БИФУРКАЦИЯ СЛОИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Е.А. Корчевская

В данной работе рассматривается задача о потере устойчивости некруговой цилиндрической оболочки средней длины при кручении. В качестве исходных используются уравнения уточненной теории многослойных оболочек. На краях оболочки рассматриваются условия шарнирного опирания. Предполагается, что потеря устойчивости происходит из-за усилий сдвига вблизи «слабой» образующей. С использованием асимптотического метода двумерные уравнения многослойных оболочек сведены к последовательности одномерных краевых задач. Найден параметр критической нагрузки.

В качестве исходных используем уравнения, учитывающие параметры поперечных сдвигов, полученные Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым в [1]:

$$\frac{Eh^3\eta_3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(1-\frac{\theta h^2}{b}\Delta\right)\Delta^2\chi^* + \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 F^*}{\partial\alpha_1^2} - 2T_{12}^0\frac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} = 0,$$
$$\Delta^2 F^* = \frac{Eh}{R_2}\frac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1^2}, \quad W^* = \left(1-\frac{h^2}{b}\Delta\right)\chi^*, \tag{1}$$

где E, ν – осредненные модуль Юнга и коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки, α_1,α_2– координаты, отсчитываемые в осевом и окружном направлении соответственно, Δ – оператор Лапласа, F^* – функция напряжений, χ^*– функция перемещений, W^* – нормальный прогиб, b – параметр, учитывающий поперечные сдвиги, η_3, θ – коэффициенты, которые выражаются через модуль Юнга E_k, коэффициент Пуассона ν_k, толщину h_k k-ого слоя оболочки, а также функцию, характеризующую закон распределения поперечных касательных напряжений по толщине оболочки, T_{12}^0 – усилие сдвига, вызванное кручением оболочки, R_2 – радиус кривизны.

Уравнения (1) описывают состояние оболочки в окрестности безмоментного напряженно-деформированного состояния, характеризующегося усилием сдвига T_{12}^0. В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания.

Для описания локальной бифуркации безмоментного напряженного состояния, используем систему полубезмоментных уравнений слоистых оболочек (1), записанную в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \mu^4\left(1-\mu^3\tau\Delta\right)\Delta^2\chi + k(\varphi)\dfrac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \lambda 2\mu t_3^0\dfrac{\partial^2}{\partial s\partial\varphi}\left(\chi-\mu^2\kappa\Delta\chi\right) = 0, \\ \mu^4\Delta^2 F - k(\varphi)\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\chi-\mu^2\kappa\Delta\chi\right) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $F = F^*\big/EhR^2\mu^4$, $\chi = \chi^*\big/R$ – безразмерные функции напряжений и перемещений, Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат φ, s, $\lambda > 0$ – параметр нагружения, который связан с усилием сдвига $T_{12}{}^0 = \lambda Eh\,\mu^5 t_3^0$, μ – малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки, и имеет вид:

$$\mu^8 = h^2\eta_3\big/\left[12\,R^2\left(1-\nu^2\right)\right]. \tag{3}$$

Здесь τ, κ – параметры, учитывающие осредненные эффекты поперечных сдвигов и вводятся по формулам:

$$K\big/\pi^2 = \mu^2\kappa\,,\ K\theta\big/\pi^2 = \mu^3\tau\,,\ \kappa, \tau \sim 1 \text{ при } \mu \to 0\,. \tag{4}$$

При построении основного напряженного состояния с точностью до величины порядка μ^2 при s=0, s=$l(\varphi)$ нужно удовлетворить условиям [2]:

$$F = \chi = 0\,, \text{ при } s = 0,\ l(\varphi)\,. \tag{5}$$

Задача состоит в определении наименьшего $\lambda > 0$ для которого краевая задача (2), (5) имеет ненулевое решение.

Уравнения (2) отличаются от уравнений, используемых в работе [3], учетом поперечных сдвигов в нулевом приближении.

Считаем, что вследствие переменности геометрических параметров, оболочка теряет устойчивость локально, в окрестности некоторой «наиболее слабой» образующей $\varphi = \varphi_0$.

Согласно методу, предложенному в [2], выполним растяжение масштаба в окрестности линии $\varphi = \varphi_0$:

$$\varphi = \varphi_0 + \mu^{1/2}\xi . \tag{6}$$

Решение задачи (2), (5) будем искать в виде [2]:

$$\chi(s,\varphi,\mu) = \chi^{**} \exp\left\{ i\left(\mu^{-1/2} q\xi + \frac{1}{2} a\xi^2 \right) \right\},$$

$$F(s,\varphi,\mu) = F^{**} \exp\left\{ i\left(\mu^{-1/2} q\xi + \frac{1}{2} a\xi^2 \right) \right\},$$

$$\chi^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} \chi_j(\xi,s), \quad F^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} f_j(\xi,s), \tag{7}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \ldots, \tag{8}$$

где $\chi_j(\xi,s)$, $f_j(\xi,s)$ – полиномы по ξ, имеющие достаточное число раз дифференцируемые по s коэффициенты. Исходя из требования убывания решения (7) вдали от образующей $\xi = 0$, принимаем: $q>0$, $\operatorname{Im} a > 0$.

Функция $k(\varphi)$ раскладывается в ряды по степеням $\mu^{1/2}\xi$ в окрестности образующей $\varphi = \varphi_0$.

После подстановки (6) – (8) в (2) – (5) получим рекуррентную последовательность дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=0}^{j} H_k \chi_{j-k} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

и последовательность соответствующих граничных условий:

$$\sum_{k=0}^{j} \Gamma_k^i \chi_{j-k} = 0, \quad i = 0,1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{при} \quad s = 0,\ l(\varphi). \tag{10}$$

Решая последовательность краевых задач (9) – (10), получим параметр критической нагрузки, который учитывает как эксцентриситет поперечного сечения, так и наличие поперечных сдвигов (зависимость от параметров τ и κ), и обобщает аналогичную формулу, полученную в [3]. При $\tau = \kappa = 0$ получаем известные формулы для изотропных оболочек [2].

Литература

1. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
2. Товстик, П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.
3. Корчевская, Е.А. Потеря устойчивости некруговой слоистой цилиндрической оболочки при кручении / Е. А. Корчевская // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2004. – № 4. – С. 102–106.

ОСОБЕННОСТИ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ ПРИ БИФУРКАЦИИ ТОНКОЙ ГОФРИРОВАННОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

С.П. Кунцевич

Тонкостенные цилиндрические и гофрированные оболочки используются в разнообразных инженерно-технических конструкциях в качестве составных или несущих элементов. К настоящему времени достаточно хорошо изучена устойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек под действием различных видов статических нагрузок (см., например, библиографию в [1]). В работах [2, 3] опубликованы результаты по исследованию устойчивости тонкостенной гофрированной оболочки с упругим заполнителем под действием неоднородного гидростатического давления. В этом случае потеря устойчивости оболочки происходит с образованием вмятин, локализованных вблизи некоторой линии на ее поверхности.