ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк, Э. И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
2. Товстик, П. Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П. Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.

Кочергина О. Ю.[1], Подоксенов М. Н.[2]
УО «ВГУ им. П. М. Машерова»
(г. Витебск, Беларусь)
E-mail: [1]*olga-1308@mail.ru*, [2]*P_Michael@mail.ru*

ГОМОТЕТИЧЕСКИЕ АВТОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$

Преобразование алгебры Ли $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется автоморфизмом, если оно сохраняет операцию скобки: $[fX, fY] = f[X, Y]$ $\forall X, Y \in \mathcal{G}$. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle , \rangle$ (в дальнейшем – метрика). Преобразование $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется подобием с коэффициентом e^{μ}, если $\langle fX, fY \rangle = e^{2\mu} \langle X, Y \rangle$ $\forall X, Y \in \mathcal{G}$. В случае $\mu = 0$ преобразование f называется изометрией.

Преобразование, являющееся одновременно подобием и автоморфизмом, будем называть автоподобием. Преобразование являющееся изометрией и автоморфизмом будем называть автоизометрией. Решение задачи о существовании автоподобий для алгебр Ли тесно связано с решением задачи о существовании гомотетических преобразований для однородных пространств групп Ли, снабжённых левоинвариантной метрикой.

В работе [1] найдны все автоподобия для разрешимых и нильпотентных трёхмерных алгебр Ли, на которых введено лоренцево скалярное произведение сигнатуры (+,+,–). Остались нерассмотренными только две трёхмерные алгебры Ли.

1. $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$ – алгебра Ли группы $SL(2, \boldsymbol{R})$;
2. $\mathcal{SO}(3)$ – алгебра Ли группы $SO(3)$ всех вращений трёхмерного евклидова пространства.

Пусть в одной из этих алгебр Ли задано евклидово скалярное произведение. Тогда, согласно [2], в этой алгебре Ли существует ортонормированный базис $\{E_1, E_2, E_3\}$, в котором коммутационные соотношения имеют вид

$$[E_2, E_3] = \lambda_1 E_1,\ [E_3, E_1] = \lambda_2 E_2,\ [E_1, E_2] = \lambda_3 E_3. \qquad (1)$$

Назовём этот вид диагональным. Алгебрам Ли $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$ и $\mathcal{SO}(3)$ соответствуют наборы знаков (+,+,–) и (+,+,+) чисел λ_1, λ_2, λ_3. Применительно к лоренцевым метрикам этот факт верен только для алгебры Ли $\mathcal{SO}(3)$. В связи с этим возникают два вопроса: 1) найти необходимые и достаточные условия на метрический тензор сигнатуры (+,+,–), при выполнении которых операция скобки может быть приведена к диагональному виду путём выбора ортонормированного базиса; 2) среди данного класса метрик найти те метрики, которые допускают автоподобия и автоизометрии. Заметим, что при любой метрике, симметрии, действующие по формулам

$$E_i = -E_i,\ E_j = -E_j,\ E_k = E_k,\ \{i,j,k\} = \{1,2,3\} \tag{2}$$

являются автоизометриями.

Базис в $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$, котором выполнены соотношения (1) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ назовём каноническим. Вектор $X \in \mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$, который обладает свойством trace $\mathrm{ad}(X) = 0$, называется параболическим. Все параболические векторы образуют конус в $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$, который в каноническом базисе задаётся уравнением $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Обозначим этот конус K_2, а конус изотропных векторов (относительно лоренцевой метрики) обозначим K_1.

Теорема 1. *Пусть на алгебре Ли* $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$ *задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры* (+,+,–). *Операция скобки может быть приведена к диагональному виду путём выбора ортонормированного базиса тогда и только тогда, когда конусы* K_1 *и* K_2 *либо пересекаются только в вершине, либо касаются друг друга по прямым, либо пересекаются по четырём прямым.*

Теорема 2. *Пусть на алгебре Ли* $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$ *задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры* (+,+,–), *при котором операция скобки может быть приведена диагональному виду. Тогда данная метрика не допускает автоподобий, отличных от автоизометрий.*

Пусть $\{E_1, E_2, E_3\}$ *– канонический ортогональный базис,* $\Gamma=(g_{ij})$ *– его матрица Грамма. Тогда* $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$ *допускает автоизометрии, отличные от симметрий, тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1) $g_{11} = g_{22}$; 2) $g_{11} = -g_{33}$; 3) $g_{22} = -g_{33}$; 4) $g_{11} = g_{22} = -g_{33}$.

Если выполнены условия 1), 2) или 3), то все автоподобия задаются соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ 0 & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix},$$

либо являются композициями этих преобразований и симметрий (2). Если выполнено условие 4), то любое движение является автоморфизмом алгебры Ли $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подоксенов, М. Н. Гомотетические автоморфизмы трёхмерных алгебр Ли / М. Н. Подоксенов // Учёные записки УО «ВГУ им. П. М. Машерова. Сборник научных трудов. Том 8. Витебск: Изд-во ВГУ, 2009. – С.203-211.
2. Milnor, J. Curvaturies of left-invariant metrics on Lie groups / J. Milnor // Adv.Math.– 1976.– V. 21.– P. 293-329.

Кулаженко Ю. И.
УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
(г. Гомель, Беларусь)
E-mail: kulazhenko@gsu.by

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЕКТОРОВ И КРИТЕРИЙ ПОЛУАБЕЛЕВОСТИ N-АРНЫХ ГРУПП

Последовательности векторов, определенные на полуабелевой n-арной группе G, используются при построении и описании аффинных пространств. Так Д. Вакарелов в [1] при помощи последовательностей векторов строил элементы аффинной геометрии на полуабелевой тернарной группе (которую он называл симметрической). С.А.Русаков в [2] построил и описал аффинное пространство $W(G)$ методом фундаментальных последовательностей векторов полуабелевой n-арной rs-группы. Ряд свойств векторов, определенных на полуабелевой n-арной группе, изучен в [3, 4].

Исходя из вышесказанного, получение новых критериев полуабелевости n-арных групп, выраженных через свойства последовательностей векторов, определенных на этих группах, является достаточно актуальной задачей.

Приведенный ниже результат примыкает к указанному направлению исследований.

Используемые здесь обозначения можно найти в [2-4].

Теорема. *Пусть t – нечетное натуральное число и $t \geq 3$. n-Арная группа $G = G = \langle X, (\ ), ^{[-2]} \rangle$ будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для произвольных $2t$ точек $a_1, a_2, \ldots, a_t, b_1, b_2, \ldots, b_t$ множества X справедливо равенство*

$$\overrightarrow{\left(a_1 a_2^{[-2]} \overset{2n-4}{a_2}\ a_3 a_4^{[-2]} \overset{2n-4}{a_4}\ a_5 \ldots a_{t-1}^{[-2]} \overset{2n-4}{a_{t-1}}\ a_t\right)\left(b_1 b_2^{[-2]} \overset{2n-4}{b_2}\ b_3 b_4^{[-2]} \overset{2n-4}{b_4}\ b_5 \ldots b_{t-1}^{[-2]} \overset{2n-4}{b_{t-1}}\ b_t\right)} =$$

$$= \overrightarrow{a_1 b_1} - \overrightarrow{a_2 b_2} + \overrightarrow{a_3 b_3} - \ldots - \overrightarrow{a_{t-1} b_{t-1}} + \overrightarrow{a_t b_t}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вакарелов, Д. Тернарни групи / Д. Вакарелов; Годишник софийск. ун-т, математ. фак. 1966-1967, 1968. – Т. 61. – С. 71-105.