$$\left|G:X\right| = \left|N_1:Y_1\right|\cdot\left|N_2:Y_2\right|\cdot\frac{\left|Y_1\right|\cdot\left|Y_2\right|}{\left|X\right|\cdot\left|N_1\cap N_2\right|} = \left|N_1:Y_1\right|\cdot\left|N_2:Y_2\right|\cdot\frac{\left|Y_1Y_2\right|\cdot\left|Y_1\cap Y_2\right|}{\left|X\right|\cdot\left|N_1\cap N_2\right|}$$ с учетом равенств (1)

$$\left|G:X\right| = \left|N_1:Y_1\right|\cdot\left|N_2:Y_2\right|\cdot\frac{\left|(X\cap N_1)(X\cap N_2)\right|\cdot\left|X\cap N_1\cap N_2\right|}{\left|X\right|\cdot\left|N_1\cap N_2\right|} =$$

$$= \frac{\left|N_1:Y_1\right|\cdot\left|N_2:Y_2\right|}{\left|X:\left((X\cap N_1)(X\cap N_2)\right)\right|:\left|(N_1\cap N_2):(X\cap N_1\cap N_2)\right|}.$$

Так как индексы $\left|N_1:Y_1\right|$ и $\left|N_2:Y_2\right|$ являются π'-числами, то и $\left|G:X\right|$ – π'-число. Следовательно $G\in L_\pi(f)$.

Теорема доказана.

Теорема 2.6. Пусть f – фиттингов функтор, π – множество простых чисел, тогда класс $L_\pi(f)$ является полулокальным классом Фиттинга.

Доказательство. Вследствие определения 1.2 достаточно доказать равенство $L_\pi(f) = L_\pi(f)\mathfrak{E}_{\pi'}$. Ввиду леммы 1.1 $L_\pi(f)\subseteq L_\pi(f)\mathfrak{E}_{\pi'}$.

Докажем обратное включение. Пусть $G\in L_\pi(f)\mathfrak{E}_{\pi'}$, тогда по определению произведения классов Фиттинга $G/G_{L_\pi(f)}\in\mathfrak{E}_{\pi'}$. Следовательно, индекс $\left|G:G_{L_\pi(f)}\right|$ является π'-числом.

Пусть $X\in f(G)$, тогда

$$\left|G:X\right| = \frac{\left|G:G_{L_\pi(f)}\right|\cdot\left|G_{L_\pi(f)}:\left(G_{L_\pi(f)}\cap X\right)\right|}{\left|X:\left(G_{L_\pi(f)}\cap X\right)\right|}.$$

Ввиду условия 2) определения 2.1 существует такая подгруппа Y из $f\left(G_{L_\pi(f)}\right)$, что $G_{L_\pi(f)}\cap X = Y$. Но так как $G_{L_\pi(f)}\in L_\pi(f)$, то индекс $\left|G_{L_\pi(f)}:Y\right| = \left|G_{L_\pi(f)}:\left(G_{L_\pi(f)}\cap X\right)\right|$ также является π'-числом. Следовательно, индекс $\left|G:X\right|$ – π'-число и $G\in L_\pi(f)$.

Теорема доказана.

Литература

1. Beidleman, J.C. Fittingfunktoren in endlichen auflösbaren Gruppen I/ J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Z. – 1983. – V. 182 – Z. 359-384.
2. Gallego, M.P. The radical of the Fitting class defined by a Fitting functor and a set of primes/ M.P. Gallego // Arch. Math. – 1987. – V.48 – P. 36-39.
3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

О ДОСТАТОЧНОМ ПРИЗНАКЕ МАКСИМАЛЬНОСТИ КЛАССОВ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Н.Т. Воробьев, Н.В. Савельева

Все рассматриваемые группы конечны.

Класс Фиттинга $\mathfrak{M}$ называется максимальным в классе Фиттинга $\mathfrak{H}$ (обозначают $\mathfrak{M}\lessdot\mathfrak{H}$), если $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{H}$ и из того, что $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{X}\in\{\mathfrak{M},\mathfrak{H}\}$.

Напомним, что подгруппу V группы G называют $\mathfrak{X}$-инъектором G, если $V\cap N$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой группы N для каждой субнормальной подгруппы N группы G.

Пусть X, Y – классы Фиттинга и $\mathsf{X}\subset\mathsf{Y}$. В классе S всех разрешимых групп известен результат Брайса-Косси [1] о том, что если существует такое простое число p, что для каждой группы $G\in\mathsf{Y}$ индекс ее X-инъектора в G равен 1 или p, то $\mathsf{X}\lessdot\mathsf{Y}$. При этом, согласно известной теореме Гашюца-Фишера-Хартли [2], для каждого класса Фиттинга F в любой разрешимой группе F-инъекторы существуют и сопряжены.

Группа G называется π-разрешимой [3], если ее главные факторы являются либо элементарными абелевыми p-группами для $p\in\pi$, либо π'-группами.

Пусть $\sigma=\pi(\mathsf{X})$ – множество всех простых делителей всех групп из класса Фиттинга X и $\sigma'=\pi'(\mathsf{X})=\mathbf{P}\backslash\sigma$, где $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел. Обозначим через S^{σ} множество всех σ-разрешимых групп. Заметим, что Го Вэньбинем [4] было доказано, что любая группа из класса $\mathsf{X}\mathsf{S}^{\sigma}$ обладает единственным классом сопряженных X-инъекторов.

Таким образом, актуальна задача расширения указанного выше результата Брайса-Косси на случай частично разрешимых групп. Ее решению посвящена настоящая работа.

1. Предварительные сведения

Пусть F – непустой класс Фиттинга. Подгруппа G_{F} группы G называется ее F-радикалом, если она является максимальной из нормальных F-подгрупп группы G.

Лемма 1.1 (см. IX.1.1 (a) [5]). *Если $\varnothing\neq\mathsf{F}$ –класс Фиттинга и N – субнормальная подгруппа группы G, то $N_{\mathsf{F}}=N\cap G_{\mathsf{F}}$.*

Если F и H – классы Фиттинга, то их произведение – это класс групп $\mathsf{F}\mathsf{H}=(G : G/G_{\mathsf{F}}\in\mathsf{H})$. В частности, $\mathsf{X}\mathsf{S}^{\sigma}$ – класс всех тех групп, факторгруппы по X-радикалу которых σ-разрешимы.

Напомним, что непустой класс Фиттинга F называется X-нормальным, если $\mathsf{F}\subseteq\mathsf{X}$ для любой X-группы G ее F-инъектор нормален в G. Отсюда легко следует, что для любой группы G ее F-радикал является F-максимальной подгруппой группы G.

Лемма 1.2 (теорема 2.5.3 [4]). *В любой группе G такой, что факторгруппа G по ее F-радикалу σ-разрешима, существуют F-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

2. Основной результат

С учетом леммы 1.2 о существовании X-инъекторов и их сопряженности в группах из класса $\mathsf{X}\mathsf{S}^{\sigma}$, справедлива

Теорема. *Пусть классы Фиттинга X и Y таковы, что $\mathsf{X}\subset\mathsf{Y}\subseteq\mathsf{X}\mathsf{S}^{\sigma}$. Тогда если для некоторого $p\in\sigma$ в любой Y-группе G ее X-инъектор имеет индекс 1 или p, то $\mathsf{X}\triangleleft\mathsf{Y}$ и $\mathsf{X}\lessdot\mathsf{Y}$.*

Доказательство. Предположим, что X не нормален в Y. Тогда класс $\mathsf{Y}\backslash\mathsf{X}$ непуст, и в нем найдется группа, в которой X-радикал не является X-максимальной подгруппой, т.е. X-инъектор не нормален в G. Выберем среди таких групп группу G минимального порядка. Тогда G/G_{X} σ-разрешима и по лемме 1.2 X-инъектор в группе G существует. Пусть V – X-инъектор G.

Заметим, что в G существует единственная максимальная нормальная подгруппа $M=G_{\mathsf{X}}$. Имеем $G_{\mathsf{X}}<V<G$, где V не нормален в G. По условию теоремы $|G:V|=p$ (если $|G:V|=1$, то $G=V\in\mathsf{X}$ – противоречие с выбором группы G). Кроме того, $|G/G_{\mathsf{X}}|:|V/G_{\mathsf{X}}|=|G:V|=p$. Значит, V/G_{X} – максимальная подгруппа простой группы G/G_{X}. Так как простая группа G/G_{X} σ-разрешима, то либо G/G_{X} – абелева p-группа для $p\in\sigma$, либо G/G_{X} – σ'-группа. В первом случае простая группа G/G_{X} является циклической простого порядка p, и, значит, $V=G_{\mathsf{X}}$. Во втором случае, так как G/G_{X} – σ'-группа, то V/G_{X} также является σ'-группой. Но $V\in\mathsf{X}$ и поэтому V/G_{X} – σ-группа. Значит, V/G_{X} является одновременно σ-группой и σ'-группой. Поэтому снова $V=G_{\mathsf{X}}$ – противоречие с тем, что X-инъекторы группы G не нормальны в G. Итак, $\mathsf{X}\triangleleft\mathsf{Y}$.

Покажем теперь, что $\mathsf{X}\lessdot\mathsf{Y}$. Предположим, что существует такой класс Фиттинга M, что $\mathsf{X}\subset\mathsf{M}\subset\mathsf{Y}$. Пусть $G\in\mathsf{M}\backslash\mathsf{X}$ и $H\in\mathsf{Y}\backslash\mathsf{M}$. Так как по условию для любой Y-группы ее индекс по X-радикалу есть $p\in\sigma$, то $|G/G_{\mathsf{X}}|=|H/H_{\mathsf{X}}|=p$. Но $\mathsf{X}\subset\mathsf{M}$. Значит, $H_{\mathsf{X}}\leq H_{\mathsf{M}}$. Из $|H/H_{\mathsf{X}}|=p$ следует, что H_{X} – максимальная нормальная подгруппа группы H. Значит, с учетом $H_{\mathsf{X}}\leq H_{\mathsf{M}}$, получаем, что либо $H_{\mathsf{M}}=H$, либо $H_{\mathsf{X}}=H_{\mathsf{M}}$. Случай $H_{\mathsf{M}}=H$ невозможен ввиду того, что тогда $H\in\mathsf{M}$ – противоречие с выбором H. Тогда имеет место

$$H_{\mathsf{X}}=H_{\mathsf{M}}. \qquad (2.1)$$

Пусть $T=G\times H$. Положив $T\in\mathsf{M}$, из $H\triangleleft T$ следует, что $H\in\mathsf{M}$, что невозможно ввиду выбора H. Поэтому $T_{\mathsf{M}}<T$.

Так как $\mathsf{X}\subset\mathsf{M}$, то по лемме 1.1 получаем $(T_{\mathsf{M}})_{\mathsf{X}}=T_{\mathsf{M}}\cap T_{\mathsf{X}}=T_{\mathsf{X}}$.

Покажем, что $T_{\mathsf{M}}=G\times H_{\mathsf{M}}$. С учетом равенства (2.1) из $|H/H_{\mathsf{X}}|=p$ имеем $|H|=|H_{\mathsf{M}}|\cdot p$. Так как $G\in\mathsf{M}$ и $H_{\mathsf{M}}\in\mathsf{M}$, то $G\times H_{\mathsf{M}}\in\mathsf{M}$. Кроме того, $G\times H_{\mathsf{M}}\triangleleft T$ в силу $G\triangleleft T$ и $H_{\mathsf{M}}\triangleleft T$. Заметим также, что $|T|=|G|\cdot|H|$ и $|G\times H_{\mathsf{M}}|=|G|\cdot|H_{\mathsf{M}}|$. Отсюда $|T:(G\times H_{\mathsf{M}})|=p$. Значит, $G\times H_{\mathsf{M}}$ – максимальная подгруппа, которая является нормальной в T. Более того, $T\notin\mathsf{M}$, что влечет $T_{\mathsf{M}}\neq T$, т.е. $T_{\mathsf{M}}\subset T$. Тогда M-радикалом группы T может быть только T_{M}. Следовательно, $T_{\mathsf{M}}=G\times H_{\mathsf{M}}$.

Если $T_{\mathsf{M}}\in\mathsf{X}$, то ввиду $G\lhd T_{\mathsf{M}}$ получаем $G\in\mathsf{X}$. Последнее противоречит выбору группы G. Следовательно, $T_{\mathsf{M}}\notin\mathsf{X}$ и

$$(T_{\mathsf{M}})_{\mathsf{X}}=T_{\mathsf{X}}<T_{\mathsf{M}} \qquad (2.2)$$

Теперь, ввиду $H\in\mathsf{Y}$, по условию имеем $|H/H_{\mathsf{X}}|=p$. Тогда H_{X} – максимальная нормальная подгруппа группы H. Но в силу равенства (2.1) $|H/H_{\mathsf{M}}|=p$. Так как $T=G\times H$ и $T_{\mathsf{M}}=G\times H_{\mathsf{M}}$, то

$$|T/T_{\mathsf{M}}|=\frac{|G\times H|}{|G\times H_{\mathsf{M}}|}=\frac{|G|\cdot|H|}{|G|\cdot|H_{\mathsf{M}}|}=\frac{|H|}{|H_{\mathsf{M}}|}=|H/H_{\mathsf{M}}|=p.$$

Это означает, что $T_{\mathsf{M}}\lhd\cdot T$. Из $T\in\mathsf{Y}$ и $T\notin\mathsf{X}$ (в противном случае, если $T\in\mathsf{X}$, то возможно $|T/T_{\mathsf{X}}|=1$) по условию теоремы $|T/T_{\mathsf{X}}|=p$. Значит, $T_{\mathsf{X}}\lhd\cdot T$. Таким образом, T_{X} и T_{M} являются максимальными нормальными подгруппами в T, причем $T_{\mathsf{X}}\leq T_{\mathsf{M}}$. Следовательно, $T_{\mathsf{X}}=T_{\mathsf{M}}$ – противоречие с неравенством (2.2). Значит, $\mathsf{X}<\cdot\mathsf{Y}$. Теорема доказана.

Литература

1 Bryce, R.A. Maximal Fitting classes of finite soluble groups / R.A. Bryce, J. Cossey // Bull. Austral. Math. Soc. – 1974. – Vol. 10. – P. 169–175.
2 Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschűtz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, №5. – S. 337–339.
3 Чунихин, С. А. Подгруппы конечных групп / С. А. Чунихин. – Мн.: Наука и техника. – 1964. – 158 с.
4 Guo, W. The theory of classes of groups / W. Guo. – Science Press-Kluwer Academic Publishers, Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London, 2000. – 258 p.
5 Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА НОРМАТИВНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ТЕСТОВ

Н.В. Иванова, А.А. Чиркина

В настоящее время при разработке и анализе качества тестовых заданий в основном используются две теории: классическая теория тестирования (CTT) и математическая теория измерений (IRT). *Трудность* задания в классической теории определяется после эмпирической апробации заданий как статистическая мера его решаемости. В качестве показателя трудности используется доля правильных ответов по тестовому заданию. Недостаток данного показателя – характеристики тестовых заданий зависят от конкретной группы испытуемых. *Дифференцирующим свойством* задания называется его способность различать испытуемых по уровню подготовленности. Для определения дискриминативности задания в классической теории тестирования используется коэффициент корреляции задания с тестом. Чем выше значение коэффициента корреляции, тем лучше, в качестве нижней границы включения задания в тест обычно рассматривают значение 0,3. Второй метод классической теории – метод крайних групп, где для расчета берутся показатели самых слабых и самых сильных испытуемых (по 30%). Индекс дискриминативности определяется как разность долей правильных ответов сильной и слабой групп. Значение индекса дискриминативности располагается в интервале [-1;1]. Если он выше нуля (больше 0,3 считается удовлетворительным), это свидетельствует о хорошей различающей способности задания. Если индекс равен 0, то слабые и сильные учащиеся выполняют задание одинаково. Нулевое значение коэффициента корреляции и меньшее нуля значение индекса дискриминативности показывают, что задание необходимо устранить из тестовых материалов, как не выдержавшие эмпирической проверки. В IRT уровень подготовленности обучаемых θ_i где i – номер испытуемого, считается латентным параметром, для его объективной оценки используют статистический анализ результатов тестирования. По результатам апробационного тестирования определяются характеристики тестовых заданий – трудность β_j и дискриминативность a_j, где j – номер тестового задания. Их оценка на основе модели Раша не зависит от выборки испытуемых. Одно задание считается более трудным, чем другое, если вероятность правильного ответа на первое задание меньше, чем на второе, неза-