чисел p, для которых циклические группы порядка p принадлежат классу групп $\boldsymbol{X}$. Группа G называется π-разложимой, если она представима в виде $G = G_{\pi} \times G_{\pi'}$, где холлова π-подгруппа G_{π} группы G нильпотентна.

Найдены свойства представимой произведением двух своих π-разложимых подгрупп группы. В частности, доказана

Теорема. *Пусть $G = AB$ – π-разрешимая группа, где A и B – ее π-разложимые подгруппы. Если $\boldsymbol{X}$ – класс Шунка, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{G}_{\pi'}\boldsymbol{X}$, $\pi(G) \subseteq \mathrm{Char}(\boldsymbol{X})$, и A нормальна в G, а B $\boldsymbol{X}$-достижима в G, то $G \in \boldsymbol{X}$.*

Следствие. *Пусть $G = AB$ – π-разрешимая группа, где A и B – ее π-разложимые подгруппы. Если $\boldsymbol{F}$ – насыщенная формация, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}_{\pi'}\boldsymbol{F}$, $\pi(G) \subseteq \mathrm{Char}(\boldsymbol{F})$ и A нормальна в G, а B $\boldsymbol{F}$-достижима в G, то $G \in \boldsymbol{F}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.
2. Каморников, С. Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С. Ф. Каморников, М. В. Селькин – Мн.: Бел. навука, 2003.

Савельева Н. В.
УО «ВГУ им. П. М. Машерова»
(г. Витебск, Беларусь)
E-mail: natallia.savelyeva@gmail.com

ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНЫЕ ПОДКЛАССЫ МАКСИМАЛЬНОГО КЛАССА ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Все рассматриваемые группы считаются конечными. В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Класс Фиттинга M называется максимальным в классе Фиттинга H (обозначается $\mathsf{M} \lessdot \mathsf{H}$), если $\mathsf{M} \subset \mathsf{H}$ и из $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{X} \subseteq \mathsf{H}$, где X – класс Фиттинга, всегда следует $\mathsf{X} \in \{\mathsf{M}, \mathsf{H}\}$. Если F и X – классы Фиттинга такие, что $\varnothing \neq \mathsf{F} \subseteq \mathsf{X}$, то класс F называется локально нормальным или X-нормальным, если в любой X-группе G ее F-радикал G_{F} является F-максимальной подгруппой в G.

В направлении поиска взаимосвязей максимальных и нормальных классов Фиттинга Брайсом и Косси [2] был сформулирован

Вопрос. *Если X и Y – классы Фиттинга, то всегда ли можно найти класс Фиттинга Z такой, что $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{Z} \subset \mathsf{Y}$, чтобы Z был максимален в Y?*

В классе S всех разрешимых групп данный вопрос был решен [2] отрицательно: установлено, что существуют нормальные классы Фиттинга, которые не содержатся ни в каком максимальном классе Фиттинга. Вместе с тем, в классе S Рейффершейд были описаны [3] условия, при которых существует и является единственным класс Фиттинга Z такой, что $\mathsf{X} \trianglelefteq \mathsf{Z}$ и Z максимален в Y (т.е. показано, для каких классов Фиттинга указанный вопрос решается положительно). В дальнейшем, результат Рейффершейд был расширен [4] на случай конечных групп, у которых факторгруппа по X-радикалу разрешима.

Пусть $\pi(\mathsf{X})$ – множество всех простых делителей всех групп из класса Фиттинга X и $\mathsf{S}^{\pi(\mathsf{X})}$ – множество всех $\pi(\mathsf{X})$-разрешимых групп. Тогда $\mathsf{XS}^{\pi(\mathsf{X})}$ – класс всех тех групп, факторгруппы по X-радикалу которых $\pi(\mathsf{X})$-разрешимы. Заметим, что с учетом теоремы 2.5.3 [5] в любой группе из класса $\mathsf{XS}^{\pi(\mathsf{X})}$ инъекторы существуют и сопряжены.

Для расширения результата Рейффершейд на случай частично разрешимых групп, следуя Хауку [6], для произвольного класса Фиттинга X определим класс групп

$$\mathrm{Y}(\mathsf{X})=(G\in\mathsf{XS}^{\pi(\mathsf{X})}:\ G_{\mathsf{X}} – \mathsf{X}\text{-максимальная подгруппа группы } G).$$

Свойства групп минимального порядка из класса $\mathsf{F}\setminus\mathrm{Y}(\mathsf{X})$ дает

Лемма. *Пусть* $\varnothing\neq\mathsf{X}$ *– класс Фиттинга и и* $\mathsf{F}\subseteq\mathsf{XS}^{\pi(\mathsf{X})}$ *– класс групп такой, что* $\mathrm{S}_n(\mathsf{F})=\mathsf{F}\nsubseteq\mathrm{Y}(\mathsf{X})$. *Если G – группа минимального порядка из* $\mathsf{F}\setminus\mathrm{Y}(\mathsf{X})$ *и* $V\subseteq\mathrm{Inj}_{\mathsf{X}}(G)$, *то справедливы следующие утверждения:*
1) *в G существует единственная максимальная нормальная подгруппа N, причем $V\cup N=G_{\mathsf{X}}$, $V/G_{\mathsf{X}}\cong Z_p$ и, если $G/N\in\mathsf{N}$, то $VN=G$;*
2) *если F – класс Фишера и в G существует нормальная подгруппа K такая, что $G_{\mathsf{X}}\leq K\leq N$, то $K\leq N_G(V)$, $N/G_{\mathsf{X}}=\mathrm{F}(G/G_{\mathsf{X}})$ – q-группа и $V=PG_{\mathsf{X}}$, где $P=\mathrm{Syl}_p(G)$ для некоторого простого числа p.*

Определим теперь семейство классов Фиттинга, для которых указанная выше проблема существования и единственности максимального класса Фиттинга Z такого, что в нем заданный класс Фиттинга X является нормальным, решается положительно.

Определение 1. Пусть **P** – множество всех простых чисел. Для произвольных $\mathsf{S}^{\pi(\mathsf{X})}$-классов Фиттинга F_1, F_2 положим $\sigma=\{p\in\mathbf{P} \mid p \mid |G/G_{\mathsf{F}_2}|,\ G\in\mathsf{F}_1\}$, $\tau=\{p\in\mathbf{P} \mid p \mid |G/G_{\mathsf{F}_1}|,\ G\in\mathsf{F}_2\}$ и $\pi\supseteq\sigma\in\tau$.

Положительное решение вопроса Брайса-Косси как расширение результатов [3] и [4] на случай групп, у которых факторгруппы по X-радикалу $\pi(\mathsf{X})$-разрешимы, дает

Теорема. *Пусть* X *– класс Фиттинга. Справедливы следующие утверждения:*

1) *множество всех локально нормальных классов Фиттинга конечных* $\pi(\mathsf{X})$*-разрешимых групп имеет, по крайней мере, один максимальный элемент;*

2) *если* F_1, F_2 *– классы Фиттинга такие, что* $\mathsf{X} \triangleleft \mathsf{F}_i\mathsf{X}\mathsf{S}^{\pi(\mathsf{X})}$*, и* $\mathsf{F}_i=\mathsf{F}_i\mathsf{N}_p$ (i=1,2) *для всех* $p\in\pi$*, где множество* π *удовлетворяет определению 1, то существует единственный максимальный класс Фиттинга, в котором заданный класс Фиттинга* X *нормален.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Bryce, R. A. Maximal Fitting classes of finite soluble groups / R. A. Bryce, J. Cossey // Bull. Austral. Math. Soc. – 1974. – Vol. 10. – P. 169-175.
3. Reifferscheid, S. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups. Dissertation. Universität Tübingen, 2001.
4. Савельева, Н. В. Локально нормальные и максимальные классы Фиттинга / Н. В. Савельева // Весн. Магілёўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. – 2009. – № 2-3 (33). – С. 178-187.
5. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 258 p.
6. Hauck, P. Endliche auflösbare Gruppen mit normalem F-Injektor / P. Hauck // Arch. Math. (Basel). – 1977. – 28. – S. 117-129.

Сафонов В. Г.

Белорусский государственный университет

(г. Минск, Беларусь)

E-mail: *vgsafonov@tut.by*

К ТЕОРИИ ТОТАЛЬНО ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Мы придерживаемся терминалогии, принятой в [1, 2].

Всякую формацию конечных групп называют *0-кратно насыщенной.* При $n > 0$ формацию F называют *n-кратно насыщенной*, если она имеет такой локальный спутник, все непустые значения которого являются (n-1)-кратно насыщенными формациями. Формацию n-кратно насыщенную при любом натуральном n называют *тотально насыщенной* формацией.

Подгрупповым функтором называют [1] всякое отображение τ сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия: 1) $G \in\tau(G)$; 2) для любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ и любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ имеет место