УДК 512.542

Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьев

О максимальных подклассах нормального класса Фиттинга

Ряд известных результатов теории классов Фиттинга связан с исследованием свойств максимальных (по включению) подклассов Фиттинга в данном классе Фиттинга (см., например, [1, 2] или [3]). Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется максимальным подклассом Фиттинга класса $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}$ и из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}, \mathfrak{X}\}$.

В частности, Косси [4] было установлено, что если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ максимален в $\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – класс Фиттинга всех конечных разрешимых групп, то $\mathfrak{F}$ является нормальным. Непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным, если в любой группе G подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G [5]. Хорошо известно [5], что пересечение всех неединичных нормальных классов Фиттинга снова является неединичным нормальным классом Фиттинга. Его обозначают через $\mathfrak{S}_*$. В теории нормальных классов Фиттинга известен результат Н.Т. Воробьева [6] о том, что в $\mathfrak{S}_*$ нет максимальных подклассов Фиттинга, который отрицательно решает проблему Лауша (см. проблему 9.18 [7]).

Основная цель настоящей работы – расширение указанного результата Косси на более общий случай, когда нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ максимален в произвольном неединичном нормальном классе Фиттинга $\mathfrak{X}$ (в общем случае $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{S}$). Доказано, что в этом случае класс $\mathfrak{F}$ также является нормальным. Из этого вытекает, в частности, результат Н.Т. Воробьева [6] о том, что минимальный нормальный класс Фиттинга не содержит максимальных подклассов.

Все рассматриваемые группы конечны и разрешимы. В определениях и обозначениях мы следуем [3].

1. Предварительные сведения

Для доказательства основного результата первоначально напомним некоторые основные понятия и приведем в качестве лемм те известные утверждения, которые мы будем использовать.

Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из $N_1 \trianglelefteq G$, $N_1 \in \mathfrak{F}$ и $N_2 \trianglelefteq G$, $N_2 \in \mathfrak{F}$ всегда следует $N_1N_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$-радикалом $G_{\mathfrak{F}}$ *группы G* называют наибольшую из нормальных подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным, если в любой группе G подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G. Напомним, что подгруппа M группы G является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G, если для любой подгруппы $H \in \mathfrak{F}$ такой, что $M \subseteq H \subset G$, следует $H \in \{M, G\}$.

Известно, что пересечение всех нееденичных нормальных классов Фиттинга является неединичным нормальным классом Фиттинга. Его называют минимальным нормальным классом Фиттинга и обозначают $\mathfrak{S}_*$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольный непустой класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}^*$ – наименьший из классов Фитинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для любых групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ [3].

Через $\mathfrak{F}_*$ обозначают пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Тогда *минимальный нормальный класс Фиттинга* есть $\mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп.

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, то $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта*.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия:

1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из $H/A \in \mathfrak{F}$ и $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы G называется наименьшая нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – некоторые формации. Произведением формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс всех таких групп G, $\mathfrak{H}$-корадикалы которых принадлежат формации $\mathfrak{F}$.

Отображение f множества всех простых чисел **P** во множество формаций называется *локальным экраном*.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует такой локальный экран f, что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi}\mathfrak{S}_p \mathfrak{N}_p f(p)), \text{ где } \pi = \{p \in \mathbf{P} \mid f(p) \neq \varnothing\}$$

Лемма 1.1 [3]. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые классы Фиттинга, то для любой группы G имеет место равенство:*

$$G_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{F}} = (G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{H}}.$$

Лемма 1.2 [3]. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга и «*» – оператор Локетта, то справедливо равенство:*

$$(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}^*.$$

Лемма 1.3 [4]. *Если $\mathfrak{F}$– неединичный* нормальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$.

Лемма 1.4 [3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, причем класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ является локальной формацией и «*» – оператор Локетта. Тогда справедливо равенство:*

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{H}.$$

Лемма 1.5 [6]. *Каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта.*

Лемма 1.6 [4]. *Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{N} = \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга.*

Непосредственной проверкой легко показать, что справедлива

Лемма 1.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда:*

1) *если класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ не пуст, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$;*

2) *если $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, являющийся гомоморфом, и $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$.*

3) *произведение классов Фиттинга ассоциативно:*

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{H}\mathfrak{M}) = (\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{M}.$$

2. Основной результат

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *максимальным подклассом Фиттинга класса* $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}$ и из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга, всегда следует $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}, \mathfrak{X}\}$.

Докажем основной результат, который представляет

Теорема. *Каждый максимальный подкласс Фиттинга нормального класса Фиттинга является нормальным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ - максимальный подкласс Фиттинга в нормальном классе Фиттинга $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$. Кроме того, по утверждению леммы 1.7, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{H}$. Но $\mathfrak{F}$ максимален в $\mathfrak{H}$, и поэтому возможны два случая: либо $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}$, либо $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

Случай 1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Подействуем на это равенство оператором Локетта «*». В итоге получим $\mathfrak{F}^* = (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N})^*$. Но по лемме 1.2 $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{H}^* \cap (\mathfrak{F}\mathfrak{N})^*$. Ввиду того, что $\mathfrak{H}$ – нормальный класс Фиттинга, по лемме 1.3 имеем $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}$. Кроме того, по лемме 1.4, $(\mathfrak{F}\mathfrak{N})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}$. Но так как все рассматриваемые группы взяты из класса $\mathfrak{S}$, то мы получаем $\mathfrak{F}^*\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{S}$ и поэтому $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}$. Отсюда ввиду ассоциативности произведения классов Фиттинга и из леммы 1.4 следует

$$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N} = (\mathfrak{F}^*\mathfrak{N})\mathfrak{N} = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}^2 = (\mathfrak{F}^*\mathfrak{N}^2)\mathfrak{N} = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}^3 = \ldots = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}^n.$$

Итак, для любого натурального n справедливо равенство:

$$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}^n.$$

Но ввиду того, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}^n = \mathfrak{S}$ и класс $\mathfrak{N}^n$ является формацией, по лемме 1.4 мы получаем, что

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*.$$

Но так как $\mathfrak{S}$ – универсальный класс, то $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{S}$ и поэтому $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$. А это по лемме 1.3 означает, что $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга. Таким образом, в первом случае теорема верна.

Случай 2. Пусть $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$. Подействуем на последнее равенство оператором Локетта «*». В результате получим $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N})^* = \mathfrak{H}^*$.

Но по лемме 1.2 $\mathfrak{H}^* \cap (\mathfrak{F}\mathfrak{N})^* = \mathfrak{H}^*$. Кроме того, по лемме 1.4, $(\mathfrak{F}\mathfrak{N})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}$. Поскольку $\mathfrak{H}$ – нормальный класс Фиттинга, то по лемме 1.3 $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}$, и мы получаем, что

$$\mathfrak{S} \cap \mathfrak{F}^*\mathfrak{N} = \mathfrak{S}.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}$. Но $\mathfrak{S}$ – универсальный класс групп. Следовательно, $\mathfrak{F}^*\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{S}$ и поэтому $\mathfrak{F}^*\mathfrak{N} = \mathfrak{S}$.

Так как $\mathfrak{F}^*\mathfrak{N} = (\mathfrak{F}\mathfrak{N})^*$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ – локальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ – класс Локетта по лемме 1.5. Значит, $(\mathfrak{F}\mathfrak{N})^* = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Отсюда и из равенства $\mathfrak{F}^*\mathfrak{N} = \mathfrak{S}$ следует $\mathfrak{F}\mathfrak{N} = \mathfrak{S}$. Значит, по лемме 1.6, $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга.

Теорема доказана.

Из теоремы вытекает отрицательный ответ на проблему Лауша о существовании максимальных подклассов Фиттинга в минимальном нормальном классе Фиттинга (см. [7], проблема 9.18), который был получен Н.Т. Воробьевым

Следствие 1. (Воробьев Н.Т. [6]) Пусть $\mathfrak{S}_*$ – минимальный нормальный класс Фиттинга. Тогда в $\mathfrak{S}_*$ нет максимальных подклассов Фиттинга.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ максимален в $\mathfrak{S}_*$. Тогда он нормален в $\mathfrak{S}_*$. Но так как $\mathfrak{S}_*$ – минимальный нормальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}_*$.

Следствие доказано.

Следствие 2 (Cossey [1]). Если $\mathfrak{F}$ – максимальный подкласс Фиттинга в классе $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга.

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы в случае, когда класс $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Bryce R.A., Cossey J.*** Maximal Fitting classes of finite soluble groups // Bull Austral. Math. Soc. – 1974. – Vol. 10. – P. 169–175.
2. ***Laue H.*** Über nichtauflösbare normalen Fittingklassen // J. Algebra. – 1997. – Vol. 45. – P. 274–283.
3. ***Doerk K., Hawkes T.*** Finite soluble groups. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
4. ***Cossey J.*** Products of Fitting Classes // Math. Z. – 1975. – Bd. 141. № 3. – S. 289–295.
5. ***Blessenohl D., Gaschütz W.*** Über normale Schunk- und Fittingklassen // Math. Z. – 1970. – Bd. 118, N 1.– S. 1–8.
6. ***Воробьев Н.Т.*** О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга // Доклады АН БССР. – Т. 35. № 6. – 1991. – С. 485–497.
7. ***Коуровская тетрадь.*** Нерешенные вопросы теории групп. Издание 14 // Институт математики СО РАН. 1999. – 135 с.

SUMMARY

It is proved that every maximal Fitting subclass of a normal Fitting class is normal.