ПОСТРОЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ПОЛИНОМА ДЛЯ СУММЫ ФУНКЦИЙ НЕЗАВИСИМЫХ АРГУМЕНТОВ

Ю.В. Трубников, А.М. Воронов

Для доказательства теоремы 4 об экстремальности суммы полиномов применим следующий критерий элемента наилучшего приближения (экстремального полинома). Пусть G – подпространство существования экстремального полинома банахова пространства E. Задачу нахождения множества элементов наилучшего приближения $P\left(f\right)$ можно отнести к выпуклой задаче с ограничениями типа равенств ([1], с. 89), т. е.

$$\left\| f-h \right\| \to \inf\left(h \in G\right). \tag{1}$$

Известно, что для того, чтобы точка $h_* \in G$ была решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\partial \left\| f-h_* \right\| \cap G^{\perp} \neq \varnothing,$$

где $G^{\perp}$ – аннулятор подпространства G, т.е.

$$G^{\perp} = \left\{ g^* \in E^* : < g^*, h >= 0,\ h \in G \right\},$$

$\partial \left\| g \right\|$ – субдифференциал нормы в точке g.

Таким образом, если нам известна пара $\mu, h_*,$, в которой

$$\mu \in \partial \left\| f-h_* \right\| \cap G^{\perp}, \quad h_* \in G,$$

то мы можем установить экстремальность точки h_*.

Сформулируем предложение 2 из ([1], с. 89), но в удобной для доказательства теоремы 4 форме.

Теорема 1. Элемент $h_* \in P\left(f\right)$ тогда и только тогда, когда

$$\exists \mu\left(\in \partial \left\| f-h_* \right\| \vee \partial \left\| h_* - f \right\|\right) \forall h\left(\in G^{\perp}\right) < \mu, h >= 0. \tag{2}$$

Пусть $u_0, u_1, \ldots, u_n$. – непрерывные действительные функции, определенные на отрезке $[a,b]$. Эти функции называются системой Чебышева на $[a,b]$ или T – системой, если определители $\left(n+1\right)-$ го порядка

$$\begin{vmatrix} u_0\left(t_0\right) & u_0\left(t_1\right) & \ldots & u_0\left(t_n\right) \\ u_1\left(t_0\right) & u_1\left(t_1\right) & \ldots & u_1\left(t_n\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n\left(t_0\right) & u_n\left(t_1\right) & \ldots & u_n\left(t_n\right) \end{vmatrix} \tag{4}$$

строго положительны всякий раз, когда

$$a \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n \le b.$$

Лемма 2. Функционал $\mu \in C^*[a,b],$ действующий следующим образом

$$< \mu, \varphi >= \sum_{j=1}^{n+2} \mu_j \left[\operatorname{sgn} g\left(t_j\right) \right] \cdot \varphi\left(t_j\right),$$

где $0 < \mu_j \left(1 \le j \le n + 2\right)$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n+2} = 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{n+2} \mu_j \left[\operatorname{sgn} g\left(t_j\right)\right] u_\sigma \left(t_j\right) = 0 \quad \left(\sigma = 0,1,\ldots,n\right), \end{cases}$$

а $t_j \left(1 \le j \le n + 2\right)$ являются точками альтернанса, удовлетворяет условию (2).

Лемма 3. Пусть каждая из базисных T – систем функций содержит единичную функцию. Тогда сумма полиномов $P_n^*\left(t\right) + P_m^*\left(s\right)$ является экстремальным полиномом для суммы функций $f_1\left(t\right) + f_2\left(s\right)$ на подпространстве G.

В пространстве непрерывных функций q переменных, определенных на

$$\left[a_1, b_1\right] \times \left[a_2, b_2\right] \times \cdots \times \left[a_q, b_q\right],$$

образуем подпространство G, порождаемое всевозможными произведениями базисных функций подпространств $G_j \quad \left(j = 1, 2, \cdots, q\right)$.

Теорема 4. Сумма полиномов

$$\sum_{j=1}^{q} P_{n(j)j}^*\left(t_j\right)$$

является экстремальным полиномом для суммы функций

$$\sum_{j=1}^{q} f_j\left(t_j\right)$$

на подпространстве G.

Доказательство. Проведем шаг индукции. Предположим, что для суммы

$$\sum_{j=1}^{q-1} \left[f_j\left(t_j\right) - P_{n(j)j}^*\left(t_j\right)\right] \tag{3}$$

требуемый функционал построен. Это означает, что сформировано множество U^+ точек из $\prod\limits_{j=1}^{q-1} \left[a_j, b_j\right]$ абсолютных максимумов суммы (3) и множество U^- точек абсолютных минимумов суммы (3), а также элементы функционала, обеспечивающего экстремальность суммы

$$\sum_{j=1}^{q-1} P_{n(j)j}^*\left(t_j\right) \tag{4}$$

полиномов.

Для разности

$$f_q\left(t_q\right) - P_{n(q)q}^*\left(t_q\right)$$

также существуют точки альтернанса

$$t_{q,1}, t_{q,2}, \cdots, t_{q,n(q)+2},$$

формирующие множества U_q^+ и U_q^- и соответствующие элементы $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{q,n(q)+2}$.

Обозначив $t = \left(t_1, t_2, \cdots, t_{q-1}\right)$, построим функционал $\mu\lambda$ следующим образом:

$$\left\langle \mu\lambda, \varphi \right\rangle = \sum_{(t,t_q)\in U^+ \times U_q^+} \mu(t)\lambda(t_q)\varphi(t;t_q) - \sum_{(t,t_q)\in U^- \times U_q^-} \mu(t)\lambda(t_q)\varphi(t;t_q),$$

где первая сумма берется по всем точкам множества $U^+ \times U_q^+$, а вторая сумма по всем точкам множества $U^- \times U_q^-$.

Далее, взяв для определенности произведение

$$u_0(t) = u_0(t_1)u_0(t_2)\cdot\ldots\cdot u_0(t_{q-1}),$$

получаем

$$\left\langle \mu\lambda, u_0(t) \right\rangle = \sum_{(t,t_q)\in U^+ \times U_q^+} \mu(t)\lambda(t_q)u_0(t)u_0(t_q) - \sum_{(t,t_q)\in U^- \times U_q^-} \mu(t)\lambda(t_q)u_0(t)u_0(t_q) =$$

$$= \sum_{t\in U^+} \sum_{t_q\in U_q^+} \mu(t)\lambda(t_q)u_0(t)u_0(t_q) - \sum_{t\in U^-} \sum_{t_q\in U_q^-} \mu(t)\lambda(t_q)u_0(t)u_0(t_q) =$$

$$= \left[\sum_{t\in U^+} \mu(t)u_0(t)\right]\cdot\left[\sum_{t_q\in U_q^+} \lambda(t_q)u_0(t_q)\right] - \left[\sum_{t\in U^-} \mu(t)u_0(t)\right]\cdot\left[\sum_{t_q\in U_q^+} \lambda(t_q)u_0(t_q)\right] =$$

$$= \left[\sum_{t_q\in U_q^+} \lambda(t_q)u_0(t_q)\right]\left[\sum_{t\in U^+} \mu(t)u_0(t) - \sum_{t\in U^-} \mu(t)u_0(t)\right] = 0$$

в силу свойств функционала μ, обеспечивающего экстремальность суммы полиномов (4).

Свойство $\mu \in \partial\left\| f - h_* \right\| \vee \partial\left\| h_* - f \right\|$ проверяется аналогично.

Литература

1. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М. Наука 1974 г. 480с.

МОДИФИЦИРОВАНИЕ СМАЗОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ УГЛЕРОДНЫМИ НАНОЧАСТИЦАМИ

Ю.А. Шиенок

Одним из современных приоритетных направлений фундаментальных научных исследований Республики Беларусь является исследование физико-технических и физико-химических основ процессов получения и использования наноструктурных материалов.

Актуальность данной проблемы обусловлена в научном отношении необходимостью получения новых знаний о наноматериалах и нанотехнологиях, в частности о процессах формирования и свойствах нанодисперсий, и в практическом отношении – необходимостью обеспечения разработки и производства перспективных смазочных материалов на основе масел, модифицированных наночастицами, обладающих повышенными триботехническими характеристиками, использование которых позволит повысить надежность и долговечность работы машин и механизмов.

К числу перспективных смазочных материалов относятся масла, модифицированные наночастицами, которые представляют собой наносуспензии, обладающие повышенными триботехническими характеристиками, что объясняется упорядочением молекулярной структуры масел под влиянием наночастиц [1]. Однако закономерности получения и свойства таких материалов изучены недостаточно. В частности, практически не исследованы особенности получения и свойств смазочных масел, модифицированных углеродными наночастицами. В связи с тем, что данная проблема является новой для Республики Беларусь, производства нанодисперсных материалов в стране не существовало, возникает большое количество научных и технических проблем при обосновании технологических схем производства наномодифицированных смазочных масел.

В качестве исходных исследуемых смазочных материалов были выбраны смазочные масла, произведенные в Республике Беларусь на ОАО Нафтан: масло моторное М8В (ГОСТ 10541-78)