Отличительной особенностью исследованных образцов 1 и 2 было отсутствие температурного гистерезиса в режимах нагревания и охлаждения. Это свидетельствует о стабильной доменной структуре, поскольку в TGS кристаллах величина диэлектрической проницаемости, измеряемая в переменном электрическом поле, являющаяся суммой индуцированной и доменной компонент, определяется преимущественно второй компонентой. В данном случае это монодоменная структура, и, как показали измерения петли гистерезиса, с высоким внутренним смещающим полем ($E_{см}$ ~ 300 В/мм) и с коэффициентом униполярности выше 100% (см. рис. 1в и 2в). Петли диэлектрического гистерезиса образцов 1 и 2 были ассиметричны и имели различные направления смещения по оси E и P, что подтверждает факт формирования двух монодоменных областей с противоположным направлением спонтанной поляризации в высоколегированных кристаллах DLATGS.

Заключение. Проведенное исследование диэлектрических и переполяризационных свойств кристаллов DLATGS, выращенных из растворов с различной концентрацией примеси (3, 7 и 25 вес.% в растворе), показало, что значения коэрцитивных полей E_c, внутренних полей смещения $E_{см}$ и коэффициентов динамической униполярности k увеличиваются при увеличении концентрации примеси, а величина реверсируемой спонтанной поляризации P_s уменьшается. Кристаллы с такими характеристиками могут быть перспективны для практического применения в качестве пироэлектрических элементов и чувствительных тензодатчиков.

О ЦЕЛЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ДЛЯ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

К.Л. Якуто
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Важное значение для решения большого круга задач, связанных с моделированием экономических, социальных процессов, имеет задача о целом положительном решении нелинейных матричных уравнений полиномиального вида для матриц различных порядков [1, с. 189].

Цель настоящего исследования – доказать эффективность использования аналитических методов для решения задачи по нахождению целых положительных решений нелинейных матричных уравнений четвёртой степени для матриц второго порядка.

Материал и методы. Методика проводимого исследования состояла в следующем: решаемое уравнение записывалось в виде системы, состоящей для матриц второго порядка из четырёх нелинейных уравнений, которая затем решалась аналитическими методами. В процессе проведения исследования использовался пакет символьной математики *Maple* 18.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим матричное уравнение

$$X^4 + AX = B \tag{1}$$

где $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$.

Лемма 1. *Если существует целый положительный корень рассматриваемого вида, то для его нахождения необходимо оценить возможные значения переменных a и d, затем для каждого возможного значения пары этих переменных найти значение переменной b, разрешив квадратное уравнение* $pb^2 + qb + r = 0,$ *где* $p = -5a^6 - 14a^5d - 19a^4d^2 - 20a^3d^3 - 15a^2d^4 - 6ad^5 - d^6 - 4a^3\alpha - 8a^2d\alpha - 4ad^2\alpha + 4a^2k + 8adk + 4d^2k + \alpha^2$, $q = -2a^4\beta - 8a^3d\beta - 12a^2d^2\beta - 8ad^3\beta - 2d^4\beta + 4La^3 + 8La^2d + 4ad^2 - 2a\alpha\beta - 2L\alpha,$ $r = -2ad\beta^2 - d^2\beta^2 + 2L\alpha\beta + L^2$, $k = K - a^4 - \alpha a$, $n = N - d^4 - \delta d$; *переменную с*

можно найти, используя формулу связи между переменными b и c:
$$c=\frac{L-a^3b-a^2bd-abd^2-bd^3-\alpha b-\beta d}{2b^2\left(a+d\right)}.$$

Доказательство. В этом случае система уравнений, соответствующая уравнению (1) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a^4+3a^2bc+2abcd+b^2c^2+bcd^2+\alpha a+\beta c=K, \\ a^3b+2ab^2c+a^2bd+abd^2+2b^2cd+bd^3+\alpha b+\beta d=L, \\ a^3c+2abc^2+a^2cd+acd^2+2bc^2d+cd^3+\gamma a+\delta c=M, \\ a^2bc+2abcd+b^2c^2+3bcd^2+d^4+\gamma b+\delta d=N. \end{cases} \qquad (2)$$

Оценка для переменной *a* имеет вид: $1\le a\le\sqrt[4]{K-7-\alpha-\beta}$. Оценка для переменной *d* имеет вид: $1\le d\le\sqrt[4]{N-7-\gamma-\delta}$.

Выразив из второго уравнения системы (2) переменную *c*:

$$c=\frac{L-a^3b-a^2bd-abd^2-bd^3-\alpha b-\beta d}{2b^2\left(a+d\right)} \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в первое уравнение системы (2), получим уравнение относительно переменной *b*:

$$pb^2+qb+r=0 \qquad (4)$$

где

$$p=-5a^6-14a^5d-19a^4d^2-20a^3d^3-15a^2d^4-6ad^5-d^6-4a^3\alpha-8a^2d\alpha-$$
$$-4ad^2\alpha+4a^2k+8adk+4d^2k+\alpha^2,\ q=-2a^4\beta-8a^3d\beta-12a^2d^2\beta-8ad^3\beta-$$
$$-2d^4\beta+4La^3+8La^2d+4ad^2-2a\alpha\beta-2L\alpha,\ r=-2ad\beta^2-d^2\beta^2+2L\alpha\beta+L^2,$$
$$k=K-a^4-\alpha a,\ n=N-d^4-\delta d.$$

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо для каждой возможной пары значений переменных *a* и *d* решать уравнение второго порядка относительно переменной *b* и затем находить переменную *c*.

Рассмотрим нелинейное матричное уравнение

$$X^4+AX^2=B \qquad (5)$$

где $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$.

Лемма 2. *Если существует целый положительный корень рассматриваемого уравнения, то для его нахождения необходимо оценить возможные значения переменных a и d, затем для каждого возможного значения пары этих переменных найти значение переменной b, разрешив кубическое уравнение* $pb^3+qb^2+rb+s=0$, *где*

$$p=-5a^6-14a^5d-19a^4d^2-20a^3d^3-15a^2d^4-6ad^5-d^6-6a^4\alpha-16a^3d\alpha-$$
$$-16a^2d^2\alpha-8ad^3\alpha-2d^4\alpha-a^2\alpha^2-2ad\alpha^2-d^2\alpha^2-4a^2k-8adk-4d^2k,$$
$$q=-5a^5\beta-11a^4d\beta-18a^3d^2\beta-22a^2d^3\beta-13ad^4\beta-3d^5\beta-6a^3\alpha\beta-12a^2d\alpha\beta-$$
$$-10ad^2\alpha\beta-4d^3\alpha\beta+4La^3+8La^2d+4Lad^2-a\alpha^2\beta-d\alpha^2\beta-4ak\beta-4dk\beta,$$
$$r=-a^4\beta^2-2a^3d\beta^2-7a^2d^2\beta^2-8ad^3\beta^2-3d^4\beta^2-a^2\alpha\beta^2-2ad\alpha\beta^2-2d^2\alpha\beta^2+$$

$+5La^2\beta+6Lad\beta+Ld^2\beta+L\alpha\beta-k\beta^2+L^2,\ s=-ad^2\beta^3-d^3\beta^3+La\beta^2+Ld\beta^2,$
$k=K-a^4-\alpha a^2,\ n=N-d^4-\delta d^2,$

переменную c можно найти, используя формулу связи между переменными b *и c:*

$$c=\frac{L-a^3b-a^2bd-abd^2-bd^3-\alpha ab-\alpha bd-\beta d^2}{2b^2\left(a+d\right)+\beta b}.$$

Доказательство. В этом случае система уравнений, соответствующая уравнению (5) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a^4+3a^2bc+2abcd+b^2c^2+bcd^2+\alpha a^2+\alpha bc+\beta ac+\beta cd=K, \\ a^3b+2ab^2c+a^2bd+abd^2+2b^2cd+bd^3+\alpha ab+\alpha bd+\beta d^2+\beta bc=L, \\ a^3c+2abc^2+a^2cd+acd^2+2bc^2d+cd^3+\gamma a^2+\gamma bc+\delta ac+\delta cd=M, \\ a^2bc+2abcd+b^2c^2+3bcd^2+d^4+\gamma ab+\gamma bd+\delta bc+\delta d^2=N. \end{cases} \tag{6}$$

Оценка для переменной *a* имеет вид: $1\le a\le\sqrt[4]{K-7-2\alpha-2\beta}.$ Оценка для переменной *d* имеет вид: $1\le d\le\sqrt[4]{N-7-2\beta-2\delta}.$

Выразив из второго уравнения системы (6) переменную *c*:

$$c=\frac{L-a^3b-a^2bd-abd^2-bd^3-\alpha ab-\alpha bd-\beta d^2}{2b^2\left(a+d\right)+\beta b} \tag{7}$$

Подставив выражение (7) в первое уравнение системы (6), получим уравнение относительно переменной *b*:

$$pb^3+qb^2+rb+s=0 \tag{8}$$

где

$$p=-5a^6-14a^5d-19a^4d^2-20a^3d^3-15a^2d^4-6ad^5-d^6-6a^4\alpha-16a^3d\alpha-$$
$$-16a^2d^2\alpha-8ad^3\alpha-2d^4\alpha-a^2\alpha^2-2ad\alpha^2-d^2\alpha^2-4a^2k-8adk-4d^2k,$$
$$q=-5a^5\beta-11a^4d\beta-18a^3d^2\beta-22a^2d^3\beta-13ad^4\beta-3d^5\beta-6a^3\alpha\beta-12a^2d\alpha\beta-$$
$$-10ad^2\alpha\beta-4d^3\alpha\beta+4La^3+8La^2d+4Lad^2-a\alpha^2\beta-d\alpha^2\beta-4ak\beta-4dk\beta,$$
$$r=-a^4\beta^2-2a^3d\beta^2-7a^2d^2\beta^2-8ad^3\beta^2-3d^4\beta^2-a^2\alpha\beta^2-2ad\alpha\beta^2-2d^2\alpha\beta^2+$$
$$+5La^2\beta+6Lad\beta+Ld^2\beta+L\alpha\beta-k\beta^2+L^2,\ s=-ad^2\beta^3-d^3\beta^3+La\beta^2+Ld\beta^2,$$
$$k=K-a^4-\alpha a^2,\ n=N-d^4-\delta d^2.$$

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо для каждой возможной пары значений переменных *a* и *d* решать уравнение третьего порядка относительно переменной *b* и затем находить переменную *c*.

Заключение. В результате проведённого исследования было показано, что для решения задачи по нахождению целых положительных решений матричных уравнений полиномиального вида для матриц второго порядка можно использовать аналитические методы.

1. Буснюк, Н.Н. Математическое моделирование / Н.Н. Буснюк, А.А. Черняк. – Минск: Беларусь, 2014. – 214 с.