f(0)=f(h/4)+C(h/4)^p*

Решая систему из трех уравнений для *f(0), C и p* находим ответ

f(0)=f(h/4)+Df,

Df=(f(h/4)-f(h/2))/(s-1) , s=((f(h)-f(h /2))/(f(h/2)-f(h/4))=2^p

Ясно, что степень *2^p*, вычисленная по способу Эйткена, будет дробной (например, 1.95) в силу пренебрежения малыми более высокого порядка по *h*. Если ее округлить, возвратимся к способу Рунге.

Основной результат. Нами было замечено при оценке погрешности по методам Рунге и Эйткена, что две формулы для f(0) этих методов практически всегда дают **двустороннее приближение** к точному ответу, берут ответ в вилку, причем величина этой вилки – порядка *h^(p+1)*. Тем самым получается и уточненный ответ и более высокоточная оценка его погрешности по способу границ. В силу того, что не нужно знать порядок точности исходного вычисления, такой метод оценки погрешности оказывается весьма удобным, простым и общим. Нами исследованы условия применимости этого метода (ввиду громоздкости выкладки не приводятся). Достаточным условием применимости метода является монотонность функций

f(h) и *(f(h)-f(0))/(f(h/2)-f(0))*

В силу неизвестности функции *f(h)* и особенно *f(0)* это условие непосредственно проверить нельзя. Но в случае «общего положения» (термин заимствован из теории катастроф) всякая аналитическая в нуле функция монотонна в некоторой достаточно малой окрестности точки 0.

В чем причина того, что этот простой и мощный метод уточнения результата и оценки погрешности найден лишь теперь? Дело, видимо в «инерции докомпьютерного мышления». Вычисление с двойной точностью *h/2* требует порой двойного времени, не говоря уже о счете с точностью *h/4*. Получив с большим трудом результат при *h/4,* кажется естественным на нем и остановиться.

Полагаем, что указанный прием уточнения результата и оценки его погрешности может быть полезен не только в Вузовском курсе численных методов, но и в школе в углубленных курсах информатики. В школьном курсе информатики и вычислительной математики нет альтернативных методов оценки погрешности. Вывод соотношений Рунге и Эйткена через решение системы из трех уравнений не представляется слишком сложным. Во всяком случае, это проще вычисления пятой производной.

На практике, в учебном процессе оценка погрешности является пока скорее исключением, чем правилом, что обесценивает результаты расчета. Надеемся, что предложенный метод будет способствовать исправлению ситуации и в Вузе, и в школе.

КЛАССЫ ФИТТИНГА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ФИТТИНГОВЫМИ ФУНКТОРАМИ

Е.А. Витько

Функторный метод в теории групп и их классов является одним из основных инструментов исследований конечных групп. Однако его область применения ограничивалась только группами с условием разрешимости [1, 2]. Это приводит к актуальности задачи развития и применения функторного метода для исследования произвольных классов конечных групп – чему и посвящена настоящая работа.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$– классы Фиттинга. Радикальным произведением $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называется класс $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G : G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y})$.

Лемма 1.1. [3]. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$.

Пусть **P** – множество всех простых чисел. Отображение

$$f : \mathbf{P} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называется локальной функцией Хартли или локальной *H*-функцией. Для каждой локальной *H*-функции *f* полагаем

$$Supp(f) = \{\, p \in P \mid f(p) \neq \varnothing \,\} \text{– носитель } f.$$

Если *Supp(f)* = π, то положим $SLR(f) = \bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют полулокальным, если $\mathfrak{F} = SLR(f)$ для некоторой локальной *H*-функции *f*.

Определение 1.2. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется полулокальным, если выполняется равенство $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathfrak{F}$.

2. Основные результаты

Будем проводить все исследования в некотором непустом классе конечных групп $\mathfrak{U}$.

Пусть *f(G)* – некоторая система подгрупп группы *G*. Если $\beta : G \to \beta(G)$ – изоморфизм, то через $\beta(f(G))$ обозначим множество $\{\beta(X) \mid X \in f(G)\}$ всех образов в $\beta(G)$ подгрупп из *f(G)*. Если *N* – подгруппа группы *G*, то через $f(G) \cap N$ обозначим множество $\{X \cap N \mid X \in f(G)\}$.

Определение 2.1 [1]. Пусть $G \in \mathfrak{U}$, отображение *f*, которое каждой группе *G* ставит в соответствие некоторое множество ее подгрупп *f(G)* называется *фиттинговым функтором*, когда выполняются следующие условия:

(1) если $\beta : G \to \beta(G)$ – изоморфизм, то $\beta(f(G)) = f(\beta(G))$;

(2) если $N \triangleleft G$, то $f(G) \cap N = f(N)$.

Определение 2.2 [2]. Фитингов функтор называется *сопряженным*, если для каждой группы *G*, множество *f(G)* есть класс сопряженных подгрупп.

Примеры 2.3. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ – класс всех конечных групп.

а) Пусть $f_s(G) = \{U \mid U \le G\}$ – множество всех подгрупп группы *G*, и $f_{sn}(G) = \{U \mid U \triangleleft\triangleleft G\}$ – множество всех субнормальных подгрупп группы *G*. Тогда f_s и f_{sn} – фиттинговы функторы.

б) Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и

$$\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G) = \{X \mid X \text{ – } \mathfrak{F}\text{-инъектор группы G}\},\ \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}(G) = \{G_{\mathfrak{F}}\}.$$

Тогда $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$ и $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}(G)$ – сопряженные Фиттинговы функторы.

Определение 2.4. Пусть *f* – отображение, которое каждой группе $G \in \mathfrak{U}$ ставит в соответствие множество *f(G)* ее подгрупп, π – множество простых чисел, тогда

$$L_\pi(f) = \{G \mid |G : X| \text{ – } \pi'\text{-число для всех } X \in f(G)\}.$$

Теорема 2.5. *Если f – фиттингов функтор, π – множество простых чисел, то класс* $L_\pi(f)$ *является классом Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $G \in L_\pi(f)$ и *N* – нормальная подгруппа группы *G*. Если $Y \in f(N)$, то ввиду требования 2) определения 2.1 $Y = X \cap N$, где *X* – подгруппа группы *G* из *f(G)*. Тогда индекс подгруппы *Y* в группе *N*

$$|N : Y| = \frac{|N|}{|Y|} = \frac{|N|}{|X \cap N|} = \frac{|N| \cdot |XN|}{|X| \cdot |N|} = \frac{|G|}{|X|} \cdot \frac{|XN|}{|G|} = |G : X| : |G : (XN)|.$$

Так как $G \in L_\pi(f)$ и $X \in f(G)$, то индекс $|G : X|$ является π′-числом. Тогда $|N : Y|$ также является π′-числом и $N \in L_\pi(f)$.

Пусть N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы *G* такие, что $G = N_1 N_2$ и N_1, N_2 принадлежат классу $L_\pi(f)$. Если $X \in f(G)$, то выполняются следующие равенства:

(1) $$X \cap N_1 = Y_1,\ X \cap N_2 = Y_2,$$

где $Y_1 \in f(N_1)$ и $Y_2 \in f(N_2)$. Индекс подгруппы *X* в группе *G*

$$|G : X| = \frac{|G|}{|X|} = \frac{|N_1 N_2|}{|X|} = \frac{|N_1| \cdot |N_2|}{|X| \cdot |N_1 \cap N_2|} = \frac{|N_1 : Y_1| \cdot |Y_1| \cdot |N_2 : Y_2| \cdot |Y_2|}{|X| \cdot |N_1 \cap N_2|}.$$

Применив теорему Лагранжа, получим

$$\left|G:X\right| = \left|N_1:Y_1\right|\cdot\left|N_2:Y_2\right|\cdot\frac{\left|Y_1\right|\cdot\left|Y_2\right|}{\left|X\right|\cdot\left|N_1\cap N_2\right|} = \left|N_1:Y_1\right|\cdot\left|N_2:Y_2\right|\cdot\frac{\left|Y_1Y_2\right|\cdot\left|Y_1\cap Y_2\right|}{\left|X\right|\cdot\left|N_1\cap N_2\right|}$$ с учетом равенств (1)

$$\left|G:X\right| = \left|N_1:Y_1\right|\cdot\left|N_2:Y_2\right|\cdot\frac{\left|(X\cap N_1)(X\cap N_2)\right|\cdot\left|X\cap N_1\cap N_2\right|}{\left|X\right|\cdot\left|N_1\cap N_2\right|} =$$

$$= \frac{\left|N_1:Y_1\right|\cdot\left|N_2:Y_2\right|}{\left|X:\left((X\cap N_1)(X\cap N_2)\right)\right|:\left|(N_1\cap N_2):(X\cap N_1\cap N_2)\right|}.$$

Так как индексы $\left|N_1:Y_1\right|$ и $\left|N_2:Y_2\right|$ являются π'-числами, то и $\left|G:X\right|$ – π'-число. Следовательно $G\in L_\pi(f)$.

Теорема доказана.

Теорема 2.6. Пусть f – фиттингов функтор, π – множество простых чисел, тогда класс $L_\pi(f)$ является полулокальным классом Фиттинга.

Доказательство. Вследствие определения 1.2 достаточно доказать равенство $L_\pi(f) = L_\pi(f)\mathrm{E}_{\pi'}$. Ввиду леммы 1.1 $L_\pi(f)\subseteq L_\pi(f)\mathrm{E}_{\pi'}$.

Докажем обратное включение. Пусть $G\in L_\pi(f)\mathrm{E}_{\pi'}$, тогда по определению произведения классов Фиттинга $G/G_{L_\pi(f)}\in\mathrm{E}_{\pi'}$. Следовательно, индекс $\left|G:G_{L_\pi(f)}\right|$ является π'-числом.

Пусть $X\in f(G)$, тогда

$$\left|G:X\right| = \frac{\left|G:G_{L_\pi(f)}\right|\cdot\left|G_{L_\pi(f)}:\left(G_{L_\pi(f)}\cap X\right)\right|}{\left|X:\left(G_{L_\pi(f)}\cap X\right)\right|}.$$

Ввиду условия 2) определения 2.1 существует такая подгруппа Y из $f\left(G_{L_\pi(f)}\right)$, что $G_{L_\pi(f)}\cap X = Y$. Но так как $G_{L_\pi(f)}\in L_\pi(f)$, то индекс $\left|G_{L_\pi(f)}:Y\right| = \left|G_{L_\pi(f)}:\left(G_{L_\pi(f)}\cap X\right)\right|$ также является π'-числом. Следовательно, индекс $\left|G:X\right|$ – π'-число и $G\in L_\pi(f)$.

Теорема доказана.

Литература

1. Beidleman, J.C. Fittingfunktoren in endlichen auflösbaren Gruppen I/ J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Z. – 1983. – V. 182 – Z. 359-384.
2. Gallego, M.P. The radical of the Fitting class defined by a Fitting functor and a set of primes/ M.P. Gallego // Arch. Math. – 1987. – V.48 – P. 36-39.
3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

О ДОСТАТОЧНОМ ПРИЗНАКЕ МАКСИМАЛЬНОСТИ КЛАССОВ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Н.Т. Воробьев, Н.В. Савельева

Все рассматриваемые группы конечны.

Класс Фиттинга M называется максимальным в классе Фиттинга H (обозначают $\mathsf{M}\lessdot\mathsf{H}$), если $\mathsf{M}\subset\mathsf{H}$ и из того, что $\mathsf{M}\subseteq\mathsf{X}\subseteq\mathsf{H}$, где X – класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathsf{X}\in\{\mathsf{M},\mathsf{H}\}$.

Напомним, что подгруппу V группы G называют X-инъектором G, если $V\cap N$ является X-максимальной подгруппой группы N для каждой субнормальной подгруппы N группы G.