Шлапаков С. А.
УО «ВГУ им. П. М. Машерова»
(г. Витебск, Беларусь)
E-mail: geom@vsu.by

ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ АДАМАРА ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ РЯДАМИ

Дробное дифференцирование и интегрирование Ж. Адамара имеет тесную связь с дробной степенью оператора δ:

$$\delta = \left(x \frac{d}{dx} \right).$$

Это так называемое δ-дифференцирование [1]. Оно оказывается весьма полезным, когда приходится работать с логарифмической функцией [3]. В связи с этим на отрезке $[a, b]$ будем рассматривать интегральный оператор

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}} \frac{dt}{t}, \quad \alpha > 0, \quad 0 < a < x, \tag{1}$$

$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция.

Конструкция, определяемая формулой (1), называется дробным интегралом по Адамару, а конструкция вида

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \delta^n \left(\Im_{a+}^{n-\alpha} f\right)(x), \quad \delta = x\frac{d}{dx}, \quad \alpha > 0, \quad n = [\alpha] + 1, \tag{2}$$

называется дробной производной по Адамару [2]. Равенство (2) можно понимать и так:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \delta^n \left(\Im_{a+}^{n-\alpha} f\right)(x) = \delta^n \left(D_{a+}^{\alpha-n} f\right)(x).$$

Формула Лейбница

$$(fg)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} f^{(n-m)} g^{(m)},$$

которая доказывается в классическом математическом анализе, имеет место и для оператора δ:

$$\delta^m(fg) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \delta^{n-m} f \cdot \delta^m g, \quad n \in N.$$

Будем рассматривать функции *h(t)*, определенные на отрезке [a, b], которые представимы в окрестности точки $x \in (a, b)$ в виде функционального ряда

$$h(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_k \left(\ln \frac{t}{x}\right)^k. \tag{3}$$

Можно показать, как и в случае рядов Тейлора, что в случае возможности такого разложения, оно единственно, причем коэффициенты $c_л$ находятся по формулам:

$$c_л = \frac{\delta^л f(x)}{k!}, \ \delta = t\frac{d}{dt}, \ k = 0,1,2,\dots .$$

Определение. Говорят, что функция *h(t)* разлагается в ряд (3) на интервале *(a, b),* если она представима таким рядом в окрестности каждой точки $x \in (a, b)$.

В связи с этим справедливыми оказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция g(x) разлагается на интервале (a, b) ,* $0 < a < b < \infty$ *в ряд (1) . Тогда справедливо представление*

$$\left(D^{\alpha}_{a+}g\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\frac{\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\delta^k g(x), \quad \alpha \in R, \quad x \in (a, b), \binom{\alpha}{k} = \frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\cdot n!}.$$

Сформулированная выше теорема допускает обобщение, если в качестве функции вида (3), рассмотреть разложение:

$$g(x) = \left(\ln\frac{x}{a}\right)^m \sum_{r=0}^{\infty} c_k\left(\ln\frac{x}{a}\right)^k, \quad m \geq 0. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть функция g(x) в окрестности точки* $a > 0$ *имеет разложение вида (4). Тогда справедливо представление*

$$\left(D^{\alpha}_{a+}g\right)(x) = \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{m-\alpha} f(x), \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(k+m+1-\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^k, \quad \alpha \in R.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С. А. О дробном интегродифференцировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций / С. А. Шлапаков // Веснік ВДУ. – 2009. – Т. 53, №3. – С. 132-135.
3. Шлапаков, С. А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С. А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов (Витебск, 16–17 марта 2011 г.). – 2011. – Т. 1. – С. 71-73.