СВЯЗЬ КОНГРУЭНЦИЙ НА ПОЛУГРУППЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ С КОНГРУЭНЦИЯМИ ЕЕ ПОДПОЛУГРУППЫ ВСЕХ ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

М.И. Наумик

Автор продолжает изучение конгруэнций на полугруппе линейных отношений. В данной работе устанавливается связь между конгруэнциями на полугруппе линейных отношений и на ее подполугруппе всех взаимно однозначных линейных отношений. Все обозначения смотри в [1, 2] и работе [3].

Пусть V – любое векторное пространство над произвольным телом F, $LR(V)$ – полугруппа линейных отношений. Всюду в этой работе δ – произвольная конгруэнция на полугруппе всех взаимно однозначных линейных отношений $LR(V)$; δ' – наименьшая конгруэнция на $LR(V)$, содержащая δ:

$$\delta'_S = \delta' \cap (LS(V) \times LS(V)), \quad \delta'_{\bar{S}} = \delta' \cap (LS^{-1}(V) \times LS^{-1}(V)),$$

где $LS(V)$ – полугруппа всех полных линейных преобразований пространства V, $LS^{-1}(V) = \{a : a^{-1} \in LS^{-1}(V)\}$.

В данной работе доказывается следующая теорема

Теорема. *Если δ – конгруэнция на полугруппе $LV(V)$, δ' – наименьшая конгруэнция на $LR(V)$, содержащая δ, то $\delta' \cap (LV(V) \times LV(V)) = \delta$.*

Для доказательства данной теоремы приведем некоторые определения и без доказательства леммы, которые легко проверяются непосредственно.

Лемма 1. *Идеалы полугруппы $LV(V)$ исчерпываются множествами* $LV_\nu(V) = \{a : \operatorname{rank} a < \nu, a \in LV(V)\}$.

Лемма 2. *Множество $\{a : a \equiv \bar{\omega}_{[0]}(\delta)\}$ образует идеал $LV_\nu(V)$ полугруппы $LV(V)$.*

Определение 1. *Назовем ν индексом конгруэнции δ и будем его обозначать $\eta(\delta)$.*

Лемма 3. *Если $a \equiv b(\delta)$ и $\eta(\delta)$ конечно, то из* $\operatorname{rank} a \geq \eta(\delta)$ *вытекает $pr_i a = pr_i b$ ($i = 1, 2$), т.е. $a H b$.*

Лемма 4. *Если δ – конгруэнция по полугруппе $LV(V)$ бесконечного индекса и $a \equiv b(\delta)$, то из* $\operatorname{rank} a = \eta(\delta)$ *вытекает*

$$\dim (pr_i a / (pr_i a \cap pr_i b)) < \eta(\delta), \dim (pr_i b / (pr_i a \cap pr_i b)) < \eta(\delta) \quad (i = 1, 2).$$

Следствие. *Пусть δ – конгруэнция на полугруппе $LV(V)$ бесконечного индекса. Если* $a \equiv b(\delta)$, $\operatorname{rank} a \geq \eta(\delta)$, *то* $\operatorname{rank} a = \operatorname{rank} b$.

Лемма 5. *Индекс конгруэнции δ совпадает с индексом конгруэнции δ'_S.*

Лемма 6. *Пусть δ – конгруэнция конечного индекса на полугруппе $LV(V)$, $a \in LV(V)$, $a \equiv b(\delta')$ и $\operatorname{rank} a \geq \eta(\delta)$. Тогда $a \equiv b(\delta)$.*

Лемма 7. *Если $a \equiv b(\delta)$,* $\operatorname{rank} a = \eta(\delta)$ *конечен, то $a, b \in cNd$ при некоторых $c, d \in D_{\eta(\delta)} \cap LV(V)$.*

Пусть $a \equiv b(\delta)$, $\aleph_0 \leq \eta(\delta) \leq \dim V$, $\operatorname{rank} a = \mu \geq \eta(\delta)$. Так как $\delta \subset \delta'$, $\eta(\delta) = \eta(\delta'_S)$, то в силу теоремы 4.3.23 имеем $b'_{pr_1 a \cap pr_1 b} = = \alpha a'_{pr_1 a \cap pr_1 b} + f$, $b''_{pr_2 a \cap pr_2 b} = \alpha^{-1} a''_{pr_2 a \cap pr_2 b} \dot{+} f'$ при некоторых $\alpha \in Q_\mu$, $f, f' \in LR_{\nu_i}(V)$, $pr_1 f = pr_1 a \cap pr_1 b$, $pr_2 f' = pr_2 a \cap pr_2 b$ и $\dim(pr_1 a / (pr_1 a \cap pr_1 b)) < \nu_i$, $\dim(pr_1 b / (pr_1 a \cap pr_1 b)) < \nu_i$, $\dim(pr_2 a / (pr_2 a \cap pr_2 b)) < \nu_i$, $\dim(pr_2 b / (pr_2 a \cap pr_2 b)) < \nu_i$.

Определение. *Число $\alpha = k(a, b)$ назовем коэффициентом сравнения линейных отношений $a, b \in LV(V)$, а* $\max \{\dim(pr_1 a / (pr_1 a \cap \cap pr_1 b)), \dim(pr_1 b / (pr_1 a \cap pr_1 b)), \dim(pr_2 a / (pr_2 a \cap pr_2 b)), \dim(pr_2 b / (pr_2 a \cap pr_2 b)), \operatorname{rank} f, \operatorname{rank} f'\} = r(a, b)$ *– числом различия.*

Лемма 8. *Пусть $a \in D_\mu \cap LV(V)$. Тогда множество $Q = \{\alpha : a \equiv \alpha a(\delta)\}$ является подгруппой Q_μ и для любых $c \in D_\mu \cap LV(V)$, $\alpha \in Q$ имеем $c \equiv \alpha c(\delta)$.*

Обозначим через $e \in LV(V)$ линейное отношение, тождественное на пространстве V.

Лемма 9. *Пусть δ – конгруэнция бесконечного индекса,* $e_A \equiv e_B(\delta)$, $\operatorname{rank} e_A = \mu$ ($\mu \geq \eta(\delta)$), $B \subseteq A$ *и* $\dim A/B = \nu$, $\nu \geq 1$. *Тогда $e_C \equiv e_D(\delta)$ при любых подпространствах $D, C \subseteq V$, удовлетворяющих условиям $D \subseteq C$;* $\dim C = \nu$, $\dim C/D \leq \nu$ *или* $\dim C/D < \aleph_0$ *в случае, когда ν конечно.*

Пусть δ – конгруэнция бесконечного индекса, $\operatorname{rank} a = \mu$, $\aleph_0 \leq \eta(\delta) \leq \mu$, $a \equiv b(\delta)$. Отметим, что $k(a, b) \in Q$.

Лемма 10. *Пусть* $a \equiv b(\delta)$, $a \in D_{\mu} \cap LV(V)$, *причем* $\max\{\dim(pr_1 a / (pr_1 a \cap pr_1 b)), \dim(pr_1 b / (pr_1 a \cap pr_1 b))\} = \xi$.

Тогда любые $c, d \in D_{\mu} \cap LV(V)$, *для некоторых число различия не превышает* ξ *или меньше* $\aleph_0$ *(в случае, когда* ξ *конечно и больше 0) и* $k(c, d) \in Q$, *будут конгруэнтны, т.е.* $c \equiv d(\delta)$.

Следствие. *Если* $a \equiv b(\delta)$ *и* $\max\{\dim(pr_2 a / (pr_2 a \cap pr_2 b)), \dim(pr_2 b / (pr_2 a \cap pr_2 b))\} = \xi$, *то любые* $c, d \in D_{\mu} \cap LV(V)$, *для которых число различия* $r(c, d)$ *не превышает* ξ *или меньше* $\aleph_0$ *(в случае, когда* ξ *конечно и больше 0) и* $k(c, d) \in Q$ *будут конгруэнтны, т.е.* $c \equiv d(\delta)$.

Лемма 11. *Если* $a \equiv b(\delta)$ *и* $r(a, b) = \mathrm{rank}\, f = \xi$, *то любые* $c, d \in D_{\mu} \cap LV(V)$ *такие, что* $k(c, d) \in Q$ *и* $\mathrm{rank}(c, d) \le \xi$ *или* $r(c, d) < \aleph_0$ *(в случае конечного* $\xi \ne 0$*) будут конгруэнтны, т.е.* $c \equiv d(\delta)$.

Лемма 12. *Пусть* δ *– конгруэнция бесконечного индекса (*$\eta(\delta) \le \dim V$*). Тогда ограничение конгруэнции* δ' *на полугруппе* $LV(V)$ *совпадает с* δ: $\delta = \delta' \cap (LV(V) \times LV(V))$.

Приведем доказательство теоремы, сформулированной выше.

Пусть δ – конгруэнция бесконечного индекса. В силу леммы 12 имеем $\delta = \delta' \cap (LV(V) \times \times LV(V))$..

Пусть теперь δ – конгруэнция конечного индекса, $(a, b) \in \delta'$ и $a, b \in LV(V)$. Из леммы 5 имеем $\eta(\delta) = \eta(\delta'_S)$. Если $\mathrm{rank}\, a < \eta(\delta'_S)$, то в силу леммы 5 $(a, b) \in \delta$. Если $\mathrm{rank}\, a \ge \eta(\delta'_S)$, то из леммы 6 вытекает $(a, b) \in \delta$. Кроме того, в силу выбора δ' выполняется $\delta \subset \delta'$. Значит $\delta' \cap (LV(V) \times LV(V)) = \delta$. Теорема доказана.

Литература

1. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – М., 1972. – Т. 1. – 286 с.
2. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – М., 1972. – Т. 2. – 422 с.
3. Наумик, М.И. Полугруппа линейных отношений / М.И. Наумик // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 3. – С. 34–37.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАРШРУТИЗАЦИИ IP-ТРАФИКА В КУРСЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ

В.В. Новый

Одной из важнейших составных частей курса компьютерных сетей является изучение принципов работы протоколов сетевого уровня стека TCP/IP. Ключевым вопросом этой темы является маршрутизация IP-пакетов.

Изучение этой темы традиционно является достаточно тяжелым, так как большая часть материала обладает низкой наглядностью при изучении, тесными связями с другими разделами курса, такими как топология сети, параметры каналов связи и др. Практическое закрепление изученного материала также затруднено в виду необходимости использования дорогостоящего оборудования.

Естественным решением представляется использования для этих целей программных моделей. Существующие CAD/CAE системы являются дорогостоящими коммерческими продуктами перегруженными возможностями необходимыми для профессиональной разработки сетевой инфраструктуры и сложными в освоении для начинающих. Функционал свободных решении же недостаточен для использования в указанных выше целях и обычно сводится только к построению схемы компьютерной сети без возможности моделирования маршрутизации трафика.

Таким образом, для решения этой проблемы требовалась разработка программной системы позволяющей не только создавать схему компьютерной сети, но и учитывать возможности моделирования маршрутизации IP-трафика в этой сети на основе набора настраиваемых параметров.

В качестве подобных параметров были выбраны:

- топология компьютерной сети;
- параметры каналов связи;
- модель обработки информации о маршрутах.

Полученный программный продукт, благодаря возможностям визуализации трафика, может быть использован как наглядное пособие при изучении принципов маршрутизации в компьютерных сетях. Возможность создавать тестовые задания в среде позволяет использовать ее в качестве средства контроля усвоения знании по соответствующим темам: