

Уравнения (2) отличаются от уравнений, используемых в работе [3], учетом поперечных сдвигов в нулевом приближении.

Считаем, что вследствие переменности геометрических параметров, оболочка теряет устойчивость локально, в окрестности некоторой «наиболее слабой» образующей $\varphi = \varphi_0$.

Согласно методу, предложенному в [2], выполним растяжение масштаба в окрестности линии $\varphi = \varphi_0$:

$$\varphi = \varphi_0 + \mu^{1/2} \xi. \quad (6)$$

Решение задачи (2), (5) будем искать в виде [2]:

$$\begin{aligned} \chi(s, \varphi, \mu) &= \chi^{**} \exp \left\{ i \left(\mu^{-1/2} q \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\}, \\ F(s, \varphi, \mu) &= F^{**} \exp \left\{ i \left(\mu^{-1/2} q \xi + \frac{1}{2} a \xi^2 \right) \right\}, \\ \chi^{**} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} \chi_j(\xi, s), \quad F^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} f_j(\xi, s), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu \lambda_1 + \mu^2 \lambda_2 + \dots, \quad (8)$$

где $\chi_j(\xi, s)$, $f_j(\xi, s)$ – полиномы по ξ , имеющие достаточное число раз дифференцируемые по s коэффициенты. Исходя из требования убывания решения (7) вдали от образующей $\xi = 0$, принимаем: $q > 0$, $\text{Im } a > 0$.

Функция $k(\varphi)$ раскладывается в ряды по степеням $\mu^{1/2} \xi$ в окрестности образующей $\varphi = \varphi_0$.

После подстановки (6) – (8) в (2) – (5) получим рекуррентную последовательность дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=0}^j H_k \chi_{j-k} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

и последовательность соответствующих граничных условий:

$$\sum_{k=0}^j \Gamma_k^i \chi_{j-k} = 0, \quad i = 0, 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad \text{при } s = 0, l(\varphi). \quad (10)$$

Решая последовательность краевых задач (9) – (10), получим параметр критической нагрузки, который учитывает как эксцентриситет поперечного сечения, так и наличие поперечных сдвигов (зависимость от параметров τ и κ), и обобщает аналогичную формулу, полученную в [3]. При $\tau = \kappa = 0$ получаем известные формулы для изотропных оболочек [2].

Литература

1. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
2. Товстик, П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.
3. Корчевская, Е.А. Потеря устойчивости некруговой слоистой цилиндрической оболочки при кручении / Е. А. Корчевская // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2004. – № 4. – С. 102–106.

ОСОБЕННОСТИ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ ПРИ БИФУРКАЦИИ ТОНКОЙ ГОФРИРОВАННОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

С.П. Кунцевич

Тонкостенные цилиндрические и гофрированные оболочки используются в разнообразных инженерно-технических конструкциях в качестве составных или несущих элементов. К настоящему времени достаточно хорошо изучена устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек под действием различных видов статических нагрузок (см., например, библиографию в [1]). В работах [2, 3] опубликованы результаты по исследованию устойчивости тонкостенной гофрированной оболочки с упругим наполнителем под действием неоднородного гидростатического давления. В этом случае потеря устойчивости оболочки происходит с образованием вмятин, локализованных вблизи некоторой линии на ее поверхности.

В статье [3] была найдена комбинация физических и геометрических параметров оболочки, при которых критическая нагрузка является асимптотически двукратной. В данной работе проводится численное исследование волнообразования в окрестности данных параметров.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкостенную гофрированную оболочку средней длины L , лежащую на упругом основании. Смоделируем гофрированную оболочку тонкой оболочкой вращения толщиной h (см. рисунок 1). На поверхности опорного цилиндра введем безразмерную ортогональную систему криволинейных координат (s, φ) . Расстояние от оси вращения до срединной поверхности оболочки зададим функцией

$$B(s) = R \cdot [1 + \mu F(s)], \quad F(s) = \sin(2\pi s / \lambda), \quad \mu = \delta / R, \quad (1)$$

где μ – малый параметр, δ – высота волны гофра, λ – длина волны гофра, отнесенная к радиусу основания опорного цилиндра R . Функция $F(s)$, описывающая форму начальных отклонений от цилиндрической поверхности, имеет порядок единицы и существенно не возрастает при дифференцировании.

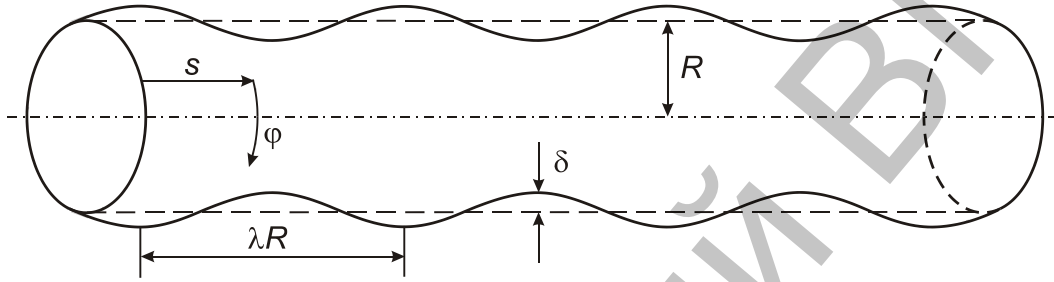


Рисунок 1 – Оболочка вращения.

Исходные уравнения. Пусть на оболочку действует внешнее неоднородное гидростатическое давление $Q_n^*(\varphi)$. Для описания локальной бифуркации безмоментного напряженного состояния используем систему полубезмоментных уравнений тонких оболочек [1], записанную в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \Delta^2 w + \varepsilon^2 \Lambda \Delta_t w - \Delta_k \Phi + e w &= 0, \\ \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi + \Delta_k w &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь w – нормальное перемещение точек срединной поверхности оболочки, $\varepsilon^8 = h^2 / [12(1 - \nu^2)R^2]$ – малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, Λ – искомый параметр нагружения, $e = \alpha R^3 [12(1 - \nu^2)]^{1/2} / (Eh^2)$, α – коэффициент постели упругого основания. Операторы Δ , Δ_t , Δ_k из-за громоздкости не приводятся. На краях оболочки рассмотрим условия жесткого защемления.

Применяя описанную в [2] асимптотическую процедуру, приходим к краевой задаче для определения значения критической нагрузки

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^4} \frac{\partial^4 w_0}{\partial s^4} + \frac{2\kappa}{p^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(F_{ss}'' \frac{\partial w_0}{\partial s} \right) + \left[p^4 + \frac{\kappa}{p^2} F_{ssss}^{iv} + \kappa^2 (F_{ss}'')^2 + e \right] w_0 - \\ - \Lambda_0 p^2 t_2(\varphi_0) w_0 = 0, \quad w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial s} = 0 \text{ при } s = 0, l. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь φ_0 – образующая, в окрестности которой локализованы формы потери устойчивости, p – вещественное число, характеризующее изменчивость решений уравнений (2) в направлении φ , $\kappa = \mu / \varepsilon^2$, $\kappa \sim 1$, окружное усилие t_2 связано с внешним давлением:

$$Q_n^*(\varphi) = -\Lambda \varepsilon^6 E h R^{-1} t_2(\varphi).$$

Численное решение. Наименьшему значению критической нагрузки соответствует наименьшее положительное собственное значение Λ_0 краевой задачи (3). С использованием численных методов можно найти значение $\Lambda_0^0 = \min_{p, \varphi_0} \Lambda_0(p, \varphi_0)$, а так же значения параметров

$p = p_0$ и $\varphi_0 = \varphi_0^0$, при которых он достигается.

На рисунке 2 приведены результаты расчетов, иллюстрирующие зависимость волнового числа p_0 от длины волны гофра λ для разных значений коэффициента постели α . Обращает на себя внимание наличие в графиках функции разрыва типа «скачок», что, на первый взгляд, не соответствует непрерывному характеру задачи. Для объяснения этого факта была построена зависимость $\Lambda_0 = \Lambda_0(p)$ для разных значений параметра α (см. рисунок 3).

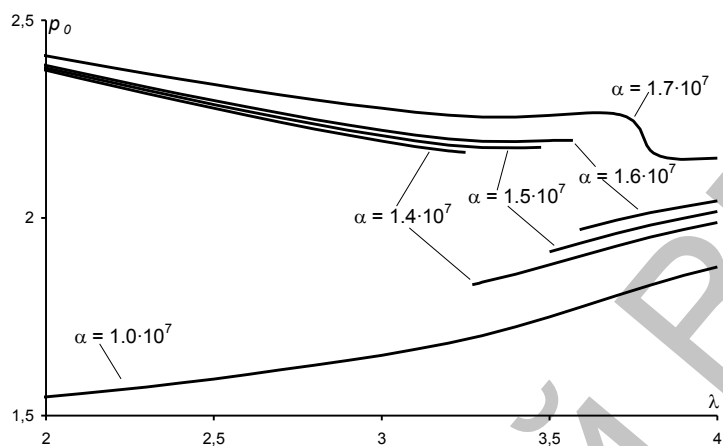


Рисунок 2 – Зависимость волнового числа от длины волны гофра.

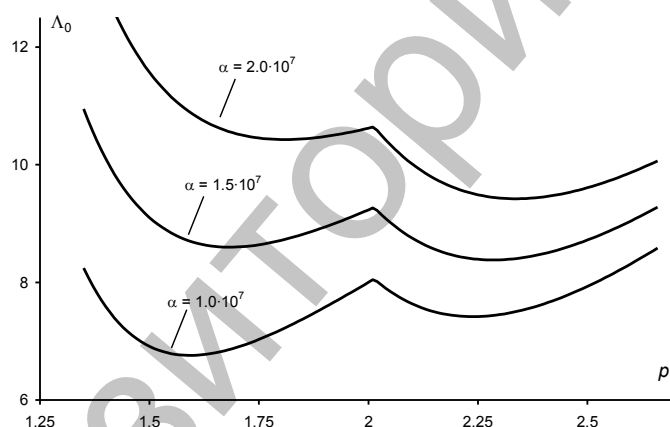


Рисунок 3 – Зависимость собственного значения от волнового числа.

Выводы. Анализируя графики, можно сделать вывод, что функция $\Lambda_0 = \Lambda_0(p)$ имеет две ветви, соответствующие разным формам волнообразования. В зависимости от длины волны гофра λ и коэффициента постели α , критической нагрузке соответствуют точки минимума из разных ветвей графика, что и объясняет наличие разрыва (см. рисунок 2).

Литература

1. Товстик, П.Е. Устойчивость тонких оболочек / П.Е. Товстик. – Москва: Наука, 1995. – 320 с.
2. Никонова, Т.В. О бифуркации тонкой гофрированной оболочки с упругим наполнителем под действием неоднородного гидростатического давления / Т.В. Никонова, С.П. Кунцевич, Г.И. Михасев // Механика машин, механизмов и материалов. – 2008. – № 3. – С.48–51.
3. Кунцевич, С.П. О влиянии коэффициента постели и длины волны гофра на бифуркацию тонкой гофрированной оболочки, лежащей на упругом основании, под действием гидростатического давления / С.П.Кунцевич, Т.В.Никонова, Г.И.Михасев // Механика машин, механизмов и материалов. – 2009. – №3. – С.57–60.