МАТЭМАТЫКА

УДК 517.983

Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией Бесселя–Клиффорда в ядре по пирамидальной области

О.В. Скоромник*, С.А. Шлапаков**
**Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»*
***Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

Рассматривается многомерное интегральное уравнение первого рода с функцией Бесселя–Клиффорда в ядре по ограниченной пирамидальной области многомерного евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ *суммируемых функций на конечном отрезке* $[a,b]$ *действительной оси. Следуя методике Я. Тамаркина, устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве суммируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для многомерного уравнения типа Абеля и для соответствующих одномерных интегральных уравнений первого рода.*

Целью работы является решение в замкнутой форме многомерного интегрального уравнения со специальной функцией в ядре.

Ключевые слова: *интегральные преобразования, интегральные уравнения, функция Бесселя–Клиффорда, функция Бесселя первого рода, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

Solution of a Multidimensional Integral Abel Type Equation with the Bessel–Klifford Function in the Kernel over a Pyramidal Domain

O.V. Skoromnik*, S.A. Shlapakov**
**Educational Establishment «Polotsk State University»*
***Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»*

The multidimensional integral equation of the first kind with the Bessel–Klifford function in the kernel over the special bounded pyramidal domain in Euclidean space is considered.

The purpose of the article is solution in the closed form of the multidimensional integral equation with a special function in the kernel.

The interest in such equations is caused by their applications to the problems on the reflection of waves on a rectilinear boundary and on a supersonic flow around spatial corners. Ya. Tamarkin obtained a well-known classical result on the solvability of the Abel integral equation in the space $L_1(a,b)$ of integrable functions on a finite interval $[a,b]$ of the real line. By Tamarkin's method the solution of the investigating equation in the closed form is established, and necessary and sufficient conditions for its solvability in the space of summable functions are given. The results generalize the well know findings for the multi-dimensional Abel type integral equation and the corresponding one-dimensional equations of the first kind.

Key words: *integral transforms, integral equations, Bessel–Klifford function, Bessel function of the first kind, space of summable functions, fractional integrals and derivatives.*

Одномерные интегральные уравнения первого рода, обобщающие классическое интегральное уравнение Абеля и содержащие в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса, функцию Лежандра, вырожденную гипергеометрическую функцию (функцию Куммера), функцию Бесселя, другие специальные функции, изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, §§ 39.1, 39.2]). Такие уравнения возникают при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [2]. В большинстве работ метод исследования уравнений типа Абеля с гипергеометрическими функциями в ядрах основывается на представлении интегральных операторов этих уравнений в виде композиции операторов дробного интегрирования Римана–Лиувилля со степенными или экспоненциальными весами и использовании известных свойств дробных интегралов. На этом пути были даны достаточные условия разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений в некоторых классах функций и получены их решения в квадратурах [1, §§ 35.1, 35.2, 37.1].

Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости вышеуказанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. В работе [3] аналогичный результат был получен для многомерного интегрального уравнения типа Абеля по ограниченным пирамидальным областям евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах отражения волн от прямолинейной границы [4, с. 48], [5] и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов [6] (см. также [1, §§ 24.1, 28.4].

Следуя методике Я. Тамаркина, в работах [7], [8] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a,b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальной области. В [9] приведены решения в замкнутой форме более общих интегральных уравнений по пирамидальным областям и исследована картина их разрешимости в пространстве суммируемых функций. В [10], [11] аналогичные результаты получены для многомерных интегральных уравнений первого рода с функцией Лежандра и вырожденной гипергеометрической функции Куммера в ядрах по пирамидальным областям.

Целью настоящей работы является продолжение этих исследований. Мы даем решение в замкнутой форме многомерного интегрального уравнения с функцией Бесселя–Клиффорда в ядре по пирамидальной области и устанавливаем необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Нами приводятся вспомогательные сведения, решение рассматриваемого уравнения в квадратурах, а также устанавливаются необходимые и достаточные условия его разрешимости.

Предварительные сведения. Введем некоторые обозначения [1, § 28.4]. Пусть $\mathrm{N}=\{1,2,...\}$ – множество натуральных чисел, $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}\bigcup\{0\}$, R^n – *n*-мерное евклидово пространство. Для $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{R}^n$ и $\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathrm{R}^n$ обозначим через $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum\limits_{k=1}^{n}x_kt_k$ их скалярное произведение, в частности, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{1}=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ для $\mathbf{1}=(1,...,1)$. Пусть $\mathbf{x}>\mathbf{t}$ означает $x_1>t_1,...,x_n>t_n$ и аналогично для знака нестрогого неравенства $\geq$, $\mathrm{R}_+^n=\{\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n:\mathbf{x}>0\}$, а $\mathbf{k}=(k_1,...,k_n)\in\mathrm{N}_0^n=\mathrm{N}_0\times...\times\mathrm{N}_0$, где $(k_i\in\mathrm{N}_0,\ i=1,2,...,n)$ – мультииндекс с $\mathbf{k}!=k_1!\cdots k_n!$ и $|\mathbf{k}|=k_1+k_2+...+k_n$. Для $\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{k}\in\mathrm{N}_0^n$ и $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathrm{R}_+^n$ и $\sigma=(\sigma_1,...,\sigma_n)\in\mathrm{R}_+^n$ положим $\mathbf{x}^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)$, $(\mathbf{x})_\mathbf{k}=(x_1)_{k_1}\cdots(x_n)_{k_n}$, $\mathbf{D}^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}...(\partial x_n)^{\alpha_n}}$, $\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma=\left(x_1^{\sigma_1}-t_1^{\sigma_1}\right)\cdots\left(x_n^{\sigma_n}-t_n^{\sigma_n}\right)$, где $(z)_n$ – символ Похгаммера: $(z)_0\equiv1$, $(z)_k=z(z+1)...(z+k-1)=\Gamma(z+n)/\Gamma(z)$ $(z\in C;n\in\mathrm{N})$.

Пусть $A=\left\|a_{jk}\right\|$ $\left(a_{jk}\in\mathrm{R}^1\right)$ – матрица порядка $n\times n$ с определителем $|A|=\det A$, вектор-строки которой обозначим через $\mathbf{a}_j=\left(a_{j1},...,a_{jn}\right)$, а элементы обратной матрицы A^{-1} – через a_{jk}. Без ограничения общности положим $|A|=1$. Пусть [1, § 28.4]

$$A\cdot\mathbf{x}=\left(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x},...,\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x}\right),\ (A\cdot\mathbf{x})^{\alpha}=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x})^{\alpha_1}\cdots(\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x})^{\alpha_n}.$$

Для $\mathbf{b}=\left(b_1,...,b_n\right)\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{c}=\left(c_1,...,c_n\right)\in\mathrm{R}^n$ и $r\in\mathrm{R}^1$ обозначим через

$$A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})=\left\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n:A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq 0,\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r\geq 0\right\} \tag{1}$$

n-мерную ограниченную в R^n пирамиду с вершиной в точке $\mathbf{b}$, основанием на гиперплоскости $\mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r=0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})=0$ $\left(j=1,...,n\right)$. В частности, когда $A=E=\left\|\delta_{jk}\right\|$ – единичная матрица, $\mathbf{c}=(1,...,1)$ и $r=0$, $E_{1,0}(\mathbf{b})=E_1(\mathbf{b})$ является модельной пирамидой:

$$E_1(\mathbf{b})=\left\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n:\mathbf{t}\leq\mathbf{b},\mathbf{1}\cdot\mathbf{t}\geq 0\right\}. \tag{2}$$

Известно [1, лемма 28.2], что для ограниченности пирамиды (1) необходимо и достаточно выполнение условия $A^{-1}\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}>0$ (соответственно $A^{-1}\mathbf{c}>0$).

Для $\nu=\left(\nu_1,...,\nu_n\right)\in\mathrm{R}^n$ и $\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in\mathrm{R}^n$ введем функцию

$$\bar{J}_{\nu}[\mathbf{x}]=\prod_{j=1}^{n}\bar{J}_{\nu_j}[x_j], \tag{3}$$

представляющую собой произведение функций Бесселя–Клиффорда $\bar{J}_{\mu}(z)$, определяемых по формуле [1, § 37.1]

$$\bar{J}_{\mu}(z)=\Gamma(\mu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\mu}J_{\mu}(z),\ |z|<\infty, \tag{4}$$

где $J_{\mu}(z)$ – функция Бесселя первого рода [1, § 1.3], [12, гл. 7]:

$$J_{\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2k+\mu}}{\Gamma(\mu+k+1)k!}. \tag{5}$$

Рассматриваемое нами интегральное уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{\alpha-1}\bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}), \tag{6}$$

где $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ $(\mathbf{c},\mathbf{b}\in\mathrm{R}^n, r\in\mathrm{R}^1)$ – пирамида (1); $\mathbf{x},\mathbf{t},\alpha,\lambda\in\mathrm{R}^n$, $0<\alpha<1$, $\sigma\in\mathrm{R}_+^n$ и $\bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]$ – функция вида (3). Данное уравнение при $\sigma=1$ обобщает соответствующее одномерное интегральное уравнение [1, § 37.1].

Нам понадобятся интегральная формула типа свертки для функции Бесселя (5) [12, 7.7(6)]:

$$\int_0^t \tau^{\mu} J_{\mu}(\tau)(t-\tau)^{\nu} J_{\nu}(t-\tau)d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)t^{\nu+\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\mu+1)} J_{\nu+\mu+\frac{1}{2}}(t), \tag{7}$$

где $\mathrm{Re}(\mu) > -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}$,

а также вспомогательное утверждение.

Лемма 1 [1; § 28]. *Если функция* $f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})$, *определенная на* $A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) \times A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})$, *измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:*

$$\int_{A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})} d\mathbf{t} \int_{A_{\mathbf{c}}(\mathbf{t})} f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau} = \int_{A_c(\mathbf{b})} d\boldsymbol{\tau} \int_{\sigma(\mathbf{b},\tau)} f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})d\mathbf{t}, \tag{8}$$

$$\sigma(\mathbf{b},\boldsymbol{\tau}) = \left\{\mathbf{t} \in \mathrm{R}^n : A\cdot\boldsymbol{\tau} \le A\cdot\mathbf{t} \le A\cdot\mathbf{b}\right\}, \tag{9}$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (8) *сходится абсолютно.*

Решение в замкнутой форме. Сначала дадим формальное решение уравнения (6). Заменяя в (6) $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножая обе части полученного равенства на

$$\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}\ \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1},$$

где $\sigma^1 = \sigma_1\cdots\sigma_n$, $\mathbf{t}^{\sigma-1} = t_1^{\sigma_1-1}\cdots t_n^{\sigma_n-1}$, интегрируя по пирамиде $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})$, получаем:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}\ \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}\times\\ \times\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{t})}\left(A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})\right)^{\alpha-1}\ \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})\right]f(\mathbf{u})d\mathbf{u} =\\ =\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}\ \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ \mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}).\end{gathered} \tag{10}$$

Изменяем порядок интегрирования в левой части (10) согласно формуле (8):

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} f(\mathbf{u})d\mathbf{u}\int_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}\left(A\cdot(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})\right)^{\alpha-1}\times\\ \times\bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{t}^{\sigma}-\mathbf{u}^{\sigma})\right]\ \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t} =\\ =\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}\ \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},\end{gathered} \tag{11}$$

где $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \left\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n : A\cdot\mathbf{u} \le A\cdot\mathbf{t} \le A\cdot\mathbf{x}\right\}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (11) вводим новые переменные

$$s_j = \mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\,,\ \mathbf{a}_j = \left(a_{j1},\dots,a_{jn}\right) \quad (j = 1,\dots,n)\,.$$

Далее по формуле (4) выражаем функцию Бесселя–Клиффорда $\bar{J}_\mu[z]$ через функцию Бесселя $J_\mu[z]$, используем формулу (7), для внутреннего интеграла в правой части (11) получаем:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})} \left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha} \left(A\cdot(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right)^{\alpha-1} \times$$

$$\times \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right]\ \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right] \sigma^1\, \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \prod_{j=1}^{n} \left[\int\limits_0^{\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)} s_j^{-\alpha_j}\ \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[s_j\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left(\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j\right)^{\alpha_j-1}\ \bar{J}_{\frac{\alpha_j-1}{2}}\left[\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j\right] ds_j \right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \prod_{j=1}^{n} \left[\Gamma\left(1 - \frac{\alpha_j}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha_j + 1}{2}\right) \int\limits_0^{\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)} s_j^{-\alpha_j} \left(\frac{s_j}{2}\right)^{\frac{\alpha_j}{2}} J_{-\frac{\alpha_j}{2}}\left(s_j\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j\right)^{\alpha_j-1} \left(\frac{\left(\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j\right)}{2}\right)^{\frac{1-\alpha_j}{2}} J_{\frac{\alpha_j-1}{2}}\left(\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j\right) ds_j \right] =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\mathbf{1} - \frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + \mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}{\sqrt{\mathbf{2}}\,\Gamma(\alpha)} \prod_{j=1}^{n} \left[\int\limits_0^{\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)} s_j^{-\frac{\alpha_j}{2}}\ J_{-\frac{\alpha_j}{2}}\left(s_j\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j\right)^{\frac{\alpha_j-1}{2}}\ J_{\frac{\alpha_j-1}{2}}\left(\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j\right) ds_j \right] =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\mathbf{1} - \frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + \mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}{\sqrt{\mathbf{2}}\,\Gamma(\alpha)}\ \frac{1}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mathbf{1} - \alpha}{\mathbf{2}}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}\ \mathbf{t}^{\frac{-\alpha+\alpha-1+1}{2}}\ J_{\frac{-\alpha+\alpha-1+1}{2}}\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\mathbf{1} - \frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + \mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}{\sqrt{\mathbf{2}}\,\Gamma(\alpha)}\ \frac{1}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mathbf{1} - \alpha}{\mathbf{2}}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}\ J_0\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right),$$

где $\mathbf{2} = (2,\dots,2)$, $\boldsymbol{\pi} = (\pi,\dots,\pi)$.

Применяя в последнем выражении дважды известную формулу дополнения для гамма-функции $\Gamma(z)$ [1, формула (1.60)]: $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin z\pi}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, окончательно для внутреннего интеграла в правой части (11) получаем:

$$\frac{\Gamma\left(\mathbf{1}-\frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}{\sqrt{\mathbf{2}}\,\Gamma(\alpha)}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{\mathbf{1}-\alpha}{\mathbf{2}}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}\ J_0\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)\right)=$$

$$=\frac{\boldsymbol{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\mathbf{2}}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{\mathbf{2}}\right)}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)}J_0\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)\right)=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\Gamma(\alpha)\sin(\boldsymbol{\pi}\alpha)}J_0\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)\right),$$

где $\sin(\boldsymbol{\pi}\alpha)=\sin(\pi\alpha_1)\cdots\sin(\pi\alpha_n)$.

На основании этого равенство (11) принимает вид:

$$\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} J_0\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)\right)f(\mathbf{u})d\mathbf{u}=f^{\lambda,\alpha}_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x}),$$

или

$$\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} J_0\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=f^{\lambda,\alpha}_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x}),\tag{12}$$

или

$$\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} f^*(\mathbf{t})d\mathbf{t}=f^{\lambda,\alpha}_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x}),$$

где

$$f^*(\mathbf{t})=J_0\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)f(\mathbf{t}),$$

$$f^{\lambda,\alpha}_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x})=\frac{\Gamma(\alpha)\sin(\boldsymbol{\pi}\alpha)}{\boldsymbol{\pi}}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\ \bar{J}_{-\frac{\alpha}{\mathbf{2}}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}.\tag{13}$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x}+\frac{r}{n\mathbf{c}}=A^{-1}\cdot\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}},\ \mathbf{t}+\frac{r}{n\mathbf{c}}=A^{-1}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right),\tag{14}$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}=\left(\frac{y_1}{d_1},\ldots,\frac{y_n}{d_n}\right)\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{d}=A^{-1}\cdot\mathbf{c}$, переписываем (12) в виде

$$\int\limits_{E_1(\mathbf{y})}\psi(\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau}=\varphi(\mathbf{y}),\tag{15}$$

где $E_1(\mathbf{y})$ – модельная пирамида (2),

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = f^*\left(A^{-1}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right)-\frac{r}{n\mathbf{c}}\right),\ \varphi(\mathbf{y}) = f^{\lambda,\alpha}_{A_{\mathbf{c},r}}\left(A^{-1}\cdot\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}\right)-\frac{r}{n\mathbf{c}}\right)\prod_{j=1}^{n} d_j\,.$$

Для обращения уравнения (15) перепишем его в виде

$$\int\limits_{-(y_1+\ldots+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int\limits_{-(y_1+\ldots+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \ldots \int\limits_{-(\tau_2+\ldots+\tau_n)}^{y_1} \psi(\boldsymbol{\tau})d\tau_1 = \varphi(\mathbf{y}). \tag{16}$$

Дифференцируя последовательно по $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1$, получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\varphi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1}\ldots\frac{\partial}{\partial y_n}\varphi(\mathbf{y})\,.$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1}\cdot\dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \dfrac{r}{n\mathbf{c}}$, учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n}\frac{a_{jk}}{d_k}\frac{\partial}{\partial y_j}\quad (k=1,\ldots,n), \tag{17}$$

где $a_{jk}\quad (j,k=1,\ldots,n)$ – элементы обратной матрицы A^{-1}, и $J_0\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{x}^\sigma)\right) = J_0(0) = 1$, приходим к следующей формуле решения уравнения (6):

$$f(\mathbf{x}) = \sigma^1\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left\{\frac{\Gamma(\alpha)\sin(\boldsymbol{\pi}\alpha)}{\boldsymbol{\pi}}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right]\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right\}. \tag{18}$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (6) разрешимо, то его решение имеет вид (18).

Необходимые и достаточные условия разрешимости. Докажем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (6) в пространстве $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$:

$$L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right) = \left\{f(\mathbf{x}):\ \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left|f(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t} < \infty\right\}. \tag{19}$$

Введем пространство

$$I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1) = \left\{\varphi\ :\varphi(\mathbf{x}) = \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x}),A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\ge A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})} h(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ h(\mathbf{t})\in L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)\right\}. \tag{20}$$

Пространство $I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$ играет ту же роль для уравнения (6), что и пространство $AC([a,b])$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, § 2.2]. Отметим, что если $\varphi\in I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$, то почти всюду на $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})\,.$$

К примеру, если $A = E$ – единичная матрица, $\mathbf{c} = \mathbf{1} = (1,...,1)$ и $r = 0$, (19)–(20) принимают вид соответственно

$$L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right) = \left\{ f(\mathbf{x}) : \int\limits_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x})} \left| f(\mathbf{t}) \right| d\mathbf{t} < \infty \right\},$$

$$I_{E_{\mathbf{1}}}\left(L_1\right) = \left\{ \varphi :\ \varphi(\mathbf{x}) = \int\limits_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}),(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq(\mathbf{x}-\mathbf{t})} h(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ h(\mathbf{t}) \in L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right) \right\},$$

где $h(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_1} ... \dfrac{\partial}{\partial x_n} \varphi(\mathbf{x})$.

Имеет место следующее утверждение, являющееся аналогом классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в $L_1(a,b)$.

Теорема 1. *Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля* (6) *с* $\lambda, \alpha \in \mathrm{R}^n$ $(0 < \alpha < 1)$ *и* $\sigma \in \mathrm{R}_+^n$ *в пространстве* $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\alpha)\sin(\boldsymbol{\pi}\alpha)}{\boldsymbol{\pi}} \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma} - \mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha} \times$$
$$\times \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[A\cdot\lambda(\mathbf{x}^{\sigma} - \mathbf{t}^{\sigma})\right]\sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t})d\mathbf{t} \in I_{A_{\mathbf{c},r}}\left(L_1\right) \tag{21}$$

и

$$\left[f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0} = \left[\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0} = ... =$$
$$= \left[\prod_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0} = 0. \tag{22}$$

При выполнении этих условий уравнение (6) *разрешимо в* $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$ *и его единственное решение дается формулой* (18).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В модельном случае $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) = E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы вытекает из (15), (16). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ оно получается из (15), (16) после замены переменных (14) с учетом (17).

Следствие 1. *Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^{\sigma} - \mathbf{t}^{\sigma})^{\alpha-1}\ \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}\left[\lambda(\mathbf{x}^{\sigma} - \mathbf{t}^{\sigma})\right] f(\mathbf{t})d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x} \in E_1(\mathbf{b}), \tag{23}$$

с $\lambda, \alpha \in \mathrm{R}^n$ $(0 < \alpha < 1)$ *и* $\sigma \in \mathrm{R}_+^n$ *разрешимо в пространстве* $L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)$ *тогда и только тогда, когда*

$$f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\alpha)\sin(\boldsymbol{\pi}\alpha)}{\boldsymbol{\pi}} \int\limits_{E_1(\mathbf{x})} \left(\mathbf{x}^{\sigma} - \mathbf{t}^{\sigma}\right)^{-\alpha} \times$$
$$\times \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[\lambda(\mathbf{x}^{\sigma} - \mathbf{t}^{\sigma})\right]\sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t})d\mathbf{t} \in I_{E_{\mathbf{1}}}\left(L_1\right)$$

и

$$\left[f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) \right]_{1\cdot\mathbf{x}=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) \right]_{1\cdot\mathbf{x}=0} = ... = \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) \right]_{1\cdot\mathbf{x}=0} = 0.$$

При выполнении этих условий уравнение (23) *разрешимо в* $L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)$ *и его единственное решение дается формулой*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) = \sigma^1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha)\sin(\boldsymbol{\pi}\alpha)}{\boldsymbol{\pi}} \int\limits_{E_1(\mathbf{x})} \left(\mathbf{x}^{\sigma} - \mathbf{t}^{\sigma}\right)^{-\alpha} \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[\lambda(\mathbf{x}^{\sigma} - \mathbf{t}^{\sigma})\right] \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}.$$

Заключение. В работе проведено исследование многомерного интегрального уравнения с функцией Бесселя–Клиффорда по ограниченной пирамидальной области. Получено его решение в замкнутой форме, установлены необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения в пространстве суммируемых функций.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция – 2020» (программа 1, задание 1.2.01).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Репин, О.А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О.А. Репин. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1992. – 183 с.
3. Kilbas, A.A. On integrable solution of a multidimensional Abel-type integral equation / A.A. Kilbas, M. Saigo, H. Takushima // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – Vol. 25, № 1. – P. 1–9.
4. Михлин, С.Г. Лекции по интегральным уравнениям / С.Г. Михлин. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.
5. Преображенский, Н.Г. Абелева инверсия в физических задачах: Инверсия Абеля и ее обобщения / Н.Г. Преображенский. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6–24.
6. Федосов, В.П. О некоторых обобщенных уравнениях Абеля / В.П. Федосов. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 106.
7. Килбас, А.А. Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля / А.А. Килбас, Р.К. Райна, М. Сайго, Г.М. Сривастава // Доклады НАН Беларуси. – 1995. – Т. 43, № 2. – С. 23–26.
8. Raina, K.L. Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions / K.L. Raina, T.M. Srivastava, A.A. Kilbas, M. Saigo // ANZIAM J. – 2001. – Vol. 43, № 2. – P. 291–320.
9. Килбас, А.А. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Труды Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. – Минск, 2009. – Т. 17, № 1. – С. 71–78.
10. Килбас, А.А. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Доклады академии наук (Российская академия наук). – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 442–446.
11. Скоромник, О.В. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области / О.В. Скоромник, С.А. Шлапаков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2014. – № 1. – С. 12–17.
12. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.

R E F E R E N C E S

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marychev O.I. *Integrali i proizvodniye drobnogo poriadka i nekotoriye ikh prilozheniya* [Integrals and Part Order Function and Some Appendices], Mn., Nauka i tekhnika, 1987, 688 p.
2. Repin O.A. *Krayeviye zadachi so sdvigom dlia uravnenii giperbolicheskogo i smeshannogo tipov* [Edge Problems with a Shift for Equations of Hyperbolic and Mixed Types], Saratov, izd-vo Saratovskogo un-ta, 1992, 183 p.
3. Kilbas A.A., Saigo M., Takushima H. On integrable solution of a multidimensional Abel-type integral equation // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – Vol. 25, № 1. – P. 1–9.
4. Mikhlin S.G. *Lektsii po integralnim uravneniyam* [Lectures on Integral Equations], M., Fizmatgiz, 1959, 232 p.
5. Preobrazhenski N.G. *Inversiya Abelia i yeyo obobshcheniya* [Abel Inversion and its Generalizations], Novosibirsk, In-t teor. i prikl. mekhaniki SO AN SSSR, 1978, pp. 6–24.
6. Fedosov V.P. *O nekotorikh obobshchennikh uravneniyakh Abelia* [On Some Generalized Abel Equations], Novosibirsk, In-t teor. i prikl. mekhaniki SO AN SSSR, 1978, p. 106.
7. Kilbas A.A., Raina R.K., Saigo M., Srivastava G.M. *Dokladi NAN Belarusi* [Reports by NASc of Belarus], 1995, 43(2), pp. 23–26.
8. Raina K.L., Srivastava T.M., Kilbas A.A., Saigo M. Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions // ANZIAM J. – 2001. – Vol. 43, № 2. – P. 291–320.
9. Kilbas A.A., Skoromnik O.V. *Trudi in-ta matematiki NAN Belarusi* [Works by the Institute of Mathematics of NASc of Belarus], Minsk, 2009, 17(1), pp. 71–78.
10. Kilbas A.A., Skoromnik O.V. *Dokladi Akademii nauk (Rossiyskaya Akademiya nauk)* [Reports by the Academy of Sciences (Russian Academy of Sciences)], 2009, 429(4), pp. 442–446.
11. Skoromnik O.V., Shlapakov S.A. *Vesnik Vitebskaga dziarzhaunaga universiteta* [Journal of Vitebsk State University], 2014, 1, pp. 12–17.
12. Beitmen G., Erdeyi A. *Vysshiye transtsendentniye funktsii: v 3 t.* [Higher Transcendental Functions, in 3 Volumes], M., Nauka, 1973, Vol. 2, 296 p.

Поступила в редакцию 08.02.2018

Адрес для корреспонденции: e-mail: skoromnik@gmail.com – Скоромник О.В.