УДК 517.936:977.1

Стабилизируемость одного класса вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа

О.В. Храмцов
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В работе объектом исследования являются вполне интегрируемые стационарные системы Пфаффа, которые линейны по входу – управлению и по выходу – состоянию системы. Такие системы изучались на обладание ими различными свойствами, например, свойством полной управляемости, континуум управляемости, максимальной управляемости. В настоящей работе рассматривается вопрос об обладании указанными системами свойством стабилизации. Под стабилизацией понимается построение с помощью обратной связи такой вполне интегрируемой стационарной системы Пфаффа, тривиальное решение которой является асимптотически устойчивым в первом квадранте плоскости изменения двумерного аргумента.

Цель статьи – получение условий, при выполнении которых линейная стационарная вполне интегрируемая система Пфаффа обладает свойством стабилизации в случае векторного управления.

Материал и методы. *Материалом исследования является дифференциальная модель процесса в виде линейной стационарной вполне интегрируемой системы Пфаффа в специальной форме. Методами исследования выступают методы матричного анализа, методы теории систем дифференциальных уравнений Пфаффа, метод внешних форм Картана.*

Результаты и их обсуждение. *В работе определено понятие свойства стабилизации линейной стационарной вполне интегрируемой системы Пфаффа, представленной в специальной форме. Рассмотрен один класс систем Пфаффа, для которого в случае векторного управления получен критерий обладания системами этого класса свойством стабилизации. Критерий стабилизации носит ранговый характер от некоторой матрицы, составленной с помощью известных матриц исходной системы. Проверка критерия не вызывает затруднений, так как вычисления проводятся в рамках матричного анализа. Исследование носит фундаментальный характер.*

Заключение. *Известно, что для вполне управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет место не только стабилизация, но и возможно построение любого наперед заданного спектра. Для систем Пфаффа в случае наличия свойства стабилизируемости задача построения любого наперед заданного спектра разрешима не всегда.*

Ключевые слова: *система Пфаффа, полная интегрируемость, управляемость, стабилизация.*

Stabilizability of a Class of Completely Integrated Linear Stationary Pfaffian Systems

O.V. Khramtsov
Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

The research object is completely integrated stationary Pfaffian systems which are linear at the entrance – controllability and the exit – the state of the system. Such systems were investigated from the point of view of their possessing different qualities, such as the quality of complete controllability, continuum controllability, maximum controllability. The issue of the mentioned systems possessing the quality of stabilizability is studied in the present work. Stabilizability is understood as building with the help of the reverse link of such a completely integrated stationary Pfaffian system, the trivial solution of which is asymptotically stable in the first quadrant of the measurement surface of a two-dimensional argument.

The purpose of the work is obtaining conditions under which the linear stationary completely integrated Pfaffian system possesses the quality of stabilizability in the case of vector controllability.

Material and methods. *The research object is the differential model of the process in a special form of the linear stationary completely integrated Pfaffian system. The research methods are methods of matrix analysis, methods of the theory of the systems of Pfaffian differential equations, the method of Kartan outer forms.*

Findings and their discussion. *The notion of the stabilizability property of the linear stationary completely integrated Pfaffian system, which is presented in a special form, is identified in the paper. One class of Pfaffian systems is considered for which, in case of vector controllability, a criterion of possession by the systems of this class of the stabilizability property is obtained. The stabilizability criterion is of the range character from some matrix which is composed with the help of the known matrices of the original system. The test of the criterion doesn't cause difficulties since calculations are made within matrix analysis. The research is of fundamental character.*

Conclusion. *Not only stabilizability but also possible building of any beforehand given spectrum takes place for a completely controllable system of ordinary differential equations. For Pfaffian systems in the case of the presence of the stabilizability property the task of building any beforehand given spectrum is not always solvable. The research is of fundamental character. A completely controllable system of simple differential equations is known not only to be stable but also it is possible to build any beforehand given spectrum. For Pfuff systems in case of the presence of the quality of stabilizability the problem of building any beforehand given spectrum can not always be solved.*

Key words: *Pfaffian system, complete integration, stabilizability, controllability.*

В данной работе продолжается изучение свойств вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа. В [1–3] получены критерии полной управляемости, континуум управляемости, максимальной управляемости. Р. Калман [4, с. 62] доказал критерий наличия свойства стабилизации для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящем исследовании решается вопрос о возможности стабилизации линейной стационарной вполне интегрируемой системы Пфаффа в случае векторного управления. Рассматриваемая система является более сложным объектом, ибо представляет собой переопределенную систему дифференциальных уравнений с частными производными. Полученный критерий стабилизации носит ранговый характер от некоторой матрицы, составленной с помощью известных матриц исходной системы.

Цель статьи – получение условий, при выполнении которых линейная стационарная вполне интегрируемая система Пфаффа обладает свойством стабилизации в случае векторного управления.

Материал и методы. Материалом исследования является дифференциальная модель процесса в виде линейной стационарной вполне интегрируемой системы Пфаффа в специальной форме [5, с. 323]. Методами исследования выступают методы матричного анализа, методы теории систем дифференциальных уравнений Пфаффа, метод внешних форм Картана.

Результаты и их обсуждение.

I. Объект исследования

Рассматривается процесс, описываемый вполне интегрируемой линейной стационарной системой Пфаффа в специальной форме [5, с. 323]:

$$\Theta: \quad dx=(A_1x+B_1u(s))ds_1+(A_2x+B_2u(s))ds_2, \tag{1.1}$$

где $s=(s_1,s_2)\in \mathrm{R}^2$, $x\in \mathrm{R}^n$ – выход, состояние системы, $u\in \mathrm{R}^r$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $r\le n$, A_1,A_2,B_1,B_2 – постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей.

Условия полной интегрируемости [6, с. 44] систем Пфаффа для рассматриваемой системы (1.1) имеют вид [1]:

1. Условие перестановочности матриц A_1,A_2 системы:

$$W\equiv A_2A_1-A_1A_2=0. \tag{1.2}$$

2. Условие согласованности рангов матриц B_1,B_2,P:

$$\mathrm{rank}[\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2]=\mathrm{rank}[\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2,\mathrm{P}]=\mathrm{m},\quad \mathrm{P}\equiv \mathrm{A}_2\mathrm{B}_1-\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2,\quad \mathrm{m}\le \mathrm{r}, \tag{1.3.1}$$

$$\exists\alpha\in \mathrm{R}^2: rank[\alpha_1B_1+\alpha_2B_2]=m,\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2). \tag{1.3.2}$$

При выполнении условий (1.2), (1.3) для заданного вектора u система (1.1) имеет единственное решение с начальным условием $x(0)=x^0$.

Выполнение условий (1.2), (1.3) означает, согласно теории систем Пфаффа, что система (1.1) находится в инволюции [7, с. 176] и не требует продолжения [7, с. 287] в инволюцию.

Критерий полной управляемости линейных вполне интегрируемых стационарных систем Пфаффа состоит в ранговом условии [1]:

$$\exists\alpha\in R^2: rank[B_1(\alpha), A_1(\alpha)B_1(\alpha),\ldots,A_1^{n-1}(\alpha)B_1(\alpha)]=n,\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2), \tag{1.4}$$

где $B_1(\alpha)=\alpha_1B_1+\alpha_2B_2,\quad A_1(\alpha)=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2$.

Если условие согласованности рангов (1.3) выполняется для некоторого вектора α, то оно имеет место для континуум направлений, задаваемых векторами α. Это утверждение справедливо и для критерия управляемости (1.4). Поэтому существует континуум векторов α, что оба условия выполняются одновременно. Взяв такие векторы α,β, перейдем в системе (1.1) к новому векторному аргументу t:

$$s=Mt,\quad s=(s_1,s_2),\quad t=(t_1,t_2),\quad M=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix},\ \det M\neq 0. \tag{1.5}$$

При этом присвоим новым матрицам прежние обозначения:

$$B_1:=B_1(\alpha)=\alpha_1B_1+\alpha_2B_2,\quad A_1:=A_1(\alpha)=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2,$$
$$B_2:=B_2(\beta)=\beta_1B_1+\beta_2B_2,\quad A_2:=A_2(\beta)=\beta_1A_1+\beta_2A_2. \tag{1.6}$$

В результате получается система для состояния системы *y:*

$$dy=(A_1y+B_1u(t))dt_1+(A_2y+B_2u(t))dt_2,\qquad y=x(Mt). \tag{1.7}$$

Матрицы системы (1.7) удовлетворяют условиям: условию перестановочности (1.2), условию согласованности рангов (1.3), которое принимает вид

$$rankB_1=rankB_2=rank[B_1,P]=m,\quad P\equiv A_2B_1-A_1B_2,\quad m\le r, \tag{1.8}$$

и критерию управляемости, запись которого формально упростится:

$$rank[B_1,A_1B_1,\ldots,A_1^{n-1}B_1]=n. \tag{1.9}$$

Условие (1.8) означает существование такой вещественной матрицы K, что имеет место равенство

$$B_2=B_1K. \tag{1.10}$$

II. Постановка задачи

Свойство стабилизации состоит в следующем. Пусть обратная связь имеет вид

$$u_i=c_{[i]}y,\quad c_{[i]}\equiv(c_{i1},c_{i2},...,c_{in}),\quad i\in\{1,\ldots,m\},\quad C\equiv((c_{[i]}))_1^r, \tag{2.1}$$

где каждая вещественная вектор-строка $c_{[i]}$ подлежит определению. При замыкании системы (1.1) обратной связью (2.1) (т.е. подстановка значения u из (2.1) в (1.1)) она переходит в систему

$$dx=H_1xds_1+H_2xds_2, \tag{2.2}$$

здесь $H_i=A_i+B_iC, i=1,2.$

Определение 1. *Система (1.1) обладает свойством стабилизации тогда и только тогда по определению, когда существует такая вещественная матрица C, что замкнутая система (2.2) является вполне интегрируемой и ее тривиальное решение асимптотически устойчиво в первом квадранте $S=[0,\infty)\times[0,\infty)$ плоскости изменения векторного аргумента $s=(s_1,s_2)$.*

З а д а ч а. Указать условия на матрицы системы (1.1), при которых система Пфаффа обладает свойством стабилизации согласно определению 1.

III. Вспомогательные утверждения

Пусть линейное преобразование L задается с помощью произвольной постоянной невырожденной вещественной матрицы D

$$Dz = y\,, \quad \det D \neq 0. \tag{3.1}$$

Система (1.7) с учетом (1.10) принимает вид

$$dz = (DA_1D^{-1}z + DB_1u(t))dt_1 + (DA_2D^{-1}z + DB_1Ku(t))dt_2. \tag{3.2}$$

Лемма 1. *При линейном преобразовании L свойство перестановочности для матриц системы (3.2) сохраняется.*

Действительно, в силу (1.2) справедливо равенство

$$\bar{W} = \bar{A}_2\bar{A}_1 - \bar{A}_1\bar{A}_2 = DA_2D^{-1}DA_2D^{-1} - DA_1D^{-1}DA_2D^{-1} = DWD^{-1} = 0$$

(здесь черта сверху означает новые матрицы в системе (3.2) после преобразования (3.1)).

Лемма 2. *При линейном преобразовании L свойство согласованности рангов сохраняется.*

Действительно, справедливо равенство

$$rank[DB_1, DB_2, DA_2D^{-1}DB_2 - DA_1D^{-1}DB_1] = rankD[B_1, B_2, A_2B_2 - A_1B_1] = m$$

в силу свойства ранга произведения матриц [8, с. 25].

Лемма 3. *При линейном преобразовании L критерий полной управляемости (1.8) сохраняется.*

Справедливость леммы доказывается аналогичными рассуждениями.

Пусть имеются две пары, составленные из матрицы и вектора: F, q и G, w, где известная матрица F представлена в канонической форме [9, с. 239]

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

а также известны векторы и вещественное число k

$$q = (0, 0, \dots, 0, 1)^T, \quad w = kq\,, \quad k \in \mathrm{R}^1, \tag{3.4}$$

и выполняется условие согласованности рангов ($m = 1$)

$$rank[q, w, Gq - Fw] = 1\,. \tag{3.5}$$

Имеет место

Теорема 1. *Матрица G, перестановочная с матрицей F*

$$FG = GF \tag{3.6}$$

и удовлетворяющая условию согласованности рангов (3.5), представима в виде

$$G = pE + kF\,, \qquad \forall p \in \mathrm{R}^1. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (3.7) означает, что имеет место равенство $Fw - Gq = pq$, $\forall p \in \mathrm{R}^1$, а для его выполнения необходимо и достаточно для элементов матрицы $G = ((g_{ij}))_{11}^{nn}$ наличие равенств

$$g_{1n} = g_{2n} = \dots = g_{n-2,n} = 0\,, \quad g_{n-1,n} = k\,, \quad g_{nn} = kf_n + p\,. \tag{a.1}$$

Матрицы для условия (3.6) с учетом (a.1) имеют представление

$$FG = \begin{bmatrix} g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & \dots & g_{2,n-1} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & \dots & g_{3,n-1} & 0 \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & \dots & g_{4,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-2,1} & g_{n-2,2} & g_{n-2,3} & g_{n-2,4} & g_{n-2,5} & \dots & g_{n-2,n-1} & 0 \\ g_{n-1,1} & g_{n-1,2} & g_{n-1,3} & g_{n-1,4} & g_{n-1,5} & \dots & g_{n-1,n-1} & k \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & g_{n4} & g_{n5} & \dots & g_{n,n-1} & g_{nn} \\ fg^{[1]} & fg^{[2]} & fg^{[3]} & fg^{[4]} & fg^{[5]} & \dots & fg^{[n-1]} & fg^{[n]} \end{bmatrix},$$

здесь $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$, $g^{[i]}$ – i-й столбец матрицы G, $fg^{[n]}=kf_{n-1}+f_n(kf_n+p)$, $g_{nn}=kf_n+p$.

$$GF=\begin{bmatrix} 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & \cdots & g_{1,n-2} & g_{1,n-1} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & \cdots & g_{2,n-2} & g_{2,n-1} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & \cdots & g_{3,n-2} & g_{3,n-1} \\ 0 & g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & \cdots & g_{4,n-2} & g_{4,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & g_{n-2,1} & g_{n-2,2} & g_{n-2,3} & g_{n-2,4} & \cdots & g_{n-2,n-2} & g_{n-2,n-1} \\ kf_1 & r_{n-1,2} & r_{n-1,3} & r_{n-1,4} & r_{n-1,5} & \cdots & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & r_{n4} & r_{n5} & \cdots & r_{n,n-1} & r_{nn} \end{bmatrix},$$

здесь элементы предпоследней строки в матрице GF имеют значения

$$r_{n-1,1}=kf_1,\ r_{n-1,2}=g_{n-1,1}+kf_2,\ r_{n-1,3}=g_{n-1,2}+kf_3,\ \ldots,\ r_{n-1,n}=g_{n-1,n-1}+kf_n,$$

а элементы последней строки соответственно

$$r_{n1}=f_1(kf_n+p),\ r_{n2}=g_{n1}+f_2(kf_n+p),\ r_{n3}=g_{n2}+f_3(kf_n+p),\ \ldots,$$
$$r_{nn}=g_{n,n-1}+f_n(kf_n+p).$$

Используем условие перестановочности (3.6) для нахождения элементов матрицы G. Равенство первых столбцов дает значения элементов

$$g_{21}=g_{31}=g_{41}=\ldots=g_{n-1,1}=0,\quad g_{n1}=kf_1, \tag{a.2}$$

причем равенство последних координат в первых столбцах $f_1(kf_n+p)=fg^{[1]}$ с учетом (а.1)–(а.2) определяет значение элемента

$$g_{11}=p. \tag{a.3}$$

Равенство вторых столбцов с учетом (а.1)–(а.3) дает значения элементов

$$g_{22}=g_{11}=p,\quad g_{32}=g_{21}=0,\quad g_{42}=g_{31}=0,\quad \ldots,\ g_{n-2,2}=g_{n-3,1}=0,\ g_{n-1,2}=g_{n-2,1}=0,$$
$$g_{n2}=g_{n-1,1}+kf_2=kf_2, \tag{a.4}$$

причем равенство последних координат во вторых столбцах $g_{n1}+f_2(kf_n+p)=fg^{[2]}$ с учетом (а.1)–(а.4) определяет значение элемента

$$g_{12}=k. \tag{a.5}$$

Равенство третьих столбцов с учетом (а.1)–(а.5) дает значения элементов

$$g_{23}=g_{12}=k,\quad g_{33}=g_{22}=p,\quad g_{43}=g_{32}=0,\quad \ldots,\ g_{n-1,3}=g_{n-2,2}=0,$$
$$g_{n3}=g_{n-1,2}+kf_3=kf_3, \tag{a.6}$$

причем равенство последних координат в третьих столбцах $g_{n2}+f_3(kf_n+p)=fg^{[3]}$ с учетом (а.1)–(а.4) определяет значение элемента

$$g_{13}=0. \tag{a.7}$$

Равенство четвертых столбцов с учетом (а.1)–(а.7) дает значения элементов

$$g_{24}=g_{13}=0,\quad g_{34}=g_{23}=k,\quad g_{44}=g_{33}=p,\ g_{54}=g_{43}=0,\ \ldots,\ g_{n-1,4}=g_{n-2,3}=0,\ g_{n4}=g_{n-1,3}+kf_4=kf_4, \tag{a.8}$$

причем равенство последних координат в четвертых столбцах $g_{n3}+f_3(kf_n+p)=fg^{[4]}$ с учетом (а.1)–(а.4) определяет значение элемента

$$g_{14}=0. \tag{a.9}$$

Равенство предпоследних столбцов с учетом (а.1)–(а.i) дает значения элементов

$$g_{2,n-1}=g_{1,n-2}=0,\ g_{3,n-1}=g_{2,n-2}=0,\ \ldots,\ g_{n-3,n-1}=g_{n-4,n-2}=0,\ g_{n-2,n-1}=g_{n-3,n-2}=k,\ g_{n-1,n-1}=g_{n-2,n-2}=p,$$

$$g_{n,n-1} = g_{n-1,n-2} + kf_{n-1} = kf_{n-1}, \qquad \text{(a.2n–4)}$$

причем равенство последних координат в предпоследних столбцах $g_{-n,n-1} + f_{n-1}(kf_n + p) = fg^{[n-1]}$ с учетом (a.1)–(a.2n–4) определяет значение элемента

$$g_{1n} = 0. \qquad \text{(a.2n–3)}$$

Равенство последних столбцов с учетом (a.1)–(a.2n–3) является проверкой проведенных вычислений

$$0 = g_{1,n-1}, \quad 0 = g_{2,n-1}, \quad \ldots, \quad 0 = g_{n-3n-1}, \quad k = g_{n-2,n-1}, \quad p = g_{n-1,n-1},$$
$$g_{nn} = g_{n-1,n-1} + kf_n,$$

причем равенство последних координат в последних столбцах $g_{n,n-1} + f_n(kf_n + p) = fg^{[n]}$ с учетом (a.1)–(a.2n–3) определяет равенство $0 = 0$. Проверка подтверждает правильность вычислений.

Полученные (a.i) значения элементов g_{ij} дают матрицу

$$G = \begin{bmatrix} p & k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p & k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & k \\ kf_1 & kf_2 & kf_3 & \ldots & kf_n + p \end{bmatrix} = pE + kF,$$

где матрица F определена в (3.3), число k задано в (3.4), а число p произвольно. Теорема 1 доказана.

IV. Свойство стабилизации в случае скалярного управления

В рассматриваемом случае скалярного управления в системе (1.1) матрицы B_1, B_2 переходят в векторы b_1, b_2, для которых условие согласования рангов (1.3) имеет вид

$$rank[b_1, b_2] = rank[b_1, b_2, A_2b_1 - A_1b_2] = 1,$$

что означает линейную зависимость между векторами b_1, b_2

$$\exists k_0 \in \mathrm{R}^1 : b_2 = k_0 b_1. \qquad (4.1)$$

Поэтому система (1.1) имеет вид

$$dx = (A_1x + b_1u(s))ds_1 + (A_2x + k_0b_1u(s))ds_2, \quad u \in \mathrm{R}^1. \qquad (4.2)$$

При преобразовании аргумента (1.5) появляются новые векторы

$$\hat{b}_1 := (\alpha_1 + k_0\alpha_2)b_1, \quad \hat{b}_2 := k\hat{b}_1, \quad k \equiv (\beta_1 + k_0\beta_2)/(\alpha_1 + k_0\alpha_2), \qquad (4.3)$$

а система (1.7) получает в силу обозначений (4.3) вид

$$dy = (\hat{A}_1y + \hat{b}_1u(t))dt_1 + (\hat{A}_2y + k\hat{b}_1u(t))dt_2, \qquad (4.4)$$

при этом матрицы $\hat{A}_i$ перестановочны и определены в (1.6).

Имеет место

Теорема 2. *При выполнении рангового условия*

$$rankK(\hat{b}_1, \hat{A}_1) = n, \quad K(\hat{b}_1, \hat{A}_1) \equiv [\hat{b}_1, \hat{A}_1\hat{b}_1, \ldots, \hat{A}_1^{n-1}\hat{b}_1], \qquad (4.5)$$

всегда возможно построение с помощью обратной связи $u = cy$ спектра матрицы $(\hat{A}_1 + \hat{b}_1c)$ с произвольно выбранными собственными числами λ_i, при этом собственные числа μ_i матрицы $(\hat{A}_2 + k\hat{b}_1c)$ вычисляются по формулам

$$\mu_i = k\lambda_i + p. \qquad (4.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие (4.5). Построим новый базис

$$e_1=\hat{A}_1^{n-1}+\alpha_1\hat{A}_1^{n-2}\hat{b}_1+\ldots+\alpha_{n-3}\hat{A}_1^2\hat{b}_1+\alpha_{n-2}\hat{A}_1\hat{b}_1+\alpha_{n-1}\hat{b}_1\ ,$$
$$e_2=\hat{A}_1^{n-2}\hat{b}_1+\alpha_1\hat{A}_1^{n-3}\hat{b}_1+\ldots+\alpha_{n-3}\hat{A}_1\hat{b}_1+\alpha_{n-2}\hat{b}_1, \quad \text{(в.1)}$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$e_{n-1}=\hat{A}_1\hat{b}_1+\alpha_1\hat{b}_1,$$
$$e_n=\hat{b}_1.$$

Здесь α_i – коэффициенты характеристического многочлена матрицы $\hat{A}_1$.

В результате применения к системе (4.4) линейного преобразования

$$Dz=y,\qquad D=[e_1,e_2,\ldots,e_n]\ ,\ \det D\neq 0, \quad \text{(в.2)}$$

она переходит в систему

$$dz=(D\hat{A}_1D^{-1}z+D\hat{b}_1u(t))dt_1\ +\ (D\hat{A}_2D^{-1}z+Dk\hat{b}_1u(t))dt_2\ . \quad \text{(в.3)}$$

В новом базисе (в.1) получаются [9, с. 55] значения векторов

$$D\hat{b}_1=q,\quad Dk\hat{b}_1=kq,\quad q=(0,\ldots,0,1)^T. \quad \text{(в.4)}$$

В свою очередь матрица $D\hat{A}_1D^{-1}\equiv F$ является [9, с. 55] матрицей канонического представления

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}. \quad \text{(в.5)}$$

Согласно теореме 1 условие перестановочности и условие согласованности рангов определяют матрицу $D\hat{A}_2D^{-1}\equiv G=pE+kF$ в виде

$$G=\begin{bmatrix} p & k & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & p & k & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p & k\\ -ka_n & -ka_{n-1} & -ka_{n-2} & -ka_{n-3} & \ldots & -ka_2 & -ka_1+p \end{bmatrix} \quad \text{(в.6)}$$

В матрице G вещественное число p произвольно. Поэтому получен целый класс $\Theta(p,k)$ систем Пфаффа (в.3)

$$dz=(Fz+qu(t))dt_1+(Gz+kqu(t))dt_2\ , \quad \text{(в.7)}$$

здесь матрицы F, G и вектор q определены равенствами (в.5), (в.6) и (в.4) соответственно.

В матрице F числа $a_i, i=1,\ldots,n$, являются коэффициентами характеристического многочлена

$$\chi_{A_1}(\lambda)\equiv\left|E\lambda-\hat{A}_1\right|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n \quad \text{(в.8)}$$

матрицы $\hat{A}_1$. Более того [8, с. 56], характеристические многочлены матриц $\hat{A}_1$ и F совпадают

$$\chi_{A_1}(\lambda)\equiv\ \chi_F(\lambda). \quad \text{(в.9)}$$

В свою очередь характеристический многочлен матрицы G имеет вид

$$\chi_G(\mu)\equiv\left|E\mu-G\right|=\left|E\mu-(pE+kF)\right|=k\left|E\frac{\mu-p}{k}-F\right|=$$

$$=\hat{\lambda}^n+a_1\hat{\lambda}^{n-1}+\ldots+a_n \quad =\chi_G(\hat{\lambda}), \quad \hat{\lambda}=\frac{\mu-p}{k}. \qquad (в.10)$$

Из равенств (в.8)–(в.10) следует совпадение характеристических многочленов $\chi_G(\hat{\lambda})\equiv\chi_F(\lambda)$, а это означает, что собственные числа матриц F и G связаны равенством

$$\lambda_i=\frac{\mu_i-p}{k}, \qquad \text{или} \qquad \mu_i=k\lambda_i+p. \qquad (в.11)$$

Для решения задачи стабилизации используется обратная связь

$$u=cx, \quad c=(c_1,c_2,\ldots,c_n), \qquad (в.12)$$

где произвольная вещественная вектор-строка C подлежит определению. При замыкании системы (в.7) обратной связью (в.12) получается система

$$dz=H_1zdt_1+H_2zdt_2, \qquad (в.13)$$

здесь $H_1=F+qc,\qquad H_2=G+kqc.$

Через непосредственные вычисления можно убедиться в том, что матрицы H_1,H_2 перестановочны. Строка с номером n в матрице H_1 имеет вид

$$(H_1)_{[n]}=(-a_n+c_1,-a_{n-1}+c_2,\ldots,-a_1+c_n).$$

Поэтому характеристическое уравнение $\left|\lambda E-H_1\right|=0$ для матрицы H_1 имеет представление

$$\chi_{H_1}(\lambda)\equiv\lambda^n+(a_1-c_n)\lambda^{n-1}+(a_2-c_{n-1})\lambda^{n-2}+\ldots\ \ldots+(a_{n-1}-c_2)\lambda+(a_n-c_1)=0. \qquad (в.14)$$

В свою очередь характеристическое уравнение $\left|\hat{\lambda}E-H_2\right|=0$ для матрицы H_2 в силу (в.10) имеет аналогичный вид

$$\chi_{H_2}(\lambda)\equiv\hat{\lambda}^n+(a_1-c_n)\hat{\lambda}^{n-1}+(a_2-c_{n-1})\hat{\lambda}^{n-2}+\ldots+(a_{n-1}-c_2)\hat{\lambda}+(a_n-c_1)=0. \qquad (в.15)$$

В характеристическом уравнении (в.14) возможно построение каждого из его коэффициентов за счет произвольности выбора каждой компоненты c_i вектора c. Значит, осуществимо построение любого наперед заданного спектра матрицы H_1, при этом имеет место равенство (4.6) в силу равенства (в.11). Теорема 2 доказана.

Назовем радиусом для строящихся спектров число $\rho=\max(\min\{\mathrm{Re}\lambda_j,\mathrm{Re}\mu_j\})$, где λ_j,μ_j –собственные числа матриц H_1,H_2. Благодаря теореме 2 имеет место

Теорема 3. *При выполнении рангового условия (4.5) вполне интегрируемая система (4.2) обладает свойствами:*

1. *В случае сонаправленности векторов* b_1,b_2 $(k_0>0)$ *и* $\forall p\in\mathrm{R}^1$ *система стабилизируема, при этом радиус спектра не ограничен.*
2. *В случае противоположной направленности векторов* b_1,b_2 $(k_0<0)$ *и* $p\neq0$ *система стабилизируема, при этом радиус спектра ограничен.*
3. *В случае противоположной направленности векторов* b_1,b_2 $(k_0<0)$ *при наличии равенства p = 0 система* ***не*** *стабилизируема.*

Доказательство. В результате возвращения согласно (1.5) в системе (в.3) к исходному аргументу

$$t=M^{-1}s, \quad M^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\beta_2 & -\beta_1\\ -\alpha_2 & \alpha_1\end{bmatrix}, \quad \Delta=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq0,$$

получится система

$$dz=\tilde{H}_1ds_1+\tilde{H}_2ds_2. \qquad (с.1)$$

Собственные числа $\tilde{\lambda}_i, \tilde{\mu}_i$ матриц $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ соответственно имеют значения

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{\beta_2}{\Delta}\lambda_i - \frac{\alpha_2}{\Delta}\mu_i, \qquad \tilde{\mu}_i = \frac{-\beta_1}{\Delta}\lambda_i + \frac{\alpha_1}{\Delta}\mu_i, \tag{c.2}$$

где λ_i, μ_i – собственные числа матриц F, G соответственно. Для стабилизируемости системы (с.1) согласно определению 1 необходимо и достаточно наличие условий

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\lambda}_i < 0, \qquad \mathrm{Re}\,\tilde{\mu}_i < 0, \tag{c.3}$$

или подробно, учитывая равенства (4.6),

$$\frac{1}{\Delta}[x(\beta_2 - k\alpha_2) - \alpha_2 p] < 0, \quad \frac{1}{\Delta}[x(-\beta_1 + k\alpha_1) + \alpha_1 p] < 0, \ \ (x = \mathrm{Re}\lambda_i). \tag{c.4}$$

З а м е ч а н и е. Коэффициенты при параметре x в силу определения числа k из (4.3) имеют значения

$$\frac{1}{\Delta}(\beta_2 - k\alpha_2) = \frac{1}{\alpha_1 + k_0\alpha_2}, \qquad \frac{1}{\Delta}(-\beta_1 + k\alpha_1) = \frac{k_0}{\alpha_1 + k_0\alpha_2}. \tag{c.5}$$

Доказательство утверждений теоремы проведем через рассмотрение всех вариантов для величин

$$\Delta, s(\alpha) = \alpha_1 + k_0\alpha_2, k_0, p.$$

Вариант 1111: $\Delta > 0, s(\alpha) > 0, k_0 > 0, p > 0.$ В этом случае согласно (с.5) получим неравенства (с.4) одного смысла

$$x\frac{1}{\alpha_1 + k_0\alpha_2} < \frac{\alpha_2 p}{\Delta}, \qquad x\frac{k_0}{\alpha_1 + k_0\alpha_2} < -\frac{\alpha_1 p}{\Delta}. \tag{c.6}$$

Согласно теореме 2 параметр x можно построить произвольным. Поэтому существует решение системы (с.6) на неограниченном промежутке

$$\Upsilon_{1111} = (-\infty, x_0), \quad x_0 = \min\left\{\frac{\alpha_2 p}{\Delta}s(\alpha), -\frac{\alpha_1 p}{k_0\Delta}s(\alpha)\right\} = -\frac{\alpha_1 p}{k_0\Delta}s(\alpha),$$

при котором выполняются условия (с.3), (с.4). Стабилизируемость системы (с.1) для варианта 1111 доказана, при этом радиус спектра не ограничен.

Аналогичные вычисления дают результаты для остальных вариантов.

Вариант 1112: $\Delta > 0, s(\alpha) > 0, k_0 > 0, p < 0.$ Система (с.1) стабилизируема с неограниченным радиусом спектра, и интервал для параметра x имеет представление: $\Upsilon_{1112} = (-\infty, \frac{\alpha_2 p s(\alpha)}{\Delta}).$

Вариант 1113: $\Delta > 0, s(\alpha) > 0, k_0 > 0, p = 0.$ Система (с.1) стабилизируема с неограниченным радиусом спектра, и интервал для параметра x имеет представление: $\Upsilon_{1113} = (-\infty, 0).$

Вариант 1121: $\Delta > 0, s(\alpha) > 0, k_0 < 0, p > 0.$ Система (с.4) не имеет решения, и условие (с.3) не реализуемо: $\Upsilon_{1121} = \varnothing$ (здесь символ $\varnothing$ означает фразу «пустое множество».

Вариант 1122: $\Delta > 0, s(\alpha) > 0, k_0 < 0, p < 0.$ Система (с.1) стабилизируема с ограниченным радиусом спектра, и интервал для параметра x имеет представление: $\Upsilon_{1122} = (-\frac{\alpha_1 p}{k_0\Delta}s(\alpha), \frac{\alpha_2 p}{\Delta}s(\alpha)).$

Вариант 1123: $\Delta > 0, s(\alpha) > 0, k < 0_0, p = 0.$ Система (с.4) не имеет решения, и условие (с.3) не реализуемо: $\Upsilon_{1123} = \varnothing.$

Вариант 1211: $\Delta > 0, s(\alpha) < 0, k > 0_0, p > 0.$ Система (с.1) стабилизируема с неограниченным радиусом спектра, и интервал для параметра x имеет представление: $\Upsilon_{1211} = (\frac{\alpha_2 ps(\alpha)}{\Delta}, \infty).$

Вариант 1212: $\Delta > 0, s(\alpha) < 0, k > 0_0, p < 0.$ Система (с.1) стабилизируема с неограниченным радиусом спектра, и интервал для параметра X имеет представление: $\Upsilon_{1212} = (-\frac{\alpha_1 ps(\alpha)}{k_0 \Delta}, \infty).$

Вариант 1213: $\Delta > 0, s(\alpha) < 0, k_0 > 0, p = 0.$ Система (с.1) стабилизируема с неограниченным радиусом спектра, и интервал для параметра X имеет представление: $\Upsilon_{1213} = (0, \infty).$

Вариант 1221: $\Delta > 0, s(\alpha) < 0, k_0 < 0, p > 0.$ Система (с.1) стабилизируема с ограниченным радиусом спектра, и интервал для параметра X имеет представление: $\Upsilon_{1221} = (\frac{\alpha_2 p}{\Delta} s(\alpha), -\frac{\alpha_1 p}{k_0 \Delta} s(\alpha)).$

Вариант 1222: $\Delta > 0, s(\alpha) < 0, k_0 < 0, p = 0.$ Система (с.4) не имеет решения, и условие (с.3) не реализуемо: $\Upsilon_{1222} = \varnothing.$

Вариант 1223: $\Delta > 0, s(\alpha) < 0, k_0 < 0, p = 0.$ Система (с.4) не имеет решения, и условие (с.3) не реализуемо: $\Upsilon_{1223} = \varnothing.$

Вариант 1131: $\Delta > 0, s(\alpha) > 0, k_0 = 0, p > 0.$ Система (с.4) не имеет решения, и условие (с.3) не реализуемо: $\Upsilon_{1131} = \varnothing.$

Вариант 1132: $\Delta > 0, s(\alpha) > 0, k_0 = 0, p < 0.$ Тогда $\alpha_1 < 0$. Система (с.1) стабилизируема с неограниченным радиусом спектра, и интервал для параметра X имеет представление: $\Upsilon_{1132} = (-\infty, x_0),$ $x_0 = \min\{0, \frac{\alpha_1 \alpha_2 p}{\Delta}\}.$

Вариант 1133: $\Delta > 0, s(\alpha) > 0, k_0 = 0, p = 0.$ Система (с. 4) не имеет решения, и условие (с. 3) не реализуемо: $\Upsilon_{1133} = \varnothing.$

Вариант 1231: $\Delta > 0, s(\alpha) < 0, k_0 = 0, p > 0.$ Тогда $\alpha_1 < 0$. Система (с.1) стабилизируема с неограниченным радиусом спектра, и интервал для параметра x имеет представление: $\Upsilon_{1231} = (-\infty, x_0),$ $x_0 = \min\{0, \frac{\alpha_2 p}{\Delta}\}.$

Вариант 1232: $\Delta > 0, s(\alpha) < 0, k_0 = 0, p < 0.$ Система (с.4) не имеет решения, и условие (с.3) не реализуемо: $\Upsilon_{1232} = \varnothing.$

Вариант 1233: $\Delta > 0, s(\alpha) < 0, k_0 = 0, p = 0.$ Система (с.4) не имеет решения, и условие (с.3) не реализуемо: $\Upsilon_{1233} = \varnothing.$

Рассмотрение вариантов 1111–1113 или вариантов 1211–1213 дает выполнение условий (с. 3), (с. 4) стабилизации системы (с.1) с неограниченным радиусом возможного спектра. При линейном преобразовании $Dx = z$ (матрица D определена в (в.2)) системы (с.1) получается замыкание системы (4.2), у которой согласно [8, с. 56] спектр матриц сохраняется. Первое утверждение теоремы 3 доказано.

Рассмотрение варианта 1122 или варианта 1221 дает выполнение условий (с.3), (с.4) стабилизации системы (с. 1) с ограниченным радиусом возможного спектра. При линейном преобразовании $Dx = z$ (матрица D определена в (в.2)) системы (с.1) получается замыкание системы (4.2), у которой согласно [8, с. 56] спектр матриц сохраняется. Второе утверждение теоремы 3 доказано.

Рассмотрение варианта 1123 или варианта 1223 показывает, что условия (с.3), (с.4) стабилизации системы (с.1) не выполняются. Это означает, что система (4.2) не стабилизируема. Третье утверждение теоремы 3 доказано, а вместе с ним и вся теорема 3.

V. Стабилизируемость одного класса линейных вполне интегрируемых стационарных систем Пфаффа в случае векторного управления

В пункте I построена система (1.7)

$$dy = (A_1 y + B_1 u(t))dt_1 + (A_2 y + B_2 u(t))dt_2. \tag{5.1}$$

Матрицы системы удовлетворяют условиям: условию перестановочности (1.2), условию согласованности рангов (1.8), критерию управляемости (1.9)

$$rank[B_1, A_1 B_1, \ldots, A_1^{n-1} B_1] = n\,. \tag{5.2}$$

Условие (5.2) означает справедливость равенства

$$rank[b_1, A_1 b_1, \ldots, A_1^{m_1-1} b_1, b_2, A_1 b_2, \ldots, A_1^{m_2-1} b_2, \ldots, b_m, A_1 b_m, \ldots, A_1^{m_m-1} b_m] = n\,, \tag{5.3}$$

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_m = m\,.$$

Здесь столбцы b_i взяты из матрицы B_1, если необходимо, то перенумерованы; компоненты вектора u_i управления u, соответствующие не вошедшим в (5.3) векторам, положены тождественно равными нулю; и, наконец, за размерностью оставшегося вектора управления u сохранено обозначение m.

Введем в рассмотрение класс Θ_{Khr} систем Пфаффа, обладающих дополнительными свойствами:

1) свойство полноты частичного ранга (дополнительное к условию (5.3))

$$rank[b_i, A_1 b_i, \ldots, A_1^{m_1-1} b_i, A_1^{m_1} b_i = rank[b_i, A_1 b_i, \ldots, A_1^{m_1-1} b_i]\,, \quad i \in \{1, \ldots, m_m\}\,,$$

которое означает наличие равенств

$$A_1^{m_i} + \alpha_{i1} A_1^{m_1-1} b_i + \ldots + \alpha_{i,m_i-2} A_1^2 b_i + \alpha_{i,m_i-1} A_1 b_i + \alpha_{i,m_i} b_i = 0; \tag{5.4}$$

2) свойство коллинеарности матриц B_1, B_2

$$B_2 = B_1 K\,, \quad K \equiv \begin{bmatrix} k_{01} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k_{02} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & k_{0m} \end{bmatrix}, \; k_{0i} \in \mathrm{R}^1; \tag{5.5}$$

3) свойство различимости спектра матрицы A_1: $\exists \alpha \in \mathrm{R}^2$, что матрица $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ имеет все различные между собой собственные числа.

Существует континуум векторов α, для которых свойство 3) выполняется. Поэтому считаем, что преобразование (1.5) дает систему (5.1), у которой матрица A_1 имеет спектр, все собственные числа которого различны.

Справедлива

Теорема 4. *Система линейных вполне интегрируемых стационарных уравнений Пфаффа класса* Θ_{Khr} *представима в виде композиции линейно независимых подсистем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Составим невырожденную матрицу

$$D = [e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1,m_1}; e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2,m_2}; \ldots; e_{m1}, e_{m2}, \ldots, e_{m,m_m}]$$

из нового базиса

$$e_{i1} = A_1^{m_i-1} + \alpha_{i1} A_1^{m_1-2} b_i + \ldots + \alpha_{i,m_i-3} A_1^2 b_i + \alpha_{i,m_i-2} A_1 b_i + \alpha_{i,m_i-1} b_i\,,$$

$$e_{i2} = A_1^{m_i-2} b_i + \alpha_{i1} A_1^{m_i-3} b_i + \ldots + \alpha_{i,m_i-3} A_1 b_i + \alpha_{i,m_i-2} b_i\,,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$e_{i,m_i-1} = A_1 b_i + \alpha_{i1} b_i\,,$$

$$e_{i,m_i} = b_i\,,$$

$$i \in \{1, \ldots, m_m\}.$$

Здесь α_{i1} – коэффициенты характеристического многочлена из уравнений (5.4).

Применение к системе (5.2) линейного преобразования $Dz = y$ с учетом равенства (5.4) дает систему

$$dz = (DA_1D^{-1}z + DB_1u(t))dt_1 + (DA_2D^{-1}z + DB_1Ku(t))dt_2 . \tag{5.6}$$

В силу свойства 1) полноты частичного ранга и свойства 2) коллинеарности матриц выражения для матриц системы (5.6) имеют согласно теореме 1 вид

$$DA_1D^{-1} \equiv F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & F_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & F_m \end{bmatrix},$$

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_{i,m_i} & -a_{i,m_i-1} & -a_{i,m_i-2} & -a_{i,m_i-3} & \ldots & -a_{i2} & -a_{i1} \end{bmatrix},$$

$$i \in \{1, \ldots, m_m\}.$$

Неизвестную матрицу $G \equiv DA_2D^{-1}$ разобьем на блоки согласно блокам матрицы F: $G = ((G_{ij}))_{11}^{nn}$.

В силу свойства 3) различимости спектра матрицы A_1 блоки F_i не имеют общих собственных чисел. Поэтому матрица G перестановочна с матрицей F тогда и только тогда, когда [10, с. 193] блоки на главных диагоналях перестановочны, а остальные блоки нулевые: $F_iG_i = G_iF_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $G_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Таким образом, система (5.6) представляется в виде композиции линейно независимых подсистем

$$\{dZ_i = (F_iZ_i + q_iu_i(t))1t_i + (G_iZ_i + k_iq_iu_i(t))dt_2, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{5.7}$$

здесь вектор состояния

$$z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m),$$

$$Z_1 = (z_1, z_2, \ldots, z_{m_1}),\ Z_2 = (z_{m_1+1}, z_{m_1+2}, \ldots, z_{m_1+m_2}), \ldots\ Z_m = (z_{m-m_m+1}, z_{m-m_m+2}, \ldots, z_m).$$

По теореме 1 матрицы $G_i = p_iE + k_iF_i$, вектор $q_i = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathrm{R}^{m_i}$, вещественные числа k_{0i} определены в свойстве коллинеарности (5.4), коэффициенты $k_i = (\beta_1 + k_{0i}\beta_2)/(\alpha_1 + k_{0i}\alpha_2)$ вычисляются аналогично формулам (4.3), а собственные числа λ_{ij}, μ_{ij} матриц F_i, G_i соответственно связаны равенствами вида (4.6)

$$\mu = k_{0i}\lambda_{ij} + p_i.$$

Теорема 4 доказана.

В силу теоремы 4 имеет место

Теорема 5. *Система линейных вполне интегрируемых стационарных систем Пфаффа класса Θ_{Khr} обладает свойствами:*

1. В случае попарной сонаправленности векторов $b_i^{[1]}, b_i^{[2]}$ $(k_{0i} > 0)$ матриц B_1, B_2 для любых вещественных чисел $p_i \in \mathrm{R}^1$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, система стабилизируема, при этом радиус спектра не ограничен.

2. В случае попарной противоположной направленности векторов $b_i^{[1]}, b_i^{[2]}$ $(k_{0i} < 0)$ матриц B_1, B_2 для любого вещественного числа $p_i \neq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, система стабилизируема, при этом радиус спектра ограничен.

3. В случае конечного числа r_1 пар сонаправленных векторов $b_i^{[1]}, b_i^{[2]}$ $(k_{0i} > 0)$ при $p_i \in \mathrm{R}^1$ и конечного числа r_2 пар противоположно направленных векторов $b_i^{[1]}, b_i^{[2]}$ $(k_{0i} < 0)$ при $p_i \neq 0$, $(r_1 + r_2 = m)$ система *стабилизируема. Для части спектра, соответствующей первому случаю, радиус спектра не ограничен. Для части спектра, соответствующей второму случаю, радиус спектра ограничен.*

4. Система ***не*** *стабилизируема в случае существования хотя бы одного такого номера i, что векторы* $b_i^{[1]}, b_i^{[2]}$ $(k_{0i} < 0)$ *матриц* B_1, B_2 *противоположно направлены и соответствующее вещественное число* $p_i = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для стабилизируемости системы Пфаффа класса Θ_{Khr} необходима и достаточна стабилизируемость системы вида (5.7), а для этого необходима и достаточна стабилизируемогсть каждой из подсистем композитной системы (5.7). Применение теоремы 3 для каждой подсистемы системы (5.7) дает справедливость утверждений теоремы 5. Теорема 5 доказана.

Заключение. В работе объектом исследования являются линейные вполне интегрируемые стационарные системы Пфаффа. Введено понятие свойства стабилизации. В случае скалярного управления получен критерий обладания такими системами свойством стабилизации. В случае векторного управления доказан критерий обладания свойством стабилизации для одного класса систем Пфаффа. Критерии стабилизации носят ранговый характер от некоторой матрицы, составленной с помощью известных матриц исходной системы. Проверка критериев не вызывает затруднений, так как вычисления проводятся в рамках матричного анализа.

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений $x' = Ax + Bu$ в случае выполнения условия $rank[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$ Р. Калман [4] доказал полную управляемость и стабилизируемость этой системы. Как показывают результаты данной работы, в случае вполне управляемой системы Пфаффа имеют место варианты: возможна стабилизируемость с бесконечным радиусом строящегося спектра, возможна стабилизируемость с конечным радиусом строящегося спектра, и, в исключительных случаях, стабилизируемость невозможна. Более того, для вполне управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет место не только стабилизация, но и возможно построение любого наперед заданного спектра. Для систем Пфаффа в случае наличия свойства стабилизируемости задача построения любого наперед заданного спектра разрешима не всегда. Исследование носит фундаментальный характер.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Храмцов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 11. – С. 1933–1939.
2. Храмцов, О.В. Задача континуум управляемости линейных стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2010. – № 3.– С. 54–59.
3. Храмцов, О.В. Относительная управляемость линейных стационарных вполне интегрируемых систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференциальные уравнения. – 2014. – № 6. – С. 817–824.
4. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Наука, 1971. – 426 с.
5. Рашевский, П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными / П.К. Рашевский. – М.: Гостехиздат, 1947. – 354 с.
6. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1983. – 371 с.
7. Фиников, С.П. Метод внешних форм Картана / С.П. Фиников. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
8. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
9. Андреев, Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
10. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 548 с.

R E F E R E N C E S

1. Khramtsov O.V. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 1985, 21(11), pp. 1933–1939.
2. Khramtsov O.V. *Vesnik VDU* [Journal of Vitebsk State University], 2010, 3, pp. 54–59.
3. Khramtsov O.V. *Differents. uravneniya* [Differential Equations], 2014, 6, pp. 817–824.
4. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Ocherki po matematicheskoi teorii system* [Stories on the Mathematical Theory of Systems], Moscow, Nauka, 1971, 426 p.
5. Rashevxki P.K. *Geometricheskaya teoriya uravnenii s chastnymi proizvodnymi* [Geometric Theory of Equations with Partial Derivatives], Moscow, Gostekhizdat, 1947, 354 p.
6. Gaishun I.V. *Vpolne razreshimiye mnogomerniye differentsialniye uravneniya* [Completely Solvable Multidimensional Differential Equations], Minsk, Nauka i tekhnika, 1983, 371 p.
7. Finikov S.P. *Metod vneshnikh form Kartana* [Kartan Outer Form Method], Moscow–Leningrad, GITTL, 1948, 432 p.
8. Chorn R., Johnson Ch. *Matrichni analiz* [Matrix Analysis], Moscow, Mir, 1989, 656 p.
9. Andreyev Yu.N. *Upravleniye konechnomernymi lineinymi obyektami* [Control of Final Dimensional Linear Objects], Moscow, Nauka, 1976, 424 p.
10. Gantmakher F.R. Teoriya matrits [Theory of Matrices], Moscow, Nauka, 1988, 548 p.

Поступила в редакцию 25.04.2018

Адрес для корреспонденции: e-mail: kgima@vsu.by – Храмцов О.В.