МАТЭМАТЫКА

УДК 512.548

О неассоциативности полиадических операций специального вида

А.М. Гальмак*, Ю.И. Кулаженко**
**Учреждение образования «Могилевский государственный университет продовольствия»*
***Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта»*

В статье доказано, что для n-арной группы $< A, \eta >$ *неравенство* $\sigma^l \neq \sigma$ *является достаточным условием невыполнимости в l-арном группоиде* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *тождеств, определяющих ассоциативность полиадической операции* $\eta_{s,\sigma,k}$*, которая строится на декартовой степени* A^k *с помощью подстановки* σ *множества* $\{1, \ldots, k\}$ *и n-арной операции* η.

Основная цель статьи – нахождение достаточных условий для невыполнимости в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ $l - 1$ *тождеств*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l)\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}) = \\ = \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+l-1})\mathbf{x}_{i+l} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}),\ i = 2, \ldots, l,$$

включающих тождество полуассоциативности, которые определяют ассоциативность l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$

Ключевые слова: *полиадическая операция, группоид, полугруппа, группа, ассоциативность.*

On Nonassociativity of Polyadic Operations of Special Type

A.M. Galmak*, Y.I. Kulazhenko**
**Educational Establishment «Mogilev State University of Food Technologies»*
***Educational Establishment «Belarusian State University of Transport»*

In this article it is proved that for n-ary group $< A, \eta >$ *the inequality* $\sigma^l \neq \sigma$ *is the sufficient condition of impracticability of* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *identities in l-ary groupoid, that determines the associativity of polyadic operation* $\eta_{s,\sigma,k}$*, which is determined on Cartesian degree using the substitution* σ *of the set* $\{1, \ldots, k\}$ *and n-ary operation* η.

The main purpose of the article is finding sufficient conditions for not execution in в l-grouppoid $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ $l - 1$ *of identities*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l)\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}) = \\ = \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+l-1})\mathbf{x}_{i+l} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}),\ i = 2, \ldots, l,$$

which include the identity of semiassociativity, which identify the associativity of l-operation $\eta_{s,\sigma,k}$.

Key words*: polyadic operation, groupoid, semigroup, group, associativity.*

Полиадической операцией специального вида называется l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, которая была определена в [1] на k-ой декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η. Частным случаем ($n = 2$) полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ является l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ на k-ой декартовой степени A^k полугруппы A. Изучению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ посвящена работа [3].

При

$$k = m - 1,\ l = m,\ \sigma = (12 \ldots m - 1),\ A = \mathbf{S}_n$$

операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ совпадает с m-арной операцией Э. Поста, определенной в [4] на декартовой степени $\mathbf{S}_n^{m-1}$ симметрической группы $\mathbf{S}_n$, а при $A = \mathbf{GL}_n(C)$ и тех же k, l и σ операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ совпадает с m-арной операцией Э. Поста, определенной в [4] на декартовой степени $\mathrm{GL}_n^{m-1}(C)$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(C)$.

В [1] доказано, что если n-арная операция η ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$ также является ассоциативной. Если же подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$, то, как установлено в [5], наличие в n-арной полугруппе $< A, \eta >$, содержащей более одного элемента, левой нейтральной последовательности влечет за собой невыполнимость в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ тождества полуассоциативности. При этом в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ могут выполняться некоторые тождества, определяющие ассоциативность операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и отличающиеся от тождества полуассоциативности.

Основная цель статьи – нахождение достаточных условий для невыполнимости в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ $l - 1$ тождеств

$$\eta_{s,\sigma,k}(\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l)\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}) =$$
$$= \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+l-1})\mathbf{x}_{i+l} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}),\ i = 2, \ldots, l,$$

включающих тождество полуассоциативности, которые определяют ассоциативность l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$.

1. Предварительные сведения. Напомним, что n-арную операцию η n-арного группоида $< A, \eta >$ называют *ассоциативной*, если в нем выполняется каждое из следующих $n - 1$ тождеств

$$[[x_1 \ldots x_n]x_{n+1} \ldots x_{2n-1}] = [x_1[x_2 \ldots x_{n+1}]x_{n+2} \ldots x_{2n-1}],$$
$$[[x_1 \ldots x_n]x_{n+1} \ldots x_{2n-1}] = [x_1x_2[x_3 \ldots x_{n+2}]x_{n+3} \ldots x_{2n-1}],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[[x_1 \ldots x_n]x_{n+1} \ldots x_{2n-1}] = [x_1 \ldots x_{n-2}[x_{n-1} \ldots x_{2n-2}]x_{2n-1}],$$
$$[[x_1 \ldots x_n]x_{n+1} \ldots x_{2n-1}] = [x_1 \ldots x_{n-1}[x_n \ldots x_{2n-1}]].$$

Если в $< A, \eta >$ выполняется только последнее тождество, то n-арную операцию η называют *полуассоциативной*.

Ясно, что ассоциативная n-арная операция является и полуассоциативной.

Последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A, \eta >$ называют его *левой* (*правой*) *нейтральной последовательностью*, если

$$\eta(e_1 \ldots e_{n-1}x) = x\ (\eta(xe_1 \ldots e_{n-1}) = x)$$

для любого $x \in A$.

Последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A, \eta >$ называют [4] его *нейтральной последовательностью*, если она является и левой нейтральной и правой нейтральной.

Элемент e n-арного группоида $< A, \eta >$ называют [6] его *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$\eta(x\underbrace{e \ldots e}_{n-1}) = \eta(ex\underbrace{e \ldots e}_{n-2}) = \ldots = \eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-2}xe) = \eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-1}x) = x.$$

Определение 1.1 [1]. *Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n - 1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию*

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$
$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)}$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots))).$$

При $s = 1$ l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\sigma,k}$.

Явный вид l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ описывает следующая

Теорема 1.1 [1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,$$
$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}\ \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\ \eta(\ldots$$
$$\ldots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots))). \quad (1)$$

З а м е ч а н и е 1.1. Если n-арная операция η ассоциативна, то (1) может быть переписано следующим образом:

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Теорема 1.2 [1]. *Если n-арная операция η ассоциативна, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.*

Теорема 1.3 [5]. *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает левой нейтральной последовательностью, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не выполняется тождество*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l)\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_l \ldots \mathbf{x}_{2l-1})), \quad (2)$$

то есть l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ не является полуассоциативной.

З а м е ч а н и е 1.2. Ясно, что в теореме 1.3 левую нейтральную последовательность можно заменить нейтральной последовательностью.

Тождество (2) при $i = l$ является одним из следующих тождеств

$$\eta_{s,\sigma,k}(\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l)\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}) =$$
$$= \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+l-1})\mathbf{x}_{i+l} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}),\ i = 2, \ldots, l, \quad (3)$$

определяющих ассоциативность l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$.

Следующая теорема утверждает, что неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ и наличие в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ единицы является достаточным условием для невыполнимости всех тождеств вида (3).

Теорема 1.4 [7]. *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает единицей, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ для любого $i \in \{2, \ldots, l\}$ не выполняется тождество* (3).

Лемма 1.1 [3]. *Пусть A – множество, $k \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, f_σ – преобразование декартовой степени A^k по правилу*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)}).$$

Тогда:

1) f_σ *– биекция*;

2) *для любого $i \geq 2$ преобразование f_σ^i множества A^k осуществляется по правилу*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \ldots, x_{\sigma^i(k)});$$

3) $f_\sigma^i = f_{\sigma^i}$ *для любого $i \geq 2$;*

4) *если $a \in A$, $\mathbf{a} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{k})$, то* $\mathbf{a}^{f_\sigma} = \mathbf{a}$;

5) *если $< A, * >$ – группоид, то f_σ – автоморфизм группоида $< A^k, * >$ с операцией*

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_k) * (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 * y_1, \ldots, x_k * y_k).$$

Утверждение 5) леммы 1.1 обобщается следующей леммой.

Лемма 1.2. *Если в условиях леммы* 1.1 *$< A, \eta >$ – n-арный группоид, то f_σ – автоморфизм n-арного группоида $< A^k, \eta >$ с n-арной операцией η, которая определяется покомпонентно с помощью операции* η:

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) = (\eta(x_{11} \ldots x_{n1}), \ldots, \eta(x_{1k} \ldots x_{nk})).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)^{f_\sigma} = (\eta((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})))^{f_\sigma} =$$
$$= (u_1 = \eta(x_{11} \ldots x_{n1}), \ldots, u_k = \eta(x_{1k} \ldots x_{nk}))^{f_\sigma} =$$
$$= (u_{\sigma(1)} = \eta(x_{1\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma(1)}), \ldots, u_{\sigma(k)} = \eta(x_{1\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma(k)})) =$$

$$= \eta((x_{1\sigma(1)}, \dots, x_{1\sigma(k)}) \dots, (x_{n\sigma(1)}, \dots, x_{n\sigma(k)})) = \eta(\mathbf{x}_1^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_n^{f_\sigma}),$$

то

$$\eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)^{f_\sigma} = \eta(\mathbf{x}_1^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_n^{f_\sigma}),$$

то есть f_σ – автоморфизм n-арного группоида $< A^k, \eta >$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1.3. Ясно, что для n-арного группоида $< A, \eta >$ n-арная операция, определенная на декартовой степени A^k покомпонентно с помощью n-арной операции η и обозначаемая тем же символом η, совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\,\varepsilon,\,k}$, где ε – тождественная подстановка. Поэтому, если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, то по теореме 1.2 $< A^k, \eta >$ – n-арная полугруппа. Несложно проверяется, что если $< A, \eta >$ – n-арная группа, то $< A^k, \eta >$ также является n-арной группой. Это утверждение является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 1.5 [8]. *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ – l-арная группа.*

Лемма 1.3 [3]. *Пусть множество A содержит более одного элемента, $k \geq 2$, σ и τ – подстановки из $\mathbf{S}_k$. Если $\mathbf{x}^{f_\sigma} = \mathbf{x}^{f_\tau}$ для любого $\mathbf{x} \in A^k$, то $\sigma = \tau$.*

2. Основные результаты. Останется ли утверждение теоремы 1.4 верным, если в ней единицу заменить идемпотентом? Так как для любого идемпотента e n-арной полугруппы $< A, \eta >$ последовательность $\underbrace{e \dots e}_{n-1}$ может не быть нейтральной, то в этом случае неприменима теорема 1.3, то есть в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ не исключена выполнимость тождества полуассоциативности. В то же время для любого идемпотента e n-арной группы $< A, \eta >$ последовательность $\underbrace{e \dots e}_{n-1}$ является нейтральной. Поэтому теорема 1.3 в этом случае гарантирует невыполнимость в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ как минимум тождества полуассоциативности. В связи с этим возникает

В о п р о с 2.1. Верен ли аналог теоремы 1.4 для n-арных групп, обладающих идемпотентами? Другими словами, можно ли изменить область применения теоремы 1.4, заменив в ней n-арную полугруппу n-арной группой, а единицу – идемпотентом?

В пользу существования положительного ответа на этот вопрос может служить следующий

Пример 2.1. Положим в определении 1.1: $A = \{(12), (13), (23)\}$ – множество всех нечетных подстановок множества $\{1, 2, 3)\}$; η – тернарная операция, производная от операции умножения подстановок;

$$n = 3,\ s = 1,\ k = 3,\ \sigma = (123) \in \mathbf{S}_3.$$

Так как $(123)^3$ – тождественная подстановка, то $(123)^3 \neq (123)$.

Ясно, что $< A, \eta >$ – идемпотентная тернарная группа, в которой нет единиц.

Определим на A^3 тернарную операцию

$$\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{xyz}) = \eta_{1,\,(123),\,3}((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)) =$$
$$= (\eta(x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)}),\ \eta(x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)}),\ \eta(x_3 y_{\sigma(3)} z_{\sigma^2(3)})) =$$
$$= (\eta(x_1 y_2 z_3),\ \eta(x_2 y_3 z_1),\ \eta(x_3 y_1 z_2)).$$

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ – те же, что и выше,

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3),\ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Согласно определению 1.1

$$\eta_{1,\,(123),\,3}(\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) = \eta_{1,\,(123),\,3}((\eta(x_1 y_2 z_3),\ \eta(x_2 y_3 z_1),\ \eta(x_3 y_1 z_2))\mathbf{uv}) =$$
$$= (\eta(x_1 y_2 z_3 u_2 v_3),\ \eta(x_2 y_3 z_1 u_3 v_1),\ \eta(x_3 y_1 z_2 u_1 v_2)),$$
$$\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{x}\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}) = \eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{x}(\eta(y_1 z_2 u_3),\ \eta(y_2 z_3 u_1),\ \eta(y_3 z_1 u_2))\mathbf{v}) =$$
$$= (\eta(x_1 y_2 z_3 u_1 v_3),\ \eta(x_2 y_3 z_1 u_2 v_1),\ \eta(x_3 y_1 z_2 u_3 v_2)).$$

Если

$$x_1 = y_2 = z_3 = u_2 = v_3 = (12),\ u_1 = (13),$$

то

$$\eta(x_1 y_2 z_3 u_2 v_3) = (12),\ \eta(x_1 y_2 z_3 u_1 v_3) = (12)(13)(12) = (23),$$

то есть

$$\eta(x_1 y_2 z_3 u_2 v_3) \neq \eta(x_1 y_2 z_3 u_1 v_3).$$

Следовательно, в тернарной группе $< A, \eta >$ не выполняется тождество

$$\eta_{1,\,(123),\,3}(\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) \neq \eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{x}\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}).$$

Так как последовательности

$$(12)(12),\ (13)(13),\ (23)(23)$$

являются нейтральными в тернарной группе $< A, \eta >$, то по теореме 1.3 в ней не выполняется и тождество

$$\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{x}\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}) \neq \eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{xy}\eta_{1,\,(123),\,3}(\mathbf{zuv})).$$

Таким образом, в тернарной группе $< A, \eta >$ не выполняются все тождества вида (3).

Следующая теорема является аналогом теоремы 1.4 для n-арных групп. При этом наличие идемпотентов в n-арной группе $< A, \eta >$, как это предполагалось в вопросе 2.1, необязательно.

Теорема 2.1. *Пусть $< A, \eta >$ – неодноэлементная n-арная группа, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ для любого $i \in \{2, \ldots, l\}$ не выполняется тождество* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если предположить выполнимость в A тождества из условия теоремы, то

$$\eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}} \mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{i-1}} \mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) =$$

$$= \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{i-1}^{f_\sigma^{i-2}} \eta(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_{i+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-i-1}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-i}} \mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma^{l-i+1}} \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{i-1}} \mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}),$$

откуда

$$\eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}} \mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{i-1}} \mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) =$$

$$= \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{i-1}^{f_\sigma^{i-2}} \mathbf{x}_i^{f_\sigma^{i-1}} \mathbf{x}_{i+1}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}} \mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma^{l}} \ldots (\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{i-1}} \mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}).$$

Для любого $a \in A$ положим

$$\mathbf{x}_1 = \ldots = \mathbf{x}_{l+i-2} = \mathbf{x}_{l+i} = \ldots \mathbf{x}_{2l-2} = \mathbf{a} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}).$$

Тогда в силу утверждения 4) леммы 1.1 последнее равенство принимает вид

$$\eta(\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l+i-2} \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{i-1}} \underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-i}) = \eta(\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l+i-2} \eta(\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{i-1}} \underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-i}).$$

Так как $< A^k, \eta >$ – n-арная группа, то

$$\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{i-1}} = (\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{i-1}}.$$

А так как, согласно лемме 1.2, $f_\sigma^{\,i-1}$ – автоморфизм n-арной полугруппы $< A^k, \eta >$, то из этого равенства следует равенство

$$\mathbf{x}_{l+i-1} = \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

которое равносильно равенству

$$\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\varepsilon} = \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

где ε – тождественная подстановка. В свою очередь, из этого равенства, ввиду утверждения 3) леммы 1.1, следует

$$\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\varepsilon} = \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_{\sigma^{l-1}}}.$$

Так как элемент $\mathbf{x}_{l+i-1}$ выбран в A^k произвольно, то, применив к последнему равенству лемму 1.3, получим $\varepsilon = \sigma^{l-1}$, то есть $\sigma^l = \sigma$, что невозможно. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Так как во всякой n-арной группе существуют нейтральные последовательности, то утверждение теоремы 2.1 при $i = l$ содержится в следующем следствии, вытекающем из теоремы 1.3.

Следствие 2.1. *Пусть $< A, \eta >$ – неодноэлементная n-арная группа, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ не выполняется тождество* (2).

Теоремы 1.2 и 2.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.2. *Если $< A, \eta >$ – неодноэлементная n-арная группа, то l-арная операция $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда $\sigma^l = \sigma$.*

Полагая в теоремах 2.1 и 2.2 $n = 2$, получим следующие два следствия.

Следствие 2.2. *Пусть A – неединичная группа, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ для любого $i \in \{2, \ldots, l\}$ не выполняется тождество*

$$[[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,k} \mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\,\sigma,\,k} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+l-1}]_{l,\,\sigma,\,k} \mathbf{x}_{i+l} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\,\sigma,\,k}.$$

Следствие 2.3. *Если A – неединичная группа, то l-арная операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда $\sigma^l = \sigma$.*

З а м е ч а н и е 2.2. Установленная в примере 2.1 невыполнимость для тернарной операции $\eta_{1,\,(132),\,3}$ всех тождеств вида (3) следует из теоремы 2.1, так как тернарный группоид $< R^3, \eta >$ является тернарной группой.

3. Следствия для некоторых подстановок. Согласно определению l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ ее арность имеет вид $l = s(n-1)+1$, где $s \geq 1$. Если σ – подстановка порядка $t \geq 2$ из $\mathbf{S}_k$, $s(n-1)+1 = tr$ для некоторых целых $s \geq 1$, $r \geq 1$, то подстановка σ^l является тождественной, то есть отлична от σ. Поэтому теорема 2.1 позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– неодноэлементная n-арная группа,* σ *– подстановка порядка* $t \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_k$, $s(n-1)+1 = tr$ *для некоторых целых* $s \geq 1$, $r \geq 1$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *для любого* $i \in \{2, \ldots, l\}$ *не выполняется тождество* (3).

Так как любой цикл длины t из $\mathbf{S}_k$ имеет порядок t, то из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– неодноэлементная n-арная группа,* $2 \leq t \leq k$, σ *– цикл длины* t *из* $\mathbf{S}_k$, $s(n-1)+1 = tr$ *для некоторых целых* $s \geq 1$, $r \geq 1$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *для любого* $i \in \{2, \ldots, l\}$ *не выполняется тождество* (3).

З а м е ч а н и е 3.1. Следствие 3.1 справедливо, например, для цикла $\sigma = (12 \ldots t)$.

Полагая в следствии 3.1 $r = 1$, получим

Следствие 3.2. *Пусть* $< A, \eta >$ *– неодноэлементная n-арная группа,* $s(n-1)+1 \leq k$ *для некоторого целого* $s \geq 1$, σ *– цикл длины* $l = s(n-1)+1$ *из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *для любого* $i \in \{2, \ldots, l\}$ *не выполняется тождество* (3).

Полагая в следствии 3.1 $t = 3$, получим

Следствие 3.3. *Пусть* $< A, \eta >$ *– неодноэлементная n-арная группа,* $k \geq 3$, σ *– цикл длины* 3 *из* $\mathbf{S}_k$, $s(n-1)+1 = 3r$ *для некоторых целых* $s \geq 1$, $r \geq 1$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *для любого* $i \in \{2, \ldots, l\}$ *не выполняется тождество* (3).

Полагая в следствии 3.1 $t = 2$, получим

Следствие 3.4. *Пусть* $< A, \eta >$ *– неодноэлементная n-арная группа,* σ *– транспозиция из* $\mathbf{S}_k$, $s(n-1)+1 = 2r$ *для некоторых целых* $s \geq 1$, $r \geq 1$. *Тогда в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *для любого* $i \in \{2, \ldots, l\}$ *не выполняется тождество* (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. Русаков, А.Д. О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ / А.Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1. – С. 68–72.
6. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
7. Гальмак, А.М. О неассоциативности l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ / А.М. Гальмак, В.Л. Мережа, А.Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2018. – № 3. – С. 150–154.
8. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2018. – № 1(51). – С. 4–10.

REFERENCES

1. Galmak A.M., Rusakov A.D. *Izvestiya Gomelskogo gosuniversiteta im. F. Skorini* [Proceedings of F. Skorina Gomel State University], 2014, 3, pp. 35–40.
2. Galmak A.M. *Vesti NAN Belarusi* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus], 2008, 3, pp. 28–34.
3. Galmak A.M. *Mnogomestniye operatsii na dekartovykh stepeniakh* [Multiplace Operations on Cartesian Powers], Minsk, BGU, 2009, 265 p.
4. Post E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. Rusakov A.D. *Problemi fiziki, matematiki i tekhniki* [Issues of Physics, Mathematics and Technology], 2017, 1, pp. 68 –72.
6. Dörnte W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
7. Galmak A.M., Merezha V.L., Rusakov A.D. *Izvestiya Gomelskogo gosuniversiteta im. F. Skorini* [Proceedings of F. Skorina Gomel State University], 2018, 3, pp. 150–154.
8. Galmak A.M. *Vesnik Magileuskaga dziarzhaunaga universiteta imia A.A. Kuliashova* [Proceedings of A.A. Kuliashov Mogilev State University], 2018, 1(51), pp. 4–10.

Поступила в редакцию 06.06.2018

Адрес для корреспонденции: e-mail: halm54@mail.ru – Гальмак А.М.