z_1^{n-1}}\sum_{k=n-2}^{\infty}k\left(k-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(k-\left(n-3\right)\right)\left(\frac{z}{z_1}\right)^{k-\left(n-2\right)}, \tag{3}$$

тогда

$$\frac{1}{\left(z-z_1\right)^n}=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{d}{dz}\left[\left(z-z_1\right)^{-\left(n-1\right)}\right]=-\frac{1}{n-1}\left(-\left(n-1\right)\right)\left(z-z_1\right)^{-n}=$$

$$=-\frac{1}{n-1}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(n-2\right)!}\cdot\frac{1}{z_1^{n-1}}\sum_{k=n-2}^{\infty}k\left(k-1\right)\cdot\ldots\cdot\left[k-\left(n-3\right)\right]\cdot\left[k-\left(n-2\right)\right]\left(\frac{z}{z_1}\right)^{k-\left(n-1\right)}\frac{1}{z_1}=$$

$$=\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n-1\right)!}\cdot\frac{1}{z_1^n}\sum_{k=n-1}^{\infty}k\left(k-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(k-\left(n-2\right)\right)\left(\frac{z}{z_1}\right)^{k-\left(n-1\right)}. \tag{4}$$

В выражении (4) сделаем подстановку

$$k-\left(n-1\right)=j,$$

то есть

$$k-n=j-1,$$

тогда

$$k\left(k-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(k-n+2\right)=\left(k-n+2\right)\left(k-n+3\right)\cdot\ldots\cdot\left(k-n+n-1\right)\left(k-n+n\right)=$$
$$=\left(j+1\right)\left(j+2\right)\cdot\ldots\cdot\left(j+n-2\right)\left(j+n-1\right),$$

то есть

$$\frac{1}{\left(z-z_1\right)^n}=\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n-1\right)!}\cdot\frac{1}{z_1^n}\sum_{j=0}^{\infty}\left(1+j\right)\left(2+j\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-1+j\right)\left(\frac{z}{z_1}\right)^j.$$

Таким образом, лемма 1 доказана.

Далее нам потребуются свойства коэффициентов ряда Тейлора вида (6) для выражения

$$\frac{a_1}{z-z_1}+\frac{a_2}{\left(z-z_1\right)^2}+\ldots+\frac{a_m}{\left(z-z_1\right)^m}= \tag{5}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}c_j z^j. \tag{6}$$

Пусть

$$c_j=c_{1,j}+c_{2,j}+\ldots+c_{m,j},$$

где $c_{s,j}$ $\left(s=1,2,\ldots,m\right)$ – коэффициенты при z^j рядов Тейлора (6) для функций

$$f_s\left(x\right)=\frac{a_s}{\left(z-z_1\right)^s}\quad\left(s=1,2,\ldots,m\right).$$

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_{s,j}}{c_{m,j}}=0 \quad (s=1,2,\ldots,m-1). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, учитывая выражение (2), находим

$$\frac{c_{s,j}}{c_{m,j}}=\frac{\frac{(-1)^s}{(s-1)!}\cdot\frac{a_s}{z_1^s}(1+j)(2+j)\cdot\ldots\cdot(s-1+j)\frac{1}{z_1^j}}{\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\cdot\frac{a_m}{z_1^m}(1+j)(2+j)\cdot\ldots\cdot(m-1+j)\frac{1}{z_1^j}}=$$

$$=(-1)^{m-s}\frac{(m-1)!}{(s-1)!}\cdot\frac{a_s}{a_m}z_1^{m-s}\cdot\frac{(1+j)(2+j)\cdot\ldots\cdot(s-1+j)}{(1+j)(2+j)\cdot\ldots\cdot(m-1+j)}.$$

И так как $s<m$, то

$$\frac{c_{s,j}}{c_{m,j}}=(-1)^{m-s}\frac{(m-1)!}{(s-1)!}\cdot\frac{a_s}{a_m}z_1^{m-s}\cdot\frac{1}{(s+j)\cdot\ldots\cdot(m-1+j)}. \tag{8}$$

Из равенства (8) следует, что

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_{s,j}}{c_{m,j}}=0.$$

Лемма 2 доказана.

Далее пусть $|z_1|<|z_2|$. Рассмотрим ряд Тейлора для суммы функций

$$\frac{a_1}{z-z_1}+\frac{a_2}{(z-z_1)^2}+\ldots+\frac{a_m}{(z-z_1)^m}+\frac{b_1}{z-z_2}+\frac{b_2}{(z-z_2)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(z-z_2)^n}.$$

Запишем этот ряд в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{\infty}c_{1,j}z^j+\ldots+\sum_{j=0}^{\infty}c_{m,j}z^j+\sum_{j=0}^{\infty}d_{1,j}z^j+\ldots+\sum_{j=0}^{\infty}d_{n,j}z^j=\sum_{j=0}^{\infty}u_jz^j. \tag{9}$$

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{d_{s,j}}{c_{m,j}}=0 \quad (s=1,2,\ldots,n). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,

$$\frac{d_{s,j}}{c_{m,j}}=(-1)^{m-s}\frac{(m-1)!}{(s-1)!}\cdot\frac{b_s}{a_m}\frac{z_1^m}{z_2^s}\cdot\frac{(1+j)(2+j)\cdot\ldots\cdot(s-1+j)}{(1+j)(2+j)\cdot\ldots\cdot(m-1+j)}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^j. \tag{11}$$

Поведение правой части равенства (11) зависит от множителя

$$\frac{(1+j)(2+j)\cdot\ldots\cdot(s-1+j)}{(1+j)(2+j)\cdot\ldots\cdot(m-1+j)}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^j. \tag{12}$$

При $s\le m$ этот множитель очевидным образом стремится к нулю при $j\to\infty$. При $s>m$ данный множитель имеет вид

$$(s+j)(s+1+j)\cdot\ldots\cdot(m-1+j)$$

и представим в виде

$$j^{s-m}+v_1j^{s-m-1}+\ldots+v_{s-m-1}j+v_{s-m}$$

с некоторыми коэффициентами v_μ $(\mu=1,2,\ldots,s-m-1)$, не зависящими от j, а так как

$$\lim_{j\to\infty}j^\mu\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^j=0 \quad (\mu=1,2,\ldots,s-m), \tag{13}$$

то и

$$\lim_{j\to\infty}\frac{d_{s,j}}{c_{m,j}}=0,$$

что доказывает справедливость леммы 3.

Лемма 4. *Пусть* $|z_1|<|z_2|$ *и* u_j $(j=0,1,2,\ldots)$ *– коэффициенты ряда* (9). *Тогда*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{u_j}{u_{j+1}}=z_1. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем следующие преобразования:

$$\frac{u_j}{u_{j+1}}=\frac{c_{1,j}+\ldots+c_{m-1,j}+c_{m,j}+d_{1,j}+\ldots+d_{n,j}}{c_{1,j+1}+\ldots+c_{m-1,j+1}+c_{m,j+1}+d_{1,j+1}+\ldots+d_{n,j+1}}=\frac{c_{m,j}\left(\frac{c_{1,j}}{c_{m,j}}+\ldots+\frac{c_{m-1,j}}{c_{m,j}}+1+\frac{d_{1,j}}{c_{m,j}}+\ldots+\frac{d_{n,j}}{c_{m,j}}\right)}{c_{m,j+1}\left(\frac{c_{1,j+1}}{c_{m,j+1}}+\ldots+\frac{c_{m-1,j+1}}{c_{m,j+1}}+1+\frac{d_{1,j+1}}{c_{m,j+1}}+\ldots+\frac{d_{n,j+1}}{c_{m,j+1}}\right)}.$$

В силу лемм 2 и 3 все дроби, расположенные в скобках, стремятся к нулю при $j\to\infty$. Остается вычислить

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_{m,j}}{c_{m,j+1}}=\lim_{j\to\infty}\frac{\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\cdot\frac{a_m}{z_1^m}(1+j)(2+j)\cdot\ldots\cdot(m-1+j)\frac{1}{z_1^j}}{\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\cdot\frac{a_m}{z_1^m}(2+j)(3+j)\cdot\ldots\cdot(m-1+j+1)\frac{1}{z_1^{j+1}}}=z_1\cdot\lim_{j\to\infty}\frac{j+1}{j+m}=z_1,$$

что и подтверждает справедливость данной леммы.

Заметим, что свойства рядов Тейлора, приведенные в леммах 2–4, сохраняются и в общем случае для дроби

$$\frac{1}{(z-z_1)^m(z-z_1)^n\cdot\ldots\cdot(z-z_1)^v},$$

поскольку последнюю дробь можно разложить на простейшие:

$$\frac{1}{(z-z_1)^m(z-z_1)^n\cdot\ldots\cdot(z-z_1)^v}=\frac{a_1}{z-z_1}+\ldots+\frac{a_m}{(z-z_1)^m}+$$

$$+\frac{b_1}{z-z_2}+\ldots+\frac{b_n}{(z-z_2)^n}+\frac{u_1}{z-z_p}+\ldots+\frac{u_v}{(z-z_p)^v}\quad\left(0<|z_1|<|z_2|<\ldots<|z_p|\right). \tag{15}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть ряд Тейлора функции*

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)^n\cdot\ldots\cdot(z-z_p)^v}\quad\left(0<|z_1|<|z_2|<\ldots<|z_p|\right)$$

имеет вид

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jz^j,$$

тогда

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_j}{c_{j+1}}=z_1.$$

Если же корни z_1, z_2 расположены на одной окружности $0<|z_1|=|z_2|$ и $z_1\neq z_2$, то $\lim\limits_{j\to\infty}\frac{c_j}{c_{j+1}}$ не существует. Например,

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{a_1}{z-z_1}+\frac{a_2}{z-z_2}=-\frac{a_1}{z_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}}-\frac{a_2}{z_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_2}}=$$

$$=-\frac{a_1}{z_1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^j-\frac{1}{z_2}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^j=-\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{a_1}{z_1^{j+1}}+\frac{a_2}{z_2^{j+1}}\right)z^j.$$

В этом случае

$$\frac{c_j}{c_{j+1}}=\frac{\frac{a_1}{z_1^{j+1}}+\frac{a_2}{z_2^{j+1}}}{\frac{a_1}{z_1^{j+2}}+\frac{a_2}{z_2^{j+2}}}=\frac{a_1z_2^{j+1}+a_2z_1^{j+1}}{a_1z_2^{j+2}+a_2z_1^{j+2}}\cdot z_1z_2=\frac{z_1^{j+1}}{z_1^{j+2}}\cdot\frac{a_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{j+1}+a_2}{a_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{j+2}+a_2}\cdot z_1z_2=z_2\cdot\frac{a_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{j+1}+a_2}{a_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{j+2}+a_2}.$$

Если, например, $z_1=e^{i\varphi_1}$, $z_2=e^{i\varphi_2}$, то

$$\frac{z_2}{z_1}=e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}=e^{i\varphi}\quad(0<\varphi<2\pi).$$

Последовательность $\left(e^{i\varphi}\right)^j=e^{ji\varphi}\quad(j=0,1,2,\ldots)$ предела не имеет.

Далее в статье будет приведено доказательство аналогичной теоремы, связывающей максимальный по модулю корень алгебраического уравнения с коэффициентами ряда Лорана для функции $1/f(z)$.

Лемма 5. *Разложение в ряд Лорана функции*

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_1)^n}\quad(n=1,2,\ldots)\tag{16}$$

имеет вид

$$\frac{1}{(z-z_1)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=n}^{\infty}(j-n+1)(j-n+2)\cdot\ldots\cdot(j-n+n-1)z_1^{j-n}z^{-j}\quad(|z|>|z_1|).\tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n=1$

$$\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{z_1}{z}}.$$

Второй множитель в последнем выражении представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем z_1/z. С учетом этого получаем

$$\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z_1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_1}{z}\right)^k.$$

При $n=2$

$$\frac{1}{(z-z_1)^2}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(-(k+1)z_1^kz^{-(k+2)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z_1^kz^{-(k+2)}.$$

При $n=3$

$$\frac{1}{(z-z_1)^3}=-\frac{1}{2!}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-z_1)^2}\right)=-\frac{1}{2!}\left(-\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)z_1^kz^{-(k+3)}\right)=\frac{1}{2!}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)z_1^kz^{-(k+3)}.$$

Предположение индукции.

$$\frac{1}{(z-z_1)^{n-1}}=\frac{1}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+n-2)z_1^kz^{-(k+n-1)}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\left(z-z_1\right)^n}=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{d}{dz}\left[\left(z-z_1\right)^{-(n-1)}\right]=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(n-2)!}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+n-2)(k+n-1)z_1^k z^{-(k+n)}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+n-1)z_1^k z^{-(k+n)}.$$

Сделаем замену

$$k+n=j\,.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\left(z-z_1\right)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=n}^{\infty}(j-n+1)(j-n+2)\cdot\ldots\cdot(j-n+n-1)z_1^{j-n}z^{-j}.$$

Лемма 5 доказана.

Далее нам потребуются некоторые свойства разложения в ряд Лорана выражения

$$\frac{a_1}{z-z_1}+\frac{a_2}{\left(z-z_1\right)^2}+\ldots+\frac{a_m}{\left(z-z_1\right)^m}. \tag{18}$$

Лемма 6. *Пусть разложение в ряд Лорана выражения (18) имеет вид*

$$\sum_{j=1}^{\infty}c_{1,j}z^{-j}+\sum_{j=2}^{\infty}c_{2,j}z^{-j}+\ldots+\sum_{j=m}^{\infty}c_{m,j}z^{-j}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_{s,j}}{c_{m,j}}=0\quad(s=1,2,\ldots,m-1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим отношение

$$\frac{c_{s,j}}{c_{m,j}}=\frac{\frac{1}{(s-1)!}z_1^{j-s}(j-s+1)(j-s+2)\cdot\ldots\cdot(j-s+s-1)}{\frac{1}{(m-1)!}z_1^{j-m}(j-m+1)(j-m+2)\cdot\ldots\cdot(j-m+m-1)}=$$

$$=\frac{(m-1)!}{(s-1)!}z_1^{m-s}\frac{(j-s+1)(j-s+2)\cdot\ldots\cdot(j-s+s-1)}{(j-m+1)(j-m+2)\cdot\ldots\cdot(j-m+m-1)}.$$

Числитель последней дроби представляет собой полином по j степени $s-1$, а знаменатель – полином по аргументу j степени $m-1$, т.е. при $s<m$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_{s,j}}{c_{m,j}}=0,$$

что полностью доказывает справедливость леммы 6.

Пусть при $|z_1|>|z_2|$ ряд Лорана для функции

$$\frac{a_1}{z-z_1}+\frac{a_2}{\left(z-z_1\right)^2}+\ldots+\frac{a_m}{\left(z-z_1\right)^m}+\frac{b_1}{z-z_2}+\frac{b_2}{\left(z-z_2\right)^2}+\ldots+\frac{b_n}{\left(z-z_2\right)^n}$$

имеет вид

$$\sum_{j=1}^{\infty}c_{1,j}z^{-j}+\sum_{j=2}^{\infty}c_{2,j}z^{-j}+\ldots+\sum_{j=m}^{\infty}c_{m,j}z^{-j}+\sum_{j=1}^{\infty}d_{1,j}z^{-j}+\sum_{j=2}^{\infty}d_{2,j}z^{-j}+\ldots+\sum_{j=n}^{\infty}d_{n,j}z^{-j}=\sum_{j=p}^{\infty}c_jz^{-j},$$

где $p\ge\max(m,n)$.

Лемма 7. *Имеет место равенство*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{d_{k,j}}{c_{m,j}}=0\quad(k=1,2,\ldots,n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,

$$\frac{d_{k,j}}{c_{m,j}}=\frac{\frac{1}{(k-1)!}z_2^{j-k}(j-k+1)(j-k+2)\cdot\ldots\cdot(j-k+k-1)}{\frac{1}{(m-1)!}z_1^{j-m}(j-m+1)(j-m+2)\cdot\ldots\cdot(j-m+m-1)}=$$

$$=\frac{(m-1)!}{(k-1)!}\cdot\frac{z_1^m}{z_2^k}\cdot\frac{(j-k+1)(j-k+2)\cdot\ldots\cdot(j-k+k-1)}{(j-m+1)(j-m+2)\cdot\ldots\cdot(j-m+m-1)}\cdot\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^j=const\cdot\frac{P(j)}{Q(j)}\cdot q^j,$$

где

$$|q|=\left|\frac{z_2}{z_1}\right|<1.$$

Очевидно, что

$$\lim_{j\to\infty}\frac{P(j)}{Q(j)}\cdot q^j=0,$$

следовательно,

$$\lim_{j\to\infty}\frac{d_{k,j}}{c_{m,j}}=0.$$

Лемма 7 доказана.

Теорема 2. *Пусть ряд Лорана функции*

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)^n\cdot\ldots\cdot(z-z_p)^v}\quad\left(0<|z_p|<|z_{p-1}|<\ldots<|z_1|\right)$$

имеет вид

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j z^{-j},$$

тогда

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_{j+1}}{c_j}=z_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим отношение

$$\frac{c_{j+1}}{c_j}=\frac{c_{1,j+1}+\ldots+c_{m-1,j+1}+c_{m,j+1}+d_{1,j+1}+\ldots+d_{n,j+1}}{c_{1,j}+\ldots+c_{m-1,j}+c_{m,j}+d_{1,j}+\ldots+d_{n,j}}=\frac{c_{m,j+1}\left(\frac{c_{1,j+1}}{c_{m,j+1}}+\ldots+\frac{c_{m-1,j+1}}{c_{m,j+1}}+1+\frac{d_{1,j+1}}{c_{m,j+1}}+\ldots+\frac{d_{n,j+1}}{c_{m,j+1}}\right)}{c_{m,j}\left(\frac{c_{1,j}}{c_{m,j}}+\ldots+\frac{c_{m-1,j}}{c_{m,j}}+1+\frac{d_{1,j}}{c_{m,j}}+\ldots+\frac{d_{n,j}}{c_{m,j}}\right)}.$$

Все дроби, расположенные в скобках, в силу лемм 6 и 7 стремятся к нулю при $j\to\infty.$ Найдем

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_{m,j+1}}{c_{m,j}}.$$

$$\frac{c_{m,j+1}}{c_{m,j}}=\frac{\frac{1}{(m-1)!}z_1^{j+1-m}(j+1-m+1)(j+1-m+2)\cdot\ldots\cdot(j+1-m+m-1)}{\frac{1}{(m-1)!}z_1^{j-m}(j-m+1)(j-m+2)\cdot\ldots\cdot(j-m+m-1)}=$$

$$=z_1\frac{(j-m+2)(j-m+3)\cdot\ldots\cdot(j-m+m-1)(j-m+m)}{(j-m+1)(j-m+2)\cdot\ldots\cdot(j-m+m-2)(j-m+m-1)}=z_1\frac{j}{j-m+1}.$$

Таким образом, получаем

$$z_1\lim_{j\to\infty}\frac{j}{j-m+1}=z_1.$$

Теорема доказана.

Таким образом, доказанные в статье теоремы имеют высокое прикладное значение и служат источником для быстрого и удобного получения последовательностей формул приближенного выражения максимального и минимального корней алгебраического уравнения через коэффициенты в системах компьютерной математики. В [3] представлен явный вид некоторых данных формул для произвольного алгебраического уравнения третьей степени.

Ниже в настоящей статье будут приведены некоторые из полученных в системе компьютерной математики *Maple* 2016 формул для приближенного нахождения наименьшего и наибольшего корней алгебраического полинома $p(z)$ четвертой степени.

Пусть

$$p(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d.$$

Пусть z_1 – единственный минимальный по модулю корень данного полинома. Тогда, раскладывая функцию $1/\,p(z)$ в ряд Тейлора и учитывая справедливость теоремы 1, получаем

$$z_1 \approx \frac{c_3}{c_4} = -\frac{\left(ad^2 - 2bcd + c^3\right)d}{2acd^2 + b^2d^2 - 3bc^2d + c^4 - d^3}\,; \tag{19}$$

$$z_1 \approx \frac{c_4}{c_5} = \frac{\left(2acd^2 + b^2d^2 - 3bc^2d + c^4 - d^3\right)d}{2abd^3 - 3ac^2d^2 - 3b^2cd^2 + 4bc^3d - c^5 + 2cd^3}\,; \tag{20}$$

$$z_1 \approx \frac{c_5}{c_6} = \frac{\left(2abd^3 - 3ac^2d^2 - 3b^2cd^2 + 4bc^3d - c^5 + 2cd^3\right)d}{a^2d^4 - 6abcd^3 + 4ac^3d^2 - b^3d^3 + 6b^2c^2d^2 - 5bc^4d + c^6 + 2bd^4 - 3c^2d^3}\,; \tag{21}$$

$$\frac{c_6}{c_7} = \frac{-\left(a^2d^4 - 6abcd^3 + 4ac^3d^2 - b^3d^3 + 6b^2c^2d^2 - 5bc^4d + c^6 + 2bd^4 - 3c^2d^3\right)d}{3a^2cd^4 + 3ab^2d^4 - 12abc^2d^3 + 5ac^4d^2 - 4b^3cd^3 + 10b^2c^3d^2 - 6bc^5d + c^7 - 2ad^5 + 6bcd^4 - 4c^3d^3}\,; \tag{22}$$

$$\begin{aligned} c_7 / c_8 = {} & d\left(3a^2cd^4 + 3ab^2d^4 - 12abc^2d^3 + 5ac^4d^2 - 4b^3cd^3 + 10b^2c^3d^2 - 6bc^5d + c^7 - 2ad^5 + {}\right.\\ & \left.+6bcd^4 - 4c^3d^3\right) / \left(3a^2bd^5 - 6a^2c^2d^4 - 12ab^2cd^4 + 20abc^3d^3 - 6ac^5d^2 - b^4d^4 + 10b^3c^2d^3 - {}\right.\\ & \left.-15b^2c^4d^2 + 7bc^6d - c^8 + 6acd^5 + 3b^2d^5 - 12bc^2d^4 + 5c^4d^3 - d^6\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Пусть z_2 – единственный максимальный по модулю корень полинома. Тогда, раскладывая функцию $1/\,p(z)$ в ряд Лорана вида

$$\frac{1}{p(z)} = h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots + h_m z^{-m} + \ldots$$

и учитывая справедливость теоремы 2, получаем

$$z_2 \approx \frac{h_8}{h_7} = -\frac{a^4 - 3a^2b + 2ac + b^2 - d}{a^3 - 2ab + c}\,; \tag{24}$$

$$z_2 \approx \frac{h_9}{h_8} = -\frac{a^5 - 4a^3b + 3a^2c + 3ab^2 - 2ad - 2bc}{a^4 - 3a^2b + 2ac + b^2 - d}\,; \tag{25}$$

$$z_2 \approx \frac{h_{10}}{h_9} = -\frac{a^6 - 5a^4b + 4a^3c + 6a^2b^2 - 3a^2d - 6abc - b^3 + 2bd + c^2}{a^5 - 4a^3b + 3a^2c + 3ab^2 - 2ad - 2bc}\,; \tag{26}$$

$$z_2 \approx \frac{h_{11}}{h_{10}} = -\frac{a^7 - 6a^5b + 5a^4c + 10a^3b^2 - 4a^3d - 12a^2bc - 4ab^3 + 6abd + 3ac^2 + 3b^2c - 2cd}{a^6 - 5a^4b + 4a^3c + 6a^2b^2 - 3a^2d - 6abc - b^3 + 2bd + c^2}\,; \tag{27}$$

$$\begin{aligned} z_2 \approx h_{12} / h_{11} = {} & -\left(a^8 - 7a^6b + 6a^5c + 15a^4b^2 - 5a^4d - 20a^3bc - 10a^2b^3 + 12a^2bd + 6a^2c^2 + 12ab^2c + {}\right.\\ & \left.+b^4 - 6acd - 3b^2d - 3bc^2 + d^2\right) / \left(a^7 - 6a^5b + 5a^4c + 10a^3b^2 - 4a^3d - 12a^2bc - 4ab^3 + 6abd + {}\right.\\ & \left.+3ac^2 + 3b^2c - 2cd\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Рассмотрим применение данных формул на конкретном числовом примере алгебраического уравнения четвертой степени $f(z)=0$, где

$$f(z)=z^4+(4+i)z^3+(-16-2i)z^2+(104-64i)z+(-192+128i)=(z-2)(z+4i)(z-2-3i)(z+8).$$

Подставляя коэффициенты уравнения в формулы (19)–(23) соответственно, получаем приближенные значения минимального по модулю корня z_1:

$$z_1 \approx 2,01166-0.07577i,$$
$$z_1 \approx 2,00405-0,08327i,$$
$$z_1 \approx 1,99016-0,00912i,$$
$$z_1 \approx 1,98388+0,01514i$$
$$z_1 \approx 1,99524+0,00759i.$$

Аналогично, подставляя коэффициенты уравнения в формулы (24)–(28) соответственно, получаем приближенные значения наибольшего по модулю корня z_2:

$$z_2 \approx -8,02769-0,34693i,$$
$$z_2 \approx -7,99291-0,28943i,$$
$$z_2 \approx -7,91335+0,12993i,$$
$$z_2 \approx -8,00073+0,032387i,$$
$$z_2 \approx -8,03659-0,02251i.$$

Представляет интерес сравнение полученных выражений (19)–(28) с выражениями, возникающими при приближенной записи формул представления корней алгебраического уравнения произвольной степени через коэффициенты в виде конструкций, содержащих в себе определители бесконечных квазидиагональных матриц от коэффициентов. Такие конструкции называют формулами Никипорца [2].

Рассмотрим их применение на примере алгебраического уравнения четвертой степени с комплексными коэффициентами вида (29):

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0. \tag{29}$$

Пронумеруем корни уравнения (29) по порядку уменьшения их модулей: $|x_1|\ge|x_2|\ge|x_3|\ge|x_4|$. Для данного уравнения составим функции Никипорца $x_i(a,b,c,d)$ $(i=1,2,3,4)$, которые представляют собой аналитические выражения корней через коэффициенты.

Данные функции содержат в себе отношения определителей матриц Тёплица, элементами которых являются коэффициенты исходного алгебраического уравнения.

В знаменателях дробей в данных конструкциях стоят определители таких же матриц Тёплица, что и в числителе, но на порядок меньше.

Стоит отметить, что формулы Никипорца (30)–(33) не позволяют получать значения комплексных корней уравнения (29), если коэффициенты уравнения действительные.

В системе компьютерной математики *Maple* 2016 из вышеперечисленных формул Никипорца можно получить ряд приближенных формул для выражения корней уравнения (29) в виде дробно-рациональных функций от коэффициентов. Ниже будут приведены некоторые из них.

$$x_1(a,b,c,d)=-\frac{\begin{vmatrix}-a & -b & -c & -d & 0 & \cdots\\ -1 & -a & -b & -c & -d & \cdots\\ 0 & -1 & -a & -b & -c & \cdots\\ 0 & 0 & -1 & -a & -b & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -a & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-a & -b & -c & -d & \ldots\\ -1 & -a & -b & -c & \ldots\\ 0 & -1 & -a & -b & \ldots\\ 0 & 0 & -1 & -a & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}\div\frac{\begin{vmatrix}-1 & -a & -b & -c & -d & \cdots\\ 0 & -1 & -a & -b & -c & \cdots\\ 0 & 0 & -1 & -a & -b & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -a & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & -a & -b & -c & \ldots\\ 0 & -1 & -a & -b & \ldots\\ 0 & 0 & -1 & -a & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}; \tag{30}$$

$$x_2(a,b,c,d)=-\frac{\begin{vmatrix}-b & -c & -d & 0 & 0 & \cdots\\ -a & -b & -c & -d & 0 & \cdots\\ -1 & -a & -b & -c & -d & \cdots\\ 0 & -1 & -a & -b & -c & \cdots\\ 0 & 0 & -1 & -a & -b & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-b & -c & -d & 0 & \ldots\\ -a & -b & -c & -d & \ldots\\ -1 & -a & -b & -c & \ldots\\ 0 & -1 & -a & -b & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}\div\frac{\begin{vmatrix}-a & -b & -c & -d & 0 & \cdots\\ -1 & -a & -b & -c & -d & \cdots\\ 0 & -1 & -a & -b & -c & \cdots\\ 0 & 0 & -1 & -a & -b & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -a & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-a & -b & -c & -d & \ldots\\ -1 & -a & -b & -c & \ldots\\ 0 & -1 & -a & -b & \ldots\\ 0 & 0 & -1 & -a & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}; \tag{31}$$

$$x_3(a,b,c,d)=-\frac{\begin{vmatrix}-c & -d & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ -b & -c & -d & 0 & 0 & \cdots\\ -a & -b & -c & -d & 0 & \cdots\\ -1 & -a & -b & -c & -d & \cdots\\ 0 & -1 & -a & -b & -c & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-c & -d & 0 & 0 & \ldots\\ -b & -c & -d & 0 & \ldots\\ -a & -b & -c & -d & \ldots\\ -1 & -a & -b & -c & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}\div\frac{\begin{vmatrix}-b & -c & -d & 0 & 0 & \cdots\\ -a & -b & -c & -d & 0 & \cdots\\ -1 & -a & -b & -c & -d & \cdots\\ 0 & -1 & -a & -b & -c & \cdots\\ 0 & 0 & -1 & -a & -b & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-b & -c & -d & 0 & \ldots\\ -a & -b & -c & -d & \ldots\\ -1 & -a & -b & -c & \ldots\\ 0 & -1 & -a & -b & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}; \tag{32}$$

$$x_4(a,b,c,d)=-\frac{\begin{vmatrix}-d & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ -c & -d & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ -b & -c & -d & 0 & 0 & \cdots\\ -a & -b & -c & -d & 0 & \cdots\\ -1 & -a & -b & -c & -d & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-d & 0 & 0 & 0 & \ldots\\ -c & -d & 0 & 0 & \ldots\\ -b & -c & -d & 0 & \ldots\\ -a & -b & -c & -d & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}\div\frac{\begin{vmatrix}-c & -d & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ -b & -c & -d & 0 & 0 & \cdots\\ -a & -b & -c & -d & 0 & \cdots\\ -1 & -a & -b & -c & -d & \cdots\\ 0 & -1 & -a & -b & -c & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-c & -d & 0 & 0 & \ldots\\ -b & -c & -d & 0 & \ldots\\ -a & -b & -c & -d & \ldots\\ -1 & -a & -b & -c & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}}. \tag{33}$$

Обозначим через $x_i^{(k)}$ приближенное значение корня уравнения (29), где $i = 1, \dots, 4$ – номера корней по порядку убывания их модулей, а верхний индекс (k) обозначает порядок матриц, стоящих в числителях конструкций (30)–(33). Тогда

$$x_1^{(4)} = -\frac{a^4 - 3a^2b + 2ac + b^2 - d}{a^3 - 2ab + c};$$

$$x_2^{(4)} = -\frac{a\left(a^2 - b\right)\left(2a^2bd + a^2c^2 - 3ab^2c + b^4 - 2acd - 2b^2d + 2bc^2 + d^2\right)}{\left(a^2d - 2abc + b^3 - bd + c^2\right)\left(a^4 - 3a^2b + 2ac + b^2 - d\right)};$$

$$x_3^{(4)} = -\frac{\left(2acd^2 + b^2d^2 - 3bc^2d + c^4 - d^3\right)\left(a^2d - 2abc + b^3 - bd + c^2\right)}{\left(ad^2 - 2bcd + c^3\right)\left(2a^2bd + a^2c^2 - 3ab^2c + b^4 - 2acd - 2b^2d + 2bc^2 + d^2\right)};$$

$$x_4^{(4)} = -\frac{\left(ad^2 - 2bcd + c^3\right)d}{2acd^2 + b^2d^2 - 3bc^2d + c^4 - d^3};$$

$$x_1^{(5)} = -\frac{a^5 - 4a^3b + 3a^2c + 3ab^2 - 2ad - 2bc}{a^4 - 3a^2b + 2ac + b^2 - d};$$

$$x_2^{(5)} = \Big[\left(2a^3cd - 3a^2b^2d - 3a^2bc^2 + 4ab^3c - b^5 - a^2d^2 + 2abcd + 2ac^3 + 3b^3d - 3b^2c^2 - 2bd^2 - c^2d\right)\times$$
$$\times\left(a^4 - 3a^2b + 2ac + b^2 - d\right)\Big] / \Big[\left(2a^2bd + a^2c^2 - 3ab^2c + b^4 - 2acd - 2b^2d + 2bc^2 + d^2\right)\times$$
$$\times\left(a^5 - 4a^3b + 3a^2c + 3ab^2 - 2ad - 2bc\right)\Big];$$

$$x_3^{(5)} = -\Big[\left(2abd^3 - 3ac^2d^2 - 3b^2cd^2 + 4bc^3d - c^5 + 2cd^3\right)\times\left(2a^2bd + a^2c^2 - 3ab^2c + b^4 - 2acd - 2b^2d + \right.$$
$$\left. + 2bc^2 + d^2\right)\Big] / \Big[\left(2acd^2 + b^2d^2 - 3bc^2d + c^4 - d^3\right)\left(2a^3cd - 3a^2b^2d - 3a^2bc^2 + 4ab^3c - b^5 - a^2d^2 + \right.$$
$$\left. + 2abcd + 2ac^3 + 3b^3d - 3b^2c^2 - 2bd^2 - c^2d\right)\Big];$$

$$x_4^{(5)} = -\frac{\left(2acd^2 + b^2d^2 - 3bc^2d + c^4 - d^3\right)d}{2abd^3 - 3ac^2d^2 - 3b^2cd^2 + 4bc^3d - c^5 + 2cd^3}.$$

Таким образом, из представленных выше выражений видно, что формулы для приближенного нахождения минимального и максимального по модулю корней алгебраического уравнения четвертой степени (29) (полученные с использованием функций Никипорца (30)–(33)), полностью совпадают с аналогичными выражениями, являющимися следствием из теорем 1 и 2 настоящей статьи. Подобная ситуация возникает и при рассмотрении алгебраических уравнений более высоких степеней.

Заключение. Следовательно, на основании двух доказанных теорем нами предложен новый алгоритм для получения формул приближенного представления наименьшего и наибольшего по модулю корней алгебраического уравнения произвольной степени в виде рациональных функций от коэффициентов. В качестве примера некоторые из данных формул представлены явно для алгебраического уравнения четвертой степени. Также показана прямая связь разработанного алгоритма с формулами Никипорца приближенного нахождения корня полинома через его коэффициенты.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Эйлер, Л. Введение в анализ бесконечных: в 2 т. / Л. Эйлер; пер. с лат. Е.Л. Пацановского. – 2-е изд. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – Т. 1. – 315 с.
2. Шмойлов, В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи r/φ-алгоритма / В.И. Шмойлов. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.
3. Трубников, Ю.В. Роль расходящихся степенных рядов в некоторых алгоритмах приближенного аналитического решения алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, А.М. Воронов // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2017. – № 4(97). – С. 29–33.

R E F E R E N C E S

1. Euler L. *Vvedeniye v analiz beskonechnykh* [Introduction to the Analysis of Infinites], Moscow, 1961, Gos. izd. fiz.-mat. lit., 1, 315 p.
2. Shmoylov V.I. *Resheniye algebraicheskikh uravneniy pri pomoshchi r/φ-algoritma* [Solution of Algebraic Equations by Means of a r/φ-Algorithm],Taganrog, Izd-vo TTI YuFU, 2011, 330 p.
3. Trubnikov Yu.V., Chernyavsky M.M., Voronov A.M. *Vestnik VGU* [Newsletter of Vitebsk State University], 2017, 4(97), pp. 29–33.

Поступила в редакцию 15.10.2018

Адрес для корреспонденции: e-mail: yurii_trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.