УДК 514.765+512.812.4

Самоподобные однородные двумерное и трехмерное лоренцевы многообразия

М.Н. Подоксенов
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Риманово или лоренцево многообразие называется самоподобным, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий. Пусть (G, g) – это однородное многообразие группы Ли, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой. Преобразование $f: G \to G$ называется гомотетическим автоморфизмом, или автоподобием, если оно является одновременно подобием и автоморфизмом группы Ли.

Цель данной работы – найти самоподобные однородные лоренцевы многообразия одной двумерной и одной трехмерной групп Ли и указать их группы гомотетических автоморфизмов.

Материал и методы. *Рассматриваются две связные группы Ли, снабженные левоинвариантной лоренцевой метрикой: двумерная $G=A^+(1)$, которую можно представить как группу аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию прямой, и трехмерная $G_3=A^+(1)\times R$. Используются методы линейной алгебры и дифференциальной геометрии.*

Результаты и их обсуждение. *В работе приводится матричное представление двумерной и трехмерной связных групп Ли $G = A^+(1)$, $A^+(1)\times R$ и соответствующих алгебр Ли, вводятся координаты на них и указываются координатные записи левого сдвига и экспоненциального отображения. Сначала находятся автоподобия алгебр Ли, а затем они переносятся на группы Ли. Это позволяет найти формулы, по которым действуют однопараметрические группы подобий рассматриваемых однородных лоренцевых многообразий, в том числе те, которые являются автоморфизмами групп Ли, а также найти полные группы подобий этих многообразий.*

Заключение. *Найдены два самоподобных лоренцевых однородных многообразия двумерной и трехмерной связных групп Ли и указаны однопараметрические группы гомотетических автоморфизмов, а также найдены их полные группы подобий. Результаты данной работы могут быть распространены на четырехмерную группу Ли подтипа VI_1 по классификации Бианки.*

Ключевые слова: *однородное многообразие, группа Ли, подобие, лоренцева метрика.*

Semi-similar Homogeneous Two-dimensional and Three-dimensional Lorentzial Manifolds

M.N. Podoksenov
Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

Riemannian or Lorentzian manifold is called self-similar if it admits an essential one-parameter group of homothetic transformations. Let (G, g) be a homogeneous manifold of Lie group, supplied by left-invariant Lotentzian metrics. A transformation $f: G \to G$ is said to be a homothetic automorphism, or an autosimilarity, if it is simultaneously a homothetic transformation and an automorphism of Lie group.

The objective of this paper is to find homogeneous self-similar Lorentzian manifolds of one two-dimensional and one three-dimensional Lie groups and specify their groups of homothetic automorphisms.

Material and methods. *Two connected Lie groups, supplied with left-invariant Lotentzian metrics are considered: two-dimensional $G = A^+(1)$ (it can be represented as a group of affine transformations of a straight line, which preserve orientation of the line) and three-dimensional $G_3 = A^+(1)\times R$.*

Methods of linear algebra and differential geometry are used.

Findings and their discussion. *In present paper matrix representation of two-dimensional and three-dimensional connected Lie groups $G = A^+(1)$, $A^+(1)\times R$ and their Lie algebras are presented; coordinates are introduced and formulas of left shift and exponential mapping in this coordinates are specified. First autosimilarities of the Lie algebras are found, then they are carried over to the Lie groups. It makes it possible to find formulas of one-parameter groups of similarities of the considered homogeneous Lorentzian manifolds, including those, which are automorphisms of Lie groups, and to find general groups of similarities of the considered homogeneous manifolds.*

Conclusion. *Two self-similar homogeneous Lorentzian manifolds of two-dimensional and tree-dimensional connected Lie groups are found, their one-parameter groups of homothetic automorphisms are specified and also full groups of similarities are found. The results of the present paper can be carried over to for-dimensional Lie group of Bianchi subtype VI_1.*

Key words: *Homogeneous manifold, Lie group, similarity, Lorentzian metrics.*

Пусть (M,g) – риманово или лоренцево многообразие. Преобразование $f: M \to M$ называется подобием с коэффициентом e^{μ}, (μ = const), если для любой точки $p \in M$ и любых векторов $X, Y \in T_pM$ выполнено $\langle f_* X, f_* Y\rangle_{f(p)} = e^{2\mu}\langle X, Y\rangle_p$. Это подобие называется существенным, если оно не может быть превращено в изометрию за счет умножения метрического тензора на некоторую положительную функцию. Многообразие называется *самоподобным*, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий. Пусть (G,g) – это однородное многообразие группы Ли, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой. Преобразование $f: G \to G$ называется *гомотетическим автоморфизмом*, или *автоподобием*, если оно является одновременно подобием и автоморфизмом группы Ли.

Цель данной работы – найти самоподобные однородные лоренцевы многообразия одной двумерной и одной трехмерной групп Ли и указать их группы гомотетических автоморфизмов. Эта задача применительно к трехмерной группе Ли Гейзенберга решена в [1].

Любое подобие $f: G \to G$ однородного пространства (G,g) группы Ли G можно представить в виде композиции $L_a \circ h$, где h – подобие, оставляющее единицу e на месте, а L_a – левый сдвиг. Поэтому задача сводится к поиску подобий, которые оставляют неподвижной единицу группы Ли. Такие преобразования порождаются преобразованиями соответствующей алгебры Ли, если группа Ли является экспоненциальной.

Преобразование алгебры Ли $F: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется *автоморфизмом*, если оно сохраняет операцию скобки: $[FX, FY] = F[X,Y]$ $\forall X, Y \in \mathcal{G}$. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle , \rangle$. Тогда преобразование $F: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется *подобием* с коэффициентом e^{μ}, если $\langle FX, FY\rangle = e^{2\mu}\langle X, Y\rangle$ $\forall X, Y \in \mathcal{G}$. В случае $\mu = 0$ преобразование F называется *изометрией*.

Преобразование, являющееся одновременно подобием и автоморфизмом, будем называть *автоподобием*, а преобразование, являющееся изометрией и автоморфизмом, – *автоизометрией*.

Все автоподобия разрешимых и нильпотентных трехмерных алгебр Ли, на которых введено лоренцево скалярное произведение, найдены в работе [2]. Результат о том, что полупростая и простая трехмерные алгебры Ли не допускают автоподобий, отличных от автоизометрий, опубликован в [3].

Материал и методы. В данной работе мы рассматриваем две связные группы Ли, снабженные левоинвариантной лоренцевой метрикой:

1) двумерную некоммутативную группу $G_2 = A^+(1)$, которую можно представить как группу аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию прямой;

2) трехмерную $G_3 = A^+(1) \times R$.

Используются методы линейной алгебры и дифференциальной геометрии.

Результаты и их обсуждение. Существует единственная с точностью до изоморфизма двумерная некоммутативная алгебра Ли $\mathcal{G}_2$. В подходящем базисе (E_1, E_2) коммутационные соотношения задаются одним равенством: $[E_1, E_2] = E_2$. Подпространство $\mathcal{Z} = RE_2$ является центром рассматриваемой алгебры Ли.

Лемма. *Двумерная некоммутативная алгебра Ли, снабженная лоренцевым скалярным произведением, допускает автоподобия, отличные от автоизометрий тогда и только тогда, когда ее центр является изотропным. При этом она допускает однопараметрическую группу гомотетий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любой автоморфизм алгебры Ли должен оставлять центр $\mathcal{Z}$ инвариантным.

Предположим, что центр $\mathcal{Z}$ не является изотропным. Будем называть вектор единичным, если его скалярный квадрат равен ± 1. Умножение вектора E_2 на ненулевое число не меняет коммутационных соотношений. Пусть F_2 – единичный вектор, сонаправленный с E_2; единичный вектор $F_1 \perp E_2$ можно представить в виде $F_1 = \alpha E_1 + \beta E_2$. Тогда $[F_1, F_2] = \alpha F_2$. Любое автоподобие в ортонормированном базисе (F_1, F_2) определяется формулами вида $F_1' = \pm e^{\mu} F_1$, $F_2' = \pm e^{\mu} F_2$. В новом базисе имеем: $[F_1', F_2'] = \pm \alpha e^{\mu} F_2'$. Значит, рассматриваемое преобразование будет автоморфизмом только при $\mu = 0$.

Если центр $\mathcal{Z}$ является изотропным, то мы можем выбрать $F_1 = E_1 + \beta E_2$, принадлежащий второму изотропному направлению, и после этого выбрать $F_2 = \alpha E_2$ так, что $\langle F_1, F_2\rangle = 1$. В новом базисе (F_1, F_2) коммутационные соотношения будут иметь прежний вид: $[F_1,F_2]=F_2$, а матрица Грама этого базиса имеет вид $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Произвольное преобразование, сохраняющее скалярное произведение, в этом случае задается матрицей $e^{\mu}\begin{pmatrix} \pm e^{-\nu} & 0 \\ 0 & \pm e^{\nu} \end{pmatrix}$. Такие преобразования будут изоморфизмами алгебры Ли только при выполнении двух условий: $\mu = \nu$ и в первой строке матрицы выбирается знак «+».

Окончательно получаем, что преобразования, действующие по формулам

$$F_1'=F_1,\ F_2'=\pm e^{2\mu t}F_2,\ \mu=\text{const},\ t\in R,$$

и только они, являются автоморфизмами алгебры Ли и подобиями с коэффициентами $e^{\mu t}$. Легко проверить, что эти преобразования образуют однопараметрическую группу, но только, если выбирается знак «+». ■

В дальнейшем базис (F_1, F_2) будем обозначать, как исходный: (E_1, E_2).

Некоммутативную двумерную алгебру Ли $\mathcal{G}_2$ можно представить как состоящую из матриц вида $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, и при этом

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Соответствующая ей связная односвязная группа Ли G_2 может быть представлена как группа аффинных преобразований прямой $A^+(1)$, сохраняющих ориентацию прямой, или как группа матриц вида $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_1>0$, с операцией умножения матриц. Введем на $\mathcal{G}_2$ и G_2 координаты, сопоставив приведенным выше матрицам координаты (u_1, u_2) и (x_1, x_2) соответственно. Единичному элементу группы соответствуют координаты $(1, 0)$. Тогда групповая операция задается формулами

$$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_1y_2+x_2),$$

а обратный элемент находится так: $(x_1,x_2)^{-1}=(x_1^{-1},-x_2x_1^{-1})$.

Однопараметрическая группа автоподобий $\{F(t)\,,t\in R\}$ алгебры Ли $\mathcal{G}_2$ задается в выбранных координатах формулами

$$u_1'=u_1\,,\ u_2'=e^{2\mu t}u_2\,. \tag{2}$$

Непосредственным вычислением находим, что экспоненциальное отображение $\exp:\mathcal{G}_2\to G_2$ задается формулами

$$x_1=e^{u_1}\,,\ x_2=u_2+\frac{1}{2}u_1u_2+\frac{1}{6}u_1^{\,2}u_2+\ldots+\frac{1}{n!}u_1^{n-1}u_2+\ldots=\frac{u_2}{u_1}(e^{u_1}-1). \tag{3}$$

Необходимо уточнить, что $\exp(0,u_2)=(1,u_2)$. Отсюда получаем формулы обратного отображения $\exp^{-1}:G_2\to\mathcal{G}_2$:

$$u_1=\ln x_1\,,\ u_2=\frac{x_2}{x_1-1}\ln x_1\,, \tag{4}$$

Теорема 1. *На связной односвязной двумерной некоммутативной группе Ли существует левоинвариантная лоренцева метрика, при которой эта группа превращается в самоподобное многообразие. В подходящей карте все однопараметрические группы подобий, являющиеся автоморфизмами группы Ли, задаются формулами*

$$\begin{cases} x_1'=x_1\,, \\ x_2'=e^{2\mu t}x_2\,,\ t\in R,\ \mu=\text{const}, \end{cases} \tag{5}$$

а метрический тензор – матрицей

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & x_1^{-2} \\ x_1^{-2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В работе [1] показано, что любое подобие $f:G\to G$ однородного многообразия группы Ли, снабженной левоинвариантной метрикой, оставляющее неподвижной единицу группы, может быть получено в виде $f=\exp\circ F\circ\exp^{-1}$, где $\exp:\mathcal{G}\to G$ – групповая экспонента, а $F:\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ – автоподобие алгебры Ли. Нетрудно проверить, что если $\{F(t)\,,t\in R\}$ есть однопараметрическая подгруппа преобразований алгебры Ли $\mathcal{G}$, то преобразования $f(t)=\exp\circ F(t)\circ\exp^{-1}:G\to G\,,t\in R$, тоже образуют однопараметрическую группу.

Найдем формулы преобразований $f(t)$ для нашей группы G_2. Применяя последовательно формулы (4) и (2) находим, что

$$u_1' = \ln x_1\,,\ u_2' = \frac{e^{2\mu t}x_2}{x_1 - 1}\ln x_1\,.$$

Теперь подставляем эти формулы в (3):

$$x_1' = e^{\ln x_1}\,,\ x_2' = \frac{e^{2\mu t}x_2}{x_1 - 1}\ln x_1\,(e^{\ln x_1} - 1) : \ln x_1\,.$$

После упрощения получаем формулы (5). Группа $\{f(t)\,,t\in R\}$ состоит из существенных подобий (при $t\neq 0$), потому что его дифференциал в единице группы не является изометрией алгебры Ли.

Тот факт, что в выбранных координатах метрический тензор имеет вид (6), доказан в [4].

Проверим, что найденные преобразования действительно являются подобиями. Пусть $\mathbf{J}_t(x_1, x_2)$ – матрица Якоби преобразования f_t. Обратная к ней матрица имеет вид

$$\mathbf{I}_t(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\mu t} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{I}_t^T(x_1, x_2)(g_{ij})\,\mathbf{I}_t(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\mu t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x_1^{-2} \\ x_1^{-2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\mu t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-2\mu t}x_1^{-2} \\ e^{-2\mu t}x_1^{-2} & 0 \end{pmatrix} = e^{-2\mu t}(g_{ij})\,.\ \blacksquare$$

Пусть $\{f(t)\,,t\in R\}$ – однопараметрическая группа подобий, которая задается формулами (5). Произвольная однопараметрическая группа $\{h(t), t\in R\}$ подобий рассматриваемого многообразия может быть представлена в виде $(L_g)\circ f(t)\circ (L_g)^{-1}$, где $g\in G_2$ – фиксированный элемент группы. Если элемент g имеет координаты (g_1, g_2), то

$$L_g(x_1, x_2) = (g_1x_1, g_1x_2 + g_2)\,,\ \ (L_g)^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{g_1}, \frac{x_2 - g_2}{g_1}\right).$$

Отсюда выводим формулы, по которым действует группа $\{h(t)\,,t\in R\}$:

$$x_1' = x_1,\ \ x_2' = e^{2\mu t}x_2 - g_2(e^{2\mu t} - 1).$$

Преобразование алгебры Ли, которое действует по правилу $E_1' = E_1$, $E_2' = -E_2$, является автоизометрией. Оно порождает автоморфизм группы Ли G_2, действующий по формулам $x_1' = x_1$, $x_2' = -x_2$. Составляя композицию этого преобразования с $f(t)$, мы получим гомотетические автоморфизмы рассматриваемой лоренцевой группы Ли

$$x_1' = x_1\,,\ x_2' = -\,e^{2\mu t}x_2\,;$$

однако они не образуют группу.

Замена x_1 на $-x_1$ не приводит к изменению метрического тензора, но получить изометрию нашего многообразия $x_1' = -x_1$, $x_2' = x_2$, мы не можем, поскольку рассматриваем только связную группу Ли ($x_1 > 0$). Метрический тензор не зависит от x_2, и поэтому сдвиги по координате x_2: $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2 + c$, $c = \mathrm{const}$, являются изометриями, но их можно представить как левый сдвиг на элемент $(1, c) \in A^+(1)$.

Мы приходим к выводу, что рассматриваемое лоренцево однородное многообразие допускает трехмерную группу подобий, которая порождается левыми сдвигами и преобразованиями $x_1' = x_1$, $x_2' = \pm e^{2\mu t}x_2$. Она действует по формулам

$$\begin{cases} x_1' = g_1x_1, \\ x_2' = \pm\, g_1e^{2t}x_2 + g_2\,,\ t\in R,\ g_1 > 0\,,\ g_2\in R \end{cases}$$

(мы принимаем во внимание, что $\mu t\in R \Leftrightarrow t\in R$ при $\mu\neq 0$). Найденная группа является полной, поскольку любое подобие группы Ли – композиция подобия, оставляющего инвариантной единичный элемент группы и левого сдвига, и, в свою очередь, любое подобие, оставляющее инвариантной единичный элемент группы, порождается автоподобием соответствующей алгебры Ли.

Заметим, что общий вид метрик однородных самоподобных односвязных многообразий был описан Д. Алексеевским [5]. С.П. Гавриловым [4] найдены геодезические всех инвариантных метрик на двумерной некоммутативной группе Ли, включая рассматриваемый в данной работе тип метрик. Результаты Д. Алексеевского были дополнены автором этой работы [6] для случая неодносвязных многообразий.

В рассматриваемой группе Ли элементы с координатами $(1, k)$, которые задают сдвиги прямой, образуют нормальную подгруппу. Также нормальную подгруппу H образуют такие элементы при $k \in \mathbf{Z}$. Тем самым мы можем рассмотреть группу Ли G_2/H, которая гомеоморфна цилиндру. В связи с тем, что метрический тензор не зависит от x_2, метрику можно перенести с помощью накрытия $G_2 \to G_2/H$. Другими словами, мы можем сделать координату x_2 циклической с любым периодом. Однако новая неодносвязная группа Ли не допускает преобразований вида (5), т.е. не подпадает под класс многообразий, рассмотренных в [6].

З а м е ч а н и е. Возможна ситуация, когда подходящий базис будут составлять другие матрицы, нежели (1). Тем не менее мы можем ввести на рассматриваемых алгебре Ли и группе Ли координаты так, что групповые операции, экспоненциальное отображение и метрический тензор будут задаваться теми же формулами, а следовательно, и однопараметрические группы гомотетий будут задаваться теми же формулами (2).

Рассмотрим теперь трехмерную группу Ли $G_3=A^+(1)\times R$. Ее алгебра Ли $\mathcal{G}_3$ III типа Бианки (см. [7]) содержит двумерный коммутативный идеал $\mathcal{L}$. Канонический вид коммутационных соотношений в подходящем базисе (E_1,E_2,E_3): $[E_1,E_3]=E_3$, а остальные скобки базисных векторов равны нулевому вектору (базис мы выбрали иначе, чем в [7]). Векторы E_2,E_3 образуют базис в $\mathcal{L}$, а линейное преобразование $\mathrm{ad}(E_1)$ действует на $\mathcal{L}$. Его матрица: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть в алгебре Ли задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры $(+,+,-)$. Действуя как при доказательстве леммы, мы приходим к выводу, что $\mathcal{G}_3$ допускает гомотетические автоморфизмы в том и только в том случае, когда на идеале $\mathcal{L}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение. Если центр $\mathcal{Z} = RE_3$ изотропен, то матрица Грама выбранного базиса имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а автоподобия задаются формулами

$$E_1'=E_1,\ E_2'=\pm e^{\mu t}E_2,\ E_3'=\pm e^{2\mu t}E_3; \tag{7}$$

(знаки во второй и третьей частях формулы могут меняться независимо). Очевидно, что однопараметрическую подгруппу образуют только преобразования (7) со знаком «+».

Группу Ли G_3 и алгебру Ли $\mathcal{G}_3$ можно представить как состоящие соответственно из матриц

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x_1 > 0;\quad \begin{pmatrix} u_1 & 0 & u_3 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

с групповой операцией умножения матриц. Припишем элементам группы Ли и векторам алгебры Ли, задаваемым указанными матрицами, координаты (x_1,x_2,x_3) и (u_1,u_2,u_3) соответственно. Групповая операция задается формулами

$$(x_1, x_2, x_3)\cdot(y_1, y_2, y_3) = (x_1y_1, x_2y_2, x_1y_3 + x_3),$$

а обратный элемент находится так: $(x_1, x_2, x_3)^{-1} = (x_1^{-1},\ x_2^{-1}, -x_3x_1^{-1})$. Экспоненциальное отображение действует по формулам:

$$x_1 = e^{u_1},\ x_2 = e^{u_2},\ x_3 = \frac{u_3}{u_1}(e^{u_1} - 1).$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1.

Теорема 2. *На связной односвязной трехмерной группе Ли $G_3=A^+(1)\times R$ существует левоинвариантная лоренцева метрика, при которой эта группа превращается в самоподобное многообразие. В подходящей карте все однопараметрические группы подобий, являющиеся автоморфизмами группы Ли, задаются формулами*

$$\begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = e^{\mu t} x_2 \\ x_3' = e^{2\mu t} x_3,\ t \in R,\ \mu = \text{const}, \end{cases}$$

а метрический тензор – матрицей

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1^{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1^{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транзитивная существенная группа подобий для рассматриваемого лоренцевого многообразия задается формулами

$$\begin{cases} x_1' = g_1 x_1, \\ x_2' = \pm\, g_2 e^{t} x_2, \\ x_2' = \pm\, g_1 e^{2t} x_2 + g_3,\ t \in R,\ g_1 > 0,\ g_2, g_3 \in R. \end{cases}$$

Однако она не является полной, поскольку может быть расширена за счет еще одного класса автоизометрий группы Ли G_3.

Отметим также, что $\mathcal{G}_3$ допускает гомотетические автоморфизмы не только в том случае, когда центр $\mathcal{Z}=RE_3$ изотропен. Тем самым существует еще один класс лоренцевых метрик на группе $\mathcal{G}_3$, при котором она превращается в самоподобное многообразие. Этот класс метрик будет рассмотрен в следующем исследовании.

Заключение. В данной работе мы нашли два самоподобных однородных многообразия двумерной и трехмерной связных групп Ли, снабженных лоренцевым скалярным произведением, и указали их полные группы подобий, а также нашли однопараметрические группы гомотетических автоморфизмов. Тем самым мы расширили список многообразий рассматриваемого типа.

Необходимым условием существования гомотетических автоморфизмов групп Ли является существование автоподобий соответствующих алгебр Ли. Поскольку в работе [2] уже найдены автоподобия для всех разрешимых трехмерных групп Ли, то ближайшей задачей является нахождение автоподобий соответствующих трехмерных групп Ли. Также результаты данной работы могут быть распространены на четырехмерную группу Ли подтипа VI_1 по классификации Бианки (см. [7]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Подоксенов, М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой / М.Н. Подоксенов // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2011. – № 5. – С. 10–15.
2. Подоксенов, М.Н. Гомотетические автоморфизмы трехмерных алгебр Ли / М.Н. Подоксенов // Ученые записки УО «ВГУ им. П.М. Машерова»: сб. науч. тр. / Витеб. гос. ун-т. – Витебск, 2009. – Т. 8. – С. 203–211.
3. Подоксенов, М.Н. Гомотетические автоморфизмы алгебр Ли *SL*(2,*R*) / М.Н. Подоксенов, О.Ю. Кочергина // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам: материалы междунар. науч.-практ. интернет-конференции, посвященной 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Н.Т. Воробьева, Витебск, 21–22 июня 2011 г. / Витеб. гос. ун-т. – Витебск, 2011. – С. 48–50.
4. Гаврилов, С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на связной двумерной неабелевой группе Ли / С.П. Гаврилов // Гравитация и теория относительности. – Вып. 19. – Казань: Изд-во КГУ, 1981. – С. 28–44.
5. Alekseevski, D. Self-similar Lorentzian manifolds / D. Alekseevski // Ann. of Global Anal. Geom. – 1985. – Vol. 3, No. 1. – P. 59–84.
6. Подоксенов, М.Н. Лоренцево многообразие с однопараметрической группой гомотетий, имеющей замкнутую изотропную орбиту / М.Н. Подоксенов // Сиб. матем. журн. – Т. 30, № 5. – С. 135–137.
7. Петров, А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров. – М.: Наука, 1966.

R E F E R E N C E S

1. Podoksenov M.N. *Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga un-ta* [Journal of Vitebsk State University]. – 2011. – 5(65), pp. 10–15.
2. Podoksenov M.N. *Uchyonye zapiski Vitsebskaga dziarzhaunaga un-ta* [Scientific Notes of Vitebsk State University], Vitebsk, 2009, 8, pp. 203–211.
3. Podoksenov M.N., Kochergina O.Yu. *Innovatsionniye tekhnologii obucheniya fiziko-matematicheskim distsiplinam. Materiali mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi Internet-konferentsii posviashchennoi 60-letiyu doktora fiziko-matematicheskikh nauk professora N.T. Vorobyeva, Vitebsk 21–22 iyunia 2011 goda* [Innovative Technologies in Education in Physical and Mathematical Disciplines. Proceedings of Scientific and Practical Internet Conference Dedicated to the 60-th Anniversary of Professor N.T. Vorobyev. Vitebsk, June 21–22, 2011], Izd-vo VGU, 2011, pp. 48–50.
4. Gavrilov S.P. *Gravitazya i teoria otnositelnosti* [Gravitation and Relativity] Kazan, Izd-vo KGU, 1981, 19, pp. 28–44.
5. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds. Ann. of Global Anal. Geom., 1985, Vol. 3, No. 1, pp. 59–84.
6. Podoksenov M.N. *Sib. matem. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal] 1989, 30(5), pp. 135–137.
7. Petrov A.Z. *Noviye metodi v obshchei teorii otnositelnosti* [New Methods in Relativity Theory]. – M.: Nauka, 1966.

Поступила в редакцию 14.02.2018

Адрес для корреспонденции: e-mail: P._Michael@mail.com – Подоксенов М.Н.