Шпаков В. В.
УО «ВГУ им. П. М. Машерова»
(г. Витебск, Беларусь)
E-mail: slesh@tut.by

О КЛАССАХ ФИТТИНГА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ВЛОЖЕНИЕМ ПОДГРУПП ХОЛЛА

Ряд исследований канонических подгрупп конечных групп связан с изучением классов конечных групп, определяемых вложением подгрупп в холловы подгруппы. Напомним, что подгруппа H группы G называется *холловой π-подгруппой* [1], если $|H|$ есть π-число, а индекс $|G:H|$ есть π' число. Хорошо известна конструкция $L_\pi(F)$ [1] – класс всех групп, F-инъекторы которых содержат холловы π-подгруппы. В этом направлении исследований особый интерес представляет изучение класса $R_\pi(F)$ – класса всех тех групп G, холловы π-подгруппы которых содержатся в F-радикале G.

Рассматриваются только конечные и разрешимые группы.

Обозначения при необходимости можно найти в [1, 2].

Класс групп F называется *классом Фиттинга* [1], если F замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведения нормальных F-подгрупп. Если F – непустой класс Фиттинга, то подгруппа G_F группы G называется *F-радикалом* [1] группы G, если она является наибольшей из нормальных подгрупп G, принадлежащих F. Класс Фиттинга F называют *нормальным* [3], если F-радикал группы G является F-максимальной подгруппой группы G, для любой группы G. Заметим, что пересечение любого подмножества неединичных классов Фиттинга является снова неединичным классом Фиттинга. Наименьший неединичный нормальный класс Фиттинга обозначают S_*. Для исследований класса $R_\pi(F)$ мы будем использовать следующие известные характеризации нормального, которые приведем в качестве леммы.

Лемма [3, 4]. *Если F – непустой класс Фиттинга, то следующие утверждения равносильны:*

1) F – нормальный класс Фиттинга;

2) $FN = S$;

3) $F^* = S$.

Функцией Хартли или *H-функцией* называют всякое отображение f такое, что $f \Rightarrow$ {классы Фиттинга}. Следуя [3], положим $SLR(f) = \bigcap\limits_{p\in\pi} f(p)S_{p'}$. Класс Фиттинга F *определяется полулокально*

[4], если $F = SLR(f)$ для некоторой Н-функции f. Если $\pi = \varnothing$, то положим $SLR(f) = \varnothing$.

Известно также [5], что каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта.

Нами доказаны следующие теоремы

Теорема 1. *Если F – класс Фиттинга и π некоторое множество простых чисел, то $R_\pi(F)$ – класс Фиттинга.*

Теорема 2. *Если $\varnothing \subset \pi \subseteq P$ и F – класс Фиттинга, то класс Фиттинга $R_\pi(F)$ – определяется полулокально.*

Заметим, что в общем случае класс Фиттинга $R_\pi(F)$ нелокален. Это подтверждает следующий

Пример. Пусть $F = S_*$ – наименьший нормальный класс Фиттинга и $\varnothing \neq \pi \subset P$. Покажем, что в этом случае класс $R_\pi(F)$ не является локальным.

Предположим, что $R_\pi(F)$ – локальный класс Фиттинга. По лемме 1.7, ввиду нормальности класс F, следует, что $FN = S$. Так как $F \subseteq R_\pi(F)$, то $S = FN \subseteq R_\pi(F)N \subseteq S$. Значит, $R_\pi(F)N = S$ и по лемме 1 $R_\pi(F)$ – нормальный класс Фиттинга. Так как по лемме 2 $R_\pi(F)$ – класс Локетта, то по лемме 1 $R_\pi(F) = R_\pi(F)^* = S$.

Пусть теперь p и q – такие простые числа, что $p \mid (q-1)$, $G = D^n_{q^n}$ – монолитическая группа с нормальной абелевой силовской q-подгруппой экспоненты q^n и циклической силовской q'-подгруппой порядка p. Пусть $\pi = \pi(G)$. Тогда $G_\pi = G$ и ввиду результата Бергера (см. свойство 3 из [6]) группа $G \notin S_*$ и, следовательно $G_{S_*} \subset G$. Значит $G \notin R_\pi(F)$ и $R_\pi(F) \neq S_*$. Полученное противоречие, доказывает, что класс Фиттинга $R_\pi(F)$ в общем случае нелокален.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter De Gruyter: Berlin-New York, 1992. – 891 p.
2. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 278с.
3. Vorob'ev, N. T. Gaschutz's method in the theory of Fitting classes of finite soluble groups / N. T. Vorob'ev // Prof. of Gomel State University 3(16), Problems is Algebra. – 2000. – S. 155-166.
4. Lokett, P. The Fitting class F^* / P. Lokett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, N 2. – S. 131-136.
5. Воробьев, Н. Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н. Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, вып. 2. – С. 161-168.
6. Berger, T. An example in theory of normal Fitting classes / T. Berger, J. Cossey // Math. Z. – 1978. – Bd. 154, N 2. – S. 287-293.