# Матэматыка

УДК 512.534

# Плотно вложенный идеал полугруппы линейных отношений

**М.И. Наумик**
*Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

*В данной работе продолжается изучение полугруппы линейных отношений. Понятие «плотно вложенный идеал полугруппы», введенное для абстрактной характеристики некоторых полугрупп преобразований, стало весьма полезным инструментом в ряде вопросов теории полугрупп. Появились его модификации и обобщения, относящиеся к произвольным алгебраическим системам. Здесь показано, что полугруппа линейных отношений конечномерного векторного пространства над телом содержит плотно вложенный идеал, состоящий из всех линейных отношений ранга ≤ 1. Дана характеристика полугруппы всех линейных отношений конечномерного векторного пространства над телом при помощи плотно вложенного идеала. Некоторые вопросы о плотно вложенных идеалах остаются открытыми. Они, преимущественно, касаются «расположения» плотно вложенных идеалов в полугруппе, обладающей такими идеалами.*

***Ключевые слова:*** *линейные отношения, ранг линейного отношения, полугруппа, полугруппа линейных отношений, плотно вложенный идеал полугруппы.*

# Tightly Embedded Ideal of Linear Relation Semigroup

**M.I. Naumik**
*Education establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»*

*This work will continue studying of the semigroup of linear relations. The notion of tightly embedded ideal of a semigroup, which has been introduced for the abstract characteristic of some semigroups of transformations, became a very useful tool in several issues of the theory of semigroups. Its modifications and generalizations, relating to the arbitrary algebraic systems, appeared. It is shown here that the semigroup of linear relations of a finite-dimensional vector space over the body contains tightly embedded ideal of all linear relations of the rank ≤ 1. The characteristic of the semigroup of all linear relations of finite dimensional vector space over the body is given with the help of tightly embedded ideal. Some questions about tightly embedded ideals are open. They mainly relate to «disposition» of tightly embedded ideals in the semigroup possessing these ideals.*

***Key words:*** *linear relationship, the rank of the linear relationship, semigroup, the semigroup of linear relations, tightly embedded ideal of a semigroup.*

В последнее время в различных областях математики все чаще приходится вводить гомоморфизмы, которые определены не везде и не однозначно.

Пусть *V* – *n*-мерное векторное пространство над произвольным телом *F*. Бинарное отношение *a* 5*V*× *V* между элементами множества *V* называется линейным отношением, если оно является подпространством пространства *V* ⊕ *V*. Другими словами, линейное отношение *a* – это множество пар $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x}, \bar{y} \in V$, замкнутое относительно операций сложения и умножения на элемент из *F*: если $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in a$ и $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \in a$ при каких-либо $x_i, y_i \in V$, то $(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}, \alpha\bar{y}_1 + \beta\bar{y}_2) \in a$ для любых $\alpha,\beta \in F$. Множество *LR(V)* всех линейных отношений [1] пространства *V* является полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений: для *a*, *b* ∈ *LR(V)*, $(\bar{x}, \bar{y}) \in ab$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\bar{z} \in V$, что $(\bar{x}, \bar{z}) \in a$ и $(\bar{z}, \bar{y}) \in b$.

Для любого $a \in LR(V)$ обозначим через $a^{-1}$ множество $a^{-1} = <(\bar{y}, \bar{x}) : (\bar{x}, \bar{y}) \in a>$. Очевидно, что $a^{-1} \in LR(V)$.

При изучении линейных отношений $a \in LR(V)$ будем рассматривать следующие подпространства $V$:

$$pr_1 a = \{\bar{x} \in V : \exists\, \bar{y} \in V, (\bar{x}, \bar{y}) \in a\};$$

$$\ker a = \{\bar{x} \in V : (\bar{x}, \bar{0}) \in a\};$$

$$pr_2 a = \{\bar{y} \in V : \exists\, \bar{x} \in V, (\bar{x}, \bar{y}) \in a\};$$

$$\operatorname{co}\ker a = \{\bar{x} \in V : (\bar{x}, \bar{0}) \in a\}.$$

Ранг линейного отношения $a \in LR(V)$ определяется формулой

$$\operatorname{rank} a = \dim pr_1 a / \ker a.$$

Множество

$$LR_r(V) = \{a / \operatorname{rank} a \le r,\ a \in LR(V)\},$$

где $r = 0, 1, \ldots, n,$ – идеал полугруппы $LR(V)$. В данной работе рассматриваются только двусторонние идеалы.

**Определение** [2–3]. *Идеал $A$ полугруппы $S$ называется плотно вложенным в $S$, если он удовлетворяет следующим условиям:*

*а) всякий нетривиальный (т.е. не являющийся изоморфизмом) гомоморфизм полугруппы $S$ индуцирует нетривиальный гомоморфизм полугруппы $A$;*

*б) если какая-нибудь полугруппа $T$ содержит $S$ в качестве собственной подполугруппы и $A$ является идеалом в $T$, то для $T$ существует нетривиальный гомоморфизм, индуцирующий изоморфизм полугруппы $A$.*

Это понятие впервые было введено Е.С. Ляпиным в 1953 г. [2]. Оно стало весьма полезным для решения некоторых вопросов в теории полугрупп. Появились обобщения, относящиеся к произвольным алгебраическим системам [4]. В работе [5] показано, что каждая полугруппа $A$ изоморфна группе всех внутренних левых (правых) сдвигов некоторой надполугруппы полугруппы $A$. Найдено необходимое и достаточное условие существования в полугруппе $A$ плотно вложенного двустороннего (одностороннего) идеала и установлена некоторая зависимость этого существования от сдвигов полугруппы $A$. В работе [6] Л.Н. Шеврин сформулировал открытые вопросы, относящиеся к плотно вложенным идеалам полугрупп. А в работе [7] рассматриваются плотные вложения, связанные с отношением $\pi$ – «быть подполугруппой». Основным в ней является понятие $\pi_c^{'}$ – плотной подполугруппы и дано описание $\pi_c^{'}$ – плотных расширений произвольной отделимой коммутативной полугруппы. В настоящей работе теорема 2 дает описание полугруппы $LR(V)$ при помощи ее подполугруппы $LR_1(V)$, которая является по теореме 1 плотно вложенным идеалом в полугруппе $LR(V)$.

Все остальные необходимые определения и обозначения можно найти в [8–9].

Пусть $V_k$ – некоторое фиксированное $\kappa$-мерное $(1 \le \kappa \le n)$ подпространство пространства $V$; $H_k$ – $H$-класс $H$ $(V_k, \bar{0}, V_k, \bar{0})$. $H_\kappa$ совпадает с полной линейной группой $GL(V_k)$. Обозначим через $e_\kappa$ единицу группы $H_k$; через $R_i$, $L_\lambda$ – $R$-классы и, соответственно, $L$-классы, содержащиеся в $D_k$; через $I^\kappa$, $\Lambda^\kappa$ – множество всех индексов $i$ и $\lambda$. Тогда всякий $H$-класс, содержащийся в $D_\kappa$, можно представить в виде $H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$. Для любых $i \in I^\kappa$, $\lambda \in \Lambda^\kappa$ существуют подпространства $A, B, C, D \in V$ такие, что $\dim A/B = \dim C/D$ и $R_i = R(A, B)$, $L_\lambda = L\,(C, D)$. Представим $A$ и $C$ в виде $A = B \oplus A_1$, $C = D \oplus C_1$, где $\dim A_1 = \dim C_1 = k$. Пусть $d_i$ – фиксированное биективное линейное отображение $A_1$ на $V_k$; а $d_\lambda$ – фиксированное биективное линейное отображение $V_k$ на $C_1$; $a_i \in R_i$ и $a_\lambda \in L_\lambda$ – линейные отношения

$$a_i = <(\bar{x}+\bar{y},\ \bar{z}) : \bar{x} \in B, (\bar{y},\ \bar{z}) \in d_i>,$$

$$a_\lambda = <(\bar{z}+\bar{x},\ \bar{y}) : \bar{x} \in D, (\bar{z},\ \bar{y}) \in d_\lambda.$$

Легко проверить, что $a_\lambda\ a_i \in H_\kappa$ или $\operatorname{rank}(a_\lambda\, a_i) < \kappa$ при любых $\lambda \in \Lambda^k$, $i \in I^\kappa$.

**Лемма 1.** *Для любого $H_{i\lambda}$ существует такое $g \in H_k$, что $a$ можно, и притом единственным образом, представить в виде $a = a_i g a_\lambda$.*

Доказательство. Для любого $a \in H_{i\lambda}$ существует такое $g \in H_k$, что $a$ можно представить в виде $a = a_i g a_\lambda$, что следует из вышепоказанного. Покажем, что линейное отношение $a$ можно единственным образом представить в таком виде. Допустим, что существуют $i, j \in I^k$, $\lambda, \mu \in \Lambda^k$, $g_1, g_2 \in H_k$ такие, что

$$a = a_i g_1 a_\lambda \quad \text{и} \quad a = a_j g_2 a_\mu.$$

По условию имеем $\operatorname{rank} a = k$. Ясно, что $\ker a_i \subset \ker a$. Если бы нашелся $\bar{x} \in \ker a \backslash \ker a_i$, то $\operatorname{rank} a_i \ge \dim\ (V_k \oplus [\bar{x}])$. Последнее неравенство противоречит выбору $a_i$. Следовательно, $\ker a = \ker a_i$. Аналогичным образом получаем $\ker a = \ker a_j$, т.е. $i = j$. Аналогично получаем $\operatorname{coker} a = \operatorname{coker} a_\lambda$ и $\operatorname{coker} a = \operatorname{coker} a_\mu$, т.е. $\lambda = \mu$. Пусть $e_k$ – единица группы $H_k$ и $d_i$ и $d_\lambda$ – линейные отношения, определяемые выше. Из $a_i g_1 a_\lambda = a_i g_2 a_\lambda$ получаем $d_i^{-1} g_1 a_\lambda d_\lambda^{-1}$. Имеем $d_i^{-1} a_i = a_\lambda d_\lambda^{-1} = e_k$ и $e_k g_1 e_k = e_k g_2 e_k$, т.е. $g_1 = g_2$. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Для любого линейного отношения $a \in LR_0(V)$ можно, и притом единственным образом, представить в виде $a = a_i a_\lambda$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству леммы 1.

**Основная часть. Теорема 1.** *Пусть D – подполугруппа полугруппы LR(V), содержащая $LR_1(V)$. Пусть, далее, некоторая полугруппа S содержит D и $LR_1(V)$ является идеалом в S. Тогда существует гомоморфизм полугруппы S в LR(V), индуцирующий тождественный автоморфизм полугруппы D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a$ – любой элемент из $S$. Так как полугруппа $LR_1(V)$ – идеал в $S$ и $a_iea_\lambda = a_ia_\lambda \in LR_1(V)$, то

$$a_ie\, a_\lambda = a_i(ae)a_\lambda = a_i(\alpha e)a_\lambda = \alpha a_iea_\lambda,$$

где $\alpha \in F$.

Таким образом, любому элементу $a$ полугруппы $S$ соответствует единственное линейное отношение

$$\varphi(a) = a_iga_\lambda \in LR(V).$$

Очевидно, что $\varphi(a_iga_\lambda) = a_iga_\lambda$ для любого линейного отношения $a_iga_\lambda \in D$.

Пусть теперь $a$, $b$ – любые элементы из $S$,

$$\varphi(b) = b_i(be)b_\lambda = b_i(\beta e)b_\lambda = \beta b_ieb_\lambda.$$

Имеем

$$\varphi(a)\,\varphi(b) = \alpha a_iea_\lambda\beta b_ieb_\lambda = \alpha\beta a_iea_\lambda b_ieb_\lambda =$$
$$= \alpha\beta a_ieb_\lambda = a_i\alpha(\beta e)b_\lambda = a_i\alpha(\beta e)b_\lambda =$$
$$= a_ia(\beta e)b_\lambda = a_i(ab)eb_\lambda = \varphi(ab),$$

если $\mathrm{rank}\, a_\lambda b_i = 1$ и $ea_\lambda b_i = e$ и если $\mathrm{rank}\, a_\lambda b_i = 0$, то

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab).$$

Таким образом, отображение $\varphi$ является гомоморфизмом. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть LR(V) – полугруппа всех линейных отношений n-мерного векторного пространства V над телом F. Полугруппа S тогда и только тогда изоморфна полугруппе LR(V), когда она содержит плотно вложенный идеал, изоморфный $LR_1(V)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что $LR_1(V)$ является плотно вложенным идеалом для $LR(V)$. Известно [1], что все $LR_r(V)$ ($r$ = 0, 1, 2, …, $n$) – идеалы полугруппы $LR(V)$. Пусть $\varphi$ – произвольный нетривиальный гомоморфизм полугруппы $LR(V)$. Тогда найдутся два линейных отношения $a, b \in LR(V)$ такие, что

$$a \neq b,\ \varphi(a) = \varphi(b)$$

и, значит, можно выбрать, по крайней мере, две пары векторов $(\bar{x}, \bar{y}) \in a = a_iga_\lambda$ и $(\bar{x}, \bar{z}) \in b = b_ig_ib_\lambda$, где $\bar{y} \neq \bar{z}$. Возьмем линейное отношение $c = <(\bar{y}, \bar{y})>$. Отсюда следует, что $c \in LR_1(V)$ и

$$\varphi(a)\varphi(c) = \varphi(b)\,\varphi(c),\ \varphi(ac) = \varphi(bc),$$

т.е. $\varphi$ индуцирует нетривиальный гомоморфизм полугруппы $LR_1(V)$.

Пусть $T$ – произвольная полугруппа, содержащая $LR(V)$ в качестве собственной подполугруппы, и $LR_1(V)$ – идеал $T$. Из теоремы 1 вытекает существование гомоморфизма $T$ в полугруппу $LR(V)$, при котором $\varphi(a) = a$ для любого линейного отношения $a \in LR(V)$.

Если $t$ – какой-либо элемент из $T$, не содержащийся в $LR(V)$, и $\varphi(t) = t_igt_\lambda$, то $\varphi(t) = \varphi(t_igt_\lambda)$ и $\varphi$ – нетривиальный гомоморфизм $T$, индуцирующий изоморфизм на $LR(V)$, в частности и на $LR_1(V)$.

Таким образом, $LR_1(V)$ является плотно вложенным идеалом полугруппы $LR(V)$. Если $\psi$ – изоморфизм $LR(V)$ на некоторую полугруппу $S$, то, пользуясь определением, нетрудно проверить, что $\psi(LR_1(V))$ является плотно вложенным идеалом полугруппы $S$.

Обратно, пусть $A$ – плотно вложенный идеал некоторой полугруппы $S$ и $\psi$ – изоморфизм $A$ на $LR_1(V)$. Тогда изоморфизм $\psi$ можно продолжить до изоморфизма $\bar{\psi}$ всей полугруппы $S$ на некоторую полугруппу $\bar{\psi}(S) = \bar{S}$, содержащую $LR_1(V) = \bar{\psi}(A) = \psi(A)$ в качестве плотно вложенного идеала. Из теоремы 1 следует, что существует гомоморфизм $\varphi$ полугруппы $\bar{S}$ в $LR(V)$, индуцирующий тождественный автоморфизм на $LR_1(V)$. Из условия а) тогда вытекает, что $\varphi$ является изоморфизмом.

Следовательно, $\bar{S}$ изоморфна некоторой подполугруппе $\varphi(\bar{S}) = S'$ полугруппы $LR(V)$. Допустим, что $S'$ – собственная подполугруппа $LR(V)$. Так как $\varphi(A) = A$ является плотно вложенным идеалом полугруппы $\varphi(\bar{S}) = S'$ и в то же время идеалом полугруппы $LR(V)$, содержащей $S$, то по условию б) должен существовать нетривиальный гомоморфизм полугруппы $LR(V)$, индуцирующий изоморфизм на $LR_1(V)$. Но это невозможно: мы доказали, что $LR_1(V)$ плотно вложен в $LR(V)$, а по условию а) всякий нетривиальный гомоморфизм полугруппы $LR(V)$ должен индуцировать нетривиальный гомоморфизм $LR_1(V)$. Таким образом, $S' = LR(V)$ и отображение $\psi\varphi$ является изоморфизмом полугруппы $S$ на $LR(V)$. Теорема 2 доказана.

**Заключение.** С помощью понятия «плотно вложенный идеал» мы дали характеристику полугруппы всех линейных отношений конечномерного векторного пространства над телом. Этот результат является обобщением теоремы 1 Л.М. Глускина работы [3].

*Л И Т Е Р А Т У Р А*

1. Наумик, М.И. Полугруппа линейных отношений / М.И. Наумик // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 3. – С. 34–37.
2. Ляпин, Е.С. Ассоциативные системы всех частичных преобразований / Е.С. Ляпин // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 88, № 1. – С. 13–16.
3. Глускин, Л.М. О матричных полугруппах / Л.М. Глускин // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1958. – Т. 22. – С. 439–448.
4. Глускин, Л.М. О плотных вложениях / Л.М. Глускин // Матем. сб. – 1963. – Т. 61(103). – С. 175–206.
5. Шутов, Э.Г. О сдвигах полугрупп / Э.Г. Шутов // Успехи матем. наук. – 1964. – Т. XIX, вып. 4(118). – С. 215–218.
6. Шеврин, Л.Н. Плотно вложенные идеалы полугрупп / Л.Н. Шеврин // Матем. сб. – 1969. – Т. 79(121), № 3(7). – С. 425–432.
7. Глускин, Л.М. Об отделимых полугруппах / Л.М. Глускин // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 9(112). – С. 30–39.
8. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – М., 1972. – Т. 1. – 286 с.
9. Артамонов, В.А. Общая алгебра / В.А. Артамонов [и др.]; под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – Т. 2. – 480 с.

*Поступила в редакцию 31.05.2013. Принята в печать 22.08.2013*
***Адрес для корреспонденции:*** e-mail: naumik@tut.by – Наумик М.И.