Матэматыка

УДК 514.765+512.812.4

Гомотетические автоморфизмы простой и полупростой трехмерных алгебр Ли

М.Н. Подоксенов[*], А.Н. Романов[**]

[*]*Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

[**]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Омский государственный университет имени Ф.М. Достоевского»*

Пусть на алгебре Ли $\mathcal{G}$ введено евклидово или лоренцево скалярное произведение. Преобразование $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется автоподобием, если оно одновременно является автоморфизмом алгебры Ли и подобием относительно введенного скалярного произведения. Задача о существовании автоподобий алгебры Ли непосредственно связана с задачей о существовании гомотетических преобразований группы Ли, снабженной левоинвариантной метрикой.

В данной работе рассматриваются простая и полупростая трехмерные алгебры Ли, на которых введено евклидово или лоренцево скалярное произведение сигнатуры (+,+,–). Доказано, что данные пространства не допускают автоподобий. Выписаны формулы всех изометрических автоморфизмов. Попутно найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы операция скобки в полупростой трехмерной алгебре Ли могла быть приведена к каноническому виду путем выбора базиса, ортонормированного относительно лоренцевой метрики.

Ключевые слова: *алгебра Ли, лоренцева метрика, автоморфизм, гомотетическое преобразование.*

Homotetic Automorphisms of Simple and Semi Simple Three-dimensional Lee Algebras

M.N. Podoksenov[*], A.N. Romanov[**]

[*]*Educational establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»*

[**]*Federal state funded educational establishment of higher professional education «Omsk State F.M. Dostoyevski University»*

Let Euclid and Laurence scalar multiplication be introduced on Lee $\mathcal{G}$ algebra. Transformation $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ is called auto similarity, if it is at the same time automorphism of Lee algebra and resemblance regarding the introduced scalar multiplication. The task on the existence of auto of Lee algebra is closely connected with the task on the existence of homotetic transformations of Lee group which is provided with a left invariant metrics.

Simple and semi simple tree-dimensional Lee algebras, on which Euclid or Laurence scalar multiplication of the signature of (+,+,–) are introduced, are considered in the paper. It is proved that space data do not permit auto similarities. Formulas of all isometric automorphisms are written down. At the same time, necessary and sufficient conditions for the operation of brackets in semi simple three-dimensional Lee algebra to be converted into canonic type by choosing the basis, which is orthonormalised in relation to Laurence metrics, are found.

Key words: *Lee algebra, Laurence metrics, automorphism, homotetic transformation.*

Преобразование алгебры Ли $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется автоморфизмом, если оно сохраняет операцию скобки: $[fX, fY] = f[X, Y]$ $\forall X, Y \in \mathcal{G}$. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle , \rangle$. Тогда преобразование $f: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется подобием с коэффициентом e^{μ}, если $\langle fX, fY \rangle = e^{2\mu} \langle X, Y \rangle$ $\forall X, Y \in \mathcal{G}$. В случае $\mu = 0$ преобразование f называется изометрией.

Преобразование, являющееся одновременно подобием и автоморфизмом, будем называть ав-

топодобием. Преобразование, являющееся изометрией и автоморфизмом, будем называть автоизометрией. Решение задачи о существовании автоподобий для алгебр Ли тесно связано с решением задачи о существовании гомотетических преобразований для однородных пространств групп Ли, снабженных левоинвариантной метрикой.

Все автоподобия для разрешимых и нильпотентных трехмерных алгебр Ли, на которых введено лоренцево скалярное произведение сигнатуры (+,+,–), найдены в работе [1]. Результат о том, что для определенного класса лоренцевых метрик на полупростой трехмерной алгебре Ли не существует автоподобий, отличных от автоизометрий, опубликован в [2].

В данной работе мы докажем что эта алгебра Ли не допускает автоподобий при любых римановых и лоренцевых метриках, заданных на ней, и что это же верно для простой трехмерной алгебры Ли.

Авторам известны две классификации трехмерных алгебр Ли: по типам Бианки [3] и классификация, изложенная в обзоре Дж. Милнора [4]. Вторая классификация менее известна. Кратко изложим ее суть.

Каждый вектор $Y\in\mathcal{G}$ определяет линейное отображение $\mathrm{ad}(Y):\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}$ по формуле $\mathrm{ad}(Y)X=[Y,X]$. Алгебра Ли $\mathcal{G}$ называется унимодулярной, если $\mathrm{trace}\,\mathrm{ad}(Y)=0\ \forall Y\in\mathcal{G}$. Пусть в унимодулярной алгебре Ли задано евклидово скалярное произведение векторов. Тогда, согласно [4], в ней существует ортонормированный базис $\{E_1, E_2, E_3\}$, в котором коммутационные соотношения имеют вид

$$[E_2,E_3]=\lambda_1E_1,\ \ [E_3,E_1]=\lambda_2E_2,\qquad [E_1,E_2]=\lambda_3E_3. \tag{1}$$

Назовем этот вид диагональным. В соответствии с набором знаков λ_1, λ_2, λ_3 можно выделить шесть неизоморфных унимодулярных алгебр Ли:

1. $\mathcal{R}^3$: (0, 0, 0) – алгебра Ли коммутативной группы векторов $\boldsymbol{R}^3$.
2. Hs: (+, 0, 0) – алгебра Ли группы Гейзенберга Hs.
3. $\mathcal{E}(2)$: (+, +, 0) – алгебра Ли группы $E(2)$ движений евклидовой плоскости.
4. $\mathcal{E}(1,1)$: (+, –, 0) – алгебра Ли группы $E(1,1)$ движений плоскости Минковского.
5. $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$: (+,+,–) – алгебра Ли группы $SL(2,\boldsymbol{R})$.
6. $\mathcal{SO}(3)$: (+, +, +) – алгебра Ли группы $SO(3)$ всех вращений трехмерного евклидова пространства.

Это алгебры Ли (в том же порядке) I, II типов Бианки, подтипов $\mathrm{VII_o}$ и $\mathrm{VI_o}$, типов VIII и IX. Если не требовать, чтобы базис был ортонормированным, можно считать, что все ненулевые λ_i по модулю равны 1.

Если алгебра Ли неунимодулярна, то она содержит унимодулярное ядро $\mathcal{L}=\{X\in\mathcal{G}\,|\,\mathrm{trace}\,\mathrm{ad}(X)=0\}$. Оно является коммутативным идеалом размерности 2. Каждый вектор $Y\notin\mathcal{L}$ определяет линейное отображение $\mathrm{ad}(Y)|_{\mathcal{L}}:\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}$. Выберем $Y\notin\mathcal{L}$ так, чтобы $\mathrm{trace}\,\mathrm{ad}(Y)|_{\mathcal{L}}=2$. Тогда если отбросить исключительный случай $\mathrm{ad}(Y)|_{\mathcal{L}}=\mathrm{id}_{\mathcal{L}}$ (V тип Бианки), то определитель $D=\det\mathrm{ad}(Y)|_{\mathcal{L}}$ будет полным изоморфным инвариантом алгебры Ли.

Случай $D=0$ соответствует алгебре Ли $\mathcal{A}(1)\times\mathcal{R}$ (III тип Бианки), где $\mathcal{A}(1)$ – алгебра Ли группы аффинных преобразований прямой, $\mathcal{R}$ – одномерная алгебра Ли. Случай $D=1$ соответствует алгебре Ли IV типа Бианки, $D>1$ – алгебрам Ли VII типа Бианки, $D\in(-\infty,0)\bigcup(0,1)$ – алгебрам Ли VI типа Бианки.

Материал и методы. В данной работе мы рассматриваем две алгебры Ли.

1. $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ – алгебра Ли группы $SL(2,\boldsymbol{R})$.
2. $\mathcal{SO}(3)$ – алгебра Ли группы $SO(3)$ всех вращений трехмерного евклидова пространства.

Цель исследования: доказательство того, что данные алгебры Ли не допускают автоподобий при любых римановых и лоренцевых метриках, заданных на них. При этом используются методы линейной алгебры и проективной геометрии.

Результаты и их обсуждение. ***Евклидовы метрики.*** Пусть в одной из алгебр Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ или $\mathcal{SO}(3)$ задана евклидова метрика. Тогда, согласно [3], в этой алгебре Ли существует ортонормированный базис $\{E_1, E_2, E_3\}$, в котором коммутационные соотношения имеют вид (1) и все коэффициенты λ_1, λ_2, λ_3 отличны от нуля. Применительно к лоренцевым метрикам этот факт верен только для алгебры Ли $\mathcal{SO}(3)$. Заметим, что при любой метрике симметрии, действующие по формулам

$$E_i=-E_i,\ E_j=-E_j,\ E_k=E_k,\ \{i,j,k\}=\{1,2,3\}, \tag{2}$$

являются автоизометриями.

Изменив при необходимости лишь длины векторов, мы можем добиться, что $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ для алгебры Ли $\mathcal{SO}(3)$ и $\lambda_i=\lambda_j=-\lambda_k=1$, $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$ для алгебры Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$. Будем называть такой базис каноническим. Например, в алгебре Ли $\mathcal{SO}(3)$ новые базисные векторы будут

$$F_1=\frac{E_1}{\sqrt{\lambda_2\lambda_3}},\ F_2=\frac{E_2}{\sqrt{\lambda_1\lambda_3}},\ F_3=\frac{E_3}{\sqrt{\lambda_2\lambda_3}}. \tag{3}$$

Базис $\{F_1, F_2, F_3\}$ будет состоять из ортогональных друг другу векторов, но не обязательно единичных. Введем вспомогательное евклидово скалярное произведение $\langle,\rangle^*$, относительно которого $\{F_1, F_2, F_3\}$ является ортонормированным. Тогда изометрии для данного вспомогательного скалярного произведения и только они будут автоморфизмами для алгебры Ли $\mathcal{SO}(3)$. Как выглядят эти изометрии, хорошо известно, и они не могут быть подобиями ни для какого другого евклидова скалярного произведения, заданного в том же трехмерном векторном пространстве.

Вернемся обратно к исходной метрике и базису $\{E_1, E_2, E_3\}$. Относительно этой метрики матрица Грамма $\Gamma=(g_{ij})$, $i, j=1, 2, 3$ базиса $\{F_1, F_2, F_3\}$ будет диагональной и

$$g_{11}=\frac{1}{\lambda_2\lambda_3},\ g_{22}=\frac{1}{\lambda_1\lambda_3},\ g_{33}=\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}.$$

Рассмотрим эллипсоид, который относительно базиса $\{E_1, E_2, E_3\}$ – задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{\lambda_2\lambda_3}+\frac{x_2^2}{\lambda_1\lambda_3}+\frac{x_3^2}{\lambda_1\lambda_2}=1.$$

Те и только те вращения, которые переводят данный эллипсоид в себя, будут изометриями для метрики $\langle,\rangle^*$, а значит будут автоморфизмами алгебры Ли $\mathcal{SO}(3)$. Хорошо известно, что

а) при $\lambda_2\lambda_3=\lambda_1\lambda_3=\lambda_1\lambda_2$ это будут все вращения; последнее равенство равносильно $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$;

б) при $\lambda_2\lambda_3=\lambda_1\lambda_3$ это будут вращения вокруг вектора E_3; последнее равенство равносильно $\lambda_1=\lambda_2$;

в) при $\lambda_2\lambda_3=\lambda_1\lambda_2$ это будут вращения вокруг вектора E_2; последнее равенство равносильно $\lambda_1=\lambda_3$.

г) при $\lambda_1\lambda_3=\lambda_1\lambda_2$ это будут вращения вокруг вектора E_1; последнее равенство равносильно $\lambda_2=\lambda_3$.

Пусть в алгебре Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ задана евклидова метрика и $\{E_1, E_2, E_3\}$ – ортонормированный базис, в котором коммутационные соотношения имеют вид (1). Точно так же, как в предыдущем случае, изменим длины векторов

$$F_1=\frac{E_1}{\sqrt{|\lambda_2\lambda_3|}},\ F_2=\frac{E_2}{\sqrt{|\lambda_1\lambda_3|}},\ F_3=\frac{E_3}{\sqrt{|\lambda_2\lambda_3|}} \qquad (4)$$

и получим базис, в котором $\lambda_i=\lambda_j=-\lambda_k=1$, $\{i, j, k\}=\{1, 2, 3\}$. Для определенности можем считать, что $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$. Этот базис $\{F_1, F_2, F_3\}$ будет состоять из ортогональных друг другу векторов, но не обязательно единичных. Рассмотрим коническую поверхность K_2, которая определяется в каноническом базисе уравнением

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0.$$

Она называется конусом параболических векторов. Введем вспомогательную лоренцеву метрику $\langle,\rangle^*$, относительно которой $\{F_1, F_2, F_3\}$ является ортонормированным и $(F_1)^2=(F_2)^2=1$, $(F_3)^2=-1$. Те и только те преобразования, которые являются изометриями для вспомогательной метрики, будут автоморфизмами для алгебры Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$. Они же будут оставлять инвариантным конус параболических векторов, который для вспомогательной метрики будет изотропным конусом. Относительно базиса $\{E_1, E_2, E_3\}$ данный конус будет задаваться уравнением

$$\frac{x_1^2}{\lambda_2\lambda_3}+\frac{x_2^2}{\lambda_1\lambda_3}+\frac{x_3^2}{\lambda_1\lambda_2}=0.$$

Однако нам удобнее рассмотреть однополостной гиперболоид Φ:

$$\frac{x_1^2}{\lambda_2\lambda_3}+\frac{x_2^2}{\lambda_1\lambda_3}+\frac{x_3^2}{\lambda_1\lambda_2}=1.$$

Можно утверждать, что те и только те преобразования, которые переводят Φ в себя, являются автоморфизмами. Очевидно, что не существует подобий трехмерного евклидова пространства, переводящих Φ в себя. Существует только один тип изометрий, оставляющих Φ инвариантным: это вращения вокруг вектора E_3. Такие вращения существуют только, если $\lambda_2\lambda_3=\lambda_1\lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$. Выписывание формул данных преобразований не представляет интереса.

Приведение к диагональному виду. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{SO}(3)$ задана лоренцева метрика. Рассмотрим вспомогательную метрику $\langle,\rangle^*$, описанную выше. Основная и вспомогательная метрики определяют скалярные квадраты, которые представляют собой квадратичные формы, причем вспомогательная метрика определяет положительно определенную квадратичную форму. Следовательно, существует базис $\{E_1', E_2', E_3'\}$, ортонормированный относительно $\langle,\rangle^*$, в котором матрица Грамма лоренцевой метрики является диагональной. Существует также базис $\{E_1, E_2, E_3\}$, ортонормированный относительно лоренцевой метрики и в котором матрица Грамма вспомогательной метрики имеет диагональный вид, а значит, операция скобки имеет вид (1).

Пусть в алгебре Ли $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$ задана лоренцева метрика. Тогда не обязательно существует ортонормированный базис, в котором операция скобки может быть приведена к диагональному виду. В связи с этим возникает задача: найти необходимые и достаточные условия на метрический тензор сигнатуры (+,+,–), при выполнении которых операция скобки может быть приведена к диагональному виду путем выбора ортонормированного базиса. Обозначим K_1 – конус изотропных векторов, K_2 – конус параболических векторов.

Теорема 1. *Пусть в алгебре Ли* $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$ *задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры* (+,+,–). *Операция скобки может быть приведена к диагональному виду путем выбора ортонормированного базиса тогда и только тогда, когда конусы* K_1 *и* K_2 *либо совпадают, либо пересекаются только в вершине, либо касаются друг друга по двум прямым, либо пересекаются по четырем прямым.*

Доказательство. Введем в алгебре Ли $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$ вспомогательную лоренцеву метрику $\langle,\rangle^*$, описанную выше. Основная и вспомогательная метрики определяют скалярные квадраты, которые представляют собой квадратичные формы одинаковой сигнатуры (+,+,–). Задача нахождения ортонормированного базиса, в котором операция скобки имеет диагональный вид, равносильна задаче одновременного приведения двух квадратичных форм сигнатуры (+,+,–) к диагональному виду, причем одной из них – к каноническому виду. К сожалению, ссылки на решение этой задачи авторам не известны. Также эта задача может быть сформулирована следующим образом. В трехмерном пространстве даны два конуса второго порядка. Требуется найти три направления, сопряженных друг другу одновременно относительно двух конусов.

Сопоставим каждому направлению в алгебре Ли точку на проективной плоскости. Тогда каждому из конусов K_1 и K_2 соответствует овальная кривая. Поэтому поставленная задача равносильна следующей задаче. На проективной плоскости даны две овальные кривые второго порядка. Требуется найти три точки, сопряженные друг другу относительно двух кривых одновременно.

Лемма 1. *Пусть на проективной плоскости даны две овальные кривые второго порядка* ω_1 *и* ω_2. *Тогда существует точка* M, *поляры которой* $p_1(M)$ *и* $p_2(M)$ *относительно первой и второй кривой совпадают, причем точка* M *не принадлежит своей поляре.*

Доказательство. Пусть на проективной плоскости задана проективная система координат. Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – матрицы, соответствующие кривым ω_1 и ω_1, $M(m_1 : m_2 : m_2)$ – произвольная точка, $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ – уравнение некоторой прямой, которое определяется с точностью до пропорциональности. Пусть $\mathbf{X}$ – столбец, составленный из координат точки M, $\mathbf{U}$ – столбец, составленный из коэффициентов уравнения прямой. Тот факт, что данная прямая является полярой для точки M относительно ω_1 и ω_2, означает в матричном виде, что

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{U},\ \mathbf{BX} = \mu\mathbf{U},\ \lambda^2 + \mu^2 \neq 0.$$

Отсюда $(\lambda\mathbf{A} - \mu\mathbf{B})\mathbf{X} = \mathbf{O}$. Разделим это уравнение на λ и обозначим $t = \lambda/\mu$. Получим

$$(\mathbf{A} - t\mathbf{B})\mathbf{X} = \mathbf{O}. \qquad (5)$$

Мы пришли к известному уравнению. С его помощью находятся векторы, составляющие базис, в котором две квадратичные формы одновременно имеют диагональный вид. Учитывая, что порядок матриц равен 3, делаем вывод, что данная система всегда имеет хотя бы одно решение. Оно задает координаты точки M, для которой $p_1(M) = p_2(M)$.

Может получиться, что $M \in p_1(M)$. Такая ситуация может возникнуть только тогда, когда обе кривые касаются в точке M и $p_1(M) = p_2(M)$ есть их общая касательная.

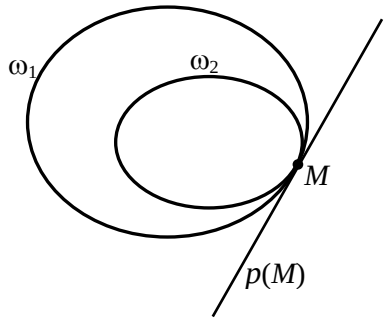

Рис. 1.

Выберем проективный репер на плоскости так, чтобы ω_2 имела уравнение

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0,$$

а общая точка касания $M(0{:}1{:}1)$. Тогда общая касательная к ω_1 и ω_2 имеет уравнение

$$x_2-x_3=0.$$

Для матрицы кривой ω_1 должно выполняться

$$\mathbf{AX}=\lambda\mathbf{U},\ \lambda\neq 0,$$

где $\mathbf{X}=(0,1,1)^T$, $\mathbf{U}=(0,1,-1)^T$. Матрицу $\mathbf{A}$ умножим на число $1/\lambda$, и она по-прежнему будет задавать ту же кривую. Тогда выполнено $\mathbf{AX}=\mathbf{U}$. Отсюда делаем вывод, что матрица $\mathbf{A}$ выглядит следующим образом:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\gamma & \alpha & -\alpha\\ \alpha & \beta+1 & -\beta\\ -\alpha & -\beta & \beta-1\end{pmatrix}.$$

Уравнение (5) выглядит так:

$$\begin{vmatrix}\gamma-t & \alpha & -\alpha\\ \alpha & \beta+1-t & -\beta\\ -\alpha & -\beta & \beta-1+t\end{vmatrix}=0.$$

После раскрытия определителя получаем уравнение

$$-(\gamma-t)(1-t)^2=0.$$

Корень $t=1$ соответствует точке $M(0{:}1{:}1)$ и только ей. Если $\gamma\neq 1$, то это уравнение имеет еще одно решение $t=\gamma$. Если $\gamma=1$, то $\det\mathbf{A}=1$, а для овальной кривой второго порядка должно быть $\det\mathbf{A}<0$. Следовательно, кроме точки M существует еще одна точка N, для которой $p_1(N)=p_2(N)$. Если $N\notin\omega_1$, то лемма доказана.

Пусть $N\in\omega_1$, и пусть $P=p_1(M)\bigcap p_1(N)$. По принципу взаимности поляр прямая MN является полярой для точки P, и точка P не принадлежит своей поляре. Она и будет искомой. Лемма доказана.

П р о д о л ж е н и е д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы. Пусть конусы расположены, как указано в условии теоремы. Из леммы следует, что в трехмерной алгебре Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ найдется вектор X, которому сопряжено одно и то же двумерное подпространство V^2 относительно конусов K_1 и K_2, и при этом $X\notin V^2$. Каждая из рассматриваемых метрик индуцирует на данном подпространстве метрику. Поскольку V^2 не является касательным к одному из конусов, то обе метрики на V^2 не вырождены. Если хотя бы одна из них является евклидовой, то в V^2 существует пара векторов, сопряженная друг другу относительно обоих конусов.

Предположим, что на V^2 индуцируются лоренцевы метрики. Выберем базис, ортонормированный относительно вспомогательного произведения $\langle,\rangle^*$, так, чтобы матрица Грамма имела вид

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Пусть при этом матрица для основного скалярного произведения имеет вид

$$\mathbf{\Gamma}=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix},$$

т.е. скалярный квадрат вектора $\vec{\mathbf{x}}(x_1,x_2)$ вычисляется по формуле

$$\vec{\mathbf{x}}^2=g_{11}x_1^2+2g_{12}x_1x_2+g_{22}x_2^2.$$

Решаем задачу одновременного приведения двух квадратичных форм к диагональному виду, и для этого составляем уравнение

$$\det(\mathbf{\Gamma}-\lambda\mathbf{G})=0 \ \Leftrightarrow\ \begin{vmatrix}g_{11}-\lambda & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}+\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$-\lambda^2(g_{11}-g_{22})\lambda+(g_{11}g_{22}-(g_{12})^2)=0. \qquad (6)$$

Дискриминант этого квадратного уравнения:

$$D=(g_{11}-g_{22})^2+4(g_{11}g_{22}-(g_{12})^2)=$$
$$=(g_{11}+g_{22}-2g_{12})(g_{11}+g_{22}+2g_{12}).$$

Векторы, задающие параболические направления в данном базисе, имеют координаты (1, 1) и (1,–1). Их скалярные квадраты равны соответственно

$$g_{11}+g_{22}-2g_{12} \ \text{ и } \ g_{11}+g_{22}+g_{12}.$$

Таким образом, условие $D>0$ равносильно тому, что параболические направления одновременно либо времениподобные, либо пространственноподобные. Случай, когда уравнение (6) имеет только одно решение, нас не устраивает. Такое может получиться только, когда $D=0$, т.е. хотя бы одно из параболических направлений изотропно. Посмотрим, что означает условие одновременной изотропности параболических направлений:

$$g_{11}+g_{22}-2g_{12}=g_{11}+g_{22}+2g_{12}=0 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ g_{12}=0 \ \text{ и } \ g_{11}=-g_{22}.$$

Это означает, что матрицы $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{G}$ пропорциональны, то есть $\mathbf{\Gamma}=\lambda G$, и решением системы уравнений $(\mathbf{\Gamma}-\lambda\mathbf{G})X=0$ является любой вектор.

Итак, мы установили, что векторы в подпространстве V^2, сопряженные друг другу относительно обоих конусов, существуют тогда и только тогда, когда параболические направления однотипны относительно метрики $\langle,\rangle$. В терминах проективной геометрии это означает следующее.

Лемма 2. *Пусть M – точка, существование которой утверждалось в лемме* 1, *и пусть общая поляра $p_1(M)=p_2(M)$ пересекает ω_1 в точках A, B и пересекает ω_2 в точках C, D. Тогда на прямой $p_1(M)=p_2(M)$ пара точек X, Y, сопряженных друг другу относительно ω_1 и ω_2 одновременно, существует тогда и только тогда, когда выполнено следующее отношение разделенности пар: $A, B \mathrel{\dot{-}\!\!\dot{-}} C, D$, либо когда эти пары совпадают.*

Последнее, очевидно, будет выполнено, если кривые ω_1 и ω_2, либо совпадают, либо не пересекаются, либо пересекаются в четырех точках, либо касаются друг друга в двух точках. На рис. 2–3 изображены два последних случая.

Обратно, пусть в ортонормированном базисе относительно лоренцевого скалярного произведения операция скобки приведена к диагональному виду. Тогда уравнения конусов K_1 и K_2 имеют в данном базисе соответственно вид

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0, \quad \pm\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{x_2^2}{b^2}\pm\frac{x_3^2}{c^2}=0.$$

Все координатные плоскости являются плоскостями симметрии, все координатные оси – осями симметрии, а на начало координат – центром симметрии. В пересечении с плоскостью $x_3=1$ мы получим либо окружность и эллипс, либо окружность и гиперболу, имеющие канонические уравнения. Очевидно, что число точек пересечения будет четно (например, из соображений симметрии), либо равно нулю, или еще возможен случай, когда обе фигуры совпадут. Соответственно конусы могут быть расположены только так, как указано в условии теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть на алгебре Ли $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры* (+,+,–), *при котором операция скобки может быть приведена к диагональному виду. Тогда данная метрика не допускает автоподобий, отличных от автоизометрий.*

Пусть $\{F_1, F_2, F_3\}$ – канонический ортогональный базис, $\Gamma=(g_{ij})$ – его матрица Грамма. Тогда $\mathcal{SL}(2,\boldsymbol{R})$ допускает автоизометрии, отличные от симметрий, тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1) $g_{11}=g_{22}$; 2) $g_{11}=-g_{33}$; 3) $g_{22}=-g_{33}$; 4) $g_{11}=g_{22}=-g_{33}$.

Если выполнены условия 1), 2) *или* 3), *то все автоподобия задаются соответственно матрицами*

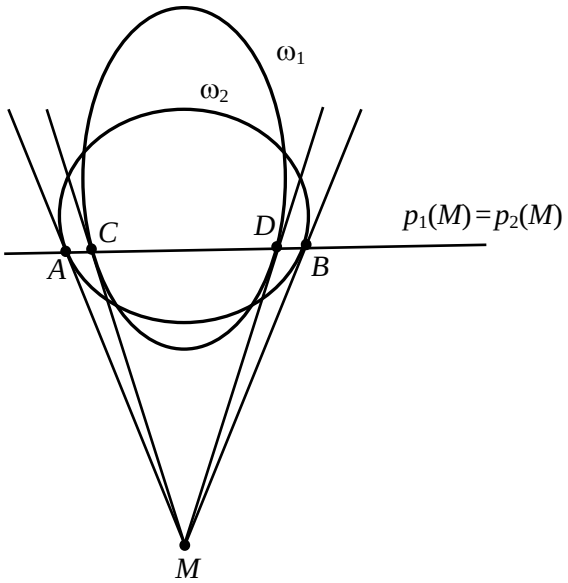

Рис. 2.

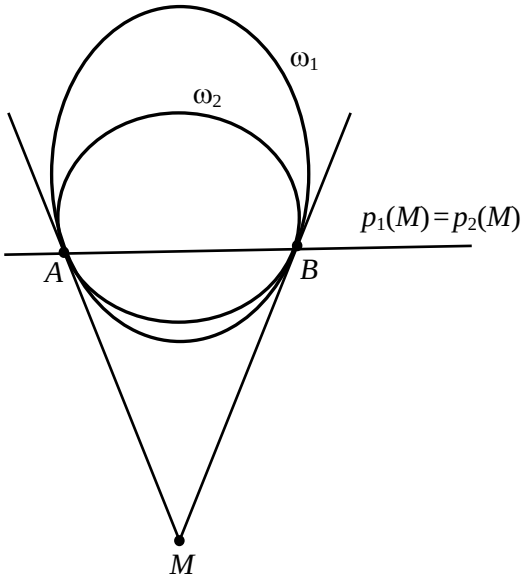

Рис. 3.

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7.1)$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \qquad (7.2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ 0 & \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \qquad (7.3)$$

либо являются композициями этих преобразований и симметрий (2). *Если выполнено условие* 4), *то любое движение является автоморфизмом алгебры Ли* $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$.

Доказательство. Все потенциальные автоизометрии или автоподобия разделим на три класса:

1) преобразования, сохраняющие направления базисных векторов;

2) преобразования, переставляющие направления базисных векторов;

3) преобразования, меняющие направление хотя бы одного из базисных векторов.

При этом направление мы понимаем в проективном смысле, т.е. вектор и ему противоположный вектор задают одно и то же направление.

Все потенциальные автоизометрии или автоподобия должны оставлять инвариантными оба конуса K_1 и K_2. Преобразования первого класса действуют в ортонормированном базисе по формулам:

$$E_1' = \alpha E_1, E_2' = \beta E_2, E_3' = \gamma E_3. \qquad (8)$$

Конус K_1 будет оставаться инвариантным, только если $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$. Проверим, могут ли преобразования (8) являться автоморфизмами алгебры Ли.

$$[E_1', E_2'] = [\alpha E_1, \beta E_2] = \alpha\beta[E_1, E_2] =$$
$$= \alpha\beta\lambda_3 E_3 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}\lambda_3 E_3'.$$

Таким образом, необходимо выполнение условия $\frac{\alpha\beta}{\gamma} = 1$. В итоге должно выполняться, что два из трех чисел должны быть равны – 1, а одно равно 1. Это преобразования, действующие по формулам (2).

Преобразования из второго класса могут переставлять направления только тех векторов, которые одновременно пространственноподобные и одновременно лежат вне конуса параболических векторов. Мы для определенности считаем, что $E_1^2 = E_2^2 = -E_3^2 = 1$. Тогда подобные преобразования должны действовать по формулам

$$E_1' = \alpha E_2,\ E_2' = \beta E_1,\ E_3' = \gamma E_3,\quad |\alpha| = |\beta| = |\gamma|. \qquad (9)$$

Проверим, могут ли преобразования (8) являться автоморфизмами алгебры Ли.

$$[E_1', E_2'] = [\alpha E_2, \beta E_1] = -\alpha\beta[E_1, E_2] = -\alpha\beta\lambda_3 E_3 =$$
$$= -\frac{\alpha\beta}{\gamma}\lambda_3 E_3'.$$

Таким образом, необходимым условием является следующее: $\frac{\alpha\beta}{\gamma} = -1$. Проверяем остальные скобки:

$$[E_3', E_1'] = [\gamma E_3, \alpha E_2] = -\alpha\gamma\lambda_1 E_1 = -\frac{\alpha\gamma}{\beta}\lambda_1 E_2'.$$

Преобразование будет автоморфизмом, если $\frac{\alpha\gamma}{\beta}\lambda_1 = -\lambda_2$. Аналогично получаем еще одно условие: $\frac{\beta\gamma}{\alpha}\lambda_2 = -\lambda_1$. Отсюда

$$-\frac{\alpha\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\alpha}\lambda_2 = -\lambda_2 \Rightarrow \gamma^2 = 1,$$

А из этого условия дальше получаем $\alpha^2 = \beta^2 = 1$, причем нечетное количество чисел из α, β, γ равны –1; и, кроме этого, $\lambda_1 = \lambda_2$. Итак, изоморфизмами являются преобразования вида

$$E_1' = -E_2,\ E_2' = -E_1,\ E_3' = -E_3, \qquad (10)$$

и только в случае $\lambda_1 = \lambda_2$. Если перейти к каноническому базису, то это означает $g_{11} = g_{22}$. Однако заметим, что данное преобразование можно получить как композицию двух преобразований: вида (7) (при $t = \pi/2$) и (2) (при $k = 1$).

Пусть $\{F_1, F_2, F_3\}$ – канонический ортогональный базис, $\Gamma = (g_{ij})$ – его матрица Грамма. Пусть преобразование алгебры Ли переводит один из базисных векторов в вектор X. Если оно является автоподобием, то этот вектор, наряду с базисными векторами, является решением системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} g_{11} - \mu & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} - \mu & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

при некотором μ. Это означает, что при некотором значении μ эта система имеет более одного (с точностью до пропорциональности) решения.

Это равносильно тому, что при некотором значении μ ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} g_{11}-\mu & 0 & 0 \\ 0 & g_{22}-\mu & 0 \\ 0 & 0 & g_{33}+\mu \end{pmatrix}$$

меньше двух. Это возможно только в случаях, перечисленных в условии теоремы.

Пусть $g_{11}=g_{22}$. Тогда при $\mu=g_{11}=g_{22}$ система имеет решение $X(x_1, x_2, 0)$, $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$.

Преобразование должно оставлять инвариантными направление вектора F_3 и подпространство, ему ортогональное, т.е. линейную оболочку векторов F_1, F_2. Также оно должно переводить конус параболических векторов в себя. Такое преобразование представляет собой вращение вокруг вектора F_3, либо композицию гомотетии и вращения, либо композицию перечисленных преобразований и симметрий (2). Это значит, если отбросить симметрии, потенциальное автоподобие должно задаваться в каноническом базисе матрицей

$$e^{\nu}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, может ли оно являться автоморфизмом.

$$[F_1', F_2']=[e^{\nu}(F_1\cos t-F_2\sin t),\ e^{\nu}(F_1\sin t+F_2\cos t)]=$$

$$=e^{2\nu}([F_1, F_2]\cos^2 t-[F_2, F_1]\sin^2 t)=$$

$$=e^{2\nu}[F_1, F_2](\cos^2 t+\sin^2 t)=e^{2\nu}F_3=e^{\nu}F_3'.$$

Отсюда следует, что наше преобразование будет автоморфизмом только при $e^{\nu}=1$. Это значит, что наше преобразование является автоизометрией, но не является автоподобием.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть на алгебре Ли* $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$ *задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры* $(+,+,-)$, *при котором операция скобки не может быть приведена к диагональному виду. Тогда данная метрика не допускает автоподобий и автоизометрий, отличных от тождественного преобразования или евклидова вращения на угол, равный 180° вокруг одного из направлений.*

Доказательство. Для лоренцевой метрики, удовлетворяющей условиям теоремы, должны выполняться следующие условия: конусы K_1 и K_2 касаются друг друга по одному направлению и могут еще пересекаться по двум другим направлениям. Тогда кривые ω_1 и ω_2 на проективной плоскости, соответствующие этим конусам, касаются в одной точке либо могут еще пересекаться в двух точках. Пусть M – точка касания (рис. 4). Тогда эта точка имеет общую поляру $p(M)$ относительно данных кривых и эта поляра является их общей касательной. Согласно лемме 1 существует еще одна точка N, которая имеет общую поляру $p(N)$ относительно и ω_1 и ω_2 и $N \notin p(N)$. Тогда по принципу взаимности поляр $N \in p(M)$ и $M \in p(N)$. Прямая $p(N)$ пересекает ω_1 и ω_2 в различных точках Q и S, при этом прямые NQ и NS являются касательными к соответствующим кривым.

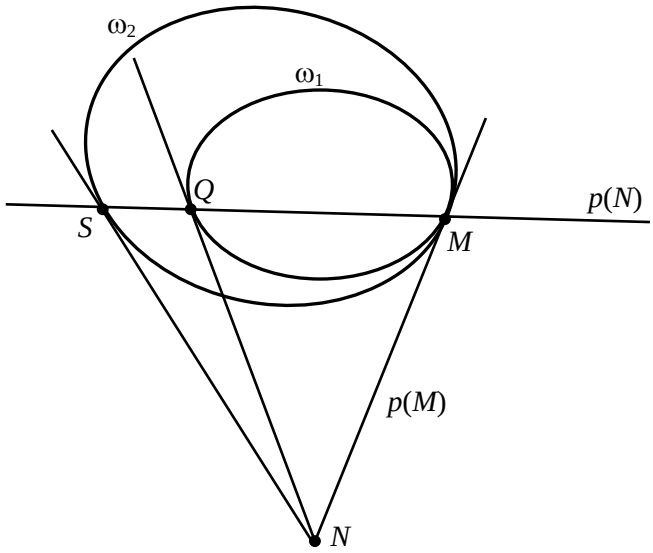

Рис. 4.

Пусть f – автоподобие или автоизометрия алгебры Ли $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$. Тогда f переводит конусы K_1 и K_2 в себя, при этом направления, сопряженные относительно K_1, переходят в направления, сопряженные относительно K_1, и это же верно для направлений, сопряженных относительно K_2. Поэтому направления, соответствующие точкам M и N, переходят в себя и плоскости π_1 и π_2, соответствующие прямым $p(M)$ и $p(N)$, переходят в себя. Направления, соответствующие точкам Q и S, неизбежно тоже переходят в себя. Следовательно, ограничение преобразования f на плоскость π_2 имеет три неколлинеарных собственных вектора, и поэтому оно является либо гомотетией в евклидовом смысле, либо центральной симметрией, либо композицией перечисленных преобразований. Только центральная симметрия может соответствовать автоморфизму алгебры Ли $\mathcal{SL}(2, \boldsymbol{R})$. В целом, преобразование f тогда представляет собой евклидово вращение на угол, равный 180° вокруг направления, соответствующего точке N.

Теорема доказана.

Заключение. В данной работе доказано, что простая и полупростая трехмерные алгебры Ли, снабженные евклидовым или лоренцевым скалярным произведением, не допускают гомотетических преобразований, которые являются изоморфизмами алгебр Ли. Это означает, что соответствующие им однородные пространства трехмерных групп Ли, снабженных левоинвариантными метриками, не допускают гомотетических преобразований. При этом выписаны в явном виде изометрические автоморфизмы рассматриваемых алгебр Ли и попутно найдены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы операция скобки в полупростой трехмерной лоренцевой алгебре Ли могла быть приведена к каноническому виду в ортонормированном базисе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подоксенов, М.Н. Гомотетические автоморфизмы трехмерных алгебр Ли / М.Н. Подоксенов // Ученые записки УО «ВГУ им. П.М. Машерова». – 2009. – Т. 8. – С. 203–211.
2. Кочергина, О.Ю. Гомотетические автоморфизмы алгебр Ли $SL(2,R)$ / О.Ю. Кочергина, М.Н. Подоксенов // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам: материалы междунар. науч.-практ. Интернет-конференции, посвященной 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Н.Т. Воробьева, Витебск, 21–22 июня 2011 г. / Вит. гос. ун-т; ред-кол.: Л.А. Шеметков, В.Г. Сафонов, А.Л. Гладков [и др.] – Витебск, 2011. – С. 48–50.
3. Петров, А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров. – М.: Наука, 1966.
4. Milnor, J. Curvaturies of left-invariant metrics on Lie groups / J. Milnor // Adv. Math. – 1976. – Vol. 21. – P. 293–329.

Поступила в редакцию 24.10.2013. Принята в печать 19.11.2013
***Адрес для корреспонденции*:** e-mail: P._Michael@mail.ru – Подоксенов М.Н.