УДК 517.538.52+517.538.53

Об асимптотических свойствах многочленов Эрмита–Паде

Е.П. Кечко
Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Представленная статья относится к изучению асимптотики многочленов Эрмита–Паде для системы экспонент.

Цель работы – изучение асимптотики недиагональных квадратичных многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент.

Материал и методы. *Материалом исследования являются квадратичные многочлены Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент. При этом использовался метод перевала.*

Результаты и их обсуждение. *Сформулирована теорема об асимптотике недиагональных квадратичных многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент* $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^{2}$, *где* $\left\{\lambda_p\right\}_{p=0}^{2}$ *– набор различных комплексных чисел. Для доказательства данной теоремы к интегральным представлениям многочленов Эрмита–Паде применяется метод перевала.*

Заключение. *В работе найдена асимптотика многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент. Сформулированная теорема дополняет и обобщает известные результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского, А.П. Старовойтова и А.В. Астафьевой, К. Драйвер и Н. Темме.*

Ключевые слова: *квадратичные многочлены Эрмита–Паде, асимптотика многочленов Эрмита–Паде, система экспонент, метод перевала.*

On Asymptotic Properties of Hermite–Pade Polynomials

E.P. Kechko
Educational Establishment «Francisk Skorina Gomel State University»

The presented article refers to the study of the asymptotics of Hermite–Pade polynomials for exponential system.

The purpose of the work is to study asymptotics of non-diagonal quadratic Hermite–Pade polynomials of type I for exponential system.

Material and methods. *The object of the research is quadratic Hermite–Pade polynomials of type I for exponential system. The saddle-point method is used for the research.*

Finding and their discussion. *A theorem about asymptotics of non-diagonal quadratic Hermite–Pade polynomials of type I for exponential system* $\left\{e^{\lambda_p z}\right\}_{p=0}^{2}$, *where set* $\left\{\lambda_p\right\}_{p=0}^{2}$ *are different complex numbes, is formulated. To prove the theorem to integral represent of Hermite–Pade polynomials the saddle-point method is used.*

Conclusion. *In the paper asymptotic of Hermite–Pade polynomials of type I for exponential system was found. The formulated theorems complement and generalize known results by P. Borwein, F. Wielonsky, A.P. Starovoitov and A.V. Astafieva, K. Driver and N. Temme.*

Key words: *quadratic Hermite–Padé polynnomials, asymptotic of Hermite–Padé polynomials, exponential system, saddle-point method.*

Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^{k}$ целых положительных чисел.

Многочленами Эрмита–Паде 1-го рода (Latin type) системы экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ называют многочлены $A_{n_p}^{p}(z)$, $deg A_{n_p}^{p} \le n_p - 1$, $p = 0,1,\ldots,k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$R_{n_0,n_1,\ldots,n_k}(z) = \sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^{p} e^{\lambda_p z} = O\left(z^{n_0+n_1+\ldots+n_k-1}\right),\ z \to 0. \quad (1)$$

Если $n_0 = n_1 = \ldots = n_k = n$, то элементы множества $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ – *диагональные многочлены Эрмита–Паде 1-го рода* для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ (подробнее о терминологии см. [1]).

Многочлены $\{A_{n_p}^p(z)\}_{p=0}^k$ введены в рассмотрение Эрмитом [2] (одновременно с полученными для них интегральными представлениями) спустя некоторое время после выхода в свет его знаменитой работы, посвященной доказательству трансцендентности числа e. С тех пор аппроксимации Эрмита–Паде экспоненциальных функций привлекали и привлекают внимание как классиков (Д. Гильберт, Ф. Клейн, Ф. Линдеман, К. Малер, К. Зигель), так и известных современных математиков.

В настоящее время теория многочленов и аппроксимаций Эрмита–Паде (определения аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го и 2-го рода см. в [1]) активно развивается и составляет самостоятельное направление комплексного анализа и теории приближений. Традиционно аппроксимации Эрмита–Паде имеют приложения к теории диофантовых приближений [3], к задачам приближения аналитических функций [4] и аналитического продолжения [5]. Они оказались полезными в теории несимметричных разностных операторов [6] и в теории случайных матриц [7].

При $k=1$ многочлены Эрмита–Паде являются хорошо изученными классическими многочленами Паде. Например, известная теорема Паде утверждает, что если нормировать их так, чтобы $A_n^1(0)=1$, то при $n\to\infty$ локально равномерно по $z\in\mathbb{C}$, т.е. на любом компакте в $\mathbb{C}$, справедливы асимптотические равенства

$$A_n^0(z) = -e^{z/2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ A_n^1(z) = e^{z/2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

В работе [8] П. Борвейн нашел асимптотику квадратичных диагональных многочленов Эрмита–Паде для системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$. Ф. Вилонский [9] получил аналогичный результат для системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$ при произвольном k. В работе [10] найдена асимптотика диагональных многочленов Эрмита–Паде в случае системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ с произвольными различными отличными от нуля числами $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$, лежащими на действительной прямой.

До сих пор в основном изучались свойства диагональных многочленов (подробнее см. [10]). К настоящему времени имеется всего несколько работ, в которых рассматривается недиагональный случай ([3], [11], [12]). Так, в [12] К. Драйвер и Н. Темме исследовали асимптотику недиагональных квадратичных многочленов Эрмита–Паде в случае, когда $\lambda_0=-2$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$, $n_0=n$, $n_1=\alpha n$, $n_2=n$.

В данной работе изучаются асимптотические свойства интегральных представлений недиагональных квадратичных многочленов Эрмита–Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^2$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{p=0}^{2} A_{n_p}^p(z)e^{\lambda_p z} = O\left(z^{n_0+n_1+n_2-1}\right),\ z\to 0. \tag{2}$$

В частности, получено усиление результатов К. Драйвер и Н. Темме.

Без ограничения общности будем считать, что $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2$ – произвольные различные действительные числа, а $n_0=n$, $n_1=\alpha n$, $n_2=\beta n$, где n, α, β – натуральные числа.

Предварительные результаты. Многочлены $A_{n_0}^0(z)$, $A_{n_1}^1(z)$, $A_{n_2}^2(z)$, удовлетворяющие равенствам (2), могут быть получены решением линейной системы $n_0+n_1+n_2-1$ однородных уравнений с $n_0+n_1+n_2$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_{n_p}^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i}\int_{C_p}\frac{e^{\xi z}\,d\xi}{[\varphi(\xi)]^n},\ 0\le p\le 2, \tag{3}$$

где $\varphi(\xi)=\xi(\xi-\lambda_1)^\alpha(\xi-\lambda_2)^\beta$ и удовлетворяют (2) и всем другим условиям. Равенство (3) не является новым (см. [1]).

Сформулируем без доказательства и в удобном для нас виде необходимое утверждение [13, с. 415].

Лемма (метод перевала). *Пусть функции* $f(z)$ *и* $S(z)$ *регулярны в некоторой односвязной области* G*, содержащей кусочно гладкую кривую* γ *и*

$$F_n = \int_\gamma f(\xi)e^{nS(\xi)}d\xi.$$

Предположим, что $\max_{\xi\in\gamma} \operatorname{Re} S(\xi)$ *достигается только в точке* z_0*, которая является внутренней точкой контура* γ *и простой точкой перевала, т.е.* $S'(z_0)=0$*,* $S''(z_0)\neq 0$*. Считаем также, что в окрестности* z_0 *контур* γ *проходит через оба сектора (см. [13, с. 414]), в которых* $\operatorname{Re}S(\xi) < \operatorname{Re}S(z_0)$*. Тогда при* $n \to +\infty$ *и* $f(z_0)\neq 0$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}}e^{nS(z_0)}\left(f(z_0)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (4)$$

Выбор ветви корня в (4) определяется из условий

$$\arg\sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 *– угол между касательной к кривой* l *в* z_0 *и положительным направлением действительной оси, а* l *– линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку* z_0*, т.е. для* l *в окрестности* z_0 *выполняются условия:* $\operatorname{Im}S(z) = \operatorname{Im}S(z_0)$ *при* $z\in l$*,* $\operatorname{Re}S(z) < \operatorname{Re}S(z_0)$ *при* $z\in l$*,* $z\neq z_0$*.*

Основная часть. Пусть x_j, $j=1,2$ – нули производной функции $\varphi_0(\xi)=\xi(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)$. Ясно, что x_j – действительные числа и $x_1\in(0,\lambda_1)$, $x_2\in(\lambda_1,\lambda_2)$. Считаем, что G – такая односвязная область, что $\{x_j\}_{j=1}^2 \subset G \in \mathbb{C}\setminus\{\lambda_p\}_{p=0}^2$. Тогда (см. [13]) по теореме о монодромии функция (везде далее i – мнимая единица)

$$S(\xi) = -\ln\varphi(\xi),$$

где

$$S(x_1) = -\ln|\varphi(x_1)|, \text{ если } \varphi(x_1)>0,$$
$$S(x_1) = -\ln|\varphi(x_1)| - i\pi, \text{ если } \varphi(x_1)<0,$$

однозначным образом аналитически продолжается в G. Значение функции $S(\xi)$ вычисляется по формуле

$$S(\xi) = -\ln|\varphi(\xi)| - i[\operatorname{Im}S(x_1) + \Delta_\gamma \arg\varphi(\xi)],$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и ξ, а $\Delta_\gamma \arg\varphi(\xi)$ – приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой γ.

Если $\xi\in G$, то справедливы равенства

$$S(\xi) = -\ln\varphi(\xi) = -\ln|\varphi(\xi)| - i\arg\varphi(\xi),$$

где $\arg\varphi(\xi)\in(-\pi,\pi]$. В области ее определения справедливы равенства

$$S'(\xi) = -\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = -\frac{1}{\xi} - \frac{\alpha}{\xi-\lambda_1} - \frac{\beta}{\xi-\lambda_2},$$

$$S''(\xi) = -\frac{\varphi''(\xi)\varphi(\xi) - [\varphi'(\xi)]^2}{[\varphi(\xi)]^2} = \frac{1}{\xi^2} + \frac{\alpha}{(\xi-\lambda_1)^2} + \frac{\beta}{(\xi-\lambda_2)^2},$$

из которых следует, что $S'(x_j)=0$,

$$S''(x_j) = -\varphi''(x_j)/\varphi(x_j) > 0,\ j=1,2.$$

Выбирая положительное значение корня, полагаем

$$B_n(x_j) = \sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_j)}}e^{nS(x_j)},\ j=1,2.$$

Теорема. *Пусть* $n_0 = n$, $n_1 = \alpha n$, $n_2 = \beta n$. *Тогда для каждого фиксированного* $z \in \mathbb{C}$ *при* $n \to \infty$

$$A^0_{n_0}(z) = B_n(x_1)e^{x_1 z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5}$$

$$A^1_{n_1}(z) = B_n(x_2)e^{(x_2-\lambda_1)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - B_n(x_1)e^{(x_1-\lambda_1)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{6}$$

$$A^2_{n_2}(z) = -B_n(x_2)e^{(x_2-\lambda_2)z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из интегрального представления

$$A^0_{n_0}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{e^{\xi z}\,d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \tag{8}$$

докажем равенство (5) для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$. Для этого в интеграле (8) деформируем контур интегрирования C_0 в прямоугольник R, принадлежащий полуплоскости $\{z : -\infty < Re z < \lambda_1\}$, с вершинами в точках $A(-a',-r)$, $B(-a',r)$, $C(a,r)$, $D(a,-r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a \in (0,\lambda_1)$, $a' > 0$. Так как

$$|\varphi(a+it)| = \sqrt{a^2+t^2}\left(\sqrt{(a-\lambda_1)^2+t^2}\right)^\alpha\left(\sqrt{(a-\lambda_2)^2+t^2}\right)^\beta > |\varphi(a)|,\ t \in [-r,r]\setminus\{0\},$$

то на вертикальном отрезке, соединяющем точки A и B, минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке $-a'$. Аналогично на вертикальном отрезке, соединяющем точки C и D, минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке a. На оставшихся двух горизонтальных отрезках при достаточно большом r значения $|\varphi(\xi)|$ больше каждого из значений $|\varphi(\xi)|$ в точках $-a'$ и a. Действительно, если только $r > 2\max\{a',\lambda_2\}$, то при $t \in [-a',a]$

$$|\varphi(t+ir)| = \sqrt{t^2+r^2}\left(\sqrt{(t-\lambda_1)^2+r^2}\right)^\alpha\left(\sqrt{(t-\lambda_2)^2+r^2}\right)^\beta > \max\{|\varphi(a)|,|\varphi(-a')|\}.$$

Определимся теперь с выбором a' и a. Положим $a = x_1$, а a' возьмем таким, чтобы $|\varphi(-a')| > |\varphi(a)|$. Такой выбор возможен, поскольку $|\varphi(t)| \to +\infty$ при $t \in \mathbb{R}$ и $t \to -\infty$.

Считаем положительным направление обхода произвольного отрезка $[L,N]$ направление от L к N и полагаем

$$F_n^{[L,N]}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{[L,N]}\frac{e^{\xi z}\,d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}.$$

Область G можно выбрать так, что $[D,C] \subset G$. Поэтому

$$F_n^{[D,C]}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{[D,C]} e^{\xi z}e^{nS(\xi)}\,d\xi.$$

В силу выбора точки a максимум функции $ReS(\xi)$ на отрезке $[D,C]$ достигается в единственной точке x_1, которая является простой точкой перевала. Поэтому для нахождения асимптотики интеграла $F_n^{[D,C]}(z)$ можно применить метод перевала (лемма). Тогда

$$F_n^{[D,C]}(z) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{x_1 z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{9}$$

Выбираем ветвь корня в (9) с учетом того, что в рассматриваемом случае угол $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда окончательно получим, что при $n \to \infty$

$$F_n^{[D,C]}(z) = B_n(x_1)e^{x_1 z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (10)$$

Применяя к интегралу $F_n^{[B,A]}(z)$ аналогичные рассуждения и учитывая выбор точки $-a'$, нетрудно показать, что имеет место оценка

$$\left|F_n^{[B,A]}(z)\right| \le \theta\left|e^{n(S(x_1)-\delta)}\right|,$$

где θ и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n \to \infty$ интеграл $F_n^{[B,A]}(z)$ экспоненциально мал по сравнению с модулем $e^{nS(x_1)}$. Данное утверждение справедливо и по отношению к интегралам $F_n^{[C,B]}(z)$, $F_n^{[A,D]}(z)$. Значит, основной вклад в асимптотику $A_{n_0}^0(z)$ вносит интеграл по отрезку $[D,C]$. Поэтому из (10) следует справедливость равенства (5) для любого фиксированного $z \in \mathbb{C}$.

Равенство (7) доказывается аналогично, с той лишь разницей, что при применении метода перевала к соответствующему интегралу ветвь корня выбирается с учетом того, что угол $\varphi_0 = -\pi/2$.

Перейдем к доказательству равенства (6). Зафиксируем произвольное $z \in \mathbb{C}$ и представим многочлен $A_{n_1}^1(z)$ в виде

$$A_{n_1}^1(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i}\int_{C_1} e^{\xi z} e^{nS(\xi)}\,d\xi. \quad (11)$$

В интеграле (11) деформируем контур интегрирования C_1 в прямоугольник R', принадлежащий области $\{z : 0 < Re z < \lambda_2\}$ с вершинами в точках $A^*(a',-r)$, $B^*(a',r)$, $C^*(a,r)$, $D^*(a,-r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a' \in (0,\lambda_1)$, $a \in (\lambda_1,\lambda_2)$. Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем B^* и A^*, минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке a', а на отрезке $[D^*,C^*]$ он достигается в единственной точке a. При достаточно большом r ($r > 2\lambda_2$) значения $|\varphi(\xi)|$ на оставшихся двух горизонтальных отрезках $[C^*,B^*]$ и $[A^*,D^*]$ больше каждого из значений $|\varphi(\xi)|$ в точках a' и a. Если положить $a' = x_1$, а $a = x_2$, то отсюда следует, что основной вклад в асимптотику $A_{n_1}^1$ будут вносить интегралы по отрезкам $[B^*, A^*]$ и $[D^*, C^*]$. Применив к ним предыдущие рассуждения, получим, что при $n \to \infty$

$$F_n^{[D^*,C^*]}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_2)}}e^{nS(x_2)}e^{x_2 z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (12)$$

$$F_n^{[B^*,A^*]}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}e^{x_1 z}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (13)$$

Заметим, что при выборе ветви корня в (12) $\varphi_0 = \pi/2$, а при выборе ветви корня в (13) $\varphi_0 = -\pi/2$. С учетом этого, из (12) и (13) следует равенство (6). Таким образом, для каждого фиксированного z асимптотические равенства (5)–(7) доказаны.

Примеры. Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^2$. Введем обозначения

$$p = \sqrt{\left((1+\alpha)\lambda_2 - (1+\beta)\lambda_1\right)^2 + 4\alpha\beta\lambda_1\lambda_2},$$
$$q = (1+\beta)\lambda_1 + (1+\alpha)\lambda_2,\ h = 1+\alpha+\beta.$$

Проводя несложные вычисления, приходим к равенствам

$$x_1 = \frac{q-p}{2h},\ x_2 = \frac{q+p}{2h},$$

$$\varphi(x_1) = \frac{1}{(2h)^h}(q-p)(q-p-2h\lambda_1)^{\alpha}(q-p-2h\lambda_2)^{\beta},$$

$$\varphi(x_2) = \frac{1}{(2h)^h}(q+p)(q+p-2h\lambda_1)^{\alpha}(q+p-2h\lambda_2)^{\beta},$$

$$S''(x_1) = 4h^2\left[\frac{1}{(q-p)^2} + \frac{\alpha}{(q-p-2h\lambda_1)^2} + \frac{\beta}{(q-p-2h\lambda_2)^2}\right],$$

$$S''(x_2) = 4h^2\left[\frac{1}{(q+p)^2} + \frac{\alpha}{(q+p-2h\lambda_1)^2} + \frac{\beta}{(q+p-2h\lambda_2)^2}\right].$$

Пусть $\alpha = 1+l$, $l = 0,1,2,...$; $\beta = 1$. Предположим, что $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, тогда из теоремы следует:

$$A_{n_0}^0(z) \sim \frac{1}{(l+3)\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{(-1)^l(2(3+l))^{2+l}}{4p^{1+l}}\right)^n e^{(1-p/(6+2l))z},$$

$$A_{n_1}^1(z) \sim \frac{1}{(l+3)\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{(2(3+l))^{2+l}}{4p^{1+l}}\right)^n \left((-1)^n e^{p/(6+2l)} - (-1)^{ln} e^{-p/(6+2l)}\right),$$

$$A_{n_2}^2(z) \sim \frac{(-1)^{n+1}}{(l+3)\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{(2(3+l))^{2+l}}{4p^{1+l}}\right)^n e^{-(1-p/(6+2l))z}.$$

Аналогично пусть $\alpha = 1$, $\beta = 1+l$, $l = 0,1,2,...$, тогда

$$A_{n_0}^0(z) \sim \sqrt{\frac{(5l+6)p+3l^2}{4\pi np(3+l)^3}}\left(\frac{(-1)^{1+l}(2(3+l))^{3+l}}{2(6+3l+p)^{1+l}(6+l-3p)}\right)^n e^{(6+l-p)z/(6+2l)},$$

$$A_{n_1}^1(z) \sim \sqrt{\frac{(5l+6)p-3l^2}{4\pi np(3+l)^3}}\left(\frac{(-1)^{1+l}(2(3+l))^{3+l}}{2(6+3l-p)^{1+l}(6-l+3p)}\right)^n e^{-(l-p)z/(6+2l)} -$$

$$- \sqrt{\frac{(5l+6)p+3l^2}{4\pi np(3+l)^3}}\left(\frac{(-1)^{1+l}(2(3+l))^{3+l}}{2(6+3l+p)^{1+l}(6+l-3p)}\right)^n e^{-(l+p)z/(6+2l)},$$

$$A_{n_2}^2(z) \sim -\sqrt{\frac{(5l+6)p-3l^2}{4\pi np(3+l)^3}}\left(\frac{(-1)^{1+l}(2(3+l))^{3+l}}{2(6+3l-p)^{1+l}(6-l+3p)}\right)^n e^{-(6+3l-p)z/(6+2l)}.$$

При $l = 0$ из теоремы получим асимптотические равенства, которые согласуются с соответствующими утверждениями из работ [8] и [9], [10]:

$$A_n^0(z) \sim \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{(1-1/\sqrt{3})z},$$

$$A_n^1(z) \sim (-1)^n \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n \left(e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^{n-1}e^{-z/\sqrt{3}}\right),$$

$$A_n^2(z) \sim (-1)^{n-1}\frac{1}{3\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{(-1+1/\sqrt{3})z}.$$

Введем обозначения

$$\rho = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+2}},$$

$$D_{n,\alpha} = \rho^{1-\alpha}(2n+\alpha n)(2n+\alpha n-2)\ldots(\alpha n+2).$$

Полагая, что в теореме $\beta = 1$, получаем утверждение, равносильное (с учетом нормировки многочленов) теореме 3.2 из работы [12].

Следствие. *Пусть* $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $n_0 = n+1$, $n_1 = \alpha(n+1)$, $n_2 = n+1$. *Тогда для каждого фиксированного числа* $z \in \mathrm{X}$ *при* $n \to \infty$

$$A^0_{n_0}(z) = \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{2^{n+1}n!} D_{n,\alpha} e^{(1-\rho)z}\left(1+O(1/n)\right),$$

$$A^1_{n_1}(z) = \frac{(-1)^{n_2}}{2^{n+1}n!} D_{n,\alpha}\left[e^{\rho z} + (-1)^{n_1+1}e^{-\rho z}\right]\left(1+O(1/n)\right),$$

$$A^2_{n_2}(z) = \frac{(-1)^{n_2+1}}{2^{n+1}n!} D_{n,\alpha} e^{-(1-\rho)z}\left(1+O(1/n)\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Stahl, H. Asymptotics for quadratic Hermite–Padé polynomials associated with the exponential function / H. Stahl // Electron. Trans. Numer. Anal. – 2002. – Vol. 14. – P. 195–222.
2. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – Vol. 21. – P. 289–308.
3. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1932. – Vol. 166. – P. 118–150.
4. Starovoitow, A.P. Padé approximants of special functions / A.P. Starovoitow, N.A. Starovoitowa, N.V. Ryabchenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 187, № 1. – P. 77–85.
5. Суетин, С.П. Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2015. – Т. 70, № 5(425). – С. 121–174.
6. Aptekarev, A.I. Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.
7. Аптекарев, А.И. Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Матем. сб. – 2011. – Т. 202, № 2. – С. 3–56.
8. Borwein, P.B. Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – Vol. 62. – P. 291–302.
9. Wielonsky, F. Asymptotics of Diagonal Hermite–Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.
10. Астафьева, А.В. Аппроксимации Эрмита–Паде экспоненциальных функций / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Матем. сб. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.
11. Старовойтов, А.П. О некоторых свойствах аппроксимаций Эрмита–Паде для набора экспоненциальных функций / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко // Тр. Матем. ин-та имени В.А. Стеклова. – 2017. – Т. 298. – С. 338–355.
12. Driver, K. On polynomials related with Hermite–Pade approximants to the exponential function / K. Driver, N.M. Temme // J. Approx. Theory. – 1998. – № 95. – P. 101–122.
13. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.

REFERENCES

1. Stahl H. Asymptotics for quadratic Hermite–Padé polynomials associated with the exponential function / H. Stahl // Electron. Trans. Numer. Anal. – 2002. – Vol. 14. – P. 195–222.
2. Hermite C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – Vol. 21. – P. 289–308.
3. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1932. – Vol. 166. – P. 118–150.
4. Starovoitow, A.P. Padé approximants of special functions / A.P. Starovoitow, N.A. Starovoitowa, N.V. Ryabchenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 187, № 1. – P. 77–85.
5. Suetin S.P. *Uspekhi matem nauk* [Advances of Mathematical Sciences], 2015, 70(5), pp. 121–174.
6. Aptekarev A.I. Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.
7. Aptekarev A.I., Lysov V.G., Tulyakov D.N. *Matem sb.* [Mathematical Collection], 2011, 202(2), pp. 3–56.
8. Borwein P.B. Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – Vol. 62. – P. 291–302.
9. Wielonsky F. Asymptotics of Diagonal Hermite–Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.
10. Astafieva A.V., Starovoitov, A.P. *Matem sb.* [Mathematical Collection], 2016, 207(6), pp. 3–26.
11. Starovoitov A.P., Kechko, E.P. *Kompleksni analiz i yego prilozheniya. Sbornik statei. Trudi matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova* [Complex Analysis and its Appendices. Collection of Articles. Precedings of Steklov Institute of Mathematics], 2017, 298, pp. 338–355.
12. Driver K. On polynomials related with Hermite–Padé approximants to the exponential function / K. Driver, N.M. Temme // J. Approx. Theory. – 1998. – № 95. – P. 101–122.
13. Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I. *Lektsii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Lectures on the Theory of Functions of the Complex Variable], Moscow, Nauka, 1989.

Поступила в редакцию 15.03.2018

Адрес для корреспонденции: e-mail: ekechko@gmail.com – Кечко Е.П.