Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

С.М. Бородич, Т.В. Кавитова

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2018

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
Б83

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 28.02.2018 г.

Авторы: старшие преподаватели кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **С.М. Бородич, Т.В. Кавитова**

Рецензент:
доцент кафедры математики и информационных технологий УО «ВГТУ», кандидат физико-математических наук *В.С. Денисов*

Научный редактор:
доцент кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук *Т.Л. Сурин*

Бородич, С.М.

Б83 Дополнительные главы теории вероятностей и математической статистики : методические рекомендации / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2018. – 48 с.

Настоящее учебное издание содержит теоретический материал и разобранные примеры, помогающие усвоить основные понятия и методы теории случайных процессов. Оно может использоваться для организации самостоятельной работы студентов, а также при проведении практических занятий.

Предназначается для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)» и «Прикладная информатика (программное обеспечение компьютерных систем)».

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

Содержание

Введение ………………………………………………………………… 4
1. Случайные процессы ……………………………………………… 5
2. Законы распределения случайных процессов ………………… 6
3. Основные характеристики случайных процессов ……………. 8
4. Каноническое разложение случайного процесса …………….. 10
5. Некоторые классы случайных процессов ……………………... 14
6. Пуассоновский процесс ………………………………………... 17
7. Марковские процессы ………………………………………….. 20
8. Классификация состояний однородной цепи Маркова ……… 22
9. Эргодические теоремы ………………………………………… 26
10. Системы дифференциальных уравнений Колмогорова …….. 28
11. Ветвящийся процесс ………………………………………….... 31
Задачи для самостоятельного решения ………………………….. 37
Литература ………………………………………………………… 47

ВВЕДЕНИЕ

В учебном издании «Дополнительные главы теории вероятностей и математической статистики» излагаются основы теории случайных процессов, рассматриваются некоторые важные классы случайных процессов и достаточно подробно анализируются марковские процессы с дискретным и непрерывным временем.

Учебное издание организовано следующим образом: пункты 1–5 посвящены общим вопросам теории случайных процессов (основные понятия, терминология, классификация); пункт 6 содержит основные сведения о пуассоновском процессе; в пунктах 7–10 обсуждаются различные вопросы, связанные с марковскими процессами (основные свойства, классификация состояний однородной цепи Маркова, эргодичность, системы дифференциальных уравнений Колмогорова); в пункте 11 рассмотрен ветвящийся процесс, приведены некоторые важные факты, вытекающие из анализа дифференциального уравнения для производящей функции этого процесса; в конце издания приведен список задач, который полностью охватывает все изучаемые темы и вполне обеспечивает необходимую самостоятельную работу студентов. Кроме теоретической части каждый пункт содержит разобранные примеры, позволяющие закрепить, углубить теоретические знания и получить навыки практического использования вероятностных методов.

В качестве источника необходимого теоретического материала рекомендуется использовать методические издания [1–2] этих же авторов.

Настоящее издание адресуется прежде всего студентам факультета математики и информационных технологий, обучающимся по специальностям «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)» и «Прикладная информатика (программное обеспечение компьютерных систем)».

1. Случайные процессы

Пусть T – некоторое подмножество числовой прямой **R**. Если каждому значению $t \in T$ поставлена в соответствие случайная величина $X(t)$, то говорят, что на множестве T задан *случайный процесс* $X(t)$. При этом параметр t (аргумент случайного процесса) интерпретируется как время. Таким образом, случайный процесс представляет собой однопараметрическое семейство случайных величин $X(t)$, $t \in T$.

Примечание. Наряду с термином «случайный процесс» часто как синоним используется термин «случайная функция».

Если множество T не более чем счётно (т.е. конечно либо счётно), то случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с дискретным временем*.

Если T – некоторый промежуток действительной оси, то случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с непрерывным временем*.

Пусть, осуществляя некоторый эксперимент, мы отмечаем для каждого момента времени $t \in T$ значение, фактически принятое процессом $X(t)$ в этот момент. Тогда мы получим функцию $x(t)$, называемую *реализацией* (или *траекторией*) случайного процесса $X(t)$ и описывающую одно из возможных течений этого процесса – то, которое наблюдалось в данном эксперименте.

Случайная величина $X(t_0)$, в которую обращается случайный процесс $X(t)$ при $t = t_0$, называется *сечением* этого процесса в момент времени t_0.

Следует отметить, что в общем случае задать случайный процесс аналитически (т.е. с помощью формулы) невозможно. Исключение составляют так называемые *элементарные случайные процессы*, представимые в следующем виде:

$$X(t) = X(t, U_1, \ldots, U_n),$$

где $X(t, u_1, \ldots, u_n)$ – некоторая действительная функция от $n+1$ действительной переменной, U_1, …, U_1 – случайные величины с конкретными распределениями.

Пример 1. Элементарный случайный процесс имеет вид

$$X(t) = U \sin t \quad (t \geq 0),$$

где U – случайная величина, возможные значения которой принадлежат интервалу $(0, 5)$. Найти: 1) сечение процесса $X(t)$ в момент времени $t = \pi/6$; 2) реализацию процесса $X(t)$, полученную при проведении эксперимента, в котором случайная величина U приняла значение $u = 2$.

Решение. 1) Сечением процесса $X(t)$ в момент времени $t=\pi/6$ является случайная величина

$$X(\pi/6)=U\sin(\pi/6)=0{,}5U.$$

2) Если в результате эксперимента случайная величина U приняла значение $u=2$, то реализацией процесса $X(t)$ в этом эксперименте является функция

$$x(t)=2\sin t. \bullet$$

Пример 2. Случайный процесс имеет вид

$$X(t)=V+2t, \quad t\geq 0,$$

где V – случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[-3, 3]$. Найти вероятность того, что реализация процесса $X(t)$ хотя бы один раз обратится в нуль на отрезке $[1/2, 1]$.

Решение. Обозначим через A интересующее нас событие. Заметим, что все траектории процесса $X(t)$ непрерывны. Поэтому вероятность события A равна вероятности того, что в результате одного эксперимента произойдут события $\{\min\limits_{t\in[1/2,1]} X(t)\leq 0\}$ и $\{\max\limits_{t\in[1/2,1]} X(t)\geq 0\}$. Таким образом,

$$P(A)=P\{V+2\min_{t\in[1/2,1]} t\leq 0, V+2\max_{t\in[1/2,1]} t\geq 0\}=$$

$$=P\{V+2\cdot(1/2)\leq 0, V+2\cdot 1\geq 0\}=P\{-2\leq V\leq -1\}.$$

Поскольку случайная величина V распределена равномерно на отрезке $[-3, 3]$, то

$$P(A)=\int_{-2}^{-1}(1/6)dx=1/6. \bullet$$

2. Законы распределения случайных процессов

Пусть t – произвольное фиксированное значение аргумента случайного процесса $X(t)$. Тогда закон распределения случайной величины $X(t)$ — сечения этого процесса — называется *одномерным законом распределения* процесса $X(t)$. Одномерный закон распределения обычно задаётся *одномерной функцией распределения*

$$F_1(x;t)=P\{X(t)<x\}.$$

Если сечение $X(t)$ – непрерывная случайная величина, одномерный закон распределения процесса определяется также его *одномерной плотностью* $p_1(x;t)$, являющейся плотностью распределения случайной величины $X(t)$. Если сечение $X(t)$ – дискретная случайная величина, то одномерный закон распределения процесса задаётся перечнем всех возможных её значений

$$x_1(t), \ldots, x_n(t), \ldots$$

и их вероятностей

$$p_1(t),\ \ldots,\ p_n(t),\ \ldots,$$
$$p_i(t) = P\{X(t) = x_i\},\quad \sum_i p_i(t) = 1.$$

Для решения задач, в которых значения аргумента случайного процесса рассматриваются изолированно друг от друга, знания одномерных законов распределения вполне достаточно. Однако в большинстве задач одномерные законы распределения не могут служить полной характеристикой случайных процессов, так как они не отражают взаимную зависимость различных сечений. Для получения более детальной характеристики случайного процесса пользуются *двумерным, трехмерным и т.д. законами распределения*.

Пусть $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ — произвольные фиксированные значения аргумента случайного процесса $X(t)$. Закон распределения случайного вектора $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ называется *n-мерным законом распределения* процесса $X(t)$. Обычно n-мерный закон распределения процесса задаётся *n-мерной функцией распределения*

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \ldots, X(t_n) < x_n\}.$$

Если $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$– непрерывная n-мерная случайная величина, то n-мерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ задаётся также его *n-мерной плотностью* $p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$, совпадающей (по определению) с плотностью случайного вектора $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$.

Пример 3. Дан случайный процесс

$$X(t) = V(1+t),\ t \ge 0,$$

где V – случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[0, 3]$. Найти одномерную функцию распределения и одномерную плотность этого процесса.

Решение. По определению одномерной функции распределения случайного процесса

$$F_1(x; t) = P\{X(t) < x\} = P\{V(1+t) < x\} = P\left\{V < \frac{x}{1+t}\right\} = F_V\left(\frac{x}{1+t}\right),$$

где $F_V(x)$ – функция распределения случайной величины V. Поскольку

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x}{3} & \text{при } 0 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3, \end{cases}$$

то

$$F_1(x;t)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \dfrac{x}{3(1+t)} & \text{при } 0\le x\le 3(1+t), \\ 1 & \text{при } x>3(1+t), \end{cases}$$

т.е. случайная величина $X(t)$ распределена равномерно на отрезке $[0,3(1+t)]$. Находим одномерную плотность процесса $X(t)$:

$$p_1(x;t)=\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x}=\begin{cases} \dfrac{1}{3(1+t)} & \text{при } 0\le x\le 3(1+t), \\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } x>3(1+t). \end{cases} \bullet$$

Пример 4. Пусть случайный процесс задан соотношением

$$X(t)=U\varphi(t), \quad t\in[0,1],$$

где U – некоторая случайная величина с функцией распределения $F_U(x)$, $\varphi(t)$ – действительная функция аргумента t, принимающая только положительные значения. Найти двумерную функцию распределения случайного процесса $X(t)$.

Решение. Согласно определению двумерной функции распределения случайного процесса,

$$F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=P\{X(t_1)<x_1,X(t_2)<x_2\}=P\{U\varphi(t_1)<x_1,U\varphi(t_2)<x_2\}=$$

$$=P\{U<\frac{x_1}{\varphi(t_1)},U<\frac{x_2}{\varphi(t_2)}\}=P\{U<\min(\frac{x_1}{\varphi(t_1)},\frac{x_2}{\varphi(t_2)})\}=$$

$$=F_U\left(\min(\frac{x_1}{\varphi(t_1)},\frac{x_2}{\varphi(t_2)})\right). \bullet$$

3. Основные характеристики случайных процессов

Пусть $X(t)$ – случайный процесс, определённый на множестве $T\subset\mathbf{R}$.

Математическим ожиданием процесса $X(t)$ называется неслучайная (т.е. обычная) функция $m_X(t)$, которая при каждом значении $t\in T$ равна математическому ожиданию соответствующего сечения:

$$m_X(t)=M[X(t)].$$

Дисперсией процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $D_X(t)$, которая при каждом значении $t\in T$ равна дисперсии соответствующего сечения:

$$D_X(t)=D[X(t)].$$

Корреляционной функцией процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $K_X(t_1,t_2)$, которая при каждой паре значений t_1, $t_2\in T$ равна ковариации соответствующих сечений:

$$K_X(t_1,t_2)=\operatorname{cov}[X(t_1),X(t_2)]=$$
$$=M([X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]).$$

Корреляционная функция является характеристикой связи между сечениями случайного процесса. Очевидно, что она обладает следующими свойствами:

1) $K_X(t_1,t_2)=K_X(t_2,t_1)$ (свойство симметрии);

2) $K_X(t,t)=D_X(t)$.

Пример 5. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса

$$X(t)=U\cos\omega t,\quad t\geq 0,$$

где U – случайная величина с $M(U)=7$, $D(U)=0{,}5$; ω – положительная постоянная.

Решение. Последовательно находим:

$$m_X(t)=M(U\cos\omega t)=\cos\omega t\, M(U)=7\cos\omega t;$$
$$K_X(t_1,t_2)=\operatorname{cov}(U\cos\omega t_1,U\cos\omega t_2)=\cos\omega t_1\cos\omega t_2\operatorname{cov}(U,U)=$$
$$=\cos\omega t_1\cos\omega t_2 D(U)=0{,}5\cos\omega t_1\cos\omega t_2;$$
$$D_X(t)=K_X(t,t)=0{,}5\cos^2\omega t.\ \bullet$$

Пусть на множестве T заданы два случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$.

Взаимной корреляционной функцией процессов $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию $R_{XY}(t_1,t_2)$, которая при каждой паре значений $t_1,\ t_2\in T$ равна ковариации сечений $X(t_1)$ и $Y(t_2)$:

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\operatorname{cov}[X(t_1),Y(t_2)]=$$
$$=M([X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]).$$

Если $R_{XY}(t_1,t_2)\equiv 0$, то случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *некоррелированными*.

Легко видеть, что при одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не меняется:

$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_{YX}(t_2,t_1).$$

Для математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции суммы процессов $X(t)$ и $Y(t)$ справедливы формулы

$$m_{X+Y}(t)=m_X(t)+m_Y(t),$$
$$D_{X+Y}(t)=D_X(t)+D_Y(t)+2R_{XY}(t,t),$$
$$K_{X+Y}(t_1,t_2)=K_X(t_1,t_2)+K_Y(t_1,t_2)+R_{XY}(t_1,t_2)+R_{XY}(t_2,t_1).$$

Если процессы некоррелированы, то

$$D_{X+Y}(t)=D_X(t)+D_Y(t),$$
$$K_{X+Y}(t_1,t_2)=K_X(t_1,t_2)+K_Y(t_1,t_2).$$

4. Каноническое разложение случайного процесса

Каноническим разложением случайного процесса X(t) называется его представление в виде

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i(t), \tag{1}$$

где $m_X(t)$ – математическое ожидание процесса $X(t)$; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_n(t)$ – неслучайные функции аргумента t (времени); V_1, V_2, …, V_n – случайные величины, удовлетворяющие следующим условиям:

$$M(V_i) = 0,\ D(V_i) = D_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$M(V_i V_j) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Функции $\varphi_i(t)$ называются *координатными функциями канонического разложения*, а случайные величины V_i – *коэффициентами канонического разложения*.

Если случайный процесс $X(t)$ представлен каноническим разложением (1), то его корреляционная функция записывается в виде

$$K_X(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} D_i \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) \tag{2}$$

Выражение (2) называется *каноническим разложением корреляционной функции случайного процесса X*(t).

Полагая в формуле (2) $t_1 = t_2 = t$, получаем *каноническое разложение дисперсии случайного процесса X*(t):

$$D_X(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i [\varphi_i(t)]^2.$$

Приведём алгоритм нахождения канонического разложения случайного процесса

$$X(t) = \psi_0(t) + \sum_{i=1}^{n} U_i \psi_i(t),$$

где $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, …, $\psi_n(t)$ – некоторые неслучайные функции, а U_1, U_2, …, U_n – случайные величины с известными математическими ожиданиями $M(U_i) = m_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и известной ковариационной матрицей

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn} \end{pmatrix},$$

$K_{ij} = \operatorname{cov}(U_i, U_j)$ – ковариация случайных величин U_i и U_j.

Прежде всего перейдём к центрированным (т.е. имеющим нулевое математическое ожидание) случайным величинам

$$\overset{\circ}{U}_i = U_i - m_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Имеем:

$$X(t) = \psi_0(t) + \sum_{i=1}^{n} m_i \psi_i(t) + \sum_{i=1}^{n} (U_i - m_i)\psi_i(t) =$$

$$= m_X(t) + \sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{U}_i \psi_i(t), \qquad (3)$$

где $m_X(t) = \psi_0(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \psi_i(t)$ – математическое ожидание случайного процесса $X(t)$. Заметим, что для любых i и j

$$M(\overset{\circ}{U}_i \overset{\circ}{U}_j) = K_{ij}.$$

Неизвестные случайные коэффициенты V_i канонического разложения процесса $X(t)$ будем искать в виде линейных комбинаций случайных величин $\overset{\circ}{U}_1$, $\overset{\circ}{U}_2$, …, $\overset{\circ}{U}_n$ (тем самым будет гарантирована центрированность случайных величин V_i, $i = 1, 2, \ldots, n$).

Запишем следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{\circ}{U}_1 = V_1, \\
&\overset{\circ}{U}_2 = a_{21}V_1 + V_2, \\
&\overset{\circ}{U}_3 = a_{31}V_1 + a_{32}V_2 + V_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\overset{\circ}{U}_n = a_{n1}V_1 + a_{n2}V_2 + \ldots + a_{n,n-1}V_{n-1} + V.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Предполагаем, что в этих равенствах центрированные случайные величины V_i удовлетворяют условиям некоррелированности

$$M(V_i V_j) = 0 \quad (i \neq j). \qquad (5)$$

Из равенств (4) последовательно находим неизвестные коэффициенты a_{ij} и искомые выражения случайных величин V_i через случайные величины $\overset{\circ}{U}_1$, $\overset{\circ}{U}_2$, …, $\overset{\circ}{U}_n$. Рассмотрим этот процесс подробнее.

Чтобы найти коэффициент a_{21}, умножим второе равенство (4) на V_1 и перейдём к соответствующему равенству для математических ожиданий:

$$M(\overset{\circ}{U}_2 V_1) = a_{21} M(V_1{}^2) + M(V_2 V_1).$$

Учитывая, что $M(V_2 V_1) = 0$ и $V_1 = \overset{\circ}{U}_1$, имеем

$$K_{21} = a_{21} K_{11},$$

откуда

$$a_{21} = K_{21} / K_{11}.$$

Из первого и второго равенств (4) находим также

$$V_2 = -a_{21} \overset{\circ}{U}_1 + \overset{\circ}{U}_2.$$

Предположим, что в первых $k-1$ равенствах (4) все коэффициенты a_{ij} уже найдены и случайные величины V_1, V_2, …, V_{k-1} представлены в виде линейных комбинаций случайных величин $\overset{\circ}{U}_i$.

Рассмотрим следующее (k-ое) равенство:

$$\overset{\circ}{U}_k = a_{k1} V_1 + a_{k2} V_2 + \ldots + a_{k,k-1} V_{k-1} + V_k. \tag{6}$$

Умножим обе его части на случайную величину V_i $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ и перейдём к математическим ожиданиям:

$$M(\overset{\circ}{U}_k V_i) =$$
$$= a_{k1} M(V_1 V_i) + a_{k2} M(V_2 V_i) + \ldots + a_{k,k-1} M(V_{k-1} V_i) + M(V_k V_i).$$

С учётом условия (5) отсюда получаем

$$M(\overset{\circ}{U}_k V_i) = a_{ki} M(V_i^2), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{7}$$

Математические ожидания в обеих частях этих равенств находятся с учётом известных выражений случайных величин V_1, V_2, …, V_{k-1} через случайные величины $\overset{\circ}{U}_i$. При этом используется ковариационная матрица *K*. Далее из равенств (7) находим коэффициенты a_{ki}, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, и затем, используя равенство (6), находим выражение случайной величины V_k через случайные величины $\overset{\circ}{U}_i$.

Следуя описанному выше алгоритму, получим представления всех случайных коэффициентов V_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ канонического разложения процесса $X(t)$ в виде линейных комбинаций случайных величин $\overset{\circ}{U}_1$, $\overset{\circ}{U}_2$, …, $\overset{\circ}{U}_n$. Само каноническое разложение процесса получается из равенства (3) после подстановки в него вместо случайных величин $\overset{\circ}{U}_i$ их выражений через случайные величины V_i (равенства (4)).

Пример 6. Дан случайный процесс

$$X(t) = U_1 t + U_2 \sin t, \quad t \geq 0,$$

где случайный вектор (U_1, U_2) имеет вектор математических ожиданий $(1, -1)$ и ковариационную матрицу

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти канонические разложения процесса $X(t)$ и его корреляционной функции.

Решение. Переходим к центрированным случайным величинам

$$\overset{\circ}{U}_1 = U_1 - 1, \quad \overset{\circ}{U}_2 = U_2 + 1.$$

Имеем:

$$X(t) = t - \sin t + \overset{\circ}{U}_1 t + \overset{\circ}{U}_2 \sin t. \tag{8}$$

Записываем равенства

$$\left.\begin{aligned} \overset{\circ}{U}_1 &= V_1, \\ \overset{\circ}{U}_2 &= aV_1 + V_2. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь V_1, V_2 – случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями, удовлетворяющие условию некоррелированности

$$M(V_1 V_2) = 0.$$

Умножим второе равенство (9) на V_1 и перейдём к равенству для математических ожиданий:

$$M(\overset{\circ}{U}_2 V_1) = aM(V_1^2).$$

Находим

$$M(\overset{\circ}{U}_2 V_1) = M(\overset{\circ}{U}_2 \overset{\circ}{U}_1) = K_{21} = 1, \qquad M(V_1^2) = M(\overset{\circ}{U}{}_1^2) = K_{11} = 2.$$

Таким образом, имеем: $1 = 2a$, $a = 0{,}5$. Следовательно, второе равенство (9) принимает вид

$$\overset{\circ}{U}_2 = 0{,}5V_1 + V_2.$$

Выражаем V_2 через $\overset{\circ}{U}_1$ и $\overset{\circ}{U}_2$:

$$V_2 = -0{,}5V_1 + \overset{\circ}{U}_2 = -0{,}5\overset{\circ}{U}_1 + \overset{\circ}{U}_2$$

Подставляя в формулу (8) вместо случайных величин $\overset{\circ}{U}_1$ и $\overset{\circ}{U}_2$ их выражения через случайные величины V_1 и V_2, получаем каноническое разложение случайного процесса $X(t)$:

$$X(t) = t - \sin t + V_1 t + (0{,}5V_1 + V_2)\sin t = t - \sin t + V_1(t + 0{,}5\sin t) + V_2 \sin t.$$

Заметим, что в силу центрированности случайных величин V_1 и V_2

$$D(V_1)=M(V_1^2)=2,$$

$$D(V_2)=M(V_2^2)=0{,}25M(\overset{\circ}{U}{}_1^2)-M(\overset{\circ}{U}_1\overset{\circ}{U}_2)+M(\overset{\circ}{U}{}_2^2)=$$
$$=0{,}25K_{11}-K_{12}+K_{22}=0{,}25\cdot 2-1+3=2{,}5.$$

Поэтому, согласно формуле (2), каноническое разложение корреляционной функции случайного процесса $X(t)$ имеет следующий вид:

$$K(t_1,t_2)=2(t_1+0{,}5\sin t_1)(t_2+0{,}5\sin t_2)+2{,}5\sin t_1\sin t_2.\ \bullet$$

5. Некоторые классы случайных процессов

Случайный процесс $X(t)$, определённый на множестве T, называется *стационарным в узком смысле*, если все его n-мерные законы распределения не зависят от сдвига во времени, т.е. для любого $n\in\mathbf{N}$, любых $t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$ и любого $\tau\in\mathbf{R}$, такого что $t_k+\tau\in T$ (k = 1, 2, …, n), имеет место равенство

$$F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\ldots,t_n+\tau)=F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n).$$

Легко заметить, что одномерный закон распределения стационарного в узком смысле случайного процесса не зависит от времени, а его двумерное распределение не зависит от положения аргументов t_1 и t_2 на оси времени, а зависит только от их разности t_2-t_1.

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание не зависит от времени, а корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов, т.е.

$$m_X(t)=m_X=const,$$
$$K_X(t_1,t_2)=K_X(\tau),\ \tau=t_2-t_1.$$

Заметим, что дисперсия стационарного в широком смысле случайного процесса постоянна:

$$D_X(t)=K_X(0),$$

а корреляционная функция обладает следующими свойствами:

1) $K_X(-\tau)=K_X(\tau)$, т.е. $K_X(\tau)$ – чётная функция;

2) $|K_X(\tau)|\le K_X(0)$.

Пример 7. Пусть φ – случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[0,2\pi]$. Доказать, что случайный процесс

$$X(t)=\cos(t+\varphi),\quad t\ge 0,$$

является стационарным в широком смысле.

Решение. Поскольку случайная величина φ распределена равномерно на отрезке $[0,\,2\pi]$, то её плотность

$$p_\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & \text{при} \quad x\in[0,2\pi],\\ 0 & \text{при} \quad x\notin[0,2\pi].\end{cases}$$

Находим математическое ожидание процесса $X(t)$:

$$m_X(t)=M(\cos(t+\varphi))=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(t+x)\,p_\varphi(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t+x)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sin(t+x)\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}(\sin(t+2\pi)-\sin t)=0.$$

Найдём корреляционную функцию процесса $X(t)$. Имеем:

$$K_X(t_1,t_2)=M[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))]=$$

$$=M[\cos(t_1+\varphi)\cos(t_2+\varphi)]=M\left[\frac{\cos(t_2-t_1)+\cos(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cos(t_2-t_1)+\frac{1}{2}M[\cos(t_2+t_1+2\varphi)].$$

Заметим, что

$$M[\cos(t_2+t_1+2\varphi)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t_2+t_1+2x)dx=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sin(t_2+t_1+2x)\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{4\pi}(\sin(t_2+t_1+4\pi)-\sin(t_2+t_1))=0.$$

Поэтому

$$K_X(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\cos(t_2-t_1).$$

Таким образом, установлено, что математическое ожидание процесса $X(t)$ постоянно, а его корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов t_2-t_1. Следовательно, процесс $X(t)$ является стационарным в широком смысле. ●

Из стационарности случайного процесса в узком смысле следует его стационарность в широком смысле. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 8. Пусть случайные величины U_1 и U_2 независимы и имеют одинаковый закон распределения:

U_i	-1	1
p	$1/2$	$1/2$

($i=1,2$). Рассматривается случайный процесс

$$X(t)=U_1\cos\omega t+U_2\sin\omega t,\quad t\geq 0,$$

где ω – положительная постоянная. Доказать, что процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле, но не стационарен в узком смысле.

Решение. Заметим, что

$$M(U_1)=M(U_2)=0,$$

и так как случайные величины U_1 и U_2 независимы, то

$$M(U_1U_2)=0.$$

Кроме того,

$$M(U_1^2)=M(U_2^2)=1.$$

Поэтому

$$m_X(t)=\cos\omega t M(U_1)+\sin\omega t M(U_2)=0,$$

$$K_X(t_1,t_2)=M[X(t_1)X(t_2)]=$$

$$=M[(U_1\cos\omega t_1+U_2\sin\omega t_1)(U_1\cos\omega t_2+U_2\sin\omega t_2)]=$$

$$=\cos\omega t_1\cos\omega t_2 M(U_1^2)+\sin\omega t_1\cos\omega t_2 M(U_1U_2)+$$

$$+\cos\omega t_1\sin\omega t_2 M(U_1U_2)+\sin\omega t_1\sin\omega t_2 M(U_2^2)=$$

$$=\cos\omega t_1\cos\omega t_2+\sin\omega t_1\sin\omega t_2=\cos\omega(t_2-t_1).$$

Следовательно, процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле.

Одномерный закон распределения стационарного в узком смысле случайного процесса не должен зависеть от времени. Рассмотрим одномерные распределения процесса $X(t)$ в моменты времени $t=0$ и $t=\frac{\pi}{4\omega}$.

При $t=0$ имеем:

$$X(0)=U_1\cos 0+U_2\sin 0=U_1,$$

т.е. одномерное распределение процесса $X(t)$ в момент времени $t=0$ совпадает с распределением случайной величины U_1.

При $t=\frac{\pi}{4\omega}$ получаем

$$X(\frac{\pi}{4\omega})=U_1\cos(\omega\cdot\frac{\pi}{4\omega})+U_2\sin(\omega\cdot\frac{\pi}{4\omega})=\frac{\sqrt{2}}{2}(U_1+U_2),$$

т.е. в этот момент времени одномерное распределение процесса $X(t)$ совпадает с распределением случайной величины $V=\frac{\sqrt{2}}{2}(U_1+U_2)$.

Случайная величина V принимает значения $-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$, и её закон распределения, очевидно, отличен от закона распределения случайной величины U_1. Таким образом, одномерное распределение случайного процесса $X(t)$ меняется со временем, и, следовательно, этот процесс не является стационарным в узком смысле. ●

Случайный процесс $X(t)$, $t\in T$, называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любого $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$, и любых моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n\in T$, таких что $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, случайные величины

$$X(t_1), X(t_2)-X(t_1), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

Пример 9. Пусть $X(t)$, $t \geq 0$, – случайный процесс с независимыми приращениями, причём $X(0)=0$. Доказать, что дисперсия этого процесса $D_X(t)$ является неубывающей функцией аргумента t.

Решение. Пусть $0 \leq t_1 < t_2$. Если $t_1 = 0$, то $D_X(t_1) = D[X(0)] = 0$, и неравенство $D_X(t_1) \leq D_X(t_2)$ очевидно. Если $t_1 > 0$, то

$$D_X(t_2) = D[X(t_2)] = D[(X(t_2) - X(t_1)) + X(t_1)].$$

Случайные величины $X(t_2) - X(t_1)$ и $X(t_1) = X(t_1) - X(0)$ независимы, так как $X(t)$ – процесс с независимыми приращениями. Поэтому

$$D[(X(t_2) - X(t_1)) + X(t_1)] = D[(X(t_2) - X(t_1)] + D[X(t_1)].$$

Следовательно,

$$D_X(t_2) = D[(X(t_2) - X(t_1)] + D_X(t_1) \geq D_X(t_1).$$

Таким образом, $D_X(t)$ не убывает при $t \geq 0$. ●

Случайный процесс $X(t)$ называется *однородным (во времени)*, если закон распределения случайной величины $X(t + \tau) - X(t)$ зависит только от τ и не зависит от t.

6. Пуассоновский процесс

Случайный процесс $X(t)$, $t \geq 0$, называется *пуассоновским*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) $X(0) = 0$;

2) $X(t)$ – процесс с независимыми приращениями;

3) в случайные моменты времени t_1, t_2, t_3, … ($t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$) происходит приращение значения $X(t)$ на единицу, причем для любого $t \geq 0$ и любого достаточно малого $\Delta t > 0$

$$P\{X(t+\Delta t) - X(t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \qquad (\lambda = \text{const} > 0),$$

$$P\{X(t+\Delta t) - X(t) > 1\} = o(\Delta t),$$

где $o(\Delta t)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δt при $\Delta t \to 0$.

Из последних двух равенств следует, что

$$P\{X(t+\Delta t) - X(t) = 0\} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Параметр λ называется *интенсивностью* пуассоновского процесса $X(t)$.

Реализация пуассоновского процесса представляет собой число регистраций наступления некоторого события за период от 0 до текущего момента времени t. На рис. 1 показана реализация, соответствующая первому наступлению события в момент t_1, второму – в момент t_2 и т.д.

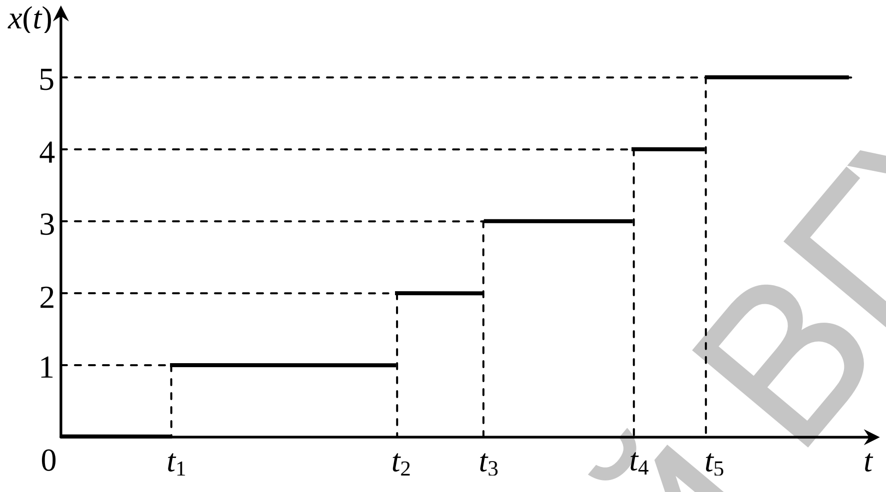

Рис. 1

К пуассоновским процессам относятся: процесс радиоактивного распада ($X(t)$ – число атомов, распавшихся за время t), поток заявок на АТС ($X(t)$ – число вызовов за время t), сбои аппаратуры ($X(t)$ – число сбоев за время t) и т.д.

Положим $p_n(t) = P\{X(t) = n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Можно показать, что вероятности $p_n(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t), \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, что функции $p_n(t)$ должны удовлетворять также следующим начальным условиям:

$$p_0(0) = 1, \ p_n(0) = 0, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Решая систему (10) при начальных условиях (11), получаем одномерный закон распределения пуассоновского процесса:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Таким образом, в каждый фиксированный момент времени $t \geq 0$ случайная величина $X(t)$ (сечение процесса в момент времени t) распределена по закону Пуассона с параметром λt. Следовательно,

$$M[X(t)] = \lambda t$$

(см., например, [1]). Поэтому параметр λ трактуется как среднее число единичных приращений пуассоновского процесса в единицу времени.

Пуассоновский процесс является однородным. Кроме того, он обладает свойством *отсутствия последействия*, означающим, что

$$P\{X(t+\tau)-X(t)=m \mid X(t)=n\}=P\{X(t+\tau)-X(t)=m\}$$

для любых $t,\tau\ge 0$ и любых $m, n\in\{0,1,2,\dots\}$.

Промежуток времени между двумя последовательными скачками пуассоновского процесса представляет собой случайную величину, распределённую по показательному закону с параметром λ.

Пример 10. Найти корреляционную функцию $K_X(t_1,t_2)$ пуассоновского процесса $X(t)$ с интенсивностью λ.

Решение. Пусть $t_2>t_1$. С учётом того, что ковариация линейна по каждому своему аргументу, получаем

$$K_X(t_1,t_2)=\mathrm{cov}[X(t_1),X(t_2)]=\mathrm{cov}[X(t_1),(X(t_2)-X(t_1))+X(t_1)]=$$
$$=\mathrm{cov}[X(t_1),X(t_2)-X(t_1)]+\mathrm{cov}[X(t_1),X(t_1)].$$

Случайные величины $X(t_1)=X(t_1)-X(0)$ и $X(t_2)-X(t_1)$ независимы, так как $X(t)$ – процесс с независимыми приращениями. Поэтому

$$\mathrm{cov}[X(t_1),X(t_2)-X(t_1)]=0.$$

Таким образом,

$$K_X(t_1,t_2)=\mathrm{cov}[X(t_1),X(t_1)]=D[X(t_1)]=\lambda t_1$$

(т.к. при каждом $t\ge 0$ случайная величина $X(t)$ распределена по закону Пуассона с параметром λt).

В силу симметричности функции $K_X(t_1,t_2)$ полученный выше результат позволяет записать эту функцию при $t_1>t_2$:

$$K_X(t_1,t_2)=\lambda t_2.$$

При $t_1=t_2=t$ имеем:

$$K_X(t,t)=D[X(t)]=\lambda t.$$

Итак,

$$K_X(t_1,t_2)=\lambda\min\{t_1,t_2\}. \bullet$$

Пример 11. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт за одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит менее 4 заказов.

Решение. Пусть случайная величина $X(t)$ – число заказов, поступивших за время t. Тогда семейство случайных величин $X(t)$, $t\ge 0$, представляет собой пуассоновский процесс. Согласно условию, интенсивность этого процесса (среднее число заказов за единицу времени) $\lambda=3$. Искомую вероятность находим с помощью теоремы сложения вероятностей и формулы (12):

$$P(X(2)<4)=p_0(2)+p_1(2)+p_2(2)+p_3(2)=$$
$$=\frac{6^0}{0!}e^{-6}+\frac{6^1}{1!}e^{-6}+\frac{6^2}{2!}e^{-6}+\frac{6^3}{3!}e^{-6}=61e^{-6}\approx 0{,}1512. \bullet$$

7. Марковские процессы

Рассмотрим семейство случайных величин $X(t),\ t\in T\ (T\subset\mathbf{R})$, зависящих от параметра t (времени) и принимающих целочисленные значения из множества J (конечного или счётного). Значения $X(t)$ — это возможные состояния некоторой системы. Обозначаем их $i,\ j,\ i_n,\ j_n,\ k,\ \ldots$. Таким образом, величины $X(t)$ описывают случайный процесс переходов системы из одного состояния в другое.

Предполагаем, что для любого $n\in\mathbf{N},\ n\geq 3$, любых моментов времени $t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$, таких что $t_1<t_2<\ldots<t_n$, и любых состояний $i_1,i_2,\ldots,i_n\in J$ выполнено равенство

$$P\{X(t_n)=i_n\,|\,X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\ldots,X(t_{n-1})=i_{n-1}\}=$$
$$=P\{X(t_n)=i_n\,|\,X(t_{n-1})=i_{n-1}\}.$$

Случайный процесс $X(t)$, обладающий этим свойством, называется *марковским*.

Далее будем полагать, что $T=[0,+\infty)$ или $T=\{0,1,2,\ldots\}$. В первом случае будем иметь процесс с непрерывным временем, а во втором – с дискретным. Отметим, что марковский процесс с дискретным временем, часто называют *цепью Маркова*.

Предположим, что для любых $s,t\in T$, таких что $s\leq t$, и любых $i,j\in J$ условная вероятность $P\{X(t)=j|X(s)=i\}$ не зависит от расположения моментов s и t на временной оси, а зависит лишь от длины соответствующего временного промежутка $t-s$:

$$P\{X(t)=j|X(s)=i\}=p_{ij}(t-s).$$

Это свойство случайного процесса $X(t)$ называется свойством *однородности*. Условную вероятность $p_{ij}(t-s)$ называют *переходной вероятностью* (вероятностью перехода из состояния $X(s)=i$ в состояние $X(t)=j$). Легко видеть, что

$$p_{ij}(0)=\begin{cases}1 & \text{при } i=j,\\ 0 & \text{при } i\neq j.\end{cases}\qquad(13)$$

Марковский процесс, обладающий свойством однородности, называется *однородным марковским процессом*.

Пример 12. Определённый в пункте 6 пуассоновский процесс $X(t),\ t\geq 0$, является однородным марковским процессом с множеством возможных состояний $J=\{0,1,2,\ldots\}$. Переходные вероятности этого процесса

$$p_{ij}(t-s)=\frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda(t-s)}\ \text{при}\ j\geq i,$$
$$p_{ij}(t-s)=0\ \text{при}\ j<i$$

(переход в состояние $X(t)=j$ возможен лишь из состояния $i \le j$). ●

Отметим некоторые важные свойства однородного марковского процесса $X(t)$ с переходными вероятностями $p_{ij}(t)$.

Свойство 1. Для любых моментов $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ $(n \ge 2)$, таких что $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, любых состояний $i_1, i_2, ..., i_n \in J$ и любого $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ выполняется равенство

$$P\{X(t_{m+1})=i_{m+1}, X(t_{m+2})=i_{m+2}, \ldots, X(t_n)=i_n \mid X(t_1)=i_1, \ldots, X(t_m)=i_m\}=$$
$$= p_{i_m i_{m+1}}(t_{m+1}-t_m)\, p_{i_{m+1} i_{m+2}}(t_{m+2}-t_{m+1}) \ldots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

Через $p_i(t)$ будем обозначать вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии i:

$$p_i(t) = P\{X(t)=i\}.$$

Очевидно, что $\sum\limits_{i \in J} p_i(t) = 1$ для любого момента времени $t \in T$.

Свойство 2. Для любых моментов $s, t_1, t_2, ..., t_n \in T$, таких что $s < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, и любых состояний $i, i_1, i_2, ..., i_n \in J$

$$P\{X(s)=i, X(t_1)=i_1, \ldots, X(t_n)=i_n\}=$$
$$= p_i(s)\, p_{i i_1}(t_1 - s) \ldots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

Для однородного марковского процесса $X(t)$ с конечным или счётным множеством состояний J переходные вероятности $p_{ij}(t)$, образуют *матрицу переходных вероятностей* $\Pi(t) = \left\| p_{ij}(t) \right\|_{i,\, j \in J}$. Сумма элементов каждой строки этой матрицы равна 1:

$$\sum_{j \in J} p_{ij}(t) = 1, \quad i \in J.$$

Отметим также, что в силу (13)

$$\Pi(0) = E \text{ (единичная матрица).}$$

Через $p(t)$ обозначим вектор распределения вероятностей состояний в момент времени t:

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots).$$

Свойство 3. Для любых $s, t \in T$ имеет место равенство

$$p(s+t) = p(s)\Pi(t). \tag{14}$$

Транспонировав обе части равенства (14), получим

$$p^T(s+t) = \Pi^T(t)\, p^T(s).$$

Свойство 4. Для любых $s, t \in T$

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in J} p_{ik}(s)\, p_{kj}(t), \quad i, j \in J,$$

или в матричной форме

$$\Pi(s+t) = \Pi(s)\Pi(t). \tag{15}$$

Это соотношение называют *уравнением Колмогорова – Чепмена*.

В силу (15) для однородного марковского процесса с дискретным временем имеем

$$\Pi(n)=\Pi^n, \qquad n=1,2,\ldots,$$

где $\Pi=\Pi(1)$ – матрица переходных вероятностей за один шаг (за единицу времени).

Пример 13. Матрица переходных вероятностей за один шаг однородной цепи Маркова имеет вид

$$\Pi=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\end{pmatrix}.$$

Распределение вероятностей состояний в момент времени $t=0$ определяется вектором $p(0)=(0{,}7;\,0{,}2;\,0{,}1)$. Найти:

1) вероятности состояний цепи в момент $t=2$;

2) вероятность того, что в моменты $t=0,1,2,3$ состояниями цепи будут соответственно $1,3,3,2$.

Решение. 1) Находим матрицу переходных вероятностей за два шага:

$$\Pi(2)=\Pi^2=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}43 & 0{,}31 & 0{,}26\\ 0{,}24 & 0{,}42 & 0{,}34\\ 0{,}36 & 0{,}35 & 0{,}29\end{pmatrix}.$$

Используя свойство 3, получаем вектор распределения вероятностей состояний цепи в момент времени $t=2$:

$$p(2)=p(0)\Pi(2)=(0{,}7;\,0{,}2;\,0{,}1)\begin{pmatrix}0{,}43 & 0{,}31 & 0{,}26\\ 0{,}24 & 0{,}42 & 0{,}34\\ 0{,}36 & 0{,}35 & 0{,}29\end{pmatrix}=(0{,}385;\,0{,}336;\,0{,}279).$$

2) В силу свойства 2

$$P\{X(0)=1,X(1)=3,X(2)=3,X(3)=2\}=p_1(0)\,p_{13}(1)\,p_{33}(1)\,p_{32}(1)=$$
$$=0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}0336. \ \bullet$$

8. Классификация состояний однородной цепи Маркова

Рассмотрим однородную цепь Маркова (однородный марковский процесс с дискретным временем).

Говорят, что состояние j *достижимо* из состояния i, если $p_{ij}(t)>0$ для некоторого целого $t\ge 0$.

Состояния i и j называют *сообщающимися*, если j достижимо из i и, в свою очередь, i достижимо из j; при этом пишут $i\leftrightarrow j$.

Нетрудно проверить, что отношение $\leftrightarrow$ является отношением эквивалентности (т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Следовательно, это отношение разбивает всё множество состояний системы на непересекающиеся *классы сообщающихся состояний*.

Цепь Маркова, все состояния которой образуют один класс сообщающихся состояний, называется *неразложимой* (или *неприводимой*). Если цепь содержит более одного класса сообщающихся состояний, то она называется *разложимой* (*приводимой*).

Состояние i называется *существенным*, если для каждого состояния j, достижимого из i, i достижимо из j; в противном случае состояние i называется *несущественным*.

Очевидно, что все состояния неразложимой цепи Маркова являются существенными.

Множество всех существенных состояний с помощью отношения $\leftrightarrow$ разбивается на непересекающиеся *классы сообщающихся существенных состояний*. Переход системы из одного такого класса в другой невозможен.

Замечание 1. Множество всех несущественных состояний тоже разбивается отношением $\leftrightarrow$ на классы сообщающихся состояний. Система может выйти из любого такого класса, но, выйдя из него, вернуться обратно в этот класс она уже не может. Если множество состояний цепи Маркова конечно, то с вероятностью 1 система рано или поздно выходит из множества несущественных состояний и после этого остаётся в одном из классов сообщающихся существенных состояний. ●

Пример 14. Дана матрица переходных вероятностей за один шаг однородной цепи Маркова:

$$\Pi=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указать существенные и несущественные состояния этой цепи.

Решение. Заметим, что за n шагов $(n=0,1,2,\ldots)$ из состояний 4 и 5 можно попасть только в эти же состояния, причём $p_{45}(1)>0$ и $p_{54}(1)>0$. Поэтому 4 и 5 – сообщающиеся и существенные состояния (они образуют класс сообщающихся существенных состояний).

За один шаг из состояний 1 и 3 можно попасть в состояние 5, а из состояния 2 – в состояние 4, однако, обратные переходы – из состояния 5 в состояния 1 и 3 и из состояния 4 в состояние 2 – ни за какое число шагов невозможны. Следовательно, состояния 1, 2 и 3 являются несущественными. ●

Состояние i, для которого $p_{ii}(1)=1$, называется *поглощающим*. Попав в поглощающее состояние, система остаётся в нём навсегда.

Обозначим через $f_i(n)$ вероятность того, что система, выйдя из состояния i, впервые вернётся в него через n шагов, т.е.

$$f_i(n)=P\{X(n)=i, X(n-1)\neq i,\ldots,X(1)\neq i \mid X(0)=i\}.$$

Тогда

$$F_i=\sum_{n=1}^{\infty} f_i(n)$$

есть вероятность того, что система, выйдя из состояния i, когда-либо вернётся в это состояние.

Состояние i называется *возвратным*, если $F_i=1$, и *невозвратным*, если $F_i<1$.

Теорема 1 (критерий возвратности состояний). Состояние i возвратно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)=\infty.$$

Легко показать, что возвратное состояние всегда является существенным.

Пример 15. Рассмотрим однородную цепь Маркова с множеством состояний $J=\mathbf{Z}$ (множество всех целых чисел) и переходными вероятностями за один шаг

$$p_{ij}(1)=\begin{cases}1/2, & \text{если } j=i-1 \text{ или } j=i+1,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Такая цепь описывает случайное блуждание частицы по целочисленным точкам действительной прямой, при котором частица на каждом шаге с одинаковой вероятностью, равной $1/2$, смещается на единицу влево или вправо. Состояние цепи в момент времени t – это координата блуждающей частицы в этот момент.

Исследуем вопрос о возвратности состояний данной цепи Маркова. Пусть i – произвольное состояние цепи (произвольная целочисленная точка числовой прямой). Очевидно, что, выйдя из точки i, частица может вернуться в эту точку только через чётное число шагов. Следовательно,

$$p_{ii}(2m+1)=0, \quad m=0,1,2,\ldots\,.$$

Вероятность возвращения частицы в точку i за чётное число шагов $n=2m$ находится по формуле Бернулли (см. [1]):

$$p_{ii}(2m)=C_{2m}^{m}p^{m}q^{m},$$

где p и q – вероятности смещения частицы за один шаг вправо и влево соответственно. В нашем случае $p=q=1/2$ и, следовательно,

$$p_{ii}(2m)=\frac{(2m)!}{4^{m}m!m!},\quad m=1,2,\ldots\ .$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}(n)=\sum_{m=1}^{\infty}p_{ii}(2m)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m)!}{4^{m}m!m!}.\qquad(16)$$

Исследуем этот ряд на сходимость. Используя формулу Стирлинга

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\quad(n\to\infty),$$

получаем

$$\frac{(2m)!}{4^{m}m!m!}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi m}}\ \text{при}\ m\to\infty.$$

Поскольку ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}$$

расходится, то в силу предельного признака сравнения расходится и ряд (16). Таким образом, согласно теореме 1, состояние i является возвратным. Итак, все состояния данной цепи Маркова – возвратные. ●

Состояние i называется *нулевым*, если $p_{ii}(n)\to 0$ при $n\to\infty$, и *ненулевым* в противном случае. Легко видеть, что невозвратное состояние всегда является нулевым, а ненулевое – возвратным. Заметим также, что у системы могут существовать возвратные нулевые состояния.

Предположим, что система, выйдя из состояния i, может вернуться в это состояние лишь за число шагов, кратное $d_i>1$, и d_i есть наибольшее целое число, обладающее указанным свойством. Тогда состояние i называется *периодическим*, а число d_i называется его *периодом*.

Пример 16. Рассматривается однородная цепь Маркова с множеством состояний $J=\{1,2,3\}$ и матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$\Pi=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}.$$

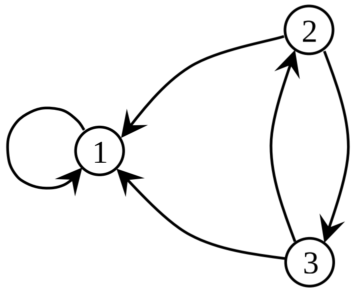

Рис. 2

Состояния системы и возможные переходы за один шаг из одного состояния в другое изображены в виде ориентированного графа на рис. 2. Так как $p_{11}(1)=1$, то состояние 1 является поглощающим. Возвращение в состояние 2 и состояние 3 возможно лишь за $2, 4, 6, \ldots$ шагов. Поэтому состояния 2 и 3 – периодические с периодом 2. ●

9. Эргодические теоремы

Рассматривается однородный марковский процесс $X(t)$, $t \in T$, множество состояний которого J конечно либо счётно.

Величина

$$k(t)=1-\frac{1}{2}\sup_{i,\,j\in J}\sum_{m\in J}|\,p_{im}(t)-p_{jm}(t)\,|$$

называется *коэффициентом эргодичности*.

Легко заметить, что

$$0\le k(t)\le 1 \quad \forall t\in T.$$

Теорема 2 (эргодическая теорема). Если $k(\tau)>0$ для некоторого $\tau>0$, то существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\pi_j, \qquad i, j\in J, \tag{17}$$

причём предельные значения π_j не зависят от начального состояния i.

Замечание 2. Из существования пределов (17) следует, что вероятности состояний $p_j(t)=P\{X(t)=j\}$ также имеют пределы при $t\to\infty$, причём

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t)=\pi_j, \quad j\in J. \text{ ●}$$

Теорема 3 (эргодическая теорема для однородной цепи Маркова с конечным числом состояний). Пусть $X(t)$ – однородный марковский процесс с дискретным временем ($t=0,1,2,\ldots$), множество состояний которого J конечно. Если для некоторого $n_0\in\mathbf{N}$ все элементы матрицы $\Pi(n_0)$ положительны, то существуют положительные пределы

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)=\pi_j, \qquad i, j\in J,$$

причём предельные значения π_j не зависят от начального состояния i и являются единственным решением системы

$$\begin{cases} \sum\limits_{k \in J} \pi_k p_{kj} = \pi_j, \quad j \in J, \\ \sum\limits_{k \in J} \pi_k = 1, \end{cases} \tag{18}$$

где $p_{kj} = p_{kj}(1)$ – переходная вероятность из состояния k в состояние j за время $t = 1$ (за один шаг).

Числа π_j в формулировках теорем 2 и 3, являющиеся предельными значениями для переходных вероятностей (а в силу замечания 2 и для вероятностей состояний), называются *финальными (предельными) вероятностями*.

Однородный марковский процесс, для которого существуют финальные вероятности

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}(n), \quad i, j \in J,$$

называется *эргодическим*.

Пусть $J = \{1, 2, \ldots, N\}$ – множество возможных состояний системы. Если ввести вектор-строку $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$, то первые N уравнений системы (18) можно переписать в матричном виде:

$$\pi \Pi = \pi \tag{19}$$

или (после транспонирования)

$$\Pi^T \pi^T = \pi^T,$$

где $\Pi = \Pi(1)$.

Вероятностное распределение π, для которого выполняется равенство (19), называется *стационарным*.

Пример 17. Дана матрица переходных вероятностей за один шаг однородной цепи Маркова с тремя состояниями:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Убедиться в эргодичности этой цепи и найти финальные вероятности.

Решение. Находим

$$\Pi(2) = \Pi^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}64 & 0{,}12 & 0{,}24 \\ 0{,}45 & 0{,}49 & 0{,}06 \\ 0{,}18 & 0{,}66 & 0{,}16 \end{pmatrix}.$$

Так как все элементы матрицы $\Pi(2)$ положительны, то в силу теоремы 3 данная цепь Маркова является эргодической.

Для вычисления финальных вероятностей составляем систему уравнений (18):

$$\begin{cases} 0{,}8\pi_1 + 0{,}3\pi_2 = \pi_1, \\ 0{,}7\pi_2 + 0{,}6\pi_3 = \pi_2, \\ 0{,}2\pi_1 + 0{,}4\pi_3 = \pi_3, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$\pi_1 = 1/2,\ \pi_2 = 1/3,\ \pi_3 = 1/6. \ ●$$

Пример 18. Показать, что однородная цепь Маркова с двумя состояниями и матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не является эргодической.

Решение. Нетрудно проверить, что

$$\Pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\Pi^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Отсюда, например, для $p_{11}(n)$ имеем:

$$p_{11}(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ чётное}, \\ 0, & \text{если } n \text{ нечётное}. \end{cases}$$

Следовательно, при $n \to \infty$ последовательность $p_{11}(n)$ не имеет предела. Таким образом, данная цепь эргодической не является. ●

10. Системы дифференциальных уравнений Колмогорова

Рассмотрим однородный марковский процесс $X(t)$ с непрерывным временем, $t \in [0, +\infty)$. Предположим, что его переходные вероятности $p_{ij}(t)$ $(i, j \in J)$ дифференцируемы справа в нуле. Тогда существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_i, \quad \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_{ij} \quad (i \neq j). \tag{20}$$

Очевидно, что $\lambda_i \geq 0$ и $\lambda_{ij} \geq 0$. Эти числа называют соответственно *интенсивностью выхода из состояния i* и *интенсивностью перехода из состояния i в состояние j*.

Замечание 3. Формулы (20) можно переписать в следующем виде:

$$p_{ii}(\Delta t) = 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \qquad p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij} \Delta t + o(\Delta t) \quad (i \neq j). \ ●$$

Можно доказать, что для любого $i \in J$ имеет место неравенство

$$\sum_{j: j \neq i} \lambda_{ij} \leq \lambda_i .$$

Однородный марковский процесс $X(t),\ t \in [0, +\infty)$, с дифференцируемыми в нуле переходными вероятностями называется *консервативным*, если для всех $i \in J$

$$\sum_{j: j \neq i} \lambda_{ij} = \lambda_i .$$

Замечание 4. Легко устанавливается, что однородный марковский процесс с конечным числом состояний, для которого выполнено указанное выше условие дифференцируемости переходных вероятностей, является консервативным. ●

Положим $\lambda_{ii} = -\lambda_i$.

Теорема 4. Переходные вероятности $p_{ij}(t)$ консервативного однородного марковского процесса $X(t)$ при всех $t \geq 0$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in J} \lambda_{ik} p_{kj}(t), \qquad i, j \in J \tag{21}$$

(*обратная система дифференциальных уравнений Колмогорова*).

Теорема 5. Пусть переходные вероятности $p_{ij}(t)$ однородного марковского процесса $X(t),\ t \in [0, +\infty)$, дифференцируемы в нуле (справа) и для каждого $j \in J$ выполнены условия:

1) $\sup\limits_{i \in J,\, i \neq j} \left| \dfrac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} - \lambda_{ij} \right| \to 0$ при $\Delta t \to 0+$.

2) $\sup\limits_{i \in J} \lambda_{ij} < C_j$,

где C_j – некоторая постоянная. Тогда вероятности $p_{ij}(t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in J} p_{ik}(t) \lambda_{kj}, \qquad i, j \in J \tag{22}$$

(*прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова*).

Числа λ_{ij} образуют матрицу $\Theta = \left\| \lambda_{ij} \right\|_{i, j \in J}$, которая называется *инфинитезимальной матрицей* процесса $X(t)$. С помощью этой матрицы обратную и прямую системы дифференциальных уравнений Колмогорова можно записать в матричной форме:

$$\Pi'(t) = \Theta \Pi(t), \qquad \Pi'(t) = \Pi(t) \Theta .$$

Отметим также, что при выполнении условий теоремы 5 прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет место и для вероятностей состояний $p_j(t) = P\{X(t) = j\}$:

$$p'_j(t) = \sum_{k \in J} p_k(t)\lambda_{kj}\,, \qquad j \in J\,, \tag{23}$$

или в матричной форме

$$p'(t) = p(t)\Theta\,,$$

где $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots)$ – вектор распределения вероятностей состояний в момент времени *t*.

Замечание 5. В случае, когда множество состояний *J* конечно, нетрудно установить, что в каждой из систем (21), (22) и (23) уравнения не являются линейно независимыми. Этот факт вытекает из соответствующих условий нормировки для переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ и вероятностей состояний $p_j(t)$:

$$\sum_{j \in J} p_{ij}(t) = 1, \quad i \in J\,,$$

$$\sum_{j \in J} p_j(t) = 1.\ \bullet$$

Пример 19. Составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний пуассоновского процесса с интенсивностью λ (см. пункт 6). Из определения этого процесса следует, что множеством его возможных состояний является множество $J = \{0, 1, 2, \ldots\}$, а переходные вероятности удовлетворяют следующим условиям:

$$p_{ij}(\Delta t) \equiv 0 \text{ при } i > j\,,$$

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t) \text{ при } j > i+1,$$

$$p_{ii}(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)\,.$$

Таким образом, в нашем случае

$$\lambda_{ii} = -\lambda\,, \quad \lambda_{i,i+1} = \lambda\,, \qquad i \in J\,,$$

$$\lambda_{ij} = 0\,, \quad i, j \in J, \ j \neq i, \ j \neq i+1,$$

и, следовательно, прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова (для вероятностей состояний) принимает вид

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t), \\ p'_j(t) = -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t), \quad j = 1, 2, \ldots\,. \end{cases}$$

Заметим, что эта система совпадает с системой (10). ●

Пример 20. Инфинитезимальная матрица однородной цепи Маркова имеет вид

$$\Theta = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$

где $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Найти распределение вероятностей состояний цепи в момент времени $t > 0$ при начальном распределении

$$p_1(0)=1, \quad p_2(0)=0.$$

Решение. Запишем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t), \\ p_2'(t) = \lambda p_1(t) - \mu p_2(t). \end{cases}$$

Одно из уравнений этой системы (например, второе) можно заменить условием нормировки $p_1(t)+p_2(t)=1$. Подставив $p_2(t)=1-p_1(t)$ в первое уравнение, получим

$$p_1'(t)+(\lambda+\mu)p_1(t)=\mu.$$

Решая это дифференциальное уравнение при начальном условии $p_1(0)=1$, находим

$$p_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Затем находим

$$p_2(t)=1-p_1(t)=-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \bullet$$

11. Ветвящийся процесс

Предположим, что имеется некоторая совокупность частиц, которые с течением времени превращаются в частицы такого же типа или исчезают. При этом каждая из исходных частиц за промежуток времени t независимо от других частиц и от обстоятельств, предшествовавших исходному моменту, с одинаковой для всех частиц вероятностью $p_n(t)$ переходит в группу из n частиц.

Пусть $X(t)$ – число частиц, имеющихся в момент времени t. Очевидно, эволюция величины $X(t)$ представляет собой однородный марковский процесс; будем называть его *ветвящимся*.

Пусть в исходный момент времени $t=0$ имеется k частиц. Обозначим через $X_i(t)$ число имеющихся в момент времени t частиц, порождённых i-й частицей. Тогда

$$X(t)=X_1(t)+X_2(t)+\ldots+X_k(t).$$

Случайные величины $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_k(t)$ независимы и имеют одно и то же распределение вероятностей:

$$P\{X_i(t)=n\}=p_n(t), \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

Функция

$$F(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)z^n \tag{24}$$

называется *производящей функцией числа частиц в момент времени t* (заметим, что ряд в формуле (24) сходится при $|z|\le 1$).

Функция $F(t, z)$ обладает следующими свойствами:

$$F(t + \tau, z) = F(t, F(\tau, z)), \tag{25}$$

$$F(0, z) = z. \tag{26}$$

В случае дискретного времени соотношение (25) позволяет последовательно находить производящие функции $F(t, z)$ в моменты времени $t = 2, 3, \ldots$, исходя из заданной производящей функции $F(1, z)$:

$$F(t, z) = F(1, F(t - 1, z)). \tag{27}$$

Пример 21. Найти производящую функцию числа частиц в n-м поколении, если производящая функция непосредственных потомков одной частицы равна $pz + 1 - p$.

Решение. В нашем случае $F(1, z) = pz + 1 - p$. Используя формулу (25), получаем

$$F(n, z) = F(1, F(n-1, z)) = pF(n-1, z) + 1 - p.$$

Следовательно,

$$F(n, z) - 1 = p[F(n-1, z) - 1] = p^2[F(n-2, z) - 1] = \ldots = p^{n-1}[F(1, z) - 1] =$$
$$= p^{n-1}(pz - p) = p^n(z - 1).$$

Отсюда получаем

$$F(n, z) = p^n z + 1 - p^n. \bullet$$

Отметим, что кроме производящей функции $F(t, z)$ рассматриваются также производящие функции

$$F_k(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{kn}(t) z^n, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Функции $F(t, z)$ и $F_k(t, z)$ связаны формулой

$$F_k(t, z) = [F(t, z)]^k.$$

Далее рассмотрим ветвящийся процесс $X(t)$ с непрерывным временем, $t \in [0, +\infty)$.

Предположим, что отдельная частица за малый промежуток времени Δt с вероятностью

$$p_n(\Delta t) = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t), \qquad n \neq 1,$$

превращается в n новых частиц (или исчезает – при $n = 0$), а с вероятностью

$$p_1(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

остаётся неизменной (λ_n и λ – неотрицательные постоянные). Пусть также $\lambda_1 = -\lambda$, $\sum_n \lambda_n = 0$ и переходные вероятности процесса $X(t)$ удовлетворяют обратной системе дифференциальных уравнений Колмогорова (см. (21)).

Введём в рассмотрение функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x^k . \tag{28}$$

Она является непрерывной на отрезке $[0,1]$, аналитической на интервале $(0,1)$, и формула (28) даёт её разложение в степенной ряд.

При сделанных выше предположениях можно доказать, что производящая функция $F(t,z)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{29}$$

В силу (26) производящая функция $F(t,z)$ при каждом z, $0 \le z \le 1$, совпадает с решением $x = x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющим начальному условию

$$x(0) = z.$$

Отметим, что параметры λ_k, $k = 0,1,2,\ldots$, называются *инфинитезимальными параметрами ветвящегося процесса*, а функция $f(x)$, определённая формулой (28), называется *производящей функцией инфинитезимальных параметров*.

Пример 22. Пусть

$$\lambda_0 = \lambda,\ \lambda_1 = -\lambda,\ \lambda_k = 0,\ k = 2,3,\ldots .$$

В этом случае $f(x) = \lambda - \lambda x = \lambda(1-x)$ и, следовательно, уравнение (29) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(1-x).$$

Решая это дифференциальное уравнение при начальном условии $x(0) = z$, получаем

$$F(t,z) = 1 - e^{-\lambda t}(1-z).$$

Вероятности $p_n(t)$, определяемые из разложения (24), имеют следующий вид:

$$p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t},\ p_1(t) = e^{-\lambda t},\ p_n(t) = 0,\ n = 2,3,\ldots . \bullet$$

Отметим некоторые факты, которые можно установить при анализе дифференциального уравнения (29).

Заметим прежде, что значение $x = 1$ является корнем уравнения

$$f(x) = 0 \tag{30}$$

(поскольку $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = 0$). Следовательно, у уравнения (29) всегда имеется интегральная кривая $x(t) \equiv 1$.

Легко устанавливается, что уравнение (30), кроме корня $x=1$, может иметь ещё лишь один корень, принадлежащий отрезку $[0,1]$ (случай $f(x)\equiv 0$ не рассматривается).

Эффект вырождения. Пусть $x=\alpha$ – наименьший корень уравнения (30) на отрезке $[0,1]$. Предположим, что в начальный момент времени $t=0$ имеется одна частица. Тогда $p_0(t)$ – вероятность того, что через время t не останется ни одной частицы. Поскольку $p_0(t)=F(t,0)$, то вероятность $p_0(t)$, рассматриваемая как функция от t, является решением дифференциального уравнения (29) с начальным условием $x(0)=0$. Можно показать, что

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t)=\alpha .$$

Предельное значение $p_0=\alpha$ называется *вероятностью вырождения* ветвящегося процесса $X(t)$.

Если функция $f(x)$ является положительной на интервале $0\le x<1$, то вероятность вырождения ветвящегося процесса равна 1.

Пример 23. Пусть

$$\lambda_0=a,\ \lambda_1=-(a+b),\ \lambda_2=b,\ \lambda_k=0,\ k=3,4,\dots,$$

где $a>0$, $b>0$. В данном случае

$$f(x)=a-(a+b)x+bx^2 .$$

Корни этого уравнения $x_1=b/a$ и $x_2=1$. Поэтому вероятность вырождения данного ветвящегося процесса

$$p_0=\min\{b/a,1\}=\begin{cases}1, & \text{если } a\le b,\\ b/a, & \text{если } a>b.\end{cases}\ \bullet$$

Эффект взрыва. Предположим, что уравнение (30) имеет корень $x=\alpha$, $0\le\alpha<1$. Для некоторого x_0, $\alpha<x_0<1$, рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_{x_0}^{1}\frac{dx}{f(x)}. \qquad (31)$$

Если интеграл (31) расходится, то $x(t)\equiv 1$ – единственная интегральная кривая уравнения (29), выходящая из точки $(0,1)$.

Если же интеграл (31) сходится, то из точки $(0,1)$ выходит целое семейство интегральных кривых $x_\tau(t)$, $\tau\ge 0$. Каждая из этих кривых ведёт себя следующим образом: при $0\le t\le\tau$ она совпадает с интегральной кривой $x(t)\equiv 1$, а после момента времени $t=\tau$ монотонно убывает, асимптотически приближаясь при $t \to \infty$ к интегральной кривой $x(t) \equiv \alpha$ (см. рис. 3).

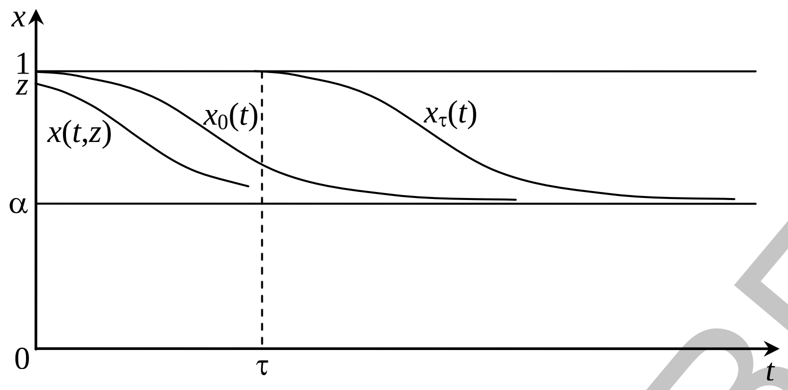

Рис. 3

Среди интегральных кривых $x_\tau(t)$, $\tau \ge 0$, есть кривая $x_0(t)$, которая лежит ниже всех остальных кривых этого семейства:

$$x_0(t) \le x_\tau(t), \qquad t \ge 0.$$

Легко видеть, что

$$x_0(t) = \lim_{z \to 1-0} x(t,z), \tag{32}$$

где $x(t,z)$ – интегральная кривая, выходящая из точки $(0, z)$, $\alpha < z < 1$ (т.е. $x_0(t)$ является предельной для других интегральных кривых, лежащих ниже её).

Рассмотрим так называемое *явление взрыва*, когда образуется бесконечно много частиц.

Если в начальный момент времени $t = 0$ имеется одна частица, то вероятность того, что взрыв произойдёт до момента времени *t*, есть

$$p_\infty(t) = 1 - P\{X(t) < \infty\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} P\{X(t) = n\} =$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1 - \lim_{z \to 1-0} F(t,z).$$

Далее учитываем, что $F(t,z)$ – решение дифференциального уравнения (29) с начальным условием $x(0) = z$.

В случае, когда $x(t) \equiv 1$ – единственная интегральная кривая уравнения (29), выходящая из точки $(0, 1)$, имеем

$$\lim_{z \to 1-0} F(t,z) = 1.$$

Следовательно, если интеграл (31) расходится, то

$$p_\infty(t) = 0, \quad t \ge 0,$$

т.е. возможность взрыва исключена.

Если интеграл (31) сходится, то с учётом (32) получаем

$$\lim_{z\to 1-0} F(t,z) = x_0(t)\,.$$

Следовательно,

$$p_\infty(t) = 1 - x_0(t) > 0$$

при любом $t > 0$.

Пример 24. Пусть $f(x) = 1 - x - \sqrt{1-x}$. Используя разложение

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k, \quad x\in[-1,1],$$

получаем

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k\,. \tag{33}$$

Обозначим

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_k = \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!},\ k = 2, 3, \dots\,.$$

В силу (33) и того, что $f(1) = 0$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = 0\,.$$

Таким образом, можно рассмотреть ветвящийся процесс с параметрами $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$.

Заметим, что $\alpha = 0$ – корень уравнения $f(x) = 0$. Интеграл (31) в нашем случае принимает следующий вид:

$$\int_{x_0}^{1} \frac{dx}{1 - x - \sqrt{1-x}}\,. \tag{34}$$

Поскольку

$$\frac{1}{1-x-\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}-1)} \sim -\frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ при } x\to 1-0$$

и интеграл

$$\int_{x_0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

сходится, то в силу предельного признака сравнения несобственный интеграл (34) также сходится. Следовательно, рассматриваемый ветвящийся процесс взрывается.

Определим вероятность взрыва к моменту времени *t*. Для этого найдём минимальное решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x - \sqrt{1-x}\,,$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 1$ (т.е. решение, интегральная кривая которого, выйдя из точки $(0,1)$, монотонно убывает при $t \geq 0$). Имеем:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}-1)}=dt,$$

$$-\frac{2d\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}-1}=dt,$$

$$-2\int\frac{d(1-\sqrt{1-x})}{1-\sqrt{1-x}}=\int dt,$$

$$-2\ln(1-\sqrt{1-x})=t+C_1,$$

$$x=1-\left(1-Ce^{-\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Подставляя в начальное условие, находим

$$x_0(t)=1-\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right)^2.$$

(Легко видеть, что $x_0(t)$ монотонно убывает при $t\geq 0$.) Следовательно,

$$p_\infty(t)=1-x_0(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right)^2$$

при любом $t>0$. ●

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи к пунктам 1-5

1. Случайный процесс задан формулой

$$X(t)=Ut,\quad t\in[0,1],$$

где U – случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[0,1]$. Описать:

а) множество всех реализаций случайного процесса $X(t)$;

б) множество всех сечений случайного процесса $X(t)$.

2. Рассматривается случайный процесс

$$X(t)=\sin(Ut),$$

где U – случайная величина, принимающая значения 0, 1, 2; аргумент t принимает дискретные значения 0, $\pi/4$, $\pi/2$, π. Изобразить графически все реализации и сечения данного случайного процесса.

3. Случайный процесс имеет вид

$$X(t)=e^{-tU},\quad t>0,$$

где U – случайная величина, имеющая показательный закон распределения с параметром $\lambda=1$. Описать множество реализаций случайного процесса $X(t)$ и найти функцию распределения его сечения в момент времени $t=1$.

4. Дан случайный процесс

$$X(t)=U\sin t, \quad t\geq 0,$$

где случайная величина U принимает значения -1 и 1 с вероятностью $1/2$ каждое. Найти вероятность события $A=\{\sup\limits_{t\in[0,\pi/4]} X(t)>1/2\}$.

5. Случайный процесс имеет вид

$$X(t)=Ut^2+Vt, \quad t>0,$$

где U, V – независимые случайные величины, распределённые по нормальному закону с параметрами $(0,1)$. Найти вероятность того, что траектория случайного процесса $X(t)$ монотонно не убывает, и вероятность случайного события $A=\{\min\limits_{t>0} X(t)<0\}$.

6. Рассматривается случайный процесс

$$X(t)=U+t(V+t), \quad t\geq 0,$$

где U и V – случайные величины, причём V имеет симметричное относительно нуля распределение и $P\{V=0\}=0$. Найти вероятность того, что траектория процесса $X(t)$ возрастает.

7. Пусть U – случайная величина с функцией распределения $F_U(x)$. Найти все конечномерные распределения (функции распределения) случайного процесса

$$X(t)=U+t, \quad t\geq 0.$$

8. Случайный процесс имеет вид

$$X(t)=e^{Vt}, \quad t\geq 0,$$

где V – случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[0,2]$. Найти одномерную функцию распределения этого процесса и его одномерную плотность.

9. Случайная величина U принимает значения -1 и 1 с вероятностью $1/2$ каждое. Найти двумерную функцию распределения случайного процесса

$$X(t)=e^{Vt}, \quad t\in[0,1].$$

10. Случайный процесс задан соотношением

$$X(t)=Ut+b, \quad t>0.$$

где U – случайная величина, распределённая нормально с параметрами $(0,1)$, b – константа. Найти двумерную функцию распределения процесса $X(t)$.

11. Пусть U и V – независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение с параметрами $(0, 1/2)$. Найти одномерную и двумерную функции распределения случайного процесса

$$X(t)=\frac{U+V}{t}, \quad t>0.$$

Для произвольного $t>0$ вычислить вероятность события $\{|X(t)|<3/t\}$.

12. Случайный процесс имеет вид

$$X(t)=\theta(U-t), \quad t\in[0,1],$$

где

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

– единичная функция Хевисайда, U – случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[0,1]$. Описать множество всех реализаций процесса $X(t)$ и найти его двумерную функцию распределения.

13. Пусть U и V – независимые случайные величины, распределённые по нормальному закону с параметрами $(0,1)$. Найти корреляционную функцию случайного процесса

$$X(t)=U+Vt, \quad t\geq 0.$$

14. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса

$$X(t)=U\sin t+V\cos t, \quad t\geq 0,$$

где U и V – некоррелированные случайные величины, $M(U)=1$, $M(V)=8$, $D(U)=D(V)=4$.

15. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса

$$X(t)=Ut+V\cos t, \quad t\geq 0,$$

где случайный вектор (U,V) имеет вектор математических ожиданий $(-1,1)$ и ковариационную матрицу

$$\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}3\end{pmatrix}.$$

16. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса $X(t)$ из задачи 12.

17. Случайный процесс задан формулой

$$X(t)=Ue^{Vt}, \quad t>0,$$

где U и V – независимые случайные величины, причём $M(U)=m$, $D(U)=\sigma^2$, а случайная величина V распределена равномерно на отрезке $[0,a]$. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса $X(t)$.

18. Случайный процесс имеет вид
$$X(t)=U\sin(Vt),\quad t\geq 0,$$
где U и V – независимые случайные величины, причём U имеет показательное распределение с параметром λ, а случайная величина V распределена равномерно на отрезке $[0,3]$. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса $X(t)$.

19. Случайный процесс $X(t)$ может принимать только два значения: ± 1, причём число перемен знака $X(t)$ в течение промежутка $(t,t+\tau)$ есть случайная величина, распределённая по закону Пуассона с параметром $a\tau$ (a – положительная постоянная).

Считая $m_X(t)\equiv 0$, найти корреляционную функцию и дисперсию процесса $X(t)$.

20. Даны два случайных процесса
$$X(t)=U\cos t+V\sin t,\quad Y(t)=U\cos t-V\sin t,\quad t\geq 0,$$
где случайные величины U и V независимы и имеют равные дисперсии $D(U)=D(V)=D$. Найти взаимную корреляционную функцию этих процессов.

21. Даны случайные процессы
$$X(t)=U_1\cos\omega_1 t+U_2\sin\omega_1 t,\quad Y(t)=V_1\cos\omega_2 t+V_2\sin\omega_2 t,\quad t\geq 0,$$
где U_1, U_2, V_1, V_2 – центрированные случайные величины с ковариационной матрицей
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
ω_1, ω_2 – положительные постоянные. Найти взаимную корреляционную функцию $R_{XY}(t_1,t_2)$.

22. На интервале $[0,+\infty)$ заданы случайные процессы
$$X(t)=\sin(t+U),\quad Y(t)=U\sin t,$$
где U – случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$. Найти корреляционную функцию случайного процесса $Z(t)=X(t)+Y(t)$.

23. Дан случайный процесс
$$X(t)=\sin t+U_1\cos t+U_2 t,\quad t\geq 0,$$
где U_1, U_2 – случайные величины с математическими ожиданиями $M(U_1)=-0{,}5$, $M(U_2)=1$ и ковариационной матрицей
$$K_U=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти канонические разложения процесса $X(t)$ и его корреляционной функции.

24. Случайный процесс $X(t)$ имеет следующий вид:

$$X(t)=U_1 t+U_2\cos t+U_3\sin t,\quad t\geq 0,$$

где U_1, U_2, U_3 – центрированные случайные величины с ковариационной матрицей

$$K_U=\begin{pmatrix}4&4&0\\4&8&-4\\0&-4&4\end{pmatrix}.$$

Найти канонические разложения процесса $X(t)$ и его корреляционной функции.

25. Пусть U и φ – независимые случайные величины, причём случайная величина φ распределена равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$. Является ли случайный процесс

$$X(t)=U\sin(\omega t+\varphi),\quad t\geq 0,$$

где ω – положительная постоянная, стационарным в широком смысле?

26. Пусть ω и φ – независимые случайные величины, причём ω имеет плотность $p(x)$, обращающуюся в нуль при $x<0$, а φ распределена равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$. Является ли случайный процесс

$$X(t)=A\cos(\omega t+\varphi),\quad t\geq 0,$$

где A – положительная постоянная, стационарным в широком смысле?

27. Рассматривается случайный процесс $X(t)$, заданный своим каноническим разложением:

$$X(t)=m_X+\sum_{i=1}^{n}(U_i\cos\omega_i t+V_i\sin\omega_i t),$$

где $m_X=const$, ω_i – положительные постоянные, U_i и V_i – случайные величины, удовлетворяющие следующим условиям:

$$M(U_i)=M(V_i)=0,\quad M(U_i^2)=M(V_i^2)=D_i,$$

$$M(U_iV_j)=0\quad i,j=1,2,\ldots,n,$$

$$M(U_iU_j)=M(V_iV_j)=0 \text{ при } i\neq j.$$

Показать, что процесс $X(t)$ является стационарным в широком смысле.

Указание. Использовать формулу канонического разложения корреляционной функции случайного процесса (пункт 4, формула (2)).

28. Пусть U_1, U_2, …, U_n – независимые случайные величины, $t_1<t_2<\ldots<t_n$ – точки из интервала $[a,b)$. Определим случайный процесс $X(t)$:

$$X(t)=\sum_{k:t_k<t}U_k,\quad t\in[a,b].$$

Доказать, что $X(t)$ – процесс с независимыми приращениями.

29. Пусть $X(t)$, $t \ge 0$, – однородный процесс с независимыми приращениями. Доказать, что при $a > 0$ процесс

$$Y(t) = X(t+a) - X(t)$$

является стационарным в широком смысле.

Указание. При преобразовании выражения для корреляционной функции $K_Y(t, t+\tau)$ рассмотреть два случая: 1) $0 < \tau \le a$ и 2) $\tau > a$.

30. Пусть $X(t)$, $t \ge 0$, – однородный процесс с независимыми приращениями, причём $X(0) = 0$ и дисперсия $D_X(t)$ – непрерывная функция аргумента *t*. Доказать, что

$$D_X(t) = kt,$$

где *k* – некоторая положительная постоянная.

Указание. Получить равенство $D_X(s+t) = D_X(s) + D_X(t)$ и воспользоваться им.

Задачи к пунктам 6-11

31. Интенсивность потока отказов радиоэлектронной аппаратуры равна 0,002 отказа в час. Найти вероятность того, что за 100 часов наступит не менее 3 отказов.

32. Рассматривается пуассоновский процесс $X(t)$ с интенсивностью λ. Найти условный закон распределения

$$P\{X(t_2) = m \mid X(t_1) = n\}, \quad m, n \in \mathbf{N} \quad (t_2 > t_1).$$

33. Пусть $X(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda = 5$. Найти:

1) $P\{X(3) = 8, X(7) = 12\}$; 2) $P\{X(3) = 8 \mid X(10) = 22\}$.

34. Некоторые события происходят в соответствии с пуассоновским процессом интенсивности λ. Найти вероятность того, что на интервале $(0, 2]$ произошло два события, а на интервале $(1, 4]$ – три события.

35. Пусть τ – случайная величина, равная промежутку времени между двумя последовательными скачками пуассоновского процесса интенсивности λ. Доказать, что τ имеет показательное распределение с параметром λ.

36. Пусть U_t, $t = 1, 2, \ldots$, – независимые случайные величины, имеющие одинаковый закон распределения:

$$P\{U_t = 1\} = p, \quad P\{U_t = -1\} = 1 - p \quad (0 < p < 1).$$

Является ли случайный процесс $X(t) = U_t U_{t+1}$, $t = 1, 2, \ldots$, цепью Маркова?

37. Найти, при каких значениях *a* и *b* однородная цепь Маркова определяется однозначно начальным распределением вероятностей состояний и матрицей переходных вероятностей за два шага

$$\Pi(2) = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}.$$

38. Матрица переходных вероятностей за один шаг однородной цепи Маркова имеет вид

$$\Pi=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,7 & 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Распределение вероятностей состояний в момент времени $t=0$ определяется вектором $p(0)=(0,1;\, 0,2;\, 0,2;\, 0,5)$. Найти:

1) вероятности состояний цепи в момент времени $t=2$;

2) вероятность того, что в моменты времени $t=0, 1, 2, 3$ состояниями цепи будут соответственно $1, 2, 3, 4$;

3) стационарное распределение.

39. В однородной цепи Маркова с двумя состояниями 1 и 2 начальным состоянием (при $t=0$) является 1. Найти вероятность того, что в моменты $t=2, 3, 4$ цепь будет находиться последовательно в состояниях $2, 1, 1$, если известны вероятности перехода (за один шаг) $p_{12}=1/3$ и $p_{21}=1/4$.

40. Рассматривается однородная цепь Маркова с тремя состояниями 1, 2 и 3. Начальным состоянием является состояние 1. Известны переходные вероятности (за один шаг) $p_{11}=1/5$, $p_{12}=2/5$, $p_{21}=1/3$, $p_{22}=2/3$, $p_{31}=1/7$, $p_{32}=2/7$. Найти вероятность того, что в следующие два момента времени не появится состояние 2.

41. В однородной цепи Маркова с двумя состояниями 1 и 2 вероятность того, что начальным состоянием будет состояние 1, равна $1/3$. Известны также следующие вероятности перехода за один шаг: $p_{11}=6/7$ и $p_{21}=4/5$. Найти вероятность цепочки состояний: $2, 1, 2$.

42. Рассматривается однородная цепь Маркова $X(t)$ с тремя состояниями 1, 2, 3 и матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$\Pi=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Известно начальное распределение вероятностей состояний:

$$P\{X(0)=1\}=0,2, \quad P\{X(0)=2\}=0,4, \quad P\{X(0)=3\}=0,4.$$

Найти вероятность того, что $X(1)<X(2)$.

43. Дана матрица переходных вероятностей за один шаг однородной цепи Маркова:

$$\Pi=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указать все пары сообщающихся состояний этой цепи. За сколько шагов из первого состояния можно попасть в третье?

44. Определить классы сообщающихся состояний и найти периодические состояния однородной цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$\Pi=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

45. Указать существенные и несущественные состояния однородной цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей за один шаг

$$\Pi=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/5 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

46. Матрица переходных вероятностей за один шаг однородной цепи Маркова имеет вид

$$\Pi=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что все состояния этой цепи возвратные.

Указание. Воспользоваться критерием возвратности состояний (пункт 8, теорема 1).

47. Однородная цепь Маркова имеет следующую матрицу переходных вероятностей за один шаг:

$$\Pi=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указать возвратные и невозвратные состояния этой цепи.

48. Доказать, что любая однородная цепь Маркова с конечным числом состояний имеет по крайней мере одно возвратное состояние.

49. Дана матрица переходных вероятностей за один шаг однородной цепи Маркова:

$$\Pi=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Убедиться в эргодичности этой цепи и найти финальные вероятности.

50. По двум урнам разложено 3 белых и 3 чёрных шара так, что в каждой урне содержится 3 шара. Число чёрных шаров в первой урне определяет состояние системы. В моменты времени $t=1,2,\ldots$ случайно выбирают по одному шару из каждой урны и меняют их местами. Составить матрицу переходных вероятностей однородной цепи Маркова, описывающей поведение данной системы. Убедиться в эргодичности этой цепи и найти финальные вероятности.

51. Автомашины *A* и *B* сдаются в аренду по одной и той же цене. Каждая из них может находиться в одном из двух состояний, которые образуют цепь Маркова: i_1 – машина работает хорошо, i_2 – машина требует ремонта. Матрицы вероятностей переходов между состояниями за сутки для этих машин равны соответственно

$$\Pi_A=\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \Pi_B=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Определить финальные вероятности состояний для обеих автомашин. Какую автомашину стоит арендовать?

52. Эргодическая цепь Маркова с двумя состояниями имеет финальные вероятности $\pi_1=p$ и $\pi_2=1-p$. Найти матрицу переходных вероятностей этой цепи.

53. Точка может занимать места $x=1,2,\ldots,n$. В моменты времени $t_1<t_2<\ldots<t_k<\ldots$ точка может совершить скачок в соседнее положение слева или справа с вероятностями p и $q=1-p$ соответственно.

Если же точка находится в положении $x=1$, то она с вероятностью p останется на месте и с вероятностью q перескочит в положение $x=2$. Аналогично, находясь в положении $x=n$, точка может в любой из моментов t_k остаться на месте с вероятностью q или перескочить в положение $x=n-1$ с вероятностью p.

а) Составить матрицу переходных вероятностей цепи Маркова, управляющей этими блужданиями.

б) Для случая $n=4$ убедиться в эргодичности этой цепи.

в) Вычислить финальные вероятности при $n=4$.

54. Радиотехническое устройство имеет возможные состояния $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$, интенсивности перехода между которыми равны

$$\lambda_{13}=1,\ \lambda_{12}=\lambda_{23}=\lambda_{43}=2,\ \lambda_{14}=\lambda_{34}=3,$$
$$\lambda_{41}=4,\ \lambda_{24}=6,$$

остальные $\lambda_{ij}=0$. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний. Найти стационарные (не изменяющиеся со временем) вероятности состояний.

55. (*Процесс Юла*). В области G имеются частицы, способные размножаться путём деления или иначе, и остающиеся в этой области в дальнейшем. За малый промежуток времени $[t, t+\Delta t)$ каждая частица с вероятностью $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ производит новую частицу независимо от остальных частиц. Составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний процесса и решить её. Найти математическое ожидание и дисперсию процесса.

56. (*Процесс чистой гибели*). В области G в начальный момент $t=0$ находилось k частиц. Независимо друг от друга частицы могут исчезать из области, причём за малый промежуток времени Δt каждая частица может исчезнуть с вероятностью $\mu\Delta t+o(\Delta t)$. Новые частицы в области появиться не могут. Составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний процесса и решить её. Найти математическое ожидание и дисперсию процесса.

57. Рассматривается ветвящийся процесс с дискретным временем. Известно, что производящая функция непосредственных потомков одной частицы равна $1-p(1-z)^{\alpha}$, $0<p<1$, $0<\alpha<1$. Найти производящую функцию числа частиц в n-м поколении.

58. Заданы инфинитезимальные параметры ветвящегося процесса с непрерывным временем:

$$\lambda_0=0,\ \lambda_1=-\lambda,\ \lambda_2=\lambda,\ \lambda_k=0,\ k=3,4,\ldots .$$

Найти вероятности $p_n(t)$ перехода одной частицы в группу из n частиц за промежуток времени t ($n=0, 1, 2, \ldots$).

59. Найти производящую функцию числа частиц в момент времени t для ветвящегося процесса с производящей функцией инфинитезимальных параметров

$$f(x)=-(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2,\quad \lambda_2>0,\ \lambda_1<-\lambda_2 .$$

Определить вероятность вырождения этого процесса.

60. Определить производящую функцию числа частиц в момент времени t для ветвящегося процесса с производящей функцией инфинитезимальных параметров

$$f(x)=(1-x)\big(1+\ln(1-x)\big).$$

Найти вероятность вырождения этого процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородич, С.М. Теория вероятностей и математическая статистика : методические рекомендации / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2015. – 51 с.

2. Бородич, С.М. Теория вероятностей и математическая статистика : методические рекомендации / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – 52 с.

3. Булинский, А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 408 с.

4. Вентцель, А.Д. Курс теории случайных процессов / А.Д. Вентцель. – 2-е изд., доп. – М.: Наука. Физматлит, 1996. – 400 с.

5. Волков, И.К. Случайные процессы: учебник для вузов / И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 448 с.

6. Зубков, А.М. Сборник задач по теории вероятностей: учебное пособие / А.М. Зубков, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков. – 3-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 320 с.

7. Карлин, С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин; пер. с англ. В.В. Калашникова; под ред. И.Н. Коваленко. – М.: Издательство «Мир», 1971. – 536 с.

8. Маталыцкий, М.А. Элементы теории случайных процессов: учеб. пособие / М.А. Маталыцкий – Гродно: ГрГУ, 2004. – 326 с.

9. Миллер, Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.

10. Прохоров, А.В. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учеб. пособие / А.В. Прохоров, В.Г. Ушаков, Н.Г. Ушаков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 328 с.

11. Розанов, Ю.А. Случайные процессы / Ю.А. Розанов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 184 с.

12. Севастьянов, Б.А. Ветвящиеся процессы / Б.А. Севастьянов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. – 436 с.

13. Турчин, В.Н. Марковские цепи: Основные понятия, примеры, задачи: учеб. пособие для студентов вузов / В.Н. Турчин, Е.В. Турчин. – Днепропетровск: ЛизуновПресс, 2016. – 192 с.

14. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. / В. Феллер; пер. с англ. Р.Л. Добрушина, А.А. Юшкевича, С.А, Молчанова; под ред. Е.Б. Дынкина. – 2-е изд., стер. – М.: Издательство «Мир», 1967. – Т. 1. – 499 с.

Учебное издание

БОРОДИЧ Сергей Митрофанович

КАВИТОВА Татьяна Валерьевна

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *И.В. Волкова*

Подписано в печать . Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,16. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.