Андрушкевич И. Е.[1], Полякова Е. С.[2], Шиенок Ю. В.[3]
[1,2]УО «ПГУ» (г. Новополоцк, Беларусь),
[3]УО «ВГУ им. П. М. Машерова» (г. Витебск, Беларусь)
E-mail: [1]racursj@yandex.ru, [2]chepik.zhenya@mail.ru, [3]jws@tut.by

АЛГЕБРА КЛИФФОРДА И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Проблема разделения переменных в системах уравнений в частных производных, являющихся математическими моделями физических явлений и процессов (уравнение Дирака, уравнения Максвелла, Эйнштейна и т.д.) является актуальной и далека от своего разрешения. Под методом разделения переменных мы понимаем любой метод, позволяющий уравнениям в частных производных или их системам сопоставлять эквивалентную на определенном классе функций систему обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

По состоянию на сегодняшний день из всех уравнений теоретической физики наиболее полно и глубоко исследованы возможности разделения переменных в уравнении Дирака, в гравитационных полях с диагональным метрическим тензором $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, a_3, a_4)$ при диагональной калибровке тетрады имеющего вид [1]

$$\left\{\gamma^1 \frac{1}{\sqrt{a_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{1}{4a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x^1}\right) + \gamma^2 \frac{1}{\sqrt{a_2}}\left(\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{1}{4a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x^2}\right) + \gamma^3 \frac{1}{\sqrt{a_3}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{1}{4a_3}\frac{\partial a_3}{\partial x^3}\right) + \right.$$
$$\left. + \gamma^4 \frac{1}{\sqrt{a_4}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{1}{4a_4}\frac{\partial a_4}{\partial x^4}\right) + m_0\right\}\mathbf{\Phi} = 0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{\Phi} = (a_1 a_2 a_3 a_4)^{\frac{1}{4}}(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^{\mathbf{T}}$; $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$ – матрицы Дирака размерности 4×4, удовлетворяющие перестановочным соотношениям:

$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 2 \cdot \mathrm{diag}\,(1,1,1,-1); i, j = \overline{1,4} \qquad (2)$$

Известно, что любое множество величин, удовлетворяющее соотношениям вида (2), называется алгеброй Клиффорда [2]. Принято считать, что благодаря выполнению соотношений (2) для уравнения Дирака удалось разработать такие методы разделения переменных, как метод коммутирующих операторов и алгебраический метод [1].

В данной работе мы исследуем возможности применения указанных выше методов к изучению уравнений Максвелла на предмет разделения переменных. При этом мы используем алгебраическое представление системы уравнений Максвелла, в изотропных средах имеющее вид [3]:

$$\left\{\xi^1\left(\mathbf{R}_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial x}\right) + \xi^2\left(\mathbf{R}_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{R}_y}{\partial y}\right) + \xi^3\left(\mathbf{R}_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial z}\right) + \right.$$

$$+\xi^4\left(\mathbf{R}_t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{R}_t}{\partial t}\right)+\xi^4\mathbf{R}_\sigma\Big\}\mathbf{\Psi}=\mathbf{PJ}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z, \mathbf{R}_t, \mathbf{R}_\sigma, \mathbf{P}$ – диагональные матрицы, определяемые электродинамическими параметрами среды; $E_0, H_0 = \text{const}$;

$$\mathbf{\Psi}=(-E_0, E_X, E_Y, -E_Z, -H_Z, H_Y, H_X, -H_0)^{\mathrm{T}}, \mathbf{J}=(1,1,1,1,1,1,1,1)^{\mathbf{T}},$$

$\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ – матрицы Максвелла размерности 8×8, удовлетворяющие соотношениям

$$\xi^i\xi^j+\xi^j\xi^i=2g^{ij}\mathbf{I}, \quad g^{ij}=\begin{cases}\delta_{i,j}, i=1,2,3,6;\\ -\delta_{i,j}, i=4,5,7,\end{cases} \quad \delta_{i,j}=\begin{cases}0, i\neq j,\\ 1, i=j.\end{cases} \qquad (4)$$

Очевиден факт: как и матрицы Дирака γ^i, так и матрица Максвелла ξ^i удовлетворяют идентичным антикоммутационным соотношениям (2), (4).

Воспользовавшись следствиями теоремы Колмогорова «о представлении функции многих переменных в виде суперпозиции произведений функций одной переменной» [4], мы смогли представить уравнение (3) в виде билинейного матрично-функционального уравнения

$$\sum_{i=1}^{N} X_i(x)Y_i(y)=0 \qquad (5)$$

где $X_i(x), Y_i(y)$ – матрицы-функции размерности 8×8 переменных *x*, *y* соответственно.

Как и в случае с билинейными функциональными уравнениями [5], решение (5) сводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентных системе уравнений Максвелла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрушкевич, И. Е. О критериях разделимости переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях / И. Е. Андрушкевич, Г. В. Шишкин // ТМФ. – 1987.– №2. – С.289-302.
2. Бете, Г. Квантовая механика / Г. Бете. – Москва: Мир, 1965. – 334 с.
3. Андрушкевич, И. Е. Эквивалентные матричные формы представления уравнений Максвелла / И. Е. Андрушкевич, Ю. В. Шиёнок // Вестник ПГУ. Серия С. – 2007. – № 9. – С. 79-84.
4. Колмогоров, А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного / А. Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114. – № 5. – С. 953–956.
5. Скоробогатько, В. Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными / В. Я. Скоробогатько. – Киев: Наукова думка. – 1980. – 239 с.