Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

Н.Н. Воробьев, С.Н. Воробьев, М.И. Наумик

АЛГЕБРА: ТЕОРИЯ МНОГОЧЛЕНОВ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2018

УДК [512.62+512.623](075.8)
ББК 22.144.7я73
В75

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 28.02.2018 г.

Авторы: профессор кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, доцент **Н.Н. Воробьев;** доценты кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **С.Н. Воробьев, М.И. Наумик**

Научный редактор:
заведующий кафедрой алгебры
и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова,
доктор физико-математических наук, профессор *Н.Т. Воробьев*

Рецензент:
профессор кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук,
профессор *Ю.В. Трубников*

Воробьев, Н.Н.
В75 Алгебра: теория многочленов и элементы теории полей : методические рекомендации / Н.Н. Воробьев, С.Н. Воробьев, М.И. Наумик. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2018. – 87 с.

Настоящее издание предназначено для первоначального изучения основ теории многочленов. Структура задачи материала следующая: в начале каждого раздела даются основные теоретические сведения (определения, формулировки теорем); затем приведены подробно разобранные решения ряда задач; в заключение читателю предложены задачи для самостоятельного решения (свыше пятиста задач) и контрольные вопросы.

Адресовано студентам физико-математических специальностей и может успешно использоваться для проведения практических и самостоятельных (контрольных) работ по дисциплинам «Алгебра», «Алгебра и теория чисел», «Теория чисел», «Геометрия и алгебра».

УДК [512.62+512.623](075.8)
ББК 22.144.7я73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник заданий представляет собой практикум по решению задач (содержит свыше пятиста задач) и дополняет вышедшие ранее издания. Настоящие методические рекомендации посвящены изучению основ теории многочленов. Весь материал разбивается на разделы и подразделы. Каждый раздел начинается обзором основных понятий и тесно связанных с ними результатов. Далее рассматриваются подробные решения наиболее типичных задач. Раздел 5 содержит контрольные вопросы. В разделе 6 предложены задачи для самостоятельного решения.

Настоящий сборник заданий составлен в соответствии с учебными программами дисциплин «Алгебра», «Алгебра и теория чисел», «Теория чисел», «Геометрия и алгебра» и предназначен студентам физико-математических специальностей.

1 МНОГОЧЛЕНЫ НАД ОБЛАСТЬЮ ЦЕЛОСТНОСТИ

1.1 Кольцо многочленов от одной переменной

1.1.1 Определение. Пусть A – область целостности с единицей *e*, *x* – символ. Рассмотрим выражения формальной суммы

(∗) $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, где $a_i \in A$ и $n \geq 0$, причем некоторые формальные слагаемые a_ix^i могут и отсутствовать, а вместо ex^i, будем писать x^i.

1.1.2 Два таких выражения $f(x)$ и $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_sx^s$ будем считать равными, если они отличаются разве лишь формальными слагаемыми $0x^i$.

Например. $f(x) = 1 + (-3)x + x^3$,

$g(x) = 1 + (-3)x + 0x^2 + 1 \cdot x^3$.

1.1.3 Замечание. Подчеркнем, что в этом определении выражения вида a_ix^i (формальные слагаемые), также знаки + соединяющие их являются символами лишенными какого-нибудь содержания.

Множество всевозможных выражений вида (∗) обозначим $A[x]$.

1.1.4 Определение. Пусть $f(x), g(x) \in A[x]$. Суммой $f(x)$ и $g(x)$ называется выражение $f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + ... + c_kx^k$, где $c_i = a_i + b_i$ и $k = \max\{n, s\}$ (согласно предыдущему определению, если например $n > s$, то можно считать $b_{s+1} = b_{s+2} = ... = b_n = 0$).

Произведением $f(x)$ и $g(x)$ называется выражение равное

$$f(x) \cdot g(x) = d_0 + d_1x + ... + d_{n+s}x^{n+s}, \text{ где } d_i = \sum_{p+g=i} a_p \cdot b_g.$$

1.1.5 Теорема. *Множество $A[x]$ с операциями сложения и умножения введенными в п. 1.1.1 является кольцом. Более того, множество $A[x]$ является областью целостности с единицей.*

1.1.6 Определение. Кольцо $A[x]$ называется кольцом многочленов от одной переменной (неизвестной) над A. Его элементы называются многочленами над A или многочленами с коэффициентами из A.

1.1.7Следствие. а) Пусть $S(x) = x$, тогда $S^i(x) = x^i$, т.е. символ x^i можно рассматривать как степень переменного*x*.

б) Пусть $t_i(x) = a_i$. Тогда $t_i(x) \cdot S^i(x) = a_ix^i$, т.е. символ a_ix^i можно рассматривать как произведение a_i на x^i.

в) Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $f_i(x) = a_ix^i$ $(0 < i \le n)$, $f_0(x) = a_0$. Тогда $f(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x)$, т.е. многочлен можно рассматривать как сумму произведений элементов кольца на степень переменной x.

1.1.8 Замечание. Согласно этому следствию, а также коммутативности сложения многочлен $f(x)$ можно записывать и в другой форме, в частности, по убывающим степеням переменной $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$.

1.1.9 Определение. Пусть $f(x) = \mathrm{A}[x]$. Элементы a_0, a_1, ... a_n называется коэффициентами многочлена $f(x)$, если $a_n \ne 0$, то он называется старшим коэффициентом, а nстепенью многочлена, a_0 называется свободным членом, нулевому многочлену $h(x) = 0$не приписывается никакая степень.

1.1.10 Следствие. а) Подмножество кольца $\mathrm{A}[x]$ состоящее из многочленов нулевой степени и нулевого многочлена образует подкольцо изоморфное кольцу A.

б) Степень произведения двух многочленов равна сумме степеней сомножителей.

1.1.11 Замечание. Пусть $\mathrm{A}[x]$ кольцу многочленов над A и $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$ более широкая область целостности. Понятно, что любой многочлен $f(x)$ над A можно считать многочленом над B.

1.2 Отношение делимости в кольце многочленов

1.2.1 Определение. Пусть $f(x), g(x) \in \mathrm{A}[x]$, $g(x) \ne 0$.

Если $f(x) = g(x) \cdot s(x)$, где $s(x) \in \mathrm{A}[x]$, то говорят, что $f(x)$ делится на $g(x)$ и пишут $f(x) \vdots g(x)$.

Таким образом, в кольце $\mathrm{A}[x]$, определено отношение делимости $(\vdots)$

$f(x) \vdots g(x) \Leftrightarrow g(x) \ne 0 \wedge \exists s(x) \in \mathrm{A}[x]$.

1.2.2 Пример. $A = Z$, $f(x) = x$, $g(x) = 2x$. $f(x) \not\vdots g(x)$.

1.2.3 Пример. $A = Q$, $f(x) = x$, $g(x) = 2x$. $f(x) \vdots g(x)$.

В дальнейшем будем обозначать символом $\deg f(x)$ степень многочлена $f(x)$.

1.2.4 Теорема. 1) *Отношение делимости транзитивно.*

2) *При любых* $u(x)$, $v(x) \in \mathrm{A}[x]$

$f(x) \vdots h(x) \wedge g(x) \vdots h(x) \Rightarrow [u(x) \cdot f(x) + \upsilon(x) \cdot g(x)] \vdots h(x)$.

3) *Если* $f(x) \vdots g(x) \wedge f(x) \ne 0 \Rightarrow \deg f(x) \ge \deg g(x)$.

1.2.5 Следствие. 1) При любом $u(x) \in \mathrm{A}[x]$, в частности при любом $u \in \mathrm{A}[x]$, если $f(x) \vdots g(x) \Rightarrow [u(x) \cdot f(x)] \vdots g(x)$.

2) Пусть $f(x) = g(x)S(x) + t(x)$.

$f(x) \vdots h(x) \wedge g(x) \vdots h(x) \Leftrightarrow g(x) \vdots h(x) \wedge t(x) \vdots h(x)$.

3) Если каждый из многочленов $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)$ делится на $g(x)$, то при любых $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x) \in \mathrm{A}[x]$, $\left[\sum_{i+1}^{n} u_i(x) f(x)\right] \vdots g(x)$.

4) $f(x) \vdots g(x) \wedge g(x) \vdots f(x) \Leftrightarrow g(x) = cf(x)$, где $c \in A$, c – делитель единицы.

5) Если $f(x) \vdots g(x) \Rightarrow f(x) = 0 \vee \deg f(x) \geq \deg g(x)$.

1.2.6 Задача. Пусть $f(x) = x^4 + a$ и $g(x) = x^2 + bx + 1$ многочлен над кольцом целых чисел. При каких a и b $f(x) \vdots g(x)$.

Решение. Если $f(x) \vdots g(x)$, то $s(x)$ частное и $s(x) = x^2 + ux + w$.

Итак, $x^4 + a = (x^2 + bx + 1)(x^2 + ux + w)$. Отсюда следует, что $w = a$.

Имеем: $x^4 + a = (x^2 + bx + 1)(x^2 + ux + a)$.

Составим систему

$\begin{cases} u + b = 0, \\ a + bu + 1 = 0, \\ ab + u = 0. \end{cases}$ Учитывая $u = -b$, получаем $\begin{cases} a - b^2 = 1, \\ ab - b = 0. \end{cases}$

Из $b(a-1) = 0$ следует $b = 0$ или $a = 1$

1) $b = 0$, то $a = -1$, 2) $a = 1$, $b = 2$, т.е. $b = \sqrt{2}$ $b = -\sqrt{2}$.

Ответ. $b = 0$, $a = -1$; $a = 1$, $b = \sqrt{2}$; $a = 1$, $b = -\sqrt{2}$.

1.3 Делимость многочлена на двучлен *x – c*.

1.3.1 Определение. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ многочлен над A. Элемент *c* из A или более широкой области целостности B. Элемент $f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$ называется значением многочлена $f(x)$ в *c*.

1.3.2 Теорема. *Пусть $f(x)$ многочлен над A, с элемент из A или более широкой области целостности B. Тогда $f(x) - f(c) \vdots (x - c)$.*

1.3.3 Схема Горнера. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ и $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$, тогда

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 - f(c) = (x - c)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0)$.

Имеем $a_n = b_{n-1}$, $\qquad b_{n-1} = a_n$,

$a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1}$, $\qquad b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$,

$a_{n-2} = b_{n-3} - cb_{n-2}$, $\qquad b_{n-3} = a_{n-2} + cb_{n-2}$,

$\dots \quad \dots \quad \dots \qquad \dots \quad \dots \quad \dots$

$a_1 = b_0 - cb_1$, $\qquad b_0 = a_1 + cb_1$,

$a_0 - f(c) = cb_0$, т.е. $\qquad f(c) = a_0 + cb_0$.

Составим таблицу

	a_n	$a_{n\text{-}1}$	$a_{n\text{-}2}$	…	a_1	a_0
c	$b_{n\text{-}1}$	$b_{n\text{-}2}$	$b_{n\text{-}3}$	….	b_0	$f(c)$

1.3.4 Пример. Пусть $f(x) = x^4 + (2+i)^2 + (1+2i)x - i$. Вычислим $f(-i)$.

Решение. Составим таблицу.

	1	0	2 + i	1 + 2i	–i
–i	1	–i	1 + i	2 + i	1 – 3i

Имеем $f(-i) = 1 - 3i$.

Ответ. $f(-i) = 1 - 3i$.

1.3.5 Следствие. (Теорема Безу́)

$$f(x) = (x-c)g(x) + f(c).$$

1.3.6 Определение. Корнем многочлена $f(x) \in \mathrm{A}[x]$ называется такой элемент $c \in \mathrm{A}$ или из более широкой области целостности B, что $f(c) = 0$.

1.3.7 Следствие. Элемент c тогда и только тогда является корнем многочлена $f(x)$, когда $f(x) \vdots (x-c)$.

1.3.8 Теорема. *Пусть* $f(x) \in \mathrm{A}[x]$, B *– область целостности, где* $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$, *тогда* $f(x)$ *имеет в* B *не больше корней чем его степень.*

1.3.9 Следствие. Пусть $f(x) \in \mathrm{A}[x], c_1, c_2, \dots, c_k$ корни многочлена $f(x)$ из поля B все попарно различные, тогда $f(x) = (x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_{1k})g(x)$, в частности, если степень многочлена $f(x)$ равна k, то $f(x) = (x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_k)a_k$.

1.3.10 Пример. Разложить на линейные множители над полем комплексных чисел многочлен $f(x) = x^5 - 1$.

Решение. Корнями этого многочлена являются все значения корней 5-й степени из 1, т.е. u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, где $\cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$f(x) = (x-u_0)(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4).$$

Ответ. $f(x) = (x-u_0)(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)(x-u_4)$.

1.3.11 Пример. Является ли число $x_0 = -2$ корнем многочлена

$f(x) = x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 12x - 8.$

Решение. По определению число x_0 является корнем многочлена $f(x)$, если $f(x_0) = 0,$ т.е. $f(x)$ делится на $(x - x_0).$ Используем схему Горнера

	1	6	11	2	–12	–8
–2	1	4	3	–4	–4	0

Так как $f(-2) = 0,$ то –2 – корень многочлена $f(x)$.

Ответ. –2 – корень многочлена $f(x)$.

1.4 Алгебраическое и функциональное равенство многочленов

1.4.1 Пусть $f(x) \in \mathrm{A}[x]$. Каждому элементу $c \in \mathrm{A}$, сопоставим элемент $f(c) \in \mathrm{A}[x]$. Таким образом, каждый многочлен $f(x)$определяет на кольце A некоторую функцию. Эту функцию будем обозначать $f^*(x)$.

Покажем, что многочлен $f(x)$ и функция $f^*(x)$ этот не одно и тоже. Над кольцом $Z/_pZ$ рассмотрим два многочлена $f(x) = x^p$ и $g(x) = x.$Это разные многочлены. Рассмотрим соответствующие им функции $f^*(x) = x^p$ $g^*(x) = x.$ По следствию из теоремы Ферма функция $h^*(x) = x^p - x$ тождественно равны нулю, т.е. $f^*(x) = g^*(x).$ Таким образом неравным многочленам могут соответствовать равные функции.

1.4.2 Теорема. 1. *Если* 1. $f(x) + g(x) = h(x),$ то $f^*(x) + g^*(x) = h^*(x).$

2. *Если* $f(x) \cdot g(x) = k(x),$ то $f^*(x) \cdot g^*(x) = k^*(x).$

1.5 Многочлены над полем

1.5.1 Определение. Пусть P поле, $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены над P. Делением с остатком многочлена $f(x)$ на $g(x) \neq 0$ называется представление $f(x) = g(x) \cdot s(x) + r(x),$ где $\deg r(x) < \deg g(x)$ или $r(x) = 0.$ Причем $s(x), r(x) \in P[x].$

1.5.2Теорема. *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *– многочлены над* P, $g(x) \neq 0$. *Тогда деление с остатком* $f(x)$ *на* $g(x)$ *всегда возможно и притом однозначно.*

1.5.3 Следствие. Пусть P поле. Тогда кольцо $P[x]$ является евклидовым кольцом, в частности $P[x]$ это кольцо главных идеалов.

1.5.4 Пример. Пусть $P = Q$. Разделить с остатком

$f(x)=x^3-2x^2-3x+1$ на $g(x)=x^2+1.$

Решение. Получаем

$$\begin{array}{l|l}
x^3–2x^2–3x+1 & x^2+1 \\ \cline{2-2}
{}^{-}x^3 \qquad +xx–2 & \\ \hline
–2x– 4x+1 & \\
–2x^2–2 & \\ \cline{1-1}
–4x+3 &
\end{array}$$

Таким образом $f(x)=g(x)(x-2)+(-4x+3),$ т.е. $s(x)=x-2,$ $r(x)=-4x+3.$

Ответ: $f(x)=g(x)(x-2)+(-4x+3).$

1.5.5 Пример. Найти остаток от деления многочлена $f(x)=2x^{64}-5x^{36}-3x^{27}+7x^{15}+2x^6-3x^4+8$ на многочлен $g(x)=x^3-x.$

Решение. По теореме о делении с остатком существует единственная пара многочленов $s(x)$ $r(x),$ где $\deg r(x)\le 2,$ такая, что $f(x)=g(x)s(x)+r(x).$

Если $r(x)=ax^2+bx+c,$ то $f(x)=g(x)s(x)+ax^2+bx+c.$ Вычислим левую и правую части от корней многочлена $g(x)$, т.е. при $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=0.$

$$\begin{cases} 2-5-3+7+2-3+8=a+b+c; \\ 2-5+3-7+2-3+8=a-b+c; \\ \qquad\qquad\qquad\quad 8= \qquad c. \end{cases}$$

Отсюда $a=-4,\ b=4,\ c=8.$ Следовательно, искомый остаток $r(x)=-4x^2+4x+8.$

Ответ: $r(x)=-4x^2+4x+8.$

1.6 Наибольший общий делитель

Пусть P поле. Поскольку $P[x]$ евклидово кольцо, то на него переносятся все определения и результаты соответствующего кольца главных идеалов. Повторим их применительно к $P[x]$.

1.6.1 Определение. ОД многочленов $f(x),\ g(x)\in P[x]$ называется такой многочлен $h(x)\in P[x],$ что $f(x)\vdots h(x)$ и $g(x)\vdots h(x).$

НОД многочленов $f(x)\,и\,g(x)$ называется такой ОД который делится на любой ОД.

Обозначение НОД ($f(x),g(x))=d(x)$ или ($f(x),g(x))=d(x)$.

1.6.2 Теорема. *Пусть* $f(x),\ g(x)\in P[x],$ *если* $d(x)$ *– НОД этих многочленов, то* $cd(x)$ *тоже их НОД при любом* $c\in P,\ c\ne 0.$

Два различных НОД многочленов $f(x)$ *и* $g(x)$ *отличаются лишь множителем* $c \in P, c \neq 0.$

1.6.3 Таким образом, НОД двух многочленов определяется однозначно с точностью до постоянного множителя. Алгоритм Евклида для многочленов $f(x), g(x) \in P[x]$ состоит в следующем. Пользуясь алгоритмом деления состатком

$$
\begin{aligned}
&f(x) = g(x)s_1(x) + r_1(x);\\
&g(x) = r_1(x)s_2(x) + r_2(x);\\
&r_1(x) = r_2(x)s_3(x) + r_3(x);\\
&\quad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\
&r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)s_n(x) + r_n(x);\\
&r_{n-1}(x) = r_n(x)s_{n+1}(x).
\end{aligned}
$$

Эту систему равенств называют последовательностью Евклида многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

1.6.4 Теорема. *Пусть* $f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0.$ *Последний отличный от нуля остаток в последовательности Евклида для этих многочленов является их НОД.*

1.6.5 Пример. Найти НОД $(f(x), g(x)),$ где $f(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 - x - 3,$ $g(x) = x^3 + 2x^2 - 1.$

Решение. Получаем

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 3 \\ 2x^4 + 4x^3 \quad -2x2x - 3 \end{array} & \underline{x^2 + 2x - 1} \\
\hline
-\begin{array}{l} -3x^3 + x^2 + x - 3 \\ -3x^3 - 6x^2 + 3 \end{array} & \\
\hline
7x^2 - 6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} x^3 + 2x^2 - 1 \\ x^3 + \frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{6}x\frac{1}{7} \end{array} & \underline{7x^2 + x - 6} \\
 & + \frac{13}{49} \\
\hline
\frac{13}{7}x + \frac{6}{7}x - 1 & \\
\frac{13}{7}x^2 + \frac{13}{49}x - \frac{78}{49} & \\
\hline
\frac{29}{49}x - \frac{29}{49} &
\end{array}
$$

Имеем $f(x) = g(x)(2x-3) + r_1(x), \quad r_1(x) = 7x^2 + x - 6,$

$$g(x) = r_1(x)\left(\frac{1}{7}x + \frac{13}{49}\right) + r_2(x), \quad r_2(x) = \frac{29}{49}x + \frac{29}{49},$$

$$r_1(x) = r_2(x)\left(\frac{343}{29}x - \frac{294}{29}\right).$$

НОД равен $r_2(x) = \dfrac{29}{49}x + \dfrac{29}{49}$.Безусловно удобнее считать $d(x) = x + 1.$

Ответ: $d(x) = x + 1.$

1.6.6 Теорема. *Пусть* $d(x)$ *НОД многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *из кольца P[x]. Тогда существуют такие* $u(x), v(x) \in P[x]$, *что* $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$

Равенство $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ называется линейным представлением $d(x)$ или линейной формой $d(x)$.

1.6.7 Пример. Пусть $P = Q$. Найти линейное представление НОД многочленов $f(x) = x^3 - 1, g(x) = x^2 + 1.$

Решение. Алгоритм Евклида $f(x) = g(x) \cdot x + (-x - 1),$

$$g(x) = (-x-1)(-x+1) + 2,$$

$$-x - 1 = 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right).$$

Имеем

$$2 = g(x) - (-x-1)(-x+1) = g(x) - (f(x) - g(x)\cdot x)\cdot(-x+1) =$$

$$= g(x) + g(x)\cdot x(-x+1) - f(x)(-x+1) = f(x)(x-1) + g(x)(1 - x^2 + x) =$$

$$= (x-1)f(x) + (-x^2 + x + 1)g(x).$$

Ответ: $2 = (x-1)f(x) + (-x^2 + x + 1)g(x).$

1.6.8 Определение. Многочлены $f(x), g(x) \in P[x]$ называются взаимно простыми, если их НОД равен единице.

1.6.9 Следствие. Многочлены $f(x), g(x) \in P[x]$ взаимно простые тогда и только тогда, когда существуют такие $u(x), v(x) \in P[x]$, что $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$

1.6.10 Теорема. *Пусть* $f(x), g(x), h(x) \in P[x]$. *Тогда*

1. Если f(x) взаимнопрост с $g(x)$ *и* $h(x)$, *то он взаимнопрост и с их произведением, т.е.* $(f(x), g(x)) = 1 \wedge (f(x), h(x)) = 1 \Rightarrow (f(x), g(x)\cdot h(x)) = 1.$

2. Если $(f(x), g(x)) = 1$ *и* $g(x)\cdot h(x) \vdots f(x)$, *то* $h(x) \vdots f(x)$.

3. Если $(f(x), g(x)) = 1$ *и* $h(x)$ *делится на каждый из них, то он делится и на их произведение.*

1.6.11 Определение. ОК многочленов $f(x), g(x) \in P[x]$ называется такой многочлен $h(x) \in P[x]$, что $h(x) \vdots f(x)$ и $h(x) \vdots g(x)$.

НОК многочленов $f(x), g(x) \in P[x]$ называется такое их ОК на которое делится любое общее кратное.

1.6.12 Теорема. *Пусть* $f(x), g(x) \in P[x]$ *и* $d(x) = f(x), g(x)$. *Тогда многочлен* $m(x) = \dfrac{f(x)\cdot g(x)}{d(x)}$ *является НОК многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$.

1.7 Многочлены неприводимые над данным полем

Пусть $f(x)$ многочлен над полем P, $c \in P$ и $c \neq 0$. Тогда $f(x) = c(c^{-1} f(x))$, т.е. $f(x)$ делится на любой многочлен нулевой степени. Кроме того, если сам $f(x)$ многочлен n степени то, он делится на многочлен n степени $c^{-1} f(x)$.

1.7.1 Определение. Многочлен $f(x)$ над полем P степени $n>0$ называется неприводимым над этим полем, если он не имеет в кольце многочленов $P[x]$ делителей степень которых была бы больше нуля и меньше n.

1.7.2 Теорема. 1. *Многочлен первой степени неприводим ни над каким полем.*

2. *Пусть поле S расширение поля P. Если многочлен $f(x)$ неприводим над полем S, то он неприводим над полем P.*

3. *Если многочлен $f(x)$ неприводим над полем P, то для любого $c \in P$, $cf(x)$ неприводим над полем P*, где $c \neq 0$.

1.7.3 Замечание. Многочлен может быть неприводим над одним полем и приводим над другим полем.

Пример. Многочлен $f(x) = x^2 + 1$ приводим над полем комплексных чисел. Поскольку $f(x) = (x - i)(x + i)$. Этот же многочлен неприводим над полем действительных чисел.

1.7.4 Теорема. *Пусть P(x) неприводимый многочлен над полем P. Тогда*

1. *Многочлен $f(x) \in P[x]$ или делится на p(x) или взаимопрост с ним.*

2. *Если произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)\, f(x) \ldots f_s(x)$ многочленов из кольца* $P[x]$ *делится на p(x), то один из сомножителей делится на p(x).*

1.7.5 Определение. Разложением многочлена $f(x) \in P[x]$ на неприводимые множители называется представление этого многочлена в виде $f(x) = ap_1(x) \ldots p_k(x)$, где $a \in P$, а все $p_i(x)$ неприводимые многочлены над полем P.

Каноническим разложением многочлена $f(x)$ назовем его представление $f(x) = ap_1^{\alpha_1}(x)\, p_2^{\alpha_2}(x) \ldots p_s^{\alpha_s}(x)$, где $p_i(x)$ попарно различные неприводимые многочлены над P со старшими коэффициентами равными 1, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ натуральные числа.

1.7.6 Теорема. *Для каждого многочлена $f(x)$ из кольца многочленов над полем P положительной степени существует разложение на неприводимые множители. Это разложение однозначно с точностью до по-*

рядка сомножителей и делителей единицы.

1.7.7 Следствие. Для любого многочлена $f(x)$ над полем P с положительной степенью существует одно и только одно с точностью до порядка сомножителей каноническое разложение.

1.8 Делимость многочленов, разложенных на неприводимые множители

1.8.1 Теорема. *Пусть* $f(x) \in P[x]$ *и* $f(x) = ap_1^{\alpha_1}(x)\, p_2^{\alpha_2}(x) \dots p_s^{\alpha_s}(x)$, *где все* $p_i(x)$ *неприводимые многочлены над* P, $\alpha_i \geq 0, a \in P$, *старшие коэффициенты в* $p_i(x)$ *равны* 1. *Пусть* $h(x) \in P[x]$ $f(x) \vdots h(x)$ *тогда и только тогда, когда* $h(x) = bp_1^{\xi_1}(x) \dots p_s^{\xi_2}(x),\ 0 \leq \xi_i \leq \alpha_i$.

1.8.2 Теорема. *Пусть* $f(x), g(x) \in P[x]$, $f(x) = ap_1^{\alpha_1}(x) \dots p_s^{\alpha_s}(x)$, $g(x) = ap_1^{\beta_1}(x) \dots p_s^{\beta_s}(x)$, *где разложение как в предыдущей теореме. Тогда*

1. $d(x) = p_1^{\gamma_1}(x) \dots p_s^{\gamma_s}(x)$, *где* $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$. *Это НОД* $f(x)$ *и* $g(x)$.
2. $m(x) = p_1^{\delta_1}(x) \dots p_s^{\delta_s}(x)$,*где* $\delta_i = \max\{\alpha_i, \delta_i\}$.*Это НОК* $f(x)$ *и* $g(x)$.

1.8.3 Пример. Найти НОД многочленов $f(x) = x^{1035} - 1$ и $g(x) = x^{985} - 1$.

Решение. Разложим каждый из этих многочленов на неприводимые множители над полем комплексных чисел. Для этого найдем корни многочленов. $f(x)$: $u_k = \cos\dfrac{2k\pi}{1035} + i\sin\dfrac{2k\pi}{1035}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 1034$. Множители имеют вид $x - u_k$.

$g(x)$: $v_l = \cos\dfrac{2l\pi}{985} + i\sin 985$, $l = 0, 1, 2, \dots, 984$. Множители имеют вид $x - v_l$.

НОД состоит из тех линейных множителей где $v_l = u_k$. Это значит, что $\dfrac{2l\pi}{985} = \dfrac{2k\pi}{1035}$, $\dfrac{l}{985} = \dfrac{k}{1035}$, т.е. $l = \dfrac{985k}{1035} = \dfrac{197k}{207}$

$k = 0, 207, 2 \exists 207, 3 \exists 207, 4 \exists 207$.

Отсюда получаем

$u_0 = \cos 0^0 + i\sin 0^0$,

$u_{207} = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$,

$u_{2\cdot 207} = \cos\dfrac{4\pi}{5} + i\sin\dfrac{4\pi}{5}$,

$u_{3\cdot 207} = \cos\dfrac{6\pi}{5} + i\sin\dfrac{6\pi}{5}$,

$$u_{4\cdot 207} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}.$$

Таким образом,

$$d(x) = (x-u_0)(x-u_{207})(x-u_{2\cdot 207})(x-u_{3\cdot 207})(x-u_{4\cdot 207}) = x^5 - 1.$$

Ответ: $d(x) = x^5 - 1.$

1.8.4 Задача. Найти НОД многочленов $f(x) = x^n - 1,\ g(x) = x^m - 1.$

Решение. Решение аналогично примеру 1.8.3 $d(x) = x^d - 1,$ $d = \text{НОД}(n,m).$

Ответ: $d(x) = x^d - 1,\ d = \text{НОД}(n,m).$

1.9 Производная

1.9.1Определение. Пусть $f(x)$ многочлен над полем P характеристики 0, где $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$. Производной многочлена $f(x)$ называется многочлен $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1 + 0.$

Поскольку характеристика поля P равна 0, то производная от многочлена n-ой ($n>0$) есть многочлен n–1 степени.

1.9.2 Теорема. *Пусть* $f(x),\ g(x) \in P[x]$. *Тогда*

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$
2. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$
3. $(f^k(x))' = kf^{k-1}(x)f'(x).$

1.9.3 Пусть $f(x)$ многочлен над полем P, $c \in P$. Воспользуемся несколько раз теоремой Безу

$$f(x) = (x-c)s_1(x) + f(c),$$
$$s_1(x) = (x-c)s_2(x) + s_1(c),$$
$$s_2(x) = (x-c)s_3(x) + s_2(c),$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$s_{n-2}(x) = (x-c)s_{n-1}(x) + s_{n-2}(c),$$
$$s_{n-1}(x) = (x-c)s_n(x) + s_{n-1}(c).$$

Считая, что степень многочлена $f(x)$ равна n. Мы получим n равенств. Учитывая, что $s_n(x)$ это многочлен нулевой степени, т.е. $s_n(x) = s_n(c)$. Умножим $s_k(x)$ на $(x-c)^k$ и сложим, то получим

$$f(x) = f(c) + s_1(c)(x-c) + s_2(c)(x-c)^2 + \dots + s_{n-1}(c)(x-c)^{n-1} + s_n(c)(x-c)^n.$$

Получили разложение многочлена $f(x)$ по степеням $(x-c)$.

1.9.4 Пример. Разложить по степеням $(x-2)$ многочлен $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1.$

	1	2	0	–1	–1
–2	1	0	0	–1	1
–2	1	–2	4	–9	
–2	1	–4	12		
–2	1	–6			
–2	1				

Решение. Воспользуемся несколько раз схемой Горнера.

$f(x)=1-9(x+2)+12(x+2)^2-6(x+2)^3+(x+2)^4.$

Ответ: $f(x)=1-9(x+2)+12(x+2)^2-6(x+2)^3+(x+2)^4.$

1.9.5 $f^{(k)}(c)=k!\,s_k(c).$

1.9.6 Пример. В примере 1.9.4 найти значение всех производных при $x=-2$.

Решение. $f'(-2)=9,\ f''(-2)=2\cdot 12=24,\ f'''(-2)=-6\cdot 3\cdot 2=-36,$ $f^{\text{iv}}(-2)=4\cdot 3\cdot 2=24.$

9.1.7 В заключение заметим, что $s_k(c)=\dfrac{f^k(c)}{k!}$. Следовательно $f(x)=f(c)+\dfrac{f'(c)}{1!}(x-c)+\dfrac{f''(c)}{2!}(x-c)+\ldots+\dfrac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$. Это есть формула Тейлора.

1.10 Кратные множители многочлена

1.10.1 Определение. Пусть $f(x)\in P[x]$, $p(x)$ неприводимый многочлен над этим полем. Если в каноническом разложении многочлена $f(x)$ многочлен $p(x)$ входит в k-ой степени, то он называется k-кратным множителем многочлена $f(x)$.

Другими словами $p(x)$ k-кратный множитель $f(x)$, если $f(x)\,\vdots\, p^k(x)$ $f(x)\,\not\vdots\, p^{k+1}(x)$.

Если $p(x)$ входит в разложение $f(x)$ один лишь раз, то $p(x)$ называется простым или однократным множителем.

1.10.2 Теорема. *Если $p(x)$ k-кратный $(k\ge 1)$ неприводимый множитель многочлена $f(x)$ над полем P, то он является k–1-кратным множителем производной этого многочлена. В частности, простой множитель многочлена $f(x)$ не входит в разложение производной.*

1.10.3 Следствие. Пусть $f(x)=ap_1^{\alpha_1}(x)\ldots p_s^{\alpha_s}(x)$ каноническое разложение над полем P. Тогда НОД $(f(x),\ f'(x))=p_1^{\alpha_1-1}(x)\,p_2^{\alpha_1-2}(x)\ldots p_s^{\alpha_s-1}(x).$

В частности, многочлен $f(x)$ тогда и только не содержит кратных множителей когда он взаимнопрост со своей производной.

1.10.4 Определение. Пусть $f(x) \in P[x], c$ его корень. Элемент c называется k-кратным корнем многочлена $f(x)$, если $f(x) \vdots (x-c)^k$ и $f(x) \not\vdots (x-c)^{k+1}$. Если k= 1, то корень называется простым.

1.10.5 Поскольку $x - c$ это неприводимый множитель над любым полем, то можно воспользоваться предыдущим результатом.

Следствие. Если c k-кратный корень многочлена $f(x)$, то ck–1-кратный корень его производной. В частности, простой корень многочлена $f(x)$ не является корнем его производной.

1.10.6 Следствие. Многочлен $f(x)$ тогда и только тогда не содержит кратных корней, когда он взаимнопрост со своей производной.

1.10.7 Пример. Найти кратность корня x_0= –2 у многочлена $f(x) = x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 12x - 8$.

Решение. По определению число x_0 является корнем кратности k у многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x - x_0)^k$, но не делится на $(x - x_0)^{k+1}$. Используем схему Горнера для последовательного деления $f(x)$ и получающихся частных на $(x + 2)$ до появления первого ненулевого остатка:

	1	6	11	2	–12	–8
–2	1	4	3	–4	–4	0
–2	1	2	–1	–2	0	
–2	1	0	–1	0		
–2	1	–2	3			

Кратность корня равна числу нулевых остатков. Действительно, расшифровка схемы дает

$$f(x) = (x+2)(x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4) = (x+2)(x+2)(x^3 + 2x^2 - x - 2) =$$
$$= (x+2)^2(x+2)(x^2 - 1) = (x+2)^3(x^2 - 1).$$

По теореме Безу́ $x^2 - 1$ не делится на $x + 2$ ибо остаток равен 3. Поэтому $x_0 = -2$ является корнем кратности 3.

Ответ: кратность корня $x_0 = -2$ равен трем.

1.11 Выделение кратных множителей

Пусть $f(x) = ap_1^{\alpha_1}(x) p_2^{\alpha_1}(x) \dots p_s^{\alpha_s}(x)$ каноническое разложение над полем P. Обозначим через $d(x) = (f(x), f'(x)),\ d(x) = p_1^{\alpha_1 - 1}(x) p_2^{\alpha_1 - 1}(x) \dots p_s^{\alpha_s - 1}(x)$.

1.11.1 Обозначим через $F_1(x)$ произведение всех однократных неприводимых множителей многочлена $f(x)$. Через $F_2(x)$ произведение всех двукратных неприводимых множителей многочлена $f(x)$ и т.д. Если $f(x)$ не имеет множителей k-кратной степени, то полагаем $F_k(x)=1$.

Пример. $f(x)=(x^3-1)(x^2-1)(x-1)$.

Имеем $F_1(x)=(x+1)(x^2+x+1)$, $F_2(x)=1$, $F_3(x)=x-1$.

1.11.2 Ясно, что если t это наибольшая кратность с которой входят множители в многочлен $f(x)$, то $f(x)=aF_1(x)F_2^2(x)\dots F_t^t(x)$. Следовательно, $d(x)=F_2(x)F_3^2(x)\dots F_t^{t-1}(x)$. Найдем НОД многочлена $d(x)$ и его производной. $d_1(x)=F_3(x)F_4^2(x)\dots F_t^{t-2}(x)$ и т.д.

Итак,
$$\begin{aligned}
f(x)&=aF_1(x)F_2^2(x)\,F_3^3(x)\dots F_t^t(x),\\
d(x)&=\qquad\quad F_2(x)\,F_3^2(x)\dots F_t^{t-1}(x),\\
d_1(x)&=\qquad\qquad\qquad F_3(x)\dots F_t^{t-2}(x),\\
&\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
d_{t-1}(x)&=\qquad\qquad\qquad\qquad F_t(x).
\end{aligned}$$

Обозначим
$$\begin{aligned}
g(x)&=\frac{f(x)}{d(x)}=aF_1(x)F_2(x)\,F_3(x)\dots F_t(x),\\
g_1(x)&=\frac{d(x)}{d_1(x)}=F_2(x)\,F_3(x)\dots F_t(x),\\
g_2(x)&=\frac{d(x)}{d_2(x)}=F_3(x)\dots F_t(x),\\
&\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
g_{t-1}(x)&=\frac{d_{t-2}(x)}{d_{t-1}(x)}=F_t(x).
\end{aligned}$$

Имеем $aF_1(x)=\dfrac{g(x)}{g_1(x)}$, $F_2(x)=\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$, … $F_{t-1}(x)=\dfrac{g_{t-2}(x)}{g_{t-1}(x)}$, $F_t(x)=g_{t-1}(x)$.

1.11.3 Пример. Выделить кратные множители многочлена $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$.

Решение. Имеем

$$d(x)=(f(x),f'(x))=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3,$$

$$d_1(x)=(d(x),d'(x))=(x+1)^2,$$

$$d_2(x)=(d_1(x),d_1'(x))=x+1,$$

$$d_3(x)=(d_2(x),d_2'(x))=1.$$

$$\frac{1}{5}f'(x)=x^4-6x^2-8x-3.$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^5-10x^3-20x^2-15x-4 & x^4-6x^2-8x-3 \\
\underline{x^5-6x^3-8x^2-3x} & x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\;x^4-6x^2-8x-3 & -4x^3-12x^2-12x-4 \\
\underline{x^4-3x^3+3x^2+x} & -\frac{1}{4}x+\frac{3}{4} \\
\quad -\;-3x^3-9x^2-9x-3 & \\
\quad \underline{-3x^3-9x^2-9x-3} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\;-4x^3-12x^2-12x-4 & 2x \\
\underline{-4x^3} & -2x^2-6x-6 \\
\quad -\;-12x^2 & \\
\quad \underline{-12x^2} & \\
\qquad -\;-12x & \\
\qquad \underline{-12x} & \\
\qquad\qquad -4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\;2x & -4 \\
\underline{2x} & -\frac{1}{2}x \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\;x^5-10x^3-20x^2-15x-4 & x^3+3x^2+3x+1 \\
\underline{x^5+3x^4+3x^3+x^2} & x-3x-4 \\
\quad -\;-3x^4-13x^3-21x^2-15x-4 & \\
\quad \underline{-3x^4-9x^3-9x^2-3x} & \\
\qquad -\;-4x^3-12x^3-12x-4 & \\
\qquad \underline{-4x^3-12x^2-12x-4} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Получим $g(x)=\dfrac{f(x)}{d(x)}=x^2-3x-4,$

$$g_1(x)=\frac{d(x)}{d_1(x)}=x+1,$$

$$g_2(x)=\frac{d_1(x)}{d_2(x)}=x+1,$$

$$g_3(x) = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = x+1.$$

$$F_1(x) = \frac{g(x)}{g_1(x)} = x-4,$$

$$F_2(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = 1,$$

$$F_3(x) = \frac{g_2(x)}{g_3(x)} = 1,$$

$$F_4(x) = g_3(x) = x+1.$$

Отсюда получаем $f(x) = (x-4)(x+1)^4$.

Ответ: $f(x) = (x-4)(x+1)^4$.

2 МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

2.1 Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел

2.1.1 Пример. $f(x) = x^2 - 2$ и $g(x) = x^2 + 1$ над полем рациональных чисел не имеют корней в этом поле.

$f(x)$ имеет корни в поле действительных чисел,

$g(x)$ имеет корни в поле комплексных чисел.

2.1.2 Определение. Поле P называется алгебраически замкнутым, если все корни любого многочлена над этим полем принадлежит этому полю.

Поле рациональных чисел и поле действительных чисел из примера 2.1.1 следовательно алгебраически незамкнутые.

2.1.3 Теорема. *Поле комплексных чисел алгебраически замкнутое. Другими словами, многочлен* $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_n z^n$, $n \geq 1$ *с комплексными коэффициентами имеет корни и все они лежит в поле комплексных чисел.*

2.2. Неприводимые многочлены над полем комплексных чисел

2.2.1 Теорема. *Неприводимыми над полем комплексных чисел являются многочлены первой степени и только они.*

2.2.2 Следствие. Для многочлена $f(x)$ $(n>0)$ существует однозначное разложение на множители.

2.2.3 Следствие. Многочлен *n*-ой степени имеет *n* корней, если каждый корень считать столько раз сколько его кратность.

2.2.4 Определение. Пусть $f(x)$ многочлен *n*-степени на полем *P*. Полем разложения многочлена $f(x)$ называется такое расширение *S* поля *P*, что многочлен $f(x)$ имеет в нем *n* корней. Считая корень столько раз какова его кратность.

2.2.5 Следствие. Поле комплексных чисел является полем разложения любого многочлена с числовыми коэффициентами.

2.2.6 Пример. Разложить на неприводимые множители над полем комплексных чисел многочлен $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

Решение. Имеем

$$f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^6-1}{x-1}=$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)\left(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)}{x-1}=$$

$$=(x+1)\left(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ответ:

$$f(x)=(x+1)\left(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

2.2.7 Формула Виета. Сравним многочлен $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}...+a_1x+a_0$ с его разложением на линейные множители $f(x)=a(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)...(x-c_n)$.

Имеем $a_n=a,$

$$a_{n-1}=-a(c_1+c_2+...+c_n),$$

$$a_{n-2}=a(c_1c_2+c_1c_3+...+c_1c_n+...+c_{n-1}c_n),$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$a_0=(-1)^n a c_1c_2c_3...c_n).$$

2.2.8 Пример. Найти многочлен $f(x)$ 4-ой степени, имеющий простые корни 2 и $-i$ и двукратный корень -1.

Решение.

$a_4 = 1,$

$a_3 = -1(2 + (-i) + (-1) + (-1)) = -(-i) = i,$

$a_2 = 1(2 \cdot (-i) + 2(-1) + (2(-1) + (-i)(-1) + (-i)(-1) + (-1)(-1)) = -3,$

$a_1 = -1(2 \cdot (-i)(-1) + 2(-i)(-1) + 2(-1)(-1) + (-i)(-1)(-1)) = -2 - 3i,$

$a_0 = (-1)^4\, 2 \cdot (-i)(-1)(-1) = -2i.$

$f(x) = x^4 + ix^3 - 3x^2 + (-2 - 3i)x - 2i.$

Ответ: $f(x) = x^4 + ix^3 - 3x^2 + (-2 - 3i)x - 2i.$

2.3 Неприводимые многочлены над полем действительных чисел

2.3.1 Теорема. *Пусть* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_1 x + a_0$ *многочлен с действительными коэффициентами. Если комплексное число* $c = a + bi$ *является корнем этого многочлена, то и сопряженное ему* $\overline{c} = a + bi$ *тоже является корнем этого многочлена.*

2.3.2 Теорема. *Неприводимыми над полем действительных чисел являются многочлены 1-ой степени и многочлены 2-ой степени с отрицательными дискриминантами.*

2.3.3 Пример. Построить многочлен минимальной степени над полем действительных чисел с корнями 2, $-i$, -1, -1.

Решение. Этот многочлен имеет еще один корень i. Отсюда

$f(x) = (x-2)(x+i)(x-i)(x+1)(x+1) = (x-2)(x^2+1)(x+1)^2 =$

$= (x-2)(x^2+1)(x^2+2x+1) = (x^3 - 2x^2 + x - 2)(x^2 + 2x + 1) =$

$= x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + x^3 - 2x^2 + x - 1 =$

$= x^5 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2.$

Ответ: $f(x) = x^5 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2.$

2.3.4 Следствие. Многочлен $f(x)$ над полем действительных чисел разлагается однозначно на множители следующим образом

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_k)(x^2 + p_1 x + g_2)\ldots(x^2 + p_l x + g_l),$$

где все c_i действительные числа, а во всех квадратных трехчленах дискриминанты отрицательны.

2.4 Уравнения третьей степени

2.4.1 Пусть дано уравнение третьей степени $y^3 - ay^2 + by + c = 0$ (1) с любыми комплексными коэффициентами. Заменяя в уравнении (1) неизвестное y новым известным x, связанным с y равенством $y = x - \frac{a}{3}$ (2), мы получим уравнение относительно неизвестной x, не содержащее, как легко проверить, квадрата этого неизвестного, т.е. уравнение вида $x^3 - px + g = 0$ (3).

$x_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{g}{2} + \sqrt{\frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{g}{2} - \sqrt{\frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, где $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{g}{2} + \sqrt{\frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$,

$\beta = \sqrt[3]{-\frac{g}{2} - \sqrt{\frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. Эта формула называется формулой Кардано.

Эти формулы дают три значения α и три значения β. Пару α и β нужно выбирать так чтобы $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$.

2.4.2Пусть α_1, будет любое из трех значений радикала α, а β_1 такой из трех значений радикала β, то $\alpha_1\beta_1 = -\frac{p}{3}$ и $\alpha_2\beta_2 = -\frac{p}{3}$, $\alpha_3\beta_3 = -\frac{p}{3}$. Тогда $\alpha_2 = \alpha_1\varepsilon$, $\beta_2 = \beta_1\varepsilon^2$, $\alpha_3 = \alpha_1\varepsilon^2$, $\beta_3 = \beta_1\varepsilon$, где $\beta^3 = 1$.

Таким образом, все три корня уравнения (3) могут быть записаны следующим образом:

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1,$$
$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2,$$
$$x_3 = \alpha_3 + \beta_3 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon,$$

где $\varepsilon^3 = 1$, т.е. $\varepsilon_0 = 1$,

$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2.4.5 Пример. Решить уравнение $y^3 + 3y^2 - 3y - 14 = 0$.

Решение. Подстановка $y = x - \frac{a}{3} = x - 1$приводит это уравнение к виду $x^3 - 6x - 9 = 0$. Здесь p = 6, g = 9, поэтому $\frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{4} > 0$, т.е. уравнение $x^3 - 6x - 9 = 0$ имеет один действительный и два сопряженных комплексных корня. По формуле Кардано $\alpha = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt[3]{8}}$, $\beta = \sqrt{\frac{9}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt[3]{1}}$.

Поэтому $\alpha_1 = 2, \beta_1 = 1,$ т.е. $x_1 = 3$. Два других корня найдем по формулам (4): $x_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отсюда следует, что корнями заданного уравнения служат числа $y = 2$, $y_2 = -\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_3 = -\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $y = 2$, $y_2 = -\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_3 = -\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.4.6 Пример. Решить уравнение. $x^3 + (3+6i)x^2 - (3-12i) - 5 + 6i = 0.$

Решение. Прежде всего перейти к уравнению, не содержащему неизвестной во второй степени. Для этого разложим многочлен, стоящий в левой части уравнения, по степеням $x + 1 + 2i$. Воспользуемся схемой Горнера:

	1	3 + 6*i*	–3 + 12*i*	–5 + 6*i*
–1 – 2*i*	1	2 + 4*i*	3 + 4*i*	–4*i*
–1 – 2*i*	1	1 + 2*i*	6	
–1 – 2*i*	1	0		
–1 – 2*i*	1			

После замены $x + 1 + 2i = y$ получим неполное кубическое уравнение $y^3 + 6y - 4i = 0$, которое будем решать уже по формулам Кардано: уравнение $y^3 + py + g = 0$ имеет корни $y_1 = \alpha_1 + \beta_1$, где $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{g}{2} + \sqrt{\frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$,

$\beta = \sqrt[3]{-\frac{g}{2} - \sqrt{\frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$,

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i.\ \beta_1 = -1 + i.$$

Отсюда $y_1 = 2i$, $y_2 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2 = -i(-1+\sqrt{3})$, $y_3 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon = -i(-1-\sqrt{3})$. Из соотношения $x = y - 1 - 2i$ получаем решения исходного уравнения $x_1 = -1$, $x_2 = -1 + i(-3+\sqrt{3})$, $x_3 = -1 + i(-3-\sqrt{3})$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -1 + i(-3+\sqrt{3})$, $x_3 = -1 + i(-3-\sqrt{3})$.

2.5 Исследование корней уравнения третьей степени с действительными коэффициентами

2.5.1 Теорема. *Пусть* $x^3 + px + g = 0$ *(1) уравнение с действительными коэффициентами и* $\Delta = \frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. *Тогда: (a) если* $\Delta > 0$, *то уравнение (1) имеет один действительный корень и два мнимых сопряженных; (b) если* $\Delta = 0$, *то корни уравнения (1) действительны и хотя бы один из них кратный; (c) если* $\Delta < 0$, *то все корни уравнения (1) действительны и различны.*

2.5.2 Пример. Решить уравнение $x^3 - 12x + 16 = 0$.

Решение. Здесь $p = -12$, $g = 16$, поэтому $\frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$. Отсюда следует $\alpha = \sqrt[3]{-8}$, т.е. $\alpha_1 = -2$. Поэтому $x_1 = -4$, $x_2 = x_3 = 2$.

Ответ: $x_1 = -4$, $x_2 = x_3 = 2$.

2.5.3 Пример. Решить уравнение $x^3 - 19x + 30 = 0$.

Решение. Здесь $p = -19$, $g = 30$. Поэтому $\frac{g^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{784}{27} < 0$.

Таким образом, если оставаться в области действительных чисел, формула Кардано к этому уравнению неприменима, хотя его корнями являются действительные числа 2, 3, и –5.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -5$.

2.6 Уравнения четвертой степени

2.6.1 Решение уравнения четвертой степени $y^4 + ay^3 + by^2 + d = 0$ с произвольными комплексными коэффициентами сводится к решению некоторого вспомогательного уравнения третьей степени. Достигается это следующим методом, принадлежащим Феррари.

Наше уравнение подстановкой $y = x - \frac{a}{4}$ приводится к виду $x^4 + px^2 + gx + r = 0$.

Затем левая часть этого уравнения следующим образом тождественно преобразуется при помощи вспомогательного параметра α:

$$x^4 + px^2 + gx + r = \left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 + gx + r - \frac{p^2}{4} - \alpha^2 - 2\alpha x^2 - p\alpha =$$

т.е.

$$= \left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha x^2 - gx + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right)\right];$$

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-\left[2\alpha x^2-gx+\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)\right]=0$$

Подберем теперь α так, чтобы многочлен, стоящий в квадратных скобках, стал полным квадратом. Для этого он должен иметь один двухкратный корень, т.е. должно иметь место равенство

$$g^2-4\cdot 2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)=0.$$

Это равенство является уравнением третьей степени относительно неизвестного α с комплексными коэффициентами. Пусть α_0 будет один из них. Тогда наше уравнение примет вид $\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\left(x-\frac{g}{4\alpha_0}\right)^2=0$, т.е. оно распадается на два квадратных уравнения.

$$\left[\begin{array}{l} x^2-\sqrt{2\alpha_0}\,x+\left(\dfrac{p}{2}+\alpha_0+\dfrac{g}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0,\\[2ex] x^2+\sqrt{2\alpha_0}\,x+\left(\dfrac{p}{2}+\alpha_0-\dfrac{g}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0.\end{array}\right.$$

2.6.2 Пример. Решить уравнение $x^4-x^3+3x^2-7x+4=0.$

Решение. Сделаем подстановку $x=y-\frac{-1}{4}=y+\frac{1}{4}.$ Имеем

$$x^4-x^3+3x^2-7x+4=\left(y+\frac{1}{4}\right)^4-\left(y+\frac{1}{4}\right)^3+3\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-7\left(y+\frac{1}{4}\right)+4=$$

$$=y^4+4\cdot y\cdot\frac{1}{4}+6y^2\cdot\frac{1}{16}+4y\cdot\frac{1}{64}+\frac{1}{256}-\left(y^3+3y^2\cdot\frac{1}{4}+3y\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)+$$

$$+3\left(y^2+2\cdot y\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)-7\left(y+\frac{1}{4}\right)+4=y^4+y^3+\frac{3}{8}y^2+\frac{1}{16}y+\frac{1}{256}-y^3-\frac{3}{4}y^2-$$

$$-\frac{3}{16}y-\frac{1}{64}+3y^2+\frac{3}{2}y+\frac{3}{16}-7y-\frac{7}{4}+4=y^4+\frac{21}{8}y^2-\frac{45}{8}y+\frac{621}{256}.$$

Итак, $y^4+\frac{21}{8}y^2-\frac{45}{8}y+\frac{621}{256}=0,\ p=\frac{21}{8},\ g=-\frac{45}{8},\ r=\frac{621}{256}.$

Составим кубическое уравнение

$$\left(\frac{45}{8}\right)^2-4\cdot 2\alpha\left(\alpha^2+\frac{21}{8}\alpha-\frac{621}{256}+\frac{21^2}{4\cdot 8^2}\right)=0,\text{т.е.}$$

$$\frac{2025}{64}-8\alpha\left(\alpha^2+\frac{21}{8}\alpha-\frac{621}{256}+\frac{441}{256}\right)=0,\ \text{т.е.}$$

$$\frac{2025}{64}-8\alpha^3-21\alpha^2-8\alpha\left(-\frac{160}{256}\right)=0 \text{ или } 8\alpha^3-21\alpha^2-\frac{180}{32}\alpha-\frac{2025}{64}=0.$$

Будем решать это кубическое уравнение. Сделаем подстановку $\alpha=\beta-\frac{21}{3\cdot 8}=\beta-\frac{7}{8}$. Имеем $\left(\beta-\frac{7}{8}\right)^3+\frac{21}{8}\left(\beta-\frac{7}{8}\right)^2-\frac{45}{64}\left(\beta-\frac{7}{8}\right)-\frac{2025}{512}=0.$
Отсюда получим

$\beta^3-\frac{21}{8}\beta^2+\frac{147}{64}\beta-\frac{343}{512}+\frac{21}{8}\beta^2-\frac{147}{32}\beta+\frac{1029}{512}-\frac{45}{64}\beta+\frac{315}{512}-\frac{2025}{512}=0$ или $\beta^3-3\beta-2=0$. Нам надо только один корень кубического уравнения и устно заметим, что $\beta_0=2$. Отсюда $\alpha_0=\beta_0-\frac{7}{8}=2-\frac{7}{8}=\frac{16-7}{8}=\frac{9}{8}$. Составим систему уравнений

$$\left[\begin{array}{l} y^2-\sqrt{2\cdot\frac{9}{8}}\,y+\left(\frac{21}{16}+\frac{9}{8}-\frac{45}{8\cdot 2\sqrt{2\cdot\frac{9}{8}}}\right)=0,\\[2ex] y^2+\sqrt{2\cdot\frac{9}{8}}\,y+\left(\frac{21}{16}+\frac{9}{8}+\frac{45}{8\cdot 2\sqrt{2\cdot\frac{9}{8}}}\right)=0.\end{array}\right.$$

Решаем первое уравнение системы $y^2-\frac{3}{2}y+\frac{39}{16}-\frac{45}{8\cdot 3}=0$, т.е. $y^2-\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}=0$ или $16y^2-24y+9=0$, Д = $24^2 - 4\cdot16\cdot9 = 0$.

$y_1=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$, $y_2=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$.

Решаем второе уравнение системы

$y^2+\sqrt{2\cdot\frac{9}{8}}y+\left(\frac{21}{16}+\frac{9}{8}+\frac{45}{8\cdot 3}\right)=0$, т.е. $y^2+\frac{3}{2}y+\frac{39}{16}+\frac{30}{16}=0$, или $y^2+\frac{3}{2}y+\frac{69}{16}=0$.

Итак, $16y^2+24y+69=0$, Д = $24^2 - 4\cdot16\cdot69 = 24(24–184) = 24(–160) =$ $= –8^2\cdot3\cdot20 = –8^2\cdot2^2\cdot15$, $\sqrt{Д}=16i\sqrt{15}$ $y_{3,4}=\frac{-24\pm 16i\sqrt{15}}{32}=-\frac{3}{4}\pm i\frac{\sqrt{15}}{2}.$

Итак, имеем $x_1 = y_1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,\ x_2 = y_2 + \frac{1}{4} = 1,$

$x_3 = y_3 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2},\ x_4 = y_4 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2}.$

Ответ: $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2},\ x_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2}.$

2.7 Отделение действительных корней

2.7.1 Пусть дана некоторая упорядоченная конечная система действительных чисел, отличная от нуля, например, 1, 3, –4, 1, –2, –8, –3, 4, 1.

Выпишем последовательно знаки этих чисел: +, +, –, +, –, –, –, +, +.

Мы видим, что в системе знаков четыре раза рядом противоположные знаки. Ввиду этого говорят в упорядоченной системе чисел имеет место четыре перемены знаков.

2.7.2 Рассмотрим теперь многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами, причем будем предполагать, что многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней, так как иначе мы могли бы его разделить на наибольший общий делитель с его производной. Конечная упорядоченная система отличных от нуля многочленов с действительными коэффициентами

$$f(x) = f_0(x_0),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_s(x) \qquad (1)$$

называется системой Штурма для многочлена $f(x)$, если выполняются следующие требования: 1) соседние многочлены системы не имеют общий корней. 2) Последний многочлен, $f_s(x)$, не имеет действительных корней. 3) Если α – действительный корень одного из промежуточных многочленов $f_k(x)$ системы (1), $1 \le k \le s-1$, то $f_{k-1}(\alpha)$ и $f_{k+1}(\alpha)$ имеют разные знаки. 4) Если α – действительный корень многочлена $f(x)$, то произведение $f(x)\ f_1(x)$ меняет знак с минус на плюс, когда x, возрастая, проходит через точку α.

2.7.3 Если действительное число c не является корнем данного многочлена $f(x)$, а (1) – система Штурма для этого многочлена, то возьмем систему действительных чисел $f(c),\ f_1(c),\ f_2(c),\ \dots,\ f_s(c)$, вычеркнем из нее все числа, равные нулю, и обозначим через $W(c)$ число перемен знаков в оставшейся системе: будем называть $W(c)$ числом перемен знаков в системе Штурма (1) многочлена $f(x)$ при $x = c$.

Справедлива следующая

Теорема Штурма. *Если действительные числа* a и b $a < b$, *не являются корнями многочлена* $f(x)$, *не имеющего кратных корней, то*

$W(a) \geq W(b)$ и разность $W(a) - W(b)$ *равна числу действительных корней многочлена* $f(x)$*, заключенных между* a *и* b.

2.7.4 Теорема. *Всякий многочлен* $f(x)$ *с действительными, коэффициентами, не имеющих кратных корней, обладает системой Штурма.*

2.7.5 Здесь изложим один метод построения системы Штурма. Положим $f_1(x) = f'(x)$. Делим затем $f(x)$ на $f_1(x)$ и остаток от этого деления, взятый с обратным знаком, принимаем за $f_2(x)$: $f(x) = f_1(x)g_1(x) - f_2(x)$.

Вообще, если многочлены $f_{k-1}(x)$ и $f_k(x)$ уже найдены, то $f_{k+1}(x)$ будет остаток от деления $f_{k-1}(x)$ на $f_k(x)$, взятый с обратным знаком:

$$f_{k-1}(x) = f_k(x) \cdot g_k(x) - f_{k+1}(x).$$

2.7.6 Пример. Определить число действительных корней у многочлена $h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$.

Решение. Применим метод Штурма к нашему многочлену. Мы не будем предварительно проверять, что $h(x)$ не имеет кратных корней, так как метод построения системы Штурма, одновременно служить для проверки взаимной простоты многочлена и его производной. Мы получим такую систему

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3,$$

$$h_1(x) = 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 16x - 7,$$

$$h_2(x) = 66x^3 - 150x^2 + 172x + 61,$$

$$h_3(x) = -464x^2 + 1135x + 723,$$

$$h_4(x) = -32599457x - 8486093,$$

$$h_5(x) = -1.$$

Определим знаки многочленов этой системы при $x = -\infty$ и $x = +\infty$, для чего, как было указано, следует смотреть лишь на знаки старших коэффициентов и на степень этих многочленов. Мы получим такую таблицу:

	$h(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	Число перемен знаков
–T	–	+	–	–	+	–	4
+T	+	+	+	–	–	–	1

Таким образом, при переходе x от –T до +T система Штурма теряет три перемены знаков, а поэтому многочлен $h(x)$имеет равно три действительных корня.

Ответ: три действительных корня.

2.7.7 Пример. Найти число действительных корней многочлена $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$, и такие целые границы между которыми каждый из этих корней расположен, причем не строить заранее график этого многочлена.

Решение. Система Штурма для многочлена $f(x)$ будет

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1,$

$f_1(x) = 3x^2 + 6x,$

$f_2(x) = 2x + 1,$

$f_3(x) = 1.$

Найдем число перемен знаков в этой системе при $x = -\infty$ и $x = +\infty$.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число перемен знаков
–T	–	+	–	+	3
+T	+	+	+	+	0

Многочлен $f(x)$ обладает, следовательно, тремя действительными корнями. Для более точного определения положения этих корней продолжим следующую таблицу:

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число перемен знаков
$x = -3$	–	+	–	+	3
$x = -2$	+	0	–	+	2
$x = -1$	+	–	–	+	2
$x = 0$	–	0	+	+	1
$x = 1$	+	+	+	+	0

Таким образом, система Штурма многочлена $f(x)$ теряет по одной перемене знаков при переходе x от –3 к –2, от –1 к 0 и от 0 к 1. Корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ этого многочлена удовлетворяют, следовательно неравенствам: $-3 < \alpha_1 < -2$, $-1 < \alpha_2 < 0$, $0 < \alpha_3 < 1$.

Ответ: многочлен $f(x)$ имеет три действительных корня $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $-3 < \alpha_1 < -2$, $-1 < \alpha_2 < 0$, $0 < \alpha_3 < 1$.

3 МНОГОЧЛЕНЫ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1 Кольцо многочленов от нескольких переменных

3.1.1 Определение. Пусть A область целостности. Присоединим к A последовательно переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуя таким образом кольцо состоящее из сумм $\sum a_{k_1, k_2, \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$.

Две такие суммы будем считать равными, если они отличаются разве лишь порядком следования множителей.

Полученное таким образом кольцо называется кольцом многочленов от n переменных над A и обозначается $\mathrm{A}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Элемент этого кольца называются многочленами от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3.1.2 Теорема. *Пусть $f(x_1, x_2, x_n)$ многочлен от n переменных над полем P характеристики 0. Если при любых $c_1, c_2, \ldots, c_n \in P$ $f(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$, то все коэффициенты многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равны нулю.*

3.1.3 Определение. Пусть $ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ какой-то член многочлена f. Число $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ называется степенью этого члена. Если у всех членов многочлена одна и также степень, то он называется однородным.

3.2 Лексикографическое упорядочение членов многочлена

Пример. $f = 2x_1^7 x_2^3 x_3^5 + 4x_1^7 x_2^6 x_3^4 - 5x_1^5 x_2^{19} - x_1^5 x_2^{19} x_3$.

$f = 4x_1^7 x_2^6 x_3^4 + 2x_1^7 x_2^3 x_3^5 - x_1^5 x_2^{19} x_3 - 5x_1^5 x_2^{19}$.

3.2.1 Определение. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{A}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ и $\varphi = ax_1^{k_1} ax_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, $\psi = bx_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}$ члены этого многочлена (они различны). Рассмотрим разность $k_i - l_i$, если первая отличная от нуля разность положительная, то будем говорить, что φ выше чем ψ.

Отношение φ выше чем ψ в $\mathrm{A}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ является линейной упорядоченностью.

Записывая члены многочлена, согласно этому порядку мы получаем лексикографическую запись.

Тот член многочлена, который при этом стоит на первом месте называется высшим членом многочлена.

3.2.2 Теорема. *Высший член произведения двух многочленов равен произведению их высших членов.*

3.3 Симметрические многочлены

3.3.1 Определение. *Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{A}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ называется симметрическим, если он не меняется ни при какой перестановке переменных.*

3.3.2 Теорема. *Множество симметрических многочленов из кольца $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ является подкольцом этого кольца.*

3.3.3 Определение. Следующие многочлены от n переменных называется элементарными симметрическими многочленами

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$\sigma_n = x_1 x_2 \dots\ x_n = \sigma_n(x_1, x_2, \dots,\ x_n)$.

3.3.4 Теорема. *Всякий многочлен $\varphi(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots, \sigma_n)$ над $\mathbf{A}$ рассматриваемый как многочлен от x_1, x_2, …, x_n является симметрическим.*

3.3.5 Теорема (Основная теорема о симметрических многочленах).

Симметрический многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над $\mathbf{A}$ может быть записан в виде многочлена $\varphi(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots, \sigma_n)$ с коэффициентами из $\mathbf{A}$.

3.3.6 Теорема. *Представление симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов однозначно.*

3.3.7 Пример. Выразить симметрический многочлен $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3$ через элементарные симметрические.

Решение. I способ. Элементарными симметрическими многочленами от трех переменных x_1, x_2, x_3 будут многочлены $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

Высшим членом многочлена f является $x_1^3 = x_1^3x_2^0x_3^0$ (его система показателей(3; 0; 0)). Такой же высший член имеет и многочлен $\sigma_1^{3-0}\cdot\sigma_2^{0-0}\cdot\sigma_3^0$. Найдем разность многочленов f и σ_1^3

$$f_1 = f - \sigma_1^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3 -$$
$$-(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2 + 3x_1x_3^2 + 3x_2x_3^2 + 3x_2x_3^2 + 6x_1x_2x_3) =$$
$$= -3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - 3x_1^2x_3 - 3x_1x_3^2 - 3x_2^2x_3 - 3x_2x_3^2 - 3x_1x_2x_3.$$

Высший член многочлена f_1 есть $-3x_1^2x_2 = -3x_1^2x_2^1x_3^0$ (его система показателей (2; 1; 0)). Такой же высший член имеет и многочлен

$$-3\sigma_1^{2-1}\cdot\sigma_2^{1-0}\cdot\sigma_3^0 = -3\sigma_1\sigma_2 = -3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$$
$$= -3(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_1x_2x_3).$$

Вычитая из f_1 многочлен $-3\sigma_1\sigma_2$ получаем $f_2 = f_1 + 3\sigma_1\sigma_2 = 6x_1x_2x_3 = 6\sigma_3$. Следовательно, $f - \sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 = 6\sigma_3$. Поэтому $f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3$.

II способ. Замечаем, что при I способе решения после вычитания уничтожается высший член многочлена. На каждом следующем шаге надо уничтожать высшие члены многочленов f_i, получающихся как разность. Ясно, что f выше получающихся f_i. Поэтому можно, не приводя вычислений, заранее предусмотреть произведения вида $\sigma_1^{\alpha_1}\cdot\sigma_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot\sigma_n^{\alpha_n}$, которые могут потребоваться для уничтожения всех получающихся высших членов многочлена f_i. При этом целесообразно руководствоваться следующими положениями:

1) если $u = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ – высший член симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$;

2) высший член u_i каждого многочлена f_i (получающегося после i-го вычитания) ниже всех предыдущих: $u_0 > u_1 > u_2 > \dots > u_{i-1} > u_i$;

3) если многочлен однородный, то суммарная степень любого его одночлена и любого вычитаемого из него (однородного) многочлена постоянны;

4) если $u = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ и $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$, то многочлен $a\sigma_1^{k_1-k_2}\cdot\sigma_2^{k_2-k_3}\cdot\dots\cdot\sigma_n^{k_{n-1}-k_n}\cdot\sigma_n^{k_n}$ имеет своим высшим членом u.

Исходя из этих соображений, для многочлена $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3$ составим таблицу

Высший член	Система показателей высшего члена	Произведение элементарных симметрических многочленов с соответствующим высшим членом
x_1^3	(3; 0; 0)	σ_1^3
$Ax_1^2x_2$	(2; 1; 0)	$A\sigma_1$____
$Bx_1x_2x_3$	(1; 1; 1)	$B\sigma_3$

Поскольку нет других невозрастающих последовательностей из трех целых неотрицательных чисел, сумма которых равна трем, то в выражении f через элементарные симметрические многочлены не может быть других слагаемых вида $a\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\sigma_3^{\alpha_3}$, и многочлен f можно представить в виде многочлена с неотрицательными коэффициентами от элементарных симметрических многочленов, а именно: $f = \sigma_1^3 + A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3$. Для нахождения A и B целесообразно использовать функциональное равенство левой и правой частей. При $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1$, $f(1,1,1) = 6$,а при $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$, $f(1,1,0) = 2$.

Поэтому получаем систему уравнений $\begin{cases} 3^3 + A\cdot 3\cdot 3 + B\cdot 1 = 6; \\ 2^3 + A\cdot 1\cdot 1 + B\cdot 0 = 2. \end{cases}$

Решаем: $A = -3$, $B = 6$. Следовательно,

$$x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2x_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3.$$

Ответ: $f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3$.

3.3.8 Пример. Выразить многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^5x_2^3x_3^2 + 3x_1^5x_2^2x_3^3 + 3x_1^3x_2^5x_3^2 + 3x_1^3x_2^2x_3^5 +$$
$$+3x_1^2x_2^5x_3^3 + 3x_1^2x_2^3x_3^5 - 5x_1^4x_2^2x_3^2 - 5x_1^2x_2^4x_3^2 - 5x_1^2x_2^2x_3^4.$$

через элементарные симметрические многочлены.

Решение. Видим, что многочлен f является суммой двух своих однородных компонент: $f = 3\varphi - 5\psi$, где

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^5x_2^3x_3^2 + x_1^5x_2^2x_3^3 + x_1^3x_2^5x_3^2 + x_1^3x_2^2x_3^5 + x_1^2x_2^5x_3^3 + x_1^2x_2^3x_3^5,$$

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1^4x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^4x_3^2 + x_1^2x_2^2x_3^4.$$

Выразим отдельно однородные многочлены φ и ψ через элементарны симметрические многочлены. Вынесем за скобки общие множители $x_1^2x_2^2x_3^2 = \sigma_3^2$. Итак $f = \sigma_3^2(3\varphi_1 - 5\psi_1)$, где $\varphi_1 = s(x_1^2x_2), \psi_1 = s(x_1^2)$. Системы показателей для φ_1 будут: (3; 1; 0), (2; 2; 0), (2; 1; 1). Поэтому $\varphi_1 = \sigma_1^2\sigma_2 + A\sigma_2^2 + B\sigma_1\sigma_3$.

Пусть $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Тогда $\sigma_1 = \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1, \varphi_1(1,1,1) = 6$. Получаем уравнение $6 = 27 + 9A + 3B$. Для получения второго уравнения положим $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Тогда $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0, \varphi(1,1,0) = 2$ и $2 = 4 + A$. Отсюда находим А = –2, $B = -1$. Значит, $\varphi_1 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$. Нетрудно посчитать, что $\psi_1 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Итак, $f = \sigma_3^2(3\sigma_1^2\sigma_2 - 6\sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_3 - 5\sigma_1^2 + 10\sigma_2)$.

Ответ: $f = \sigma_3^2(3\sigma_1^2\sigma_2 - 6\sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_3 - 5\sigma_1^2 + 10\sigma_2)$.

3.3.9 Пример. Вычислить значение многочлена

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3$$

от корней многочлена $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5ix + 2i$.

Решение. По теореме Виета для корней a,b,c многочлена $g(x)$ имеем соотношение $a + b + c = \frac{3}{2};\ ab + bc + ac = \frac{5i}{2};\ abc = -i.$ Следовательно, $\sigma_1(a,b,c) = \frac{3}{2};\ \sigma_2(a,b,c) = \frac{5i}{2};\ \sigma_3(a,b,c) = -i.$ Так как многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ симметрический, то его можно выразить через элементарные симметрические многочлены. Воспользуемся решением примера п. 3.3.7 $f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3$. Значит, $f(a,b,c) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\cdot\frac{5i}{2}\,\frac{3}{2} + 6(-i) = \frac{27}{8} - i\frac{69}{4}.$

Ответ: $\frac{27}{8} - i\frac{69}{4}$.

3.3.10 Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3 = -19; \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -6. \end{cases}$$

Решение. Замечаем, что левые части уравнений являются симметрическими многочленами от переменных x_1, x_2, x_3. Выразим их через элементарные симметрические:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2x_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+6\sigma_3;$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1+2x_2+2x_3=\sigma_1^2-2\sigma_2+2\sigma_1;$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\sigma_2.$$

Получаем систему уравнений с неизвестными $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$\begin{cases}\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+6\sigma_3=-19\\ \sigma_1^2-2\sigma_2+\sigma_1=11\\ \qquad\qquad \sigma_2=-6.\end{cases}$$

Находим теперь $\sigma_1=-1, \sigma_2=-6, \sigma_3=0.$ Так как выражение симметрических многочленов через элементарные единственно, то исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-1;\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-6.\\ x_1, x_2, x_3=0.\end{cases}$$

Полагая $x_1=0,$ получаем два решения: (0, –3, 2) и (0, 2, –3). Аналогично находим еще четыре решения: (–3, 0, 2), (2, 0, –3), (–3, 2, 0), (2, –3, 0).

Ответ: (0, –3, 2), (0, 2, –3), (–3, 0, 2), (2, 0, –3), (–3, 2, 0), (2, –3, 0).

3.4 Результант

3.4.1 Определение. Пусть $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ и $g(x)=b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+...+b_1x+b_0$ многочлены над алгебраически замкнутым полем P. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in P$ и $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in P$ корни многочленов $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Результатом многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется элемент $R(f,g)=a_n^k g(\alpha_1), g(a_2)...g(\alpha_n).$

3.4.2 Теорема. 1) *Результант многочленов* $R(f,g)=a_n^kb_n^k\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(\alpha_i-\beta_j).$

2) $R(f,g)=(-1)^{nk}R(g,f).$

3) $R(f,g)=0$ *тогда и только тогда, когда* $f(x)$ и $g(x)$ *имеют общий корень.*

3.4.3 Теорема. (Результант в форме Сильвестра).

$\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}$ *n строк*

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_1 & a_0 \\ b_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \dots & b_1 & b_0 & & & \\ & b_k & b_{k-1} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & b_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \dots & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \text{ строк}$$

3.4.4 Пример. При каком значении a многочлен $f(x)=x^3-ax+2$ и $g(x)=x^2+ax+2$ имеют общий корень.

Решение. Составим результант в форме Сильвестра.

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 2 \\ 1 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & a & a+2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ a & a+2 & -2 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ a & a+2 & -2 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2a & 0 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} a & a+2 & -2 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 2a \end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix} a & a+2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}=$$

$$=-4\begin{vmatrix} a+1 & a+1 & -a-1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}=-4(a+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}=$$

$$=-4(a+1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}=4(a+1)\begin{vmatrix} 2 & a-1 \\ a+1 & a+1 \end{vmatrix}=$$

$$=4(a+1)(a+1)\begin{vmatrix} 2 & a-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4(a+1)^2(2-a+1)=4(a+1)(3-a).$$

Отсюда получаем $4(a+1)(3-a)=0$, т.е. $a_1 = -1$, $a_2 = 3$.

Ответ: $a_1 = -1$, $a_2 = 3$.

3.5 Решение систем алгебраических задач

Рассмотрим решение системы $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ (*), где $f(x,y)$ и $g(x,y)$ многочлены над алгебраически замкнутым полем P.

Нас будет интересовать вопрос как свести решение такой системы к решению одного уравнения с одним неизвестным.

Запишем каждое из уравнений системы по убывающим степеням x

$$\begin{cases} a_n(y)x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + \ldots + a_1(y)x + a_0(y) = 0 \\ b_k(y)x^k + b_{k-1}(y)x^{k-1} + \ldots + b_1(y)x + b_0(y) = 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$R(y)=\left|\begin{array}{ccccccccc}
a_n(y) & a_{n-1}(y) & a_{n-2}(y) & \ldots & a_1(y) & a_0(y) & & & \\
 & a_n(y) & a_{n-2}(y) & \ldots & a_2(y) & a_1(y) & a_0(y) & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots. & & \ldots. & & \ldots \\
 & & a_n(y) & a_{n-1}(y) & \ldots & & \ldots & a_1(y) & a_0(y) \\
b_k(y) & b_{k-1}(y) & b_{k-1}(y) & \ldots & b_1(y) & b_0(y) & & & \\
 & b_k(y) & b_{k-1}(y) & \ldots & b_2(y) & b_1(y) & b_0(y) & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots. \\
 & & & b_k(y) & b_{k-1}(y) & & \ldots & b_1(y) & b_0(y)
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} k \text{ строк} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ строк}
\end{array}$$

3.5.1 Теорема. *Если* (α, β) *является решением системы* (*), то $R(\beta)=0$.

3.5.2 Пример. Решить систему

$$\begin{cases} y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0, \\ y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Перепишем нашу систему в виде

$$\begin{cases} 4x^2 + (-7y+13)x + (y^2 - 2y - 3) = 0, \\ 9x^2 + (-14y+28)x + (y^2 - 4y - 5) = 0. \end{cases}$$

Составим определитель

$$R(y)=\begin{vmatrix} 4 & -7y+13 & y^2-2y-3 & 0 \\ 0 & 4 & -7y+13 & y^2-2y-3 \\ 9 & -14y+28 & y^2-4y-5 & 0 \\ 0 & 9 & -14y+28 & y^2-4y-5 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & -7y+13 & y^2-2y-3 & 0 \\ 0 & 4 & -7y+13 & (y+1)(y-3) \\ 9 & -14y+28 & y^2-4y+5 & 0 \\ 0 & 9 & -14y+28 & (y+1)(y-5) \end{vmatrix}=$$

$$=(y+1)\begin{vmatrix} 4 & -7y+13 & y^2-2y-3 & 0 \\ 0 & 4 & -7y+13 & y-3 \\ 9 & -14y+28 & y^2-4y-5 & 0 \\ 0 & 9 & -14+28 & y-5 \end{vmatrix}=$$

$$=(y+1)\begin{vmatrix} 4 & -7y+13 & y^2-2y-3 & 0 \\ 0 & 4 & -7y+13 & y-3 \\ 1 & 2 & -y^2+1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -y+1 \end{vmatrix}=$$

$$=(y+1)\begin{vmatrix} 0 & -7y+5 & 5y^2-2y-7 & 0 \\ 0 & 4 & -7y+13 & y-3 \\ 1 & 2 & -y^2+5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -y+1 \end{vmatrix}=$$

$$=(y+1)\begin{vmatrix} -7y+5 & 5y^2-2y-7 & 0 \\ 4 & -7y+13 & y-3 \\ 1 & 2 & -y+1 \end{vmatrix}=$$

$$=(y+1)\begin{vmatrix} -7y+7 & 5y^2-2y-3 & 2(-y+1) \\ 4 & -7y+13 & y-3 \\ 1 & 2 & -y+1 \end{vmatrix}=$$

$$= (y^2-1)\begin{vmatrix} -7 & 5y+3 & -2 \\ 4 & -7y+13 & y-3 \\ 1 & 2 & -y+1 \end{vmatrix} = = (y^2-1)\begin{vmatrix} 0 & 5y+17 & -7y+5 \\ 0 & -7y+5 & 5y-7 \\ 1 & 2 & -y+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (y^2-1)\begin{vmatrix} 5y+17 & -7y+5 \\ -7y+5 & 5y-7 \end{vmatrix} =$$

$$(y^2-1)(5y+17)(5y-7)-(7y-5)^2 = (y^2-1)(25y^2-35y+85y-119-$$
$$-(49y^2-70y+25)) = (y^2-1)(-24y^2+120y-144) = -24(y-1)(y+1)(y^2-5y+6) =$$
$$= -24(y-1)(y+1)(y-3)(y-2),$$

Получаем $-24(y-1)(y+1)(y-3)(y-2)=0$. Отсюда имеем $y_1=1,\ y_2=-1,$ $y_3=2,\ y_4=3.$

1) $y_1=1$. Найдем *x*. Имеем систему $\begin{cases} 4x^2+6x-4=0 & \left\{-2;\dfrac{1}{2}\right\} \\ 9x^2+14x-8=0 & \left\{-2;\dfrac{4}{9}\right\} \end{cases}$ $\{-2\}$.

$2x^2+3x-2=0$

$Д=9+1=25\ x_{1,2}=\dfrac{-3\pm 5}{4},\ x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=-2.$

$9x^2+14x-8=0$

$Д=14^2+4\cdot 9\cdot 8=196+288=484=22^2,\ x_{1,2}=\dfrac{-14\pm 22}{18},\ x_1=\dfrac{8}{18}=\dfrac{4}{9}, x_2=-2.$

Имеем решение (–2;1).

2) $y=-1$. Соответствующая система $\begin{cases} 4x^2+20x=0 & \{-5;\ 0\} \\ 9x^2+42x=0 & \left\{-\dfrac{14}{3}, 0;\right\} \end{cases}$ $\{\ 0\ \}$.

Имеем решение (0; –1).

3) $y=2$. Соответствующая система $\begin{cases} 4x^2-x-3=0 & \left\{-\dfrac{3}{4};1\right\} \\ 9x^2-9=0 & \{-1;1\} \end{cases}$ $\{\ 1\ \}$.

$4x^2-x-2=0$

$Д=1+48=49=7^2,\ x_{1,2}=\dfrac{1\pm 7}{8},\ x_1=1,\ x_2=-\dfrac{3}{4}.$

Имеем решение (1;2).

4) $y = 3$. Соответствующая система $\begin{cases} 4x^2 - 8x = 0 & \{0;2\} \\ 9x^2 - 14x - 8 = 0 & \left\{-\dfrac{4}{9};2\right\} \end{cases}$ $\{\,2\,\}$.

$9x^2 - 14x - 8 = 0$

$Д = 196 + 36 \cdot 8 = 484 = 22^2$, $x_{1,2} = \dfrac{14 \pm 22}{18}$, $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{4}{9}$.

Имеем решение (2;3).

Ответ: (–2;1), (0; –1), (1;2),(2;3).

4 МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ

4.1 Рациональные корни многочлена

Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ a_1 x + a_0$ многочлен над полем рациональных чисел. Вопрос о корнях этого многочлена сводится к вопросу о корнях многочлена с целыми коэффициентами (после умножения на общий знаменатель).

4.1.1 Теорема. (Первая теорема о рациональных корнях многочлена).

Если несократимая дробь $\dfrac{p}{g}$, *является корнем многочлена* $f(x)$ *с целыми коэффициентами, то* p *является делителем свободного члена, а* g *делителем старшего коэффициента.*

4.1.2 Пример. Найти рациональные корни многочлена $f(x) = 2x^5 - 7x + 3$.

Решение. Составим таблицу

p	± 1	± 3
g	1	2

Подозрительные на корень являются числа $1, \dfrac{1}{2}, -1, -\dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{3}{2}, -3, -\dfrac{3}{2}$.

Ответ: Нет рациональных корней.

4.1.3 Теорема. (Вторая теорема о рациональных корнях многочлена).

Если несократимая дробь $\dfrac{p}{g}$ *является корнем многочлена* $f(x)$ *с целыми коэффициентами, то при любом целом* k $f(k) \vdots (p - kg)$.

4.1.4 Пример. Найти рациональные корни многочлена $f(x)=x^4+3x^3+4x^2+18x+18.$

Решение. Так как старший коэффициент многочлена $f(x)$ равен единице, то все его рациональные корни являются целыми и содержатся среди делителей свободного члене, т.е. среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18.$ Корень $f(x)$ не может быть положительным, ибо положительны все коэффициенты. Числа –1, –2, –3, –6, –9, –18 будем испытывать с помощью схемы Горнера:

	1	3	4	18	18
–1	1	2	2	16	$2\neq 0$
–2	1	1	2	14	$-10\neq 0$
–3	1	0	4	6	0

Число $x = -3$ является корнем многочлена $f(x)$. Остальные корни многочлена $f(x)$ являются корнями многочлена $f_1(x)=x^3+4x+6.$ Применяя к $f_1(x)$ критерий Эйзенштейна при $p = 2$, получим, что $f_1(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$, а значит и над $\mathbb{Q}$. Поэтому $f_1(x)$ рациональных корней иметь не может. Итак, многочлен $f(x)$ имеет единственный рациональный корень $x = -3$.

Ответ: $x = -3$.

4.1.5 Пример. Найти рациональные корни многочлена $g(x)=6x^4+17x^3-26x^2-37x+30.$

Решение. Старший коэффициент многочлена $g(x)$ отличен от единицы. Поэтому рациональные корни многочлена $g(x)$ будем искать в виде несократимых дробей $\frac{p}{g}$, где p делит свободного член, а g – старшего коэффициент $p\in\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30\}$, $g\in\{1, 2, 3, 6\}$.

Испытаем с помощью схемы Горнера несколько целых чисел.

	6	17	–26	–37	30
1	6	23	–3	–40	–10
–1	6	11	–37	0	30

Для отсевания чисел, которые не могут быть корнями, воспользуемся следующей теоремой: *если число* $\frac{p}{g}$ *является корнем многочлена* $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$, *то при любом* $k\in\mathbb{Z}$ *число* $\frac{f(k)}{p-kg}$ *является целым.*

Таким образом, если хотя бы одно из отношений $\dfrac{10}{p-g}$, $\dfrac{30}{p+g}$ окажется числом дробным, то дробь $\dfrac{p}{g}$ корнем многочлена $g(x)$ быть не может. Результаты проверки удобно заносить в таблицу: слева колонка возможных знаменателей дробей, вверху – строка возможных числителей. Клетка со знаком минус означает, что дробь отброшена. Сократимые дроби сразу следует отбросить.

	1	–1	2	–2	3	–3	5	–5	6	–6	10	–10	15	–15	30	–30
1	–	–	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	+	–	–	–	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	–	–	+	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Таким образом, рациональные корни многочлена $g(x)$ находятся среди чисел $2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$. Будем испытывать их с помощью схемы Горнера:

	6	17	–26	–37	30
2	6	29	32	27	$84 \neq 0$
$-\frac{3}{2}$	6	8	–38	20	0
$\frac{2}{3}$	6	12	–30	0	

Остальные корни удовлетворяют квадратному уравнению $6(x^2+2x-5)=0$. Но числа $-1 \pm \sqrt{6}$ иррациональны. Поэтому у многочлена $g(x)$ только однократные рациональные корни $x_1 = -\frac{3}{2}$ и $x_2 = \frac{3}{2}$.

Ответ: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

4.1.6 Пример. Найти рациональные корни многочлена $h(x) = x^5 + \frac{23}{3}x^4 + \frac{44}{3}x^3 - \frac{43}{3}x^2 - 59 - 30$.

Решение: Многочлен $h(x)$ имеет те же самые корни, что и многочлен $3h(x) = 3x^5 + 23x^4 + 44x^3 - 43x^2 - 177 - 30 \in \square[x]$. Рациональные корни этого многочлена будем искать в виде несократимых дробей $\frac{p}{g}$, где

$p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 9, \pm 10, \pm 15, \pm 18, \pm 30, \pm 45, \pm 90\}$, $g \in \{1, 3\}$. Испытаем числа ± 1, ± 2 по схеме Горнера

	3	23	44	–43	–177	–90
1	3	26	70	27	–150	–240
–1	3	20	24	–67	–110	20
2	3	29	102	161	145	200
–2	3	17	10	–63	–51	12

При $g = 1$ $\frac{20}{p+1} \in \mathbb{Z}$ только при p ± 3, –5, 4, –6, 9. Из них только $p = \pm 3$, p= –3, 4, –5, –6 дробь $\frac{20}{p+1}$ принимает целые значения. А так как $\frac{240}{-6-1} \notin \mathbb{Z}$ и $\frac{200}{-5-2} \notin \mathbb{Z}$, то числа –5 и –6 следует исключить. Для проверки по схеме Горнера остались только числа –3 и 4.

При $g = 3$ $\frac{20}{p+1} \in \mathbb{Z}$ лишь тогда, когда $p = \pm 1, \pm 2, -5$. А так как $\frac{12}{1+2\cdot 3} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{12}{2+2\cdot 3} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{200}{-1-2\cdot 3} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{200}{-5-2\cdot 3} \notin \mathbb{Z}$, то для проверки по схеме Горнера осталось число $-\frac{2}{3}$. Выполним проверку

	23	44	–43	–177	–90
–3	14	2	–49	–30	0
4	26	106	375	$\neq 0$	
$-\frac{2}{3}$	12	–6	–45	0	
–3	3	–15	0		

$x_1 = -3, x_2 = -\frac{2}{3}, x_1 = -3.$

Так как корни уравнения $x^2 + x - 5 = 0$ иррациональны, то многочлен имеет число –3 своим двукратным корнем и число $-\frac{2}{3}$ – однократным. Других рациональных корней нет.

Ответ: –3 – двукратный корень, $-\frac{2}{3}$ – однократный.

4.2 Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел

4.2.1 Лемма. Пусть $g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ и $h(x)=b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+...+b_1x+b_0$ многочлены с целыми коэффициентами $f(x)=g(x)h(x)=c_{n+k}x^{n+k}+c_{n+k-1}x^{n+k-1}+...+c_0$. Пусть далее p такое простое число, что не все a_iделятся на p, не все b_j делятся на p. $c_{n+k-1},...,c_0$ делятся на p. Тогда a_n не делятся на p, b_k не делятся на p все остальные a_ib_j делятся на p.

4.2.2 Теорема. *Пусть $f(x)$ многочлен с целыми коэффициентами приводимый над полем рациональных чисел. Тогда его можно разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.*

4.2.3 Следствие. (Критерий Эйзенштейна).

Пусть $f(x)$многочлен с целыми коэффициентами, если

1. старший коэффициент не делится на некоторое простое число p.
2. все остальные коэффициенты делятся на простое число p.
3. свободный член не делится на p^2, то $f(x)$ неприводим над полем рациональных чисел.

4.2.4 Пример. Доказать, что многочлен $f(x)=x^5-3x^4+6x^3+9x-3x-6$ неприводим над полем рациональных чисел.

Решение. Применим критерий Эйзенштейна $p = 3$.

4.2.5 Задача. Придумать пример, что это условие является достаточным, но не необходимым.

4.3 Алгебраические числа

4.3.1 Определение. Пусть P числовое поле. Число zназывается алгебраическим над полем P, если оно является корнем ненулевого многочлена над этим полем. Не алгебраические числа называются трансцендентными над данным полем.

Если $P = Q$, то просто будем говорить алгебраические и трансцендентные числа.

4.3.2 Пример. Показать, что число $z=\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}+2$ является алгебраическим.

Решение. Имеем $(z-2)^3=1-\sqrt{5}$. Далее $[(z-2)^3-1]^2=5$.

$f(x)=[(x-2)^3-1]^2=5,$ т.е.

$$f(x)=(x^3-6x^2+12x-9)^2-5=(x^3-6x^2+12x-9)(x^3-6x^2+12x-9)-5=$$
$$=x^6-12x^5+60x^4-162x^3+252x^2-216x+76.$$

Ответ: $f(x)=x^6-12x^5+60x^4-162x^3+252x^2-216x+76.$

4.3.3 Пример. Каждое комплексное число $z = a + b_i$ является алгебраическим над полем действительных чисел. Оно является корнем многочлена $f(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$.

4.3.4 Числа *e* и π трансцендентные, т.е. не существует многочлена *f*(*x*) с рациональными коэффициентами корнем которого является *e* и π.

4.3.5 Теорема. *Пусть z алгебраические число над полем P. Существует единственный неприводимый над P многочлен p(x) со старшим коэффициентом равным единице корнем которого является z. Любой многочлен f(x) на P корнем которого является z делится на p(x).*

4.3.6 Определение. Степенью алгебраического числа *z* называется степень того неприводимого многочлена корнем которого является это число. Сам этот многочлен со старшим коэффициентом равным единице называется минимальным многочленом этого числа.

4.4 Простое расширение

4.4.1 Теорема. Пусть P – поле, z – число, $P(z)$ множество всевозможных отношений вида $\dfrac{f(z)}{g(z)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ многочлены над полем P, $g(z) \neq 0$. $P(z)$ – это поле. Это минимальное поле, содержащее P и z.

4.4.2 Определение. Поле $P(z)$ называется простым расширением поля P с помощью элемента z.

4.5 Простое алгебраическое расширение

4.5.1 Определение. Если z – алгебраическое число над полем P, то $P(z)$ называется простым алгебраическим расширением поля P.

4.5.2 Например. Пусть $P = Q$ поле рациональных чисел, число $z = \sqrt{3}$, z – корень многочлена $f(x) = x^2 - 3$.

$$\frac{a_k(\sqrt{3})^k + a_{k-1}(\sqrt{3})^{k-1} + ... + a_1\sqrt{3} + a_0}{b_l(\sqrt{3})^l + b_{l-1}(\sqrt{3})^{l-1} + ... + b_1\sqrt{3} + b_0} = \frac{a + b\sqrt{3}}{c + d\sqrt{3}} = A + B\sqrt{3} = h(\sqrt{3}).$$

Поле $Q(\sqrt{3})$ состоит из чисел вида $A + B\sqrt{3} = h(\sqrt{3})$, где A и B рациональные числа.

4.5.3 Теорема. (Об уничтожении иррациональности в знаменателе).

Пусть z – алгебраическое число над полем P. Тогда простое алгебраическое расширение $P(z)$ состоит из чисел вида $t = h(z)$, где *$h(z)$ – многочлен над полем P.*

4.5.4 Пример. Доказать, что $z = \sqrt[3]{2}$ является алгебраическим числом третьей степени над полем рациональных чисел.

Решение. Заметим, что $z = \sqrt[3]{2}$ – корень многочлена $f(x) = x^3 - 2$. Это означает, что $z = \sqrt[3]{2}$ является алгебраическим элементом над Q степени не выше третьей. К многочлену $f(x)$ применим критерий Эйзенштейна при $p = 2$. Получим, что $f(x)$ неприводим над Z и, следовательно, над Q. Пусть $t(x) \in Q[x]$ – минимальный многочлен числа $\sqrt[3]{2}$. Так как $f(x)$ неприводим над полем Q и многочлен $f(x)$ и $t(x)$ не взаимно просты (у них есть общий корень), то $t(x)$ делится на $f(x)$ по свойству делимости на неприводимый многочлен. А так как степень $t(x)$ не больше степени $f(x)$, то $f(x)$ и $t(x)$ ассоциированы, т.е. $t(x)$ также имеет третью степень.

4.5.5 Пример. Показать, что $Q(\sqrt{2})$ и $Q(i)$ изоморфны как векторные пространства над Q, но не изоморфны как поля.

Решение. Поскольку степени алгебраичности числа $\sqrt{2}$, как и числа i (над Q), равны двум, то $Q(\sqrt{2})$ и $Q(i)$ можно рассматривать как двумерные векторные пространства над Q. Например, $Q(\sqrt{2})=\{a\cdot 1+b\sqrt{2}\ /\ a,b\in Q\}$, $Q(i)=\{a\cdot 1+b\cdot i\ /\ a,b\in Q\}$. Изоморфизм векторных пространств $f:Q(\sqrt{2})\to Q(i)$ можно задать, например, формулой $f(a+b\sqrt{2})=a+bi$.

Покажем теперь, что $Q(\sqrt{2})$ и $Q(i)$ как поля не изоморфны. Предположим противное, т.е. что существует биекция $\varphi:Q(\sqrt{2})\to Q(i)$, которая не нарушается операциями сложения и умножения. По свойствам изоморфизма $\varphi(1)=1$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(\alpha-\beta)=\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)$. Следовательно, если $n\in N$, то $\varphi(n)=\varphi(\underbrace{1+1+...+1}_{n\text{ раз}})=\underbrace{\varphi(1)+\varphi(1)+...+\varphi(1)}_{n\text{ раз}}=\underbrace{1+1+...+1}_{n\text{ раз}}=n$.

Если $m\in Z$, то $m=n_1-n_2$ для некоторых натуральных n_1 и n_2 и $\varphi(m)=\varphi(n_1-n_2)=\varphi(n_1)-\varphi(n_2)=n_1-n_2=m$. Если теперь $x\in Q$, то найдется такое натуральное n, что $nx=m\in Z$. Тогда $m=\varphi(m)=\varphi(nx)=\varphi(n)\varphi(x)=n\varphi(x)$, откуда $\varphi(x)=\dfrac{m}{n}=x$. Таким образом, при биекции φ рациональные числа отображаются на себя. Пусть $\varphi(\sqrt{2})=x+iy$, $x,y\in Q$. Тогда $2=\varphi(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})=(\varphi(\sqrt{2}))^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$. Отсюда $2xy=0$. Не может быть $x=0$, так как в этом случае $2=-y^2$. Если же $y=0$, то $2=x^2$, что невозможно, ибо нет рационального числа, квадрат которого равнялся бы двум.

Итак, предположение о существовании изоморфизма полей φ приводит к противоречию.

4.5.6 Пример. Освободится от иррациональности в знаменателе дроби $t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2}$.

Решение. Очевидно, что $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2$ есть значение многочлена $f(x)=x^2+x-2\in Q[x]$ при $x=\sqrt[3]{2}$. Минимальным многочленом для $\sqrt[3]{2}$ является многочлен $p(x)=x^3-2$. Многочлены $p(x)$ и $f(x)$ взаимно просты, ибо $f(x)$ не делится на $p(x)$, а $p(x)$ неприводим (над Q). Поэтому существуют такие многочлены $u(x)v(x)$, что $f(x)u(x)+p(x)v(x)=1$. Применим к многочленам $p(x)$ и $f(x)$ алгоритм Евклида, получим $p(x)=f(x)(x-1)+3x-4$, $f(x)=(3x-4)\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{7}{9}\right)+\dfrac{10}{9}$.

Отсюда $\dfrac{10}{9}=f(x)\left[1+\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{7}{9}\right)(x-1)\right]+p(x)\left(-\dfrac{x}{3}-\dfrac{7}{9}\right)$.

Таким образом, $\frac{10}{9}=f(x)\left(\frac{x^2}{3}+\frac{4x}{9}+\frac{2}{9}\right)+p(x)\left(-\frac{x}{3}-\frac{7}{9}\right)$ и при $x=\sqrt[3]{2}$ (учитывая, что $p(\sqrt[3]{2})=0$): $\left(\frac{10}{9}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2\right)\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}+\frac{4\sqrt[3]{2}}{9}+\frac{2}{9}\right)$, откуда $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2)(3\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+2)=10$. Поэтому, умножая числитель и знаменатель на $3\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+2$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2}=\frac{3\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+2}{10}=\frac{3}{10}\sqrt[3]{4}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{2}+\frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{3}{10}\sqrt[3]{4}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{2}+\frac{1}{5}$.

4.5.7 Пример. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $t=\frac{1}{\alpha^4-7\alpha^2-12\alpha-7}$, где α – корень многочлена $t(x)=x^3-2x^2-4x-2$.

Решение. Выражение, стоящее в знаменателе дроби, является значением многочлена $g(x)=x^4-7x^2-12x-7$ при $x=\alpha$. Применим к многочленам $g(x)$ и $t(x)$ алгоритм Евклида: $g(x)=t(x)(x+2)+r(x)$, $r(x)=x^2-2x-3$, $t(x)=r(x)\cdot x-(x+2)$, $r(x)=(x+2)(x-4)+5$.

При $x=\alpha$, $t(\alpha)=0$. Следовательно, $g(\alpha)=t(\alpha)(\alpha+2)+r(\alpha)$, $\alpha+2=r(\alpha)\cdot\alpha$, $r(\alpha)=(\alpha+2)(\alpha-4)+5$. Выразим 5 через $r(\alpha)$: $5=r(\alpha)-(\alpha+2)(\alpha-4)=r(\alpha)-r(\alpha)\alpha(\alpha-4)=r(\alpha)(1+4\alpha-\alpha^2)$. Тогда

$$\frac{1}{g(\alpha)}=\frac{1}{r(\alpha)}=\frac{1+4\alpha-\alpha^2}{r(\alpha)(1+4\alpha-\alpha^2)}=\frac{1+4\alpha-\alpha^2}{5}=-\frac{1}{5}\alpha^2+\frac{4}{5}\alpha+\frac{1}{5}.$$

Ответ: $-\frac{1}{5}\alpha^2+\frac{4}{5}\alpha+\frac{1}{5}$.

4.6 Трансцендентные расширения

4.6.1 Определение. Если z – трансцендентное число над полем P, то $P(z)$ называется трансцендентным расширением.

4.6.2 Теорема. *Каждое число t из простого трансцендентного расширения $P(z)$ можно представить в виде $t=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ взаимно простые, а старший коэффициент у многочлена $\psi(z)$ равен единице. Такое представление единственное.*

4.7 Повторное расширение

4.7.1 Теорема. *Пусть u и v – алгебраические числа над полем P, S = P(v), T = S(v). Тогда существует такое число z, T = P(z).*

4.7.2 Задача. Пусть Q есть поле рациональных чисел. Рассмотрим поле $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$. Найти какой-либо примитивный элемент.

Решение. Это расширение является простым алгебраическим расширением поля всех рациональных чисел Q. Найдем какой-нибудь примитивный элемент этого расширения (мы говорим «какой-нибудь», ибо очевидно, каждое простое алгебраическое расширение обладает бесконечным количеством различных примитивных элементов).

В качестве искомого примитивного элемента можно взять число $\sqrt{2}+c\sqrt{5}$, c есть любое рациональное число, такое, что $c\neq\dfrac{\sqrt{2}-u'}{v'-\sqrt{5}}$, где u' – число, сопряженное с $\sqrt{2}$ и v' – число сопряженное с $\sqrt{5}$ относительно поля всех рациональных чисел и отличное от $\sqrt{5}$. Так как $\sqrt{2}$ есть корень неприводимого многочлена над полем всех рациональных чисел x^2-2, а $\sqrt{5}$ есть корень неприводимого многочлена над полем всех рациональных чисел x^2-5, то u' равняется $\sqrt{2}$ или $-\sqrt{2}$, а v' равняется $-\sqrt{5}$. Таким образом, для c получим условия: $c\neq 0$ $c\neq\dfrac{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}{(-\sqrt{5})-\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, т.е. в качестве c можно взять любое отличное от нуля рациональное число, например $c = 1$.

Итак, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ это примитивный элемент простого расширения $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$.

Ответ: $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

4.7.3 Пример. Проверить, что кратное расширение поля рациональных чисел $Q(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2})$ является простым алгебраическим расширением. Найти какой-нибудь примитивный элемент расширения.

Решение. Следуя доказательству теоремы о простоте составного алгебраического расширения поля, примитивный элемент расширения можно искать в виде $t=\sqrt{3}+c\sqrt[3]{2}$, где c – произвольное рациональное число, отличное от чисел 0, $\dfrac{\alpha_2-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}-\beta_2}$, $\dfrac{\alpha_3-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}-\beta_3}$. Здесь α_2 – число, сопряженное с $\sqrt{3}$, β_2 и β_3 – числа сопряженные с $\sqrt[3]{2}$ относительно поля рациональных чисел, т.е. α_2– корень многочлена x^2-3, отличный от $\sqrt{3}$, а β_2 и β_3 –

корни многочлена x^2-5, отличные от $\sqrt[3]{2}$. Имеем $\alpha_2=-\sqrt{3}$, $\beta_2=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\beta_3=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Для c, таким образом, получаем условия: $c\neq 0$, $c\neq\dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=-\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt[3]{2}}$; $c\neq\dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=-\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt[3]{2}}$.

В качестве c можно взять любое отличное от нуля рациональное число. При $c = 1$, например $t=\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$. Поле $Q(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2})$ как векторное пространство над Q шестимерно ибо является последовательным конечномерным расширением: $Q\sqrt{3}$ над полем Q двумерно и $Q(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2})$ над $Q(\sqrt{3})$ трехмерно. Остается проверить, что $Q(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})$ над Q также шестимерно. Для проверки построим для $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ минимальный многочлен. Пусть $\alpha_1=\sqrt{3}$ и $\beta_1=\sqrt[3]{2}$. Составим всевозможные суммы $\alpha_i+\beta_i$ (их шесть) и построим многочлен, корнями которого эти суммы являются: $f(x)=(x-\alpha_1-\beta_1)(x-\alpha_1-\beta_2)(x-\alpha_1-\beta_3)(x-\alpha_2-\beta_1)(x-\alpha_2-\beta_2)(x-\alpha_2-\beta_3)$. При раскрытии скобок используем формулы Виета: $\alpha_1+\alpha_2=0,\ \alpha_1\alpha_2=-3$, $\beta_1\beta_2\beta_3=2,\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3=0$.

Перемножим первые три скобки, а затем три вторые. Тогда

$$f(x)=[(x-\alpha_1)^3-2]\cdot[(x-\alpha_2)^3-2]=[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)]^3-2[(x-\alpha_1)^3+(x-\alpha_2)^3]+$$
$$+4==(x^2-3)^3-2(2x-\alpha_1-\alpha_2)\cdot[(x-\alpha_1)^2+(x-\alpha_2)^2--(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)]+$$
$$+4=(x^2-3)^3-4x(x^2+9)+4=x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23.$$

Многочлен $f(x)$ неприводим над полем рациональных чисел, ибо непосредственная проверка показывает, что из шести его линейных множителей никакие два и никакие три в произведении не дают многочлен с рациональными коэффициентами. Итак, $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ есть алгебраическое число шестой степени, содержащееся в шестимерном расширении $Q(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2})$. Поэтому $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ является примитивным элементом расширения.

Ответ: примитивный элемент $t=\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$.

4.7.4 Пример. Найти какой-либо примитивный элемент расширения поля рациональных чисел с помощью элементов $1+\sqrt{3}$ и $5+\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$.

Решение. Так как $\alpha=1+\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3})$, то $Q(\alpha)\in Q(\sqrt{3})$. Но $\sqrt{3}=\alpha-1\in Q(\alpha)$, и поэтому $Q(\sqrt{3})\in Q(\alpha)$. Отсюда $Q(1+\sqrt{3})=Q(\sqrt{3})$.

Аналогично, поскольку $\beta = \sqrt[3]{2} - \sqrt{3} + 5 \in Q(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2})$, то $Q(\sqrt{3})(\beta) \subset Q(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2})$. А так как $\sqrt[3]{2} = \beta + \sqrt{3} - 5 \in Q(\sqrt{3})(\beta)$, то $Q(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2}) \subset Q(\sqrt{3})(\beta)$. Следовательно,

$$Q(\sqrt{3})(\sqrt[3]{2}) = Q(\sqrt{3})(\beta) = Q(1+\sqrt{3})(5+\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}).$$

Используя результаты п. 4.7.3 в качестве примитивного элемента расширения можно взять элемент $\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$.

Ответ: $t = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$ примитивный элемент.

4.7.5 Пример. Является ли алгебраическое число $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$?

Решение. I Способ. Число $t = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ алгебраическое как сумма двух корней многочленов $x^2 - 2$ и $x^2 - 3$. Над полем $Q(t)$ число $\sqrt[5]{t}$ является алгебраическим элементом как корень многочлена $x^5 - \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$. Поэтому поле $Q(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}})$, являясь повторным алгебраическим расширением поля рациональных чисел, состоит из алгебраических чисел. Значит, число $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$ является алгебраическим.

II Способ. Заметив, что если α– корень многочлена $f(x)$, то $\sqrt[n]{\alpha}$ – корень многочлена $f(\sqrt[n]{\alpha})$, можно построить многочлен, корнем которого является $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$. Им будет (см. п. 4.7.3) многочлен $x^{30} - 9x^{20} - 4x^{15} + 27x^{10} - 36x^5 - 23$.

4.7.6 Пример. Освободиться от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

Решение. I. Способ. Поиски минимального многочлена для знаменателя приводят к громоздкими выкладкам. Будем искать множитель, рационализирующий знаменатель, с помощью метода неопределенных коэффициентов. Так как $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \in Q(\sqrt{2})(\sqrt{3})$, и базис $Q(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ над Q состоит из чисел $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$, то этот множитель будем искать в виде $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, где $a, b, c, d \in Q$. Из условия $(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}) = f$, где f – некоторое (отличное от нуля рациональное число) получаем систему

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 3d = 0, \\ a + 2b + 2c + 2d = 0, \\ a + b + c + 2d = 0, \\ 2a + 2b + 3c + 6d = f. \end{cases}$$

Найдем какое-нибудь рациональное решение первых трех уравнений системы u, подставив в четвертое, определим f. При $d = 1$, будем иметь $c = -1$, $b = 1$, $a = -2$ и $f = 1$. Поэтому

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = -2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

II Способ. В данном примере освободиться от иррациональности можно и «по школьному»:

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+2)^2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2.$$

Ответ: $-2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}.$

4.8 Поле алгебраических чисел

4.8.1 Теорема. *Множество чисел алгебраических над полем P образует поле.*

4.8.2 Теорема. *Поле алгебраических чисел над P алгебраически замкнуто.*

4.9 Разрешимость уравнений в квадратных радикалах

4.9.1 Пример. Пусть Q – поле рациональных чисел, $Q(\sqrt{3})$ простое расширение. Это простое алгебраическое расширение второй степени и каждое число этого расширения имеет вид $a+b\sqrt{3}$, где $a, b \in Q$.

4.9.2 Определение. Пусть P – числовое поле, $\alpha \notin P$, $\alpha^2 \in P$. Тогда $P(\alpha)$ – простое алгебраическое расширение называется квадратичным расширением поля P.

4.9.3 Мы можем к полю $P(\alpha)$ присоединить число β, где $\beta \notin P(\alpha)$, $\beta^2 \in P(\alpha)$. Тогда получим второе квадратичное расширение.

Например, к $Q(\sqrt{3})$ присоединим $\sqrt{\sqrt{3}-2}$ получим $Q(\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}-2})$.

Каждое число поля $P(\alpha)$ имеет вид $a+b\alpha$, где $a, b \in P$.

4.9.4 Определение. Пусть $f(x)=0$ алгебраическое уравнение, где $f(x)$ многочлен над полем P. Будем говорить, что это уравнение разрешимо в квадратных радикалах над (относительно) P, если все его корни принадлежат какому-то k-ому квадратичному расширению поля P.

Например. 1. Квадратное уравнение. 2. Биквадратное уравнение.

4.9.5 Теорема. *Пусть* $x^3+px^2+gx+r=0$ *кубическое уравнение, где* $p, g, r \in P$. *Это уравнение разрешимо в квадратных радикалах тогда и только тогда, когда один из его корней принадлежит* P.

4.9.6 Следствие. Если уравнение $x^3 + px^2 + gx + r = 0$ с рациональными коэффициентами разрешимо в квадратных радикалах, то оно имеет рациональный корень.

4.9.7 Пример. Разрешимо ли в квадратных радикалах уравнение $x^3 + 3x^2 + 12x + 6 = 0$?

Решение. Многочлен $x^3 + 3x^2 + 12x + 6 = 0$ по критерию Эйзенштейна неприводим над *Z*, а значит и над *Q*. Следовательно, данное уравнение разрешимо в квадратных радикалах.

Ответ: неразрешимо.

4.9.8 Пример. Разрешимо ли в квадратных радикалах уравнение $x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$?

Решение. Проверим, имеет ли данное уравнение хотя бы один радикальный корень. Для этого испытаем по схеме Горнера все делители свободного члена, учитывая, что все рациональные корни уравнения целые:

	1	2	1	–2
1	1	3	4	$2 \neq 0$
–1	1	1	0	$-2 \neq 0$
2	1	4	9	$16 \neq 0$
–2	1	0	1	$-4 \neq 0$

Таким образом, рациональных корней уравнение не имеет, следовательно, оно неразрешимо в квадратных радикалах.

4.9.9 Пример. Разрешимо ли в квадратных радикалах уравнение $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2 = 0.$

Решение. Найдем кубическую резольвенту уравнения

$$(x^2)^2 + 2x^2x + x^2 = -x^2 + 2;$$
$$(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x)y + y^2 = 2(x^2 + x)y + y^2 - x^2 + 2;$$
$$(x^2 + x + y)^2 = x^2(2y - 1) + 2yx + y^2 + 2.$$

Получаем $y^2 - (2y - 1)(y^2 + 2) = 0$ или после упрощения $y^3 - y^2 - 2y - 1 = 0$. Вычисление резольвента не имеет рациональных корней, так как числа ± 1 ей не удовлетворяют, а другие числа не могут быть ее рациональными корнями. Поэтому по критерию разрешимости в квадратных радикалах исходное уравнение неразрешимо в квадратных радикалах.

Ответ: неразрешимо.

4.10 Три классические задачи на построение

4.10.1 1. Каждая задача на построение сводится к построению какого-то числа исходя из каких-то данных чисел.

2. Если имеется несколько чисел, то мы можем построить сумму, разность, произведение и частное от деления, т.е. любое число из поля, порожденного этими числами.

3. Если имеется число a, то с помощью циркуля и линейки можно построить $\sqrt{a}$.

Таким образом, с помощью циркуля и линейки можно строить квадратичные расширения данного поля P.

4.10.2 Теорема. *Пустьа, b, c, ..., tконечное множество чисел. P – порожденное ими поле. Тогда любое число* $u \in P(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$, *т.е. и принадлежит какому-то k-ому квадратичному расширению и может быть построено с помощью циркуля и линейки исходя из данных чисел.*

4.10.3 Обратная теорема. *Если число можно построить с помощью циркуля и линейки, то оно принадлежит какому-то квадратичному расширению.*

4.10.4 Следствие. Если число не принадлежит k-ому расширению поля рациональных чисел, то его нельзя построить с помощью циркуля и линейки исходя из поля рациональных чисел.

4.10.5 Задача. (Удвоение куба).

Построить куб объем которого был бы больше вдвое объема данного куба.

Решение. Длину ребра данного куба примем за единицу 1. Тогда объем его будет равен 1. Длину ребра искомого куба обозначим через x. Тогда $x^3 = 2$. Уравнение $x^3 - 2 = 0$ не имеет рациональных корней. Следовательно, это уравнение неразрешимо в квадратных радикалах, т.е. его корни не принадлежат ни какому квадратичному расширению поля рациональных чисел. Поэтому их нельзя построить с помощью циркуля и линейки.

Ответ: нельзя построить.

4.10.6 Задача. (Трисекция угла).

Разделить данный угол на три равные части.

Решение. Чтобы показать неразрешимость этой задачи рассмотрим частный случай $\varphi = 60^\circ$. Разделить его на три части это значит построить угол в 20° или что тоже самое $\cos 20^\circ$. Имеем $\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$.

Нам нужно построить число $x = \cos 20^\circ$. Другими словами построить корень уравнения $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$, т.е. $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ или $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Это уравнение не имеет рациональных корней. Следовательно, это уравнение неразрешимо в квадратных радикалах.

Ответ: нельзя построить.

4.10.7 Задача. (Построение правильного семиугольника).

Вписать в окружность правильный семиугольник.

Решение. Будем считать, что на комплексной плоскости имеется окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Тогда если одно из вершин правильного семиугольника лежит в точке 1, то вершины правильного семиугольника удовлетворяют уравнению $z^7=1$. Одна из вершин равна 1, то остальные удовлетворяют уравнению $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$. Разделим на и получим z^3 $z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+1=0$.

Обозначим $z+\frac{1}{z}=y$.Это равенство возведем в квадрат, а затем в куб. Будем иметь $z^2+\frac{1}{z^2}=y^2-2$, $z^3+3z+3\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}=y^3$, $z^3+\frac{1}{z^3}=y^3-3y$.

Имеем $y^3-3y+y^2-2+y+1=0$, т.е. $y^3+y^2-2y-1=0$.

Если бы zвыражался в квадратных радикалах, то y тоже выражался бы в квадратных радикалах. Поэтому, если y не выражается в квадратных радикалах, то и z не выражается к квадратных радикалах. А уравнение $y^3+y^2-2y-1=0$ не имеет рациональных корней.

Ответ: нельзя построить.

4.10.8 Пример. Можно ли построить циркулем и линейкой число $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots}}}$?

Решение. Обозначим данное число через α. Возводя обе части равенства $\alpha=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots}}}$ в куб, получим $\alpha^3=6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots}}}$, т.е. $\alpha^3=6+\alpha$. Поэтому число α удовлетворяет уравнению $x^3-x-6=0$. Легко убедиться, что число 2 – его рациональный корень. Поэтому все действительные корни этого многочлена (согласно критерию) можно построить циркулем и линейкой.

Ответ: можно построить.

4.10.9 Пример. Циркулем и линейкой построить правильный пятиугольник.

Решение. Будем считать, что правильный пятиугольник вписан в единичную окружность $|z|=1$ на комплексной плоскости. Одну из вершин поместим в точку x_0= 1. Тогда все вершины искомого пятиугольника лежит в точках $\sqrt[5]{1}$, т.е. удовлетворяют уравнению $x^5-1=0$. Это уравнение представимо в виде $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$. Поэтому остальные четыре вершины удовлетворяют (при $x \neq 1$) уравнению $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ (уравнению деления круга). Разделим обе части уравнения на x^2 ($x = 0$ не является корнем): $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$. Обозначив $x + \frac{1}{x} = t$, получим, что $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Значит, решение уравнения четвертой степени свелось к решению системы $\begin{cases} t^2 + t - 1 = 0, \\ x + \frac{1}{x} = t. \end{cases}$

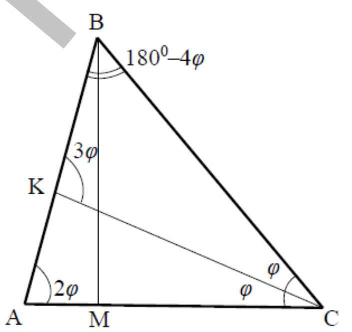
Находим $t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x^2 - x\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}$.

Для построения точки x_1 на единичной окружности достаточно построить ее действующую часть, т.е. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ на оси Ox. Следовательно, для построения правильного пятиугольника достаточно: 1) построить прямоугольный треугольник с катетами длины 1 и 2 (его гипотенуза есть $\sqrt{5}$); 2) уменьшить на 1 его гипотенузу; 3) разделить получившийся отрезок на четыре равные части; 4) отложить на оси Ox от начала в положительном направлении полученную четвертую долю; 5) восстановить в конце отрезка (точке $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$) перпендикуляр к оси; 6) найти его точку пересечения x_1 с единичной окружностью, центр которой находится в начале координат; 7) отложить циркулем на единичной окружности полученную дугу между двумя вершинами три раза для получения трех недостающих вершин.

Ответ: можно построить.

4.10.10 Пример. Построить треугольник по трем биссектрисам с помощью циркуля и линейки.

Решение. Докажем, что задача неразрешима циркулем и линейкой даже в случае равнобедренного треугольника. Пусть AB = BC, KC и BM – биссектрисы углов треугольника KC = m, BM = n. Из рисунка видно, что для построения треугольника достаточно построить угол ACK (или например $\sin \text{ACK}$). Если $\angle \text{ACK} = \varphi$, то $\angle \text{CAB} = 2\angle \text{KCA} = 2\varphi$, $\angle \text{BKC} = \angle \text{KAC} + \angle \text{ACK} = 3\varphi$, $\angle \text{ABC} = \pi - 4\varphi$. Из Δ BKC по теореме синусов получим $\frac{\text{KC}}{\sin(\pi - 4\varphi)} = \frac{\text{BC}}{\sin 3\varphi}$. Так как из треугольника BMC будет BC = BM $\sin 2\varphi$, то $\frac{m}{\sin 4\varphi} = \frac{n}{\sin 3\varphi \cdot \sin 2\varphi}$, откуда после умножения обеих частей на $\sin 2\varphi$ найдем



$$\frac{m}{2\cos 2\varphi} = \frac{n}{\sin 3\varphi} \text{ или } \frac{m}{2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} = \frac{n}{3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi}.$$

Обозначим $\sin\varphi = x$, получим уравнение

$$\frac{m}{2(1-2x^2)} = \frac{n}{3x-4x^2} \text{ или } \frac{m}{2n}(3x-4x^3) = 1-2x^2.$$

При $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$, например, получается уравнение $4x^2 - 6x^2 - 3x + 3 = 0$, левая часть которого по критерию Эйзенштейна неприводима над Z, а значит, и над Q. Таким образом, задача построения свелась к кубическому уравнению, которое например, при $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ неразрешима в квадратных радикалах.

Итак, построение треугольника по трем биссектрисам циркулем и линейкой невозможна в общем случае, ибо есть частные случаи, когда это построение невозможно.

Ответ: построить в общем случае нельзя.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

I. Многочлены над областью целостности

1. Кольцо многочленов от одной переменной.
2. Отношение делимости в кольце многочленов.
3. Делимость многочлена на двучлен $x - c$.
4. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов.
5. Многочлены над полем.
6. Наибольший общий делитель.
7. Многочлены неприводимые над данным полем.
8. Делимость многочленов, разложенных на неприводимые множители.
9. Производная.
10. Кратные множители многочлена.
11. Выделение кратных множителей.

II. Многочлены над полем комплексных и действительных чисел

12. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
13. Неприводимые многочлены над полем комплексных чисел.
14. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел.
15. Уравнения третьей степени.
16. Исследование корней уравнения третьей степени с действительными коэффициентами.

17. Уравнения четвертой степени.
18. Отделение действительных корней.

III. Многочлены от нескольких переменных

19. Кольцо многочленов от нескольких переменных.
20. Лексикографическое упорядочение членов многочлена.
21. Симметрические многочлены.
22. Результант.
23. Решение систем алгебраических уравнений.

IV. Многочлены над полем рациональных чисел и элементы теории полей

24. Рациональные корни многочлена.
25. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел.
26. Алгебраические числа.
27. Простое расширение.
28. Простое алгебраическое расширение.
29. Трансцендентные расширения.
30. Повторное расширение.
31. Поле алгебраических чисел.
32. Разрешимость уравнений в квадратных радикалах.
33. Три классические задачи на построение.

ЗАДАЧИ

Найдите многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2$, если

1. $f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3;$

2. $f(-1) = -1,\ f(-2) = -2,\ f(-3) = -3;$

3. $f(2) = 1,\ f(3) = 0,\ f(4) = 2;$

4. $f(-2) = -1,\ f(-3) = 0,\ f(-4) = -2;$

5. $f(1) = f(2) = 2,\ f(3) = -2;$

6. $f(-1) = f(-2) = -2,\ f(-3) = 2;$

7. $f(-1) = f(-2) = -1,\ f(-3) = 2.$

Пусть $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$. При каких p и q многочлен $f(x)$ делится на x^2+x+1, если:

8. $f(1) = x^4 + px^2 + q;$

9. $f(1) = x^4 + px + q;$

10. $f(1) = x^5 + px^2 + q;$

11. $f(1) = x^5 + px + q.$

Доказать, что при любом натуральном n и a из области целостности A в кольце $A[x]$:

12. $(x^n - a^n) \vdots (x-a)$;

13. $(x^{2n} - a^{2n}) \vdots (x+a)$;

14. $(x^{2n-1} + a^{2n-1}) \vdots (x+a)$;

15. $(x^{4n} + a^2x^{4n-2} + \ldots + a^{4n}) \vdots (x^{2n} + a^2x^{2n-1} + \ldots + a^{2n})$.

Разделить многочлен *f(x)* с остатком на многочлен $g(x)$:

16. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$;

17. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$;

18. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$;

19. $f(x) = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$, $g(x) = x^5 + x^2 - x + 1$;

20. $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2x + 2$, $g(x) = x^6 + x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6$;

21. $f(x) = x^4 + x^3 - 4x + 5$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$;

22. $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$, $g(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;

23. $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$, $g(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;

24. $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$, $g(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$;

25. $f(x) = x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12$, $g(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12$;

26. $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$, $g(x) = x^4 - 2x^3 - 2x + 1$;

27. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

28. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$, $g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}\,x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}\,x + 1$;

29. $f(x) = x^5 + x^4 + 1$, $g(x) = x^4 + x^2 + 1$;

30. $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, $g(x) = x^4 + 1$.

В кольце $\mathbf{Z}_4[x]$найдите неполное частное и остаток при делении *f(x)* на *g(x)*.

31. $f(x) = \bar{2}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{3}x + \bar{2}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{1}x + \bar{1}$.

32. $f(x) = \bar{1}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{3}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$.

33. $f(x) = \bar{1}x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{1}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$.

34. $f(x) = \bar{3}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$.

35. $f(x) = \bar{2}x^4 + \bar{1}x^2 + \bar{3}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{1}x^3 + \bar{2}x + \bar{1}$.

36. $f(x) = \bar{2}x^4 + \bar{1}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}$, $g(x) = \bar{1}x^2 + \bar{2}$.

37. $f(x)=\overline{1}x^4+\overline{2}x+\overline{1}$, $\quad g(x)=\overline{1}x^3+\overline{1}$.

38. $f(x)=\overline{2}x^5+\overline{1}x^3+\overline{1}x+\overline{1}$, $\quad g(x)=\overline{1}x^3+\overline{1}x+\overline{1}$.

39. $f(x)=\overline{1}x^5+\overline{2}x^3+\overline{3}x^2+\overline{1}$, $\quad g(x)=\overline{1}x^3+\overline{2}x^2+\overline{3}$.

40. $f(x)=\overline{2}x^5+\overline{3}x^3+\overline{2}x^2+\overline{3}x$, $\quad g(x)=\overline{1}x^3+\overline{2}x+\overline{1}$.

41. $f(x)=\overline{2}x^4+\overline{3}x^2+\overline{2}x+\overline{3}$, $\quad g(x)=\overline{1}x^3+\overline{1}x+\overline{2}$.

42. $f(x)=\overline{3}x^4+\overline{2}x^3+\overline{1}x+\overline{3}$, $\quad g(x)=\overline{1}x^2+\overline{3}x+\overline{3}$.

43. $f(x)=\overline{2}x^4+\overline{1}x^2+\overline{2}x+\overline{3}$, $\quad g(x)=\overline{1}x^3+\overline{3}x^2+\overline{3}$.

44. $f(x)=\overline{1}x^5+\overline{1}x^3+\overline{3}x+\overline{2}$, $\quad g(x)=\overline{1}x^3+\overline{1}x$.

45. $f(x)=\overline{1}x^5+\overline{2}x^4+\overline{1}x^3+\overline{2}$, $\quad g(x)=\overline{1}x^3+\overline{3}$.

Используя алгоритм Евклида, найдите НОД *(f(x)*, $g(x)$) и выразите его через исходные многочлены.

46. $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$,

$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$.

47. $f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$,

$g(x)=x^4+2x^3+x+2$.

48. $f(x)=x^6-4x^5+11x^4-27x^3+37x^2-35x+35$,

$g(x)=x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25$.

49. $f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$,

$g(x)=x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25$.

50. $f(x)=3x^3-2x^2+x+2$,

$g(x)=x^2-x+1$.

51. $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$,

$g(x)=x^2-x-1$.

52. $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$,

$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$.

53. $f(x)=x^5-4x^4-2x^3+12x^2-2x+12$,

$q(x)=x^3-5x^2-3x+17$.

54. $f(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1$,

$g(x)=3x^3-2x^2+x-1$.

55. $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x+2$,

$g(x)=2x^3+x^2-x-1$.

56. $f(x) = x^6 - x^4 + 4x^3 - 3x + 2,$

$q(x) = x^3 + 2.$

57. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2,$

$g(x) = x^5 - 1.$

58. $f(x) = x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 7,$

$g(x) = x^4 - 2x^2 + 1.$

59. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 1,$

$g(x) = x^4 - 1.$

60. $f(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3,$

$g(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1.$

Используя схему Горнера, вычислите $f(x_0)$.

61. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8,$ $\quad x_0 = 1 + i.$

62. $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x,$ $\quad x_0 = -3 + i.$

63. $f(x) = 4x^3 + x^2,$ $\quad x_0 = -1 - i.$

64. $f(x) = x^3 - x^2 - x,$ $\quad x_0 = 1 - 2i.$

65. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16,$ $\quad x_0 = i.$

66. $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 3x + 7,$ $\quad x_0 = 3i.$

67. $f(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7,$ $\quad x_0 = -2 - i.$

68. $f(x) = x^5 + (1-2i)x^4 - (3+i)x^2 + 7,$ $\quad x_0 = -1 + 2i.$

69. $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i,$ $\quad x_0 = -i.$

70. $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1,$ $\quad x_0 = -1 + 2i.$

71. $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - 5x + 2,$ $\quad x_0 = 2i.$

72. $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x,$ $\quad x_0 = 2 + i.$

73. $f(x) = 3x^4 - ix^3 + (1-2i)x^2 + 2x - 1,$ $\quad x_0 = 3i.$

74. $f(x) = 5x^4 + 2ix^3 + 5x - i,$ $\quad x_0 = 1 + i.$

75. $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 1,$ $\quad x_0 = i.$

Определите коэффициенты *a, b, c* так, чтобы многочлен $f(x)$ имел x=1 корнем кратности три.

76. $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2x + 1.$

77. $f(x) = ax^3 + bx^3 - 2cx + 2.$

78. $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 1.$

79. $f(x) = x^4 - ax^3 + 2bx + c.$

80. $f(x) = -ax^4 + 2bx^3 - cx^2 + 2x.$

81. $f(x) = ax^4 + 2bx^3 + 3cx^2 - 3.$

82. $f(x) = 2ax^3 - bx^2 + cx - 4.$

83. $f(x) = -2ax^4 + 3bx^2 - 2cx + 3.$

84. $f(x) = ax^4 - 2bx^2 + cx - 2.$

85. $f(x) = ax^3 - 3bx^2 + 2cx - 4.$

86. $f(x) = 3ax^4 + 2bx^2 - 4cx - 1.$

87. $f(x) = -2ax^4 + bx^3 - 2cx - 6.$

88. $f(x) = ax^4 - 4bx^2 + cx - 2.$

89. $f(x) = 4ax^3 - 2bx^2 + 3cx - 4.$

90. $f(x) = -2ax^3 + 2bx^2 - 6cx + 1.$

С помощью схемы Горнера для многочлена $f(x)$ найти:

а) $f(a)$ и $f'(a)$;;

б) кратность корней x_1; x_2;

в) разложить многочлен $f(x)$по степеням $(x - a)$

91. $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 4$

а) $f(3)$, $f'(3)$,

б) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$,

в) $(x - 3)$.

92. $f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$

а) $f(3)$, $f'(3)$,

б) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$,

в) $(x - 2)$.

93. $f(x) = x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 71x + 27$

а) $f(2)$, $f'(2)$,

б) $x_1 = -1$, $x_2 = -3$,

в) $(x - 2)$.

94. $f(x) = x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 45x^2 - 108$

а) $f(-3)$, $f'(-3)$,

б) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$,

в) $(x-1)$.

95. $f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x+1$

а) $f(3)$, $f'(1)$,

б) $x_1=-1$, $x_2=1$,

в) $(x-2)$.

96. $f(x)=x^5+7x^4+19x^3+25x^2+16x+4$

а) $f(3)$, $f'(5)$,

б) $x_1=-2$, $x_2=-1$,

в) $(x+1)$.

97. $f(x)=x^4+3x^3-2x^2-11x-6$

а) $f(3)$, $f'(3)$,

б) $x_1=1$, $x_2=2$,

в) $(x+2)$.

98. $f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$

а) $f(2)$, $f'(2)$,

б) $x_1=-1$, $x_2=1$,

в) $(x-2)$.

99. $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$

а) $f(2)$, $f'(2)$,

б) $x_1=-1$, $x_2=4$,

в) $(x-2)$.

100. $f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4$

а) $f(3)$, $f'(1)$,

б) $x_1=-2$, $x_2=-1$,

в) $(x+4)$.

101. $f(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$

а) $f(3)$, $f'(-2)$,

б) $x_1=2$, $x_2=-1$,

в) $(x+4)$.

102. $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-1$

а) $f(3)$, $f'(-3)$,

б) $x_1=1$, $x_2=-1$,

в) $(x-2)$.

103. $f(x)=x^5-15x^3-10x^2+60x+72$

а) $f(1)$, $f'(2)$,

б) $x_1=3$, $x_2=-2$,

в) $(x-2)$.

104. $f(x)=x^5-3x^4-6x^3+10x^2+21x+9$

а) $f(2)$, $f'(-2)$,

б) $x_1=-1$, $x_2=1$,

в) $(x+4)$.

105. $f(x)=x^4+2x^3+2x-1$

а) $f(2)$, $f'(1)$,

б) $x_1=1$, $x_2=-1$,

в) $(x-2)$.

106. $f(x)=x^4-x^3-3x^2+5x-2$

а) $f(3)$, $f'(2)$,

б) $x_1=-2$, $x_2=1$,

в) $(x+4)$.

107. $f(x)=x^4+6x^3+12x^2+10x+3$

а) $f(2)$, $f'(-2)$,

б) $x_1=-3$, $x_2=-1$,

в) $(x-2)$.

108. $f(x)=x^5+2x^4-2x^3-8x^2-7x-2$

а) $f(3)$, $f'(-3)$,

б) $x_1=-1$, $x_2=2$,

в) $(x+4)$.

109. $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$

а) $f(3)$, $f'(-2)$,

б) $x_1=2$, $x_2=-1$,

в) $(x+4)$.

110. $f(x)=x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4$

а) $f(3)$, $f'(2)$,

б) $x_1=1$, $x_2=-2$,

в) $(x-2)$.

111. $f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x+1$

а) $f(2)$, $f'(3)$,

б) $x_1=-1$, $x_2=1$,

в) $(x-2)$.

112. $f(x)=x^5+3x^4-6x^3-10x^2+21x-9$

а) $f(2)$, $f'(3)$,

б) $x_1=1$, $x_2=-3$,

в) $(x + 1)$.

113. $f(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 4x + 8$

а) $f(2)$, $f'(2)$,

б) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$,

в) $(x - 2)$.

114. $f(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 7x - 2$

а) $f(1)$, $f'(2)$,

б) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$,

в) $(x + 2)$.

115. $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4$

а) $f(2)$, $f'(2)$,

б) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$,

в) $(x - 2)$.

116. $f(x) = x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 12x - 8$

а) $f(3)$, $f'(2)$,

б) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$,

в) $(x - 2)$.

Используя алгоритм Евклида для многочленов $f(x)$ и $q(x)$, найти НОД со старшим коэффициентом равным 1 и его линейную форму.

117. $f(x) = 4x^5 - 0x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 0x + 1$

$q(x) = 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x - 0.$

118. $f(x) = 2x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 10x + 15$

$q(x) = 2x^4 - 0x^3 - 12x^2 - 15x - 9.$

119. $f(x) = 4x^5 + 12x^4 + 16x^3 + 4x^2 - 11x - 7$

$q(x) = 2x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 12x + 5.$

120. $f(x) = 2x^5 + x^4 - 12x^3 - 15x^2 + 29x + 18$

$q(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 23x - 14.$

121. $f(x) = 2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 15x + 7$

$q(x) = 2x^4 - 0x^3 - 4x^2 + 4x - 2.$

122. $f(x) = 2x^5 + 10x^4 - x^3 - x^2 + 19x - 5$

$q(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 + x + 5.$

123. $f(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8x + 11$

$q(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x - 3.$

124. $f(x)=4x^5+12x^4-5x^3 11x^2+13x+3$

$q(x)=2x^4+8x^3+5x^2-3x-0.$

125. $f(x)=8x^5-4x^4-8x^3+2x^2+x+1$

$q(x)=8x^4+4x^3-8x^2-4x-0.$

126. $f(x)=8x^5+4x^4-26x^3-27x^2-5x+6$

$q(x)=4x^4+4x^3-13x^2-18x-8.$

127. $f(x)=4x^5+8x^4-0x^3-2x^2-0x-2$

$q(x)=4x^4+12x^3+10x^2+3x+1.$

128. $f(x)=4x^5-10x^4+8x^3+x^2-8x+5$

$q(x)=2x^4-4x^3+x^2+3x-2.$

129. $f(x)=8x^5+40x^4+4x^3+25x^2+22x-15$

$q(x)=4x^4+22x^3+11x^2+7x+10.$

130. $f(x)=x^5+2x^4+2x^3+3x^2+x-1$

$q(x)=x^4+3x^3+4x^2+4x+2.$

131. $f(x)=x^5+x^4-3x^3-6x^2+3x-6$

$q(x)=x^4+2x^3-2x^2-10x-4.$

132. $f(x)=8x^5-40x^4-2x^3+13x^2-11x-20$

$q(x)=8x^4-32x^3-38x^2-11x+5.$

133. $f(x)=4x^5+2x^4-7x^3+7x^2+7x-5$

$q(x)=2x^4+2x^3-3x^2+x+4.$

134. $f(x)=2x^5-2x^4-9x^3-9x^2-x+3$

$q(x)=2x^4-2x^3-11x^2-3x-0.$

135. $f(x)=2x^5+2x^4-3x^3-12x^2-11x-2$

$q(x)=2x^4+2x^3-5x^2-10x-8.$

136. $f(x)=4x^5-6x^4-11x^3-18x^2-10x+3$

$q(x)=4x^4-6x^3-15x^2-8x-3.$

137. $f(x)=8x^5+28x^4+16x^3+16x^2+11x-3$

$q(x)=8x^4+28x^3+12x^2+2x+6.$

138. $f(x)=2x^5-10x^4-24x^3-24x^2-27x-7$

$q(x)=2x^4-10x^3-25x^2-19x-14.$

139. $f(x)=4x^5+12x^4+20x^3+20x^2+11x+3$
$q(x)=2x^4+6x^3+9x^2+7x+2.$

140. $f(x)=4x^5-22x^4+12x^3-7x^2-16x+5$
$q(x)=4x^4-22x^3+10x^2+3x-15.$

141. $f(x)=2x^5-4x^4-3x^3-6x^2-6x-9$
$q(x)=2x^4-4x^3-5x^2-4x+3.$

Отделить кратные многочлены $f(x)$.

142. $f(x)=x^5+10x^4+25x^3-20x^2-80x+64.$

143. $f(x)=x^5-15x^4+80x^3-160x^2-10x+256.$

144. $f(x)=x^5-8x^4+25x^3-38x^2+28x-8.$

145. $f(x)=x^5+9x^4+32x^3+56x^2+48x+16.$

146. $f(x)=x^5+7x^4+10x^3-18x^2-27x+27.$

147. $f(x)=x^5-11x^4+42x^3-54x^2-27x+81.$

148. $f(x)=x^5-11x^4+46x^3-90x^2+81x-27.$

149. $f(x)=x^5+13x^4+66x^3+162x^2+189x+81.$

150. $f(x)=x^5+4x^4+x^3-10x^2-4x+8.$

151. $f(x)=x^5-7x^4+16x^3-8x^2-16x+16.$

152. $f(x)=x^5-14x^4+73x^3-172x^2+176x-64.$

153. $f(x)=x^5+17x^4+112x^3+352x^2+51x+256.$

154. $f(x)=x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1.$

155. $f(x)=x^5-3x^4+2x^3+2x^2+2x+1.$

156. $f(x)=x^5+11x^4+10x^3-106x^2+133x-49.$

157. $f(x)=x^5-3x^4-22x^3-38x^2+27x-7.$

158. $f(x)=x^5+17x^4+94x^3+190x^2+161x+49.$

159. $f(x)=x^5-11x^4+34x^3-46x^2+29x-7.$

160. $f(x)=x^5+13x^4+19x^3-145x^2+176x-64.$

161. $f(x)=x^5-4x^4-26x^3-44x^2-31x-8.$

162. $f(x)=x^5+19x^4+115x^3+248x^2+208x+64.$

163. $f(x)=x^5-12x^4+38x^3-52x^2+33x-8.$

164. $f(x)=x^5-7x^4+19x^3-25x^2+16x-4.$

165. $f(x) = x^5 + 6x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 9x + 2.$

166. $f(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32.$

167. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 48x + 32.$

168. $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 8.$

169. $f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 16x - 4.$

170. $f(x) = x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27.$

171. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8.$

172. $f(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4.$

173. $f(x) = x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1.$

174. $f(x) = x^8 + 2x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1.$

Найдите все корни многочлена *f*(*x*) в поле □ .

175. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 9x + 9.$

176. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x - 50.$

177. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12.$

178. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 3x - 12.$

179. $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 16x - 24.$

180. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$

181. $f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 19x^2 + 2x + 8.$

182. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 14x + 5.$

183. $f(x) = -2x^4 + x^3 - x + 2.$

184. $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 + 22x - 10.$

185. $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 33x^2 - 23x + 12.$

186. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x - 18.$

187. $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 37x + 20.$

188. $f(x) = -3x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 20x + 16.$

189. $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 15x + 25.$

Найдите все корни многочлена *f*(*x*) в поле □ , если известен один из корней x_1.

190. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 6x + 13,$ $\qquad x_1 = 3 - 2i.$

191. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 29x^2 - 50x + 52,$ $\qquad x_1 = 1 + i\sqrt{3}.$

192. $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+65,$ $x_1=3+2i.$

193. $f(x)=x^4-2x^3+6x^2-2x+5,$ $x_1=i.$

194. $f(x)=x^4+2x^3+9x^2+8x+20,$ $x_1=-2i.$

195. $f(x)=x^4+4x^3+12x^2+16x+32,$ $x_1=2i.$

196. $f(x)=x^4-6x^3+23x^2-50x+50,$ $x_1=2-i.$

197. $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2,$ $x_1=1+i.$

198. $f(x)=x^4+2x^3+7x^2+30x+50,$ $x_1=1+3i.$

199. $f(x)=x^4+4x^3+9x^2+16x+20,$ $x_1=-2+i.$

200. $f(x)=x^4-2x^3-x^2+2x+10,$ $x_1=-1+i.$

201. $f(x)=x^4+4x^3+17x^2+16x+52,$ $x_1=-2+3i.$

202. $f(x)=x^4+11x^2+10x+50,$ $x_1=-1+2i.$

203. $f(x)=x^4+2x^3+10x^2-6x+65,$ $x_1=-2+3i.$

204. $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+5,$ $x_1=2-i.$

Разложите многочлены $f(x)$ и $q(x)$ на неприводимые множители над полями □ и □ .

205. $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2,$ $q(x)=x^6+27.$

206. $f(x)=x^4+2x^3+x^2+8x-12,$ $q(x)=x^4+16.$

207. $f(x)=x^4-4x^3+7x^2-6x+2,$ $q(x)=x^4+81.$

208. $f(x)=x^5+2x^4+x^3+x^2+2x+1,$ $q(x)=x^4-2x^2+16.$

209. $f(x)=x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1,$ $q(x)=16x^4+1.$

210. $f(x)=x^5+4x^4+4x^3-x^2-4x-4,$ $q(x)=x^6-27.$

211. $f(x)=x^5-6x^4+9x^3-x^2+6x-9,$ $q(x)=x^4-2x^2+4.$

212. $f(x)=2x^4-5x^3+15x^2-45x+54,$ $q(x)=x^6-1.$

213. $f(x)=x^4-7x^3+19x^2-23x+10,$ $q(x)=x^4+4x^2+9.$

214. $f(x)=x^5+5x^4-6x^3-x^2-5x+6,$ $q(x)=81x^4+1.$

215. $f(x)=x^4+2x^3-2x^2-6x+5,$ $q(x)=x^4-x^2+1.$

216. $f(x)=x^4+x^3-4x^2+4x+16,$ $q(x)=16x^4+4x^2+1.$

217. $f(x)=x^5-x^3-x^2+1,$ $q(x)=x^4+1.$

218. $f(x)=x^5+x^4+5x^3+5x^2-6x-6,$ $q(x)=x^4-x^2+9.$

219. $f(x)=x^5-6x^3+19x^2-6x+9,$ $q(x)=x^8-1.$

Решить уравнение, применяя формулу Кардано и способ Феррани.

220. а) $x^3-3x^2-9x-54=0$

б) $x^4-20x^3+38x^2+12x-3=0.$

221. а) $x^3+9x^2+15x-74=0$

б) $x^4+28x^3+132x^2+32x-4=0.$

222. а) $x^3-12x^2+36x-81=0$

б) $x^4-8x^3-50x^2+40x-3=0.$

223. а) $x^3+3x^2-9x-76=0$

б) $x^4+20x^3+36x^2+32x-4=0.$

224. а) $x^3-9x^2+15x-56=0$

б) $x^4-16x^3-82x^2+88x-8=0.$

225. а) $x^3+12x^2+36x-49=0$

б) $x^4+4x^3-138x^2+76x-8=0.$

226. а) $x^3-3x^2+21x+196=0$

б) $x^4-24x^3+2x^2+48x-8=0.$

227. а) $x^3+9x^2+45x+296=0$

б) $x^4-12x^3-108x^2+72x-9=0.$

228. а) $x^3-12x^2+77x+79=0$

б) $x^4+8x^3+126x^2+80x-8=0.$

229. а) $x^3+9x^2+39x+126=0$

б) $x^4+28x^3+162x^2+64x-8=0.$

230. а) $x^3-12x^2+60x-49=0$

б) $x^4-88x^3-2x^2+24x-3=0.$

231. а) $x^3+3x^2+15x+76=0$

б) $x^4+20x^3+86x^2+36x-3=0.$

232. а) $x^3-6x^2+24x+31=0$

б) $x^4-16x^3+30x^2+20x-8=0.$

233. а) $x^3+3x^2+21x+234=0$

б) $x^4+28x^3+178x^2-44x-3=0.$

234. а) $x^3-6x^2+30x+171=0$

б) $x^4-8x^3+2x^2+24x-3=0.$

235. а) $x^3+6x^2+30x+259=0$

б) $x^4+20x^3+82x^2-36x-3=0.$

236. а) $x^3-9x^2+45x+134=0$

б) $x^4-16x^3+28x^2-36x-9=0.$

237. а) $x^3+12x^2+66x+351=0$

б) $x^4+4x^3-10x^2-12x-3=0.$

238. а) $x^3-3x^2-12x-112=0$

б) $x^4-24x^3+106x^2-12x-8=0.$

239. а) $x^3+9x^2+12x-144=0$

б) $x^4+8x^3-0x^2-16x-4=0.$

240. а) $x^3+9x^2+15x-74=0$

б) $x^4-28x^3+182x^2-44x-3=0.$

241. а) $x^3+3x^2-12x-140=0$

б) $x^4+12x^3+3x^2-24x-8=0.$

242. а) $x^3-6x^2-3x-104=0$

б) $x^4+16x^3+46x^2-32x-3=0.$

243. а) $x^3+6x^2-3x-148=0$

б) $x^4-12x^3+32x^2-28x-3=0.$

244. а) $x^3+12x^2+33x-122=0$

б) $x^4-20x^3+64x^2+36x-9=0.$

245. а) $x^3-3x^2+15x+50=0$

б) $x^4+24x^3+128x^2-16x-4=0.$

Найти наибольший общий делитель полинома и его производной:

246. $f(x)=(x-1)^3(x+1)^2(x-3);$

247. $f(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1);$

248. $f(x)=x^{m+n}-x^m-x^n+1;$ //

249. $f(x)=(x-1)(x^2+1)(x^3-1)(x^4-1);$

250. $f(x)=(x^2-4)^3(x^2+4)(x^4-16);$

251. $f(x)=(x^2+1)^2(x^4+1)^4(x^6+1)(x^8+1)^8;$

252. $f(x)=x^{k+l}-x^l-x^k+1.$

Найти рациональные корни $f_1(x)$, $f_2(x)$.

253. а) $f_1(x)=2x^5-9x^4+12x^3-12x^2+10x-3$

б) $f_2(x)=3x^5-7x^4-3x^3+5x^2+8x+4.$

254. а) $f_1(x)=-x^5-x^4+5x^3+x^2-8x+4$

б) $f_2(x)=-5x^5-4x^4+16x^3+12x^2+7x-2.$

255. а) $f_1(x)=-x^5-3x^4+6x^3+10x^2-21x+9$

б) $f_2(x)=7x^5+13x^4-30x^3-24x^2-17x+3.$

256. а) $f_1(x)=x^4+2x^3-2x-1$

б) $f_2(x)=-3x^5-16x^4-28x^3-23x^2+x+12.$

257. а) $f_1(x)=x^6-6x^4+4x^3+9x^2-12x+4$

б) $f_2(x)=5x^5+19x^4+27x^3+17x^2-6x-8.$

258. а) $f_1(x)=-x^5-2x^4+4x^3+4x^2+5x+6$

б) $f_2(x)=3x^5-11x^4+9x^3+x^2+4x-4.$

259. а) $f_1(x)=x^4-2x^3-13x^2+38x-24$

б) $f_2(x)=9x^5-29x^4+15x^3+7x^2+16x-4.$

260. а) $f_1(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+9$

б) $f_2(x)=-7x^5+9x^4+5x^3+19x^2-20x+4.$

261. а) $f_1(x)=-x^5+x^4+6x^3-14x^2+11x-3$

б) $f_2(x)=9x^5-20x^4-14x^3-32x^2+35x-6.$

262. а) $f_1(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$

б) $f_2(x)=5x^5-22x^4+18x^3+6x^2+11x-6.$

263. $f_1(x)=-x^5+4x^4+6x^3-14x^2+11x-3$

б) $f_2(x)=9x^5+37x^4+40x^3+22x^2-25x-3.$

264. а) $f_1(x)=x^6+6x^5+11x^4+x^3-18x^2-20x-8$

б) $f_2(x)=5x^5+6x^4-14x^3-18x^2-13x-2.$

265. *а)* $f_1(x)=x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$

б) $f_2(x)=-3x^5+7x^4-x^3-5x^2-18x+8.$

266. а) $f_1(x)=x^4+2x^3-2x-1$

б) $f_2(x)=9x^5-13x^4-5x^3-23x^2+30x-8.$

267. а) $f_1(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4$

б) $f_2(x)=-5x^5+9x^4+x^3+11x^2-22x+8.$

268. а) $f_1(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+9$

б) $f_2(x)=-7x^5-10x^4+36x^3+12x^2+5x-12.$

269. а) $f_1(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$

б) $f_2(x)=-3x^5+10x^4+2x^3-10x^2-13x-6.$

270. а) $f_1(x)=x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8$

б) $f_2(x)=-9x^5+16x^4+22x^3+40x^2-19x-6.$

271. а) $f_1(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$

б) $f_2(x)=9x^5-10x^4-8x^3-26x^2+21x-2.$

272. а) $f_1(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+9$

б) $f_2(x)=3x^5+16x^4+28x^3+22x^2-x-12.$

273. а) $f_1(x)=x^4+2x^3-13x^3-38x^2-38x-24$

б) $f_2(x)=-9x^5+32x^4-2x^3-26x^2-35x-12.$

274. а) $f_1(x)=x^4-2x^3+2x-1$

б) $f_2(x)=7x^5+26x^4+20x^3+6x^2-25x+6.$

275. а) $f_1(x)=x^5-3x^4-6x^3+10x^2+21x+9$

б) $f_2(x)=3x^5+13x^4+16x^3+10x^2-7x-3.$

276. а) $f_1(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4$

б) $f_2(x)=-9x^5+35x^4-14x^3-20x^2-29x-3.$

277. а) $f_1(x)=2x^5-7x^4-12x^3-12x^2-14x-5$

б) $f_2(x)=-2x^5-9x^4-12x^3-12x^2-10x-3.$

278. а) $f_1(x)=x^4+3x^3-3x^2-11x-6$

б) $f_2(x)=-3x^5-2x^4+20x^3-4x^2-7x-12.$

Составить систему Штурма и отделить действительные корни многочлена $f(x)$.

279. $f(x)=x^4-9x^3+30x^2-41x+9;$

280. $f(x)=x^4-8x^3+23x^2-28x+6;$

281. $f(x)=x^4-4x^3+2x^2+4x-35;$

282. $f(x)=x^4+4x^3+3x^2-6x-9;$

283. $f(x)=x^4-0x^3-6x^2+16x-15;$

284. $f(x)=x^4-8x^3+21x^2-20x+4;$

285. $f(x)=x^4-4x^3+8x^2-8x-45;$

286. $f(x)=x^4-7x^3+18x^2-17x-7;$

287. $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-0x-16;$

288. $f(x)=x^4-8x^3+25x^2-36x+8;$

289. $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-0x-49;$

290. $f(x)=x^4+8x^3+26x^2+40x+16;$

291. $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+8;$

292. $f(x)=x^4-8x^3+23x^2-28x+10;$

293. $f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x-7;$

294. $f(x) = x^4 + 8x^3 + 26x^2 + 40x + 9;$

295. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 43;$

296. $f(x) = x^4 + 43x^3 + 7x^2 + 6x - 54;$

297. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 36x + 14;$

298. $f(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 23x + 5;$

299. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 0x^2 - 8x - 5;$

300. $f(x) = x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 41x + 9;$

301. $f(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 17x - 7;$

302. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x - 34.$

а) Выразить f через элементарные симметрические многочлены;
б) вычислить значение q от корней многочлена $\varphi(x)$.

303. а) $f = x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_1x_2^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3$
б) $q = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 + x_2)$
$\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 5.$

304. а) $f = (x_1 + 2x_2 + x_3)(x_1 + 2x_3 + x_2)(x_2 + 2x_1 + x_3)$
б) $q = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$
$\varphi(x) = x^3 + 5x^2 - 6x + 7.$

305. а) $f = -x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_3^2x_1^2$
б) $q = (x_1 + x_3)^2(x_2 + x_3)^2(x_1 + x_2)^2$
$\varphi(x) = -x^3 - x^2 - 2x - 1.$

306. а) $f = x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$
б) $q = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$
$\varphi(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x - 6.$

307. а) $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$
б) $q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
$\varphi(x) = x^3 - 2x - 3.$

308. а) $f = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_3x_4)(x_1x_4 + x_3x_3)$
б) $q = x_1^2x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3$
$\varphi(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1.$

309. а) $f = (x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2)$
б) $q = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2)$

$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 7x - 8.$

310. а) $f = (x_2 + x_3 - 2x_1)(x_1 + x_3 - 2x_2)(x_1 + x_2 - 2x_3)$

б) $q = x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3$

$\varphi(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4.$

311. а) $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 9x_1x_2x_3$

б) $q = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$

$\varphi(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1.$

312. а) $f = (x_1 - x_2 + x_3)(x_2 + x_1 + x_3)(x_2 - x_3 + x_1)$

б) $q = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$

$\varphi(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1.$

313. а) $f = x_1^3x_2 + x_1x_2^3$

б) $q = x_1^3x_2x_3 + x_1x_2^3x_3 + x_1x_2x_3^3$

$\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1.$

314. а) $f = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_2} + \dfrac{x_1}{x_3}$

б) $q = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

$\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 4.$

315. а) $f = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 + x_2} + \dfrac{(x_2 - x_3)^2}{x_2 + x_3} + \dfrac{(x_3 - x_1)^2}{x_3 + x_1}$

б) $q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - 8x + 2.$

316. а) $f = 2x_1^3 + 2x_2^3 + 2x_3^3 - 6x_1x_2x_3$

б) $q = 2x_1^3x_2 + 2x_2x_3^3 + 2x_1x_2^3 + 2x_1^3x_3 + 2x_1x_3^3 + 2x_2^3x_3$

$\varphi(x) = 3x^3 - 2x^2 - 8x + 2.$

317. а) $f = 2x_2^3x_2 + 2x_1x_2^3 + 2x_1^3x_3 + 2x_1x_3^3 + 2x_2^3x_3 + 2x_2x_3^3$

б) $q = \dfrac{2x_1}{x_2} + \dfrac{2x_2}{x_3} + \dfrac{2x_3}{x_2} + \dfrac{2x_2}{x_1} + \dfrac{2x_3}{x_1} + \dfrac{2x_1}{x_3}$

$\varphi(x) = x^3 - px + q.$

318. а) $f = 2x_1^4 + 2x_2^4 + 2x_3^4 - 4x_1^2x_2^2 - 4x_2^2x_3^2 - x_3^2x_1^2$

б) $q = (2x_1 + 2x_3)(2x_2 + 2x_3)(2x_1 + 2x_2)$

$\varphi(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4x + 2.$

319. а) $f = 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + 2x_1^2x_3 + 2x_1x_3^2 + 2x_2^2x_3 + 2x_2x_3^2$

б) $q=2x_1^3x_2+2x_1^3x_3+2x_2^3x_1+2x_3^3x_2+2x_2^3x_3+2x_1x_3^3$

$\varphi(x)=x^3+5x^2-6x+1.$

320. а) $f=(x_1x_4+x_2x_3)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_2+x_3x_4)$

б) $q=2x_1^2x_2+2x_1^2x_3+2x_2^2x_3+2x_1x_2^2+2x_1x_3^2+2x_2x_3^2$

$\varphi(x)=x^3+4x+6.$

321. а) $f=(2x_1+2x_2)(2x_1+2x_3)(2x_2+2x_3)$

б) $q=\dfrac{3x_1}{x_2}+\dfrac{3x_2}{x_3}+\dfrac{3x_3}{x_1}+\dfrac{3x_2}{x_1}+\dfrac{3x_3}{x_2}+\dfrac{3x_1}{x_3}$

$\varphi(x)=-x^3-3x+2.$

322. *а)* $f=2x_1^3+2x_2^3+2x_3^3$

б) $q=(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)(x_3+x_1-x_2)$

$\varphi(x)=x^3-3x^2+5x-2.$

323. а) $f=x_1^3x_2^2+x_1^2x_2^3+x_1^3x_3^2+x_1^2x_3^3+x_2^3x_3^2+x_2^2x_3^3$

б) $q=(3x_1+3x_2)(3x_2+3x_3)(3x_1+3x_3)$

$\varphi(x)=-x^3+2x^2-3x+5.$

324. а) $f=\dfrac{(x_1-x_2)^2}{x_3}+\dfrac{(x_2-x_3)^2}{x_1}+\dfrac{(x_3-x_1)^2}{x_2}$

б) $q=x_1^3x_2x_3+x_1x_2^3x_3+x_1x_2x_3^3$

$\varphi(x)=x^3-3x^2+5x-7.$

325. а) $f=(x_1-x_2-x_3)(x_2-x_1-x_3)(x_3-x_1-x_2)$

б) $q=(2x_1+2x_3)(2x_2+2x_3)(2x_1+2x_2)$

$\varphi(x)=x^3+2x^2+3x+5.$

326. а) $f=(x_1-x_2-x_3)(x_2-x_1-x_3)(x_3-x_1-x_2)$

б) $q=x_1x_2^3+x_1x_3^3+x_2x_3^3+x_1^3x_2+x_1^3x_3+x_3^3x_3$

$\varphi(x)=-x^3-x^2+4x+1.$

327. $f=(x_1+x_2+2x_3)(x_1+2x_2+x_3)(2x_1+x_2+x_3)$

б) $q=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_1}{x_3}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}$

$\varphi(x)=x^3-2x^2+5.$

Решить с помощью результанта следующие системы уравнений

328. $\begin{cases} x^2+4y^2-3x-2y=0 \\ x^2-4y^2-12xy+3x+22y-10=0 \end{cases}$

329. $\begin{cases} y^2 + x^2 - y - 3x = 0 \\ y^2 - 6xy - x^2 + 14y + 7x - 12 = 0 \end{cases}$

330. $\begin{cases} 5y^3 - 6xy + x^3 - 10 = 0 \\ y^2 - xy + 2x^2 - y - x - 4 = 0 \end{cases}$

331. $\begin{cases} y^2 + 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0 \\ -y^2 + x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$

332. $\begin{cases} y^2 + xy + x^2 - 2x - y = 0 \\ y^2 + 2xy + x^2 - 3x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$

333. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases}$

334. $\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 - 5x - 5y = 0 \\ 5x^2 - xy - y^2 + 7x - 7y = 0 \end{cases}$

335. $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y - 22 = 0 \\ 2x^2 + xy + 2y^2 - x - y - 43 = 0 \end{cases}$

336. $\begin{cases} x^2 + xy - 5x + 2y - 4 = 0 \\ 3x^2 + 2xy + y^2 - 12x + y - 6 = 0 \end{cases}$

337. $\begin{cases} y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0 \\ y^2 - x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$

338. $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - x - 2y - 2 = 0 \\ x^2 - 12xy - 4y^2 + 5x + 10y - 6 = 0 \end{cases}$

339. $\begin{cases} y^2 + x^2 - x - y - 2 = 0 \\ y^2 - x^2 - 6xy + 5x + 5y - 6 = 0 \end{cases}$

340. $\begin{cases} 5y^2 - 6xy + 5x^2 - 6y + 10x - 11 = 0 \\ y^2 - xy + 2x^2 - 2y + 3x - 3 = 0 \end{cases}$

341. $\begin{cases} y^2 - 7xy + 4x^2 - 9y + 21x + 14 = 0 \\ -y^2 + x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$

342. $\begin{cases} y^2 + xy + x^2 - 1 = 0 \\ y^2 + 2xy + x^2 - x - y = 0 \end{cases}$

343. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 6y + 4 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 + 8x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$

344. $\begin{cases} x^2-2y^2+4xy-3x-y-4=0 \\ 5x^2-y^2-xy+3x-8y-2=0 \end{cases}$

345. $\begin{cases} x^2+y^2+x-y-22=0 \\ 2x^2+xy+2y^2+3x-42=0 \end{cases}$

346. $\begin{cases} x^2+xy-3x+3y-8=0 \\ 3x^2+2xy+y^2-6x+3y-15=0 \end{cases}$

347. $\begin{cases} y^2-14xy+9x^2-18y+46x+32=0 \\ y^2-x^2-4x-4=0 \end{cases}$

348. $\begin{cases} x^2+4y^2+6y-3x+2=0 \\ x^2-4y^2-12xy+14y-9x+8=0 \end{cases}$

349. $\begin{cases} y^2-x^2-6xy+13y+x=0 \\ y^2+x^2+y-3x=0 \end{cases}$

350. $\begin{cases} 5y^2-6xy+5x^2+10x-6x-11=0 \\ y^2-xy+2x^2+y-2x-4=0 \end{cases}$

351. $\begin{cases} y^2-7xy+4x^2+6x-4=0 \\ y^2+x^2-2y+2x=0 \end{cases}$

352. $\begin{cases} y^2+xy+x^2+y-x=0 \\ y^2+2xy+x^2-y-x=0 \end{cases}$

353. $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2-x+y=0 \\ 2x^2-3xy+y^2+x+2y-3=0 \end{cases}$

354. $\begin{cases} y^2-7xy+4x^2+13x-2y-3=0 \\ y^2-14xy+9x^2+28x-4y-5=0 \end{cases}$

355. $\begin{cases} y^2+x^2-y-3x=0 \\ y^2-6xy-x^2+11y+7x-12=0 \end{cases}$

356. $\begin{cases} 5y^2-6xy+5x^2-16=0 \\ y^2-xy+2x^2-y-x-4=0 \end{cases}$

357. $\begin{cases} y^2+(x-4)y+x^2-2x+3=0 \\ y^3-5y^2+(x+7)y+x^3-x^2-5x-3=0 \end{cases}$

358. $\begin{cases} 2y^3-4xy^2-(2x^2-12x+8)y+x^3+6x^2-16x=0 \\ 4y^3-(3x+10)y^2-(4x^2-24x+16)y-3x^3+2x^2-12x+40=0 \end{cases}$

Вычислить результант многочленов

359. x^3-3x^2+2x+1 и $2x^2-x-1$;

360. $2x^3-3x^2+2x+1$ и x^2+x+3;

361. $2x^3-3x^2-x+2$ и x^4-2x^2-3x+4;

362. $3x^3+2x^2+x+1$ и $2x^3+x^2-x-1$;

363. $2x^4-x^3+3$ и $3x^3-x^2+4$.

При каком значении λ полиномы имеют общий корень.

364. $x^3-\lambda x+2$ и $x^2+\lambda x+2$;

365. $x^3-2\lambda x+\lambda^3$ и $x^2+\lambda^2-2$;

366. $x^3-\lambda x^2-9$ и $x^3+\lambda x-3$;

367. $x^3+\lambda x^2-9$ и $x^3+\lambda x-3$;

368. $x^3-2\lambda x+\lambda^3 x$ и $x^2+\lambda^2-2$.

Найти все значения λ, при которых многочлены:

369. $x^3-3x+\lambda$;

370. $x^4-4x+\lambda$;

371. $x^3-8x^2+(13-\lambda)x-(6+2\lambda)$;

372. $x^4-4x^3+(2-\lambda)x+2x-2$

имеют кратный корень

Построить минимальный многочлен над полем □ и полем □, который имеет следующие корни:

373. простой корень 1, простой корень 2 и трехкратный i;

374. простой корень 2, простой корень i и трехкратный 1;

375. простой корень –1, простой корень $-i$ и трехкратный 1;

376. простой корень i, простой корень $-i$ и трехкратный 0;

377. простой корень $-i$, простой корень i и без трехкратного;

378. простой корень $2i$, простой корень 1 и без трехкратного;

379. простой корень $3i$, простой корень $2i$ и без трехкратного;

380. простой корень $4i$, простой корень $-i$ и трехкратный –1;

381. простой корень $-2i$, простой корень $-2i$ и трехкратный –1;

382. простой корень 3, простой корень i и трехкратный i;

383. простой корень 2, простой корень $3i$ и трехкратный 1;

384. простой корень 1, простой корень $-3i$ и трехкратный 1;

385. простой корень нет, простой корень $4i$ и трехкратный 1;
386. простой корень $-3i$, простой корень нет и трехкратный 2;
387. простой корень i, простой корень $2i$ и без трехкратного;
388. простой корень i, простой корень $-2i$ и без трехкратного;
389. простой корень 1, простой корень 2 и трехкратный 3;
390. простой корень i, простой корень 2 и трехкратный 1;
391. простой корень $2i$, простой корень $-2i$ и трехкратный $3i$;
392. простой корень 1, простой корень -1 и трехкратный -2.

Докажите, что каждое из следующих чисел является алгебраическим и найдите его минимальный многочлен.

393. $\sqrt{5}$;
394. $\sqrt[3]{5}$;
395. $\sqrt[3]{10}$;
396. $\sqrt{4-3\sqrt{2}}$;
397. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;
398. $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$;
399. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$;
400. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;
401. $\sqrt{2}-\sqrt{6}$;
402. $-1+i\sqrt{5}$;
403. $\sqrt{7+24i}$;
404. $\sqrt{1+3i}$;
405. $\sqrt{1+4i\sqrt{3}}$;
406. $\sqrt{4-6i\sqrt{5}}$;
407. $\sqrt{3+4i\sqrt{3}}$;
408. $\sqrt{5-6i\sqrt{5}}$;
409. $\sqrt{2}-i\sqrt{3}$;
410. $\sqrt{2}+i\sqrt{6}$;
411. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;
412. $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$;
413. $\sqrt[3]{5-\sqrt{3}}$.

Найдите степень алгебраического числа z, которое является корнем многочлена.

414. x^3+3x^2+3x-6;
415. x^3+3x^2+3x-4;
416. x^3+3x^2+3x+9;
417. x^3+3x^2+3x+7;

Найдите степень над $\boldsymbol{Q}$ и над $\boldsymbol{R}$ каждого из корней многочлена:

418. x^4-6x^2+10;
419. x^4-6x^2-10;
420. x^4+6x^2-16;
421. x^4+6x^2+8.

Образует ли кольцо следующее числовое множество с обычным сложением и умножением:

422. $A_1 = \left\{ a + b\sqrt[3]{5} \mid a, b \in \boldsymbol{Q} \right\}$;

423. $A_2 = \left\{ a + b\sqrt[3]{25} \mid a, b \in \boldsymbol{Q} \right\}$;

424. $A_3 = \left\{ a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25} \mid a, b, c \in \boldsymbol{Q} \right\}$;

425. $A_4 = \left\{ a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \boldsymbol{Q} \right\}$;

426. $A_5 = \left\{ a + bi\sqrt[3]{5} \mid a, b \in \boldsymbol{Q} \right\}$.

Опишите следующие расширения поля $\boldsymbol{Q}$;

427. $\boldsymbol{Q}(3)$;

428. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$;

429. $\boldsymbol{Q}(2+\sqrt{5})$;

430. $\boldsymbol{Q}\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}\right)$;

431. $\boldsymbol{Q}(i)$;

432. $\boldsymbol{Q}(2-3i)$;

433. $\boldsymbol{Q}\left(\dfrac{1}{2-3i}\right)$;

434. $\boldsymbol{Q}(i\sqrt{3})$;

435. $\boldsymbol{Q}(2+5i\sqrt{3})$;

436. $\boldsymbol{Q}(e)$;

437. $\boldsymbol{Q}(\pi)$.

Используя алгоритм Евклида, освободить дробь от иррациональности в знаменателе.

438. $t = \dfrac{-8x_0 - 4}{x_0^2 + x_0 + 2}$, где x_0 – корень многочлена $x^3 + 2x + 1$.

439. $t = \dfrac{3x_0 + 6}{x_0^2 - x_0 + 2}$, где x_0 – корень многочлена $x^3 + x + 1$.

440. $t = \dfrac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 2}$;

441. $t = \dfrac{6}{\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} + 3}$;

442. $t = \dfrac{32}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 2}$;

443. $t = \dfrac{68}{\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} + 5}$;

444. $t = \dfrac{66}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 3}$;

445. $t = \dfrac{46}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} + 3}$;

446. $t=\dfrac{23}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{3}-3}$;

447. $t=\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}+2\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{3}+3}$;

448. $t=\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$;

449. $t=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}-2}$;

450. $t=\dfrac{1}{z^2+z+1}$, где $z^3-z+1=0$.

451. $t=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$, где $z^3-2z+2=0$.

452. $t=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}$;

453. $t=\dfrac{22}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}-1}$;

454. $t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}-1}$;

455. $t=\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}+1}$.

Докажите, что A – линейное пространство над полем. Найдите его базис. Является ли A полем: если:

456. $A=\left\{a+bi\sqrt[3]{7}\mid a,b\in \boldsymbol{Q}\right\}$;

457. $A=\left\{a+b\sqrt{7}\mid a,b\in \boldsymbol{Q}\right\}$;

458. $A=\left\{a+bi\sqrt[3]{7}+c\sqrt[3]{49}\mid a,b,c\in \boldsymbol{Q}\right\}$.

Найдите базис линейного пространства:

459. $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{5})$ над полем $\boldsymbol{Q}$;

460. $\boldsymbol{Q}(\sqrt[6]{5})$ над полем $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$;

461. $\boldsymbol{Q}(\sqrt[6]{5})$ над полем $\boldsymbol{Q}(5)$;

462. $\boldsymbol{Q}(i\sqrt[6]{5})$ над полем $\boldsymbol{Q}$;

463. $\boldsymbol{Q}(i\sqrt[6]{5})$ над полем $\boldsymbol{Q}(i\sqrt{5})$;

464. $\boldsymbol{Q}(i\sqrt[6]{5})$ над полем $\boldsymbol{Q}(i\sqrt[3]{\sqrt{5}})$;

Найдите степень расширения:

465. $\left[\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{5}):\boldsymbol{Q}\right]$;

466. $\left[\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{10}):\boldsymbol{Q}\right]$;

467. $\left[\boldsymbol{Q}(i\sqrt[3]{5}):\boldsymbol{Q}\right]$;

468. $\left[\boldsymbol{Q}(i\sqrt[3]{5}):\boldsymbol{Q}(i)\right]$;

469. $\left[\boldsymbol{Q}(i\sqrt[3]{5}):\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{5})\right]$;

470. $\left[\boldsymbol{Q}(i\sqrt[8]{5}):\boldsymbol{Q}\right]$;

471. $\left[\boldsymbol{Q}(i\sqrt[8]{5}):\boldsymbol{Q}(i\sqrt[8]{5^3})\right]$;

472. $\left[\boldsymbol{Q}(i\sqrt[8]{5}):\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})\right]$;

473. $\left[\boldsymbol{Q}(i\sqrt[8]{5}):\boldsymbol{Q}(\sqrt[4]{5})\right]$;

474. $\left[\boldsymbol{Q}(i\sqrt[12]{5}):\boldsymbol{Q}(\sqrt[6]{5})\right]$;

475. $\left[\boldsymbol{Q}(i\sqrt[12]{5}):\boldsymbol{Q}(i\sqrt[4]{5})\right]$;

476. $\left[\boldsymbol{Q}(i\sqrt[12]{5}):\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})\right]$.

Найдите степень расширения поля Q:

477. $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{5})$;

478. $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{10})$;

479. $\boldsymbol{Q}(\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}})$;

480. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{4+3\sqrt{2}})$;

481. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{7-21i})$;

482. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{1+3i})$;

483. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$;

484. $\boldsymbol{Q}(-\sqrt{2}+1)$;

485. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{1-2i\sqrt{2}})$;

486. $\boldsymbol{Q}\left(\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

487. $\boldsymbol{Q}\left(\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

488. $\boldsymbol{Q}\left(\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)$;

489. $\boldsymbol{Q}\left(\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)$;

490. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{3})$;

491. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{22+10i\sqrt{3}})$;

492. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{26-15\sqrt{3}}+\sqrt{3})$;

493. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{26+15\sqrt{3}}+\sqrt{3})$.

Докажите, что следующие уравнения неразрешимы в квадратных радикалах:

494. $x^3 = 2;$

495. $8x^3 - 6x - 1 = 0;$

496. $x^7 = 1;$

497. $x^9 = 1;$

498. $x^5 + 2x^3 + 2 = 0;$

499. $4x^6 - 5x^3 + 10 = 0.$

Докажите, что невозможно построить с помощью циркуля и линейки углы

500. $\frac{2\pi}{7};$

501. $\frac{2\pi}{9};$

502. $\frac{2\pi}{11};$

503. $\frac{2\pi}{13};$

504. $\frac{2\pi}{25}.$

Решите уравнение в квадратных радикалах и постройте его корни:

505. $x^3 = 1;$

506. $x^4 - 12x^3 + 16 = 0;$

507. $x^5 = 1;$

508. $x^4 - 16x^3 + 4 = 0.$

Какие из следующих чисел можно построить с помощью циркуля и линейки:

509. $\sqrt{3};$

510. $\sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{3};$

511. $\sqrt[4]{3};$

512. $\sqrt[5]{3};$

513. $\sqrt[6]{3};$

514. $\sqrt[8]{3}.$

Можно ли построить с помощью циркуля и линейки все значения радикала:

515. $\sqrt[4]{1};$

516. $\sqrt[6]{1};$

517. $\sqrt[8]{1};$

518. $\sqrt[10]{1};$

519. $\sqrt[12]{1};$

520. $\sqrt[12]{1};$

521. $\sqrt[14]{1};$

522. $\sqrt[16]{1}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Апатенок Р.Ф. [и др.]. Элементы алгебры и аналитическая геометрия. – Минск: Вышэйшая школа, 1977.
2. Бурдун А.А. [и др.]. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. – Минск: Университетское, 1986.
3. Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С. Алгебра. – М.: Просвещение, 1981.
4. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: Факториал Пресс, 2001.
5. Глухов М.М., Солодовников А.С. Задачник-практикум по высшей алгебре. – М.: Просвещение, 1976.
6. Дадаян А.А., Дударенко В.А. Алгебра и геометрия. – Минск, 1989.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 2000.
8. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 1979.
9. Куликов Л.Я. [и др.]. Сборник задач по алгебре и теории чисел. – М.: Просвещение, 1993.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Высшая школа, 1965.
11. Лельчук М.П. Практические задания по алгебре и теории чисел / М.П. Лельчук, И.И. Полевченко, А.М. Радьков, Б.Д. Чеботаревский. – Минск, 1986.
12. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов: в 2 ч. – М.: Просвещение, 1978.
13. Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч. – Минск, 2001.
14. Монахов В.С., Бузланов А.В. Алгебра и теория чисел: практикум: учеб. пособие: в 2 ч. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – Ч. 1. – 264 с.
15. Окунев Л.Я. Основы современной алгебры. – М.: Учпедгиз, 1941. – 204 с.
16. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Высшая школа, 1966.
17. Окунев Л.Я. Высшая алгебра: учебник. – 3-е изд. стериотип. – М.: Лань, 2014. – 336 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) (Классическая учебная литература по математике) (Лучшие классические учебники).
18. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Просвещение, 1964.
19. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре: учеб. пособие. – М.: Лань, 2009. – 184 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) (Классические задачники и практикумы) (Классическая учебная литература по математике).
20. Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д. Алгебра и теория чисел. – Минск, 1992.
21. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие / под ред. А.И. Кострикина. – М.: Факториал, 1995.

22. Солодовников А.С., Родина М.А. Задачник-практикум по алгебре. – М.: Просвещение, 1985.
23. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре: учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1984.
24. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 1999.
25. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. – Минск: Вышэйшая школа, 1982.
26. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. – Минск: дизайн ПРО, 2000.
27. Проскуряков И.В. Числа и многочлены. – М., 1965.
28. Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций. – М., 2003.
29. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М., 1973.
30. Общая алгебра; под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М., 1990, 1991. – Т. 1, 2.
31. Ленг С. Алгебра. – М., 1968.
32. Прасолов В.В. Многочлены. – М., 2003.
33. Скорняков Л.А. Элементы алгебры. – М., 1980.
34. ШафаревичИ.Р. Основные понятия алгебры. – М., 2001.
35. Бахтурин Ю.А. Основные структуры современной алгебры. – М., 1990.
36. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М., 2013.
37. Б.Л. ван дер Варден. Алгебра. – М., 1979.
38. Зуланке Р., Онищик Л.А. Алгебра и геометрия. – М., 2004. – Т. 1, 2.
39. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М., 2000. – Ч. I: Основы алгебры.
40. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М., 2000. – Ч. II: Линейная алгебра.
41. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М., 2000. – Ч. III: Основы структуры алгебры.
42. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. – М., 1983.

Учебное издание

ВОРОБЬЕВ Николай Николаевич

ВОРОБЬЕВ Сергей Николаевич

НАУМИК Михаил Иванович

АЛГЕБРА: ТЕОРИЯ МНОГОЧЛЕНОВ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *И.В. Волкова*

Подписано в печать 2018. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 4,82. Уч.-изд. л. 5,39. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.