УДК 512.542

Оценки производной π-длины π-разрешимой группы, у которой π-холловы подгруппы свободны от *n*-ых степеней

Д.В. Грицук, А.А. Трофимук, Т.А. Артюшеня
Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Рассматриваются только конечные группы. Важным направлением теории групп является получение оценок инвариантов групп, у которых силовские подгруппы ограничены.

Напомним, что число n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При m = 2 говорят, что n свободно от квадратов, при m = 3 – от кубов.

В.С. Монахов установил зависимость инвариантов разрешимой группы от порядков силовских подгрупп. В частности, если порядок разрешимой группы G не делится на (n + 1)-е степени простых чисел, то производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3 + n.

В.С. Монаховым в 2012 году был предложен аналог производной длины для π-разрешимой группы, а именно понятие производной π-длины.

Вполне естественно развить этот результат на случай π-разрешимой группы и производной π-длины.

Цель статьи – установление зависимости оценки производной π-длины π-разрешимой группы от порядков силовских p-подгрупп (p ∈ π).

***Материал и методы.** В данной работе используются методы доказательства абстрактной теории групп.*

***Результаты и их обсуждение.** Следует отметить, что оценка производной длины, полученная В.С. Монаховым на основании общей методики исследования разрешимых групп с ограничениями на порядки силовских подгрупп, является неточной при малых значениях порядков. Например, если порядки силовских подгрупп разрешимой группы G свободны от кубов, т.е. n ≤ 2, из работы В.С. Монахова и А.А. Трофимука следует, что производная длина такой группы не превышает 3.*

Исследование оценок производной π-длины π-разрешимых групп впервые было проведено В.С. Монаховым, Д.В. Грицуком, О.А. Шпырко. Так, если порядок π-холловой подгруппы свободен от кубов, то все силовские p-подгруппы, p ∈ π, являются абелевыми. В.С. Монаховым и Д.В. Грицуком показано, что производная π-длина таких π-разрешимых групп не превышает $|\pi(G_\pi)|$. В работе Д.В. Грицука были найдены оценки производной π-длины π-разрешимой группы с бициклическими силовскими p-подгруппами, p ∈ π.

***Заключение.** Таким образом, в данной статье получены оценки производной π-длины π-разрешимой группы G у которой порядок π-холловой подгруппы свободен от n-ых степеней как в случае произвольного n, так и в случае малых его значений. Так, например, производная π-длина π-разрешимой группы, порядок π-холловой подгруппы которой свободен от кубов, не превышает 3.*

Полученные результаты являются новыми и позволяют использовать данную работу для дальнейшего исследования конечных частично разрешимых групп с заданными свойствами некоторых силовских подругп.

***Ключевые слова:** π-разрешимая группа, производная π-длина, π-холлова подгруппа.*

Estimations of the Derived π-Length of a π-Solvable Group in which Hall π-Subgroups are *n*-th Power-Free

D.V. Gritsuk, A.A. Trofimuk, T.A. Artiushenia
Educational Establishment «Brest State A.S. Pushkin University»

We consider only finite groups. An important direction of the theory of groups is the investigation of estimates of the invariants of groups for which the Sylow subgroups are bounded.

Let's recall that the number n is m-th power-free, if n is not divisible by p^m for all prime p. When m = 2, we say that n is square-free, if m = 2, we say that and n is cube-free m = 3.

V.S. Monakhov established the dependence of the invariants of a solvable group on the orders of Sylow subgroups. In particular, if the order of a solvable group G is not divisible by (n+1)-th powers of primes, then the derived length of $G/\Phi(G)$ does not exceed 3 + n.

V.S. Monakhov in 2012 proposed an analog of the derived length for a π-solvable group, namely, the concept of the derived π-length.

It is quite natural to develop this result in the case of a π-solvable group and the derived π-length.

The aim of the paper is to establish the dependence of the estimate of the derived π-length of a π-solvable group on the orders of Sylow p-subgroups (p $\in \pi$).

***Material and methods**. In this paper we used the methods of abstract group theory.*

***Findings and their discussion.** It should be noted that the estimate of the derived length obtained by V.S. Monakhov, on the basis of the general method of investigating soluble groups with restrictions on the orders of Sylow subgroups, is inaccurate for small orders. For example, if the orders of the Sylow subgroups of a solvable group G are cube-free, i.e. n ≤ 2, then from the work of V.S. Monakhov and A.A. Trofimuk it follows that the derived length of such a group does not exceed 3.*

The investigation of the estimates of the derived π-length of a π-solvable groups was first carried out by V.S. Monakhov, D.V. Gritsuk, O.A. Shpyrko. Thus, if the order of a Hall π-subgroup is cube-free, then all Sylow p-subgroups, p $\in \pi$, are abelian. V.S. Monakhov and D.V. Gritsuk showed that the derived π-length of a such π-solvable groups does not exceed $|\pi(G_\pi)|$. In the work of D.V. Gritsuk estimates of the derived π-length of a π-solvable groups with bicyclic Sylow p-subgroups, p $\in \pi$, are obtained.

***Conclusion.** Thus, in this paper we obtain estimates of the derived π-length of a π-solvable group G in which π-Hall subgroups are n-th power-free. Analogous result was obtained for small values of n. Thus, for example, the derived π-length of a π-solvable group in which the order of a Hall π-subgroup is cube-free does not exceed 3.*

The research findings are new and allow us to use this work for further investigation of finite partially solvable groups with given properties of certain Sylow subgroups.

***Key words:** π-solvable group, derived π-length, π-Hall subgroup.*

Рассматриваются только конечные группы.

Пусть *P* – множество всех простых чисел, а π – некоторое подмножество простых чисел. Дополнение к π во множестве *P* обозначается через π'. Группа называется π-группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π, и π'-группой – в противном случае.

Группа *G* называется π-разрешимой, если она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \qquad (1)$$

факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами. Данный ряд будем называть (π', π)-рядом группы *G*. Наименьшее число π-факторов среди всех нормальных (π', π)-рядов группы *G* называется π-длиной π-разрешимой группы и обозначается через $l_\pi(G)$.

В.С. Монаховым был предложен аналог производной длины для π-разрешимой группы. Пусть *G* – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами для всех *i*. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы *G* называется производной π-длиной π-разрешимой группы *G* и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Если $\pi(G) = \pi$, то значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы *G*.

В работе [1] изучены свойства производной π-длины π-разрешимой группы.

Напомним, что число *n* свободно от *m*-х степеней, если p^m не делит *n* для всех простых *p*. При *m* = 2 говорят, что *n* свободно от квадратов, при *m* = 3 – от кубов.

В.С. Монахов [2] установил зависимость инвариантов разрешимой группы от порядков ее силовских подгрупп: *если порядок разрешимой группы G не делится на (n + 1)-е степени простых чисел, то производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3 + n.*

Следует отметить, что оценка производной длины, полученная на основании общей методики исследования разрешимых групп с ограничениями на порядки силовских подгрупп, является неточной при малых значениях порядков. Например, если порядки силовских подгрупп разрешимой группы *G* свободны от кубов, т.е. $n \leq 2$, из [3] следует, что $d(G) \leq 3$, а из результата работы В.С. Монахова вытекает оценка $d(G/\Phi(G)) \leq 5$, где $d(G)$ – производная длина разрешимой группы *G*.

Вполне естественно развить эти результаты на случай π-разрешимой группы и производной π-длины.

Если порядок π-холловой подгруппы свободен от кубов, то все силовские *p*-подгруппы, $p \in \pi$, являются абелевыми. В работе [4, теорема 1] показано, что производная π-длина таких π-разрешимых групп не превышает $|\pi(G_\pi)|$, где G_π – π-холлова подгруппа.

Цель статьи – установление зависимости оценки производной π-длины π-разрешимой группы от порядков силовских *p*-подгрупп ($p \in \pi$).

Одним из основных результатов данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G – π-разрешимая группа.*

1. Если порядок π-холловой подгруппы свободен от кубов, то справедливы следующие утверждения:

a) если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 2$;

b) если $2 \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

2. Если порядок π-холловой подгруппы свободен от квадратов, то G разрешима и $l_\pi^a(G) \leq 2$.

Очевидно, что группы, порядки которых свободны от кубов, имеют бициклические силовские подгруппы. Так, в работе [5] были получены оценки производной π-длины в зависимости от строения силовских p-подгрупп, $p \in \pi$. В частности, *если G – π-разрешимая группа с бициклическими силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 6$.*

В настоящей работе показано, что данная оценка производной π-длины сохранится, если рассматривать небициклические силовские подгруппы порядков 2^3, 3^3, 2^4, 2^5.

Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G – π-разрешимая группа. Если небициклические силовские p-подгруппы π-холловой подгруппы, $p \in \pi$, имеют порядки 2^3, 3^3, 2^4, 2^5, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 6$. В частности, если $2 \notin \pi$, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq 3$.*

Зависимость оценки производной π-длины π-разрешимой группы от порядков силовских p-подгрупп ($p \in \pi$) установлена в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть G – π-разрешимая группа такая, что порядок любой силовской p-подгруппы, $p \in \pi$, свободен от n-ых степеней. Тогда $l_{\pi}^{a}(G) \leq 2(\rho(n)+\delta(n)+1)^2$. Здесь $\rho(n)$ – максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы $GL(n,\mathbf{P})$ над полем $\mathbf{P}$, $\delta(n) = max\{k \in \mathbf{N} \mid n \geq 2^k + 2k\text{-}2\}$.*

Вспомогательные результаты. Для доказательства основных результатов нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть G – π-разрешимая группа и t – натуральное число. Предположим, что $l_{\pi}^{a}(G/N) \leq t$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, но $l_{\pi}^{a}(G) > t$. Тогда:*

1) $O_{\pi'}(G) = 1$;
2) *в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа*;
3) $F(G) = O_p(G) = F(O_{\pi}(G))$ *для некоторого простого $p \in \pi$*;
4) $O_{p'}(G) = 1$ и $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.

Лемма 2 ([6, лемма VI.8.1]). *Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(2,p)$. Тогда H циклическая и $|H|$ делит (p^2-1).*

Лемма 3 [5, лемма 2.6]. *Если G – π-разрешимая группа и $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, то $l_{\pi}^{a}(G) \leq l_{\pi_1}^{a}(G) + l_{\pi_2}^{a}(G)$.*

Лемма 4 [7, теорема 2.16]. *Группа автоморфизмов циклической группы абелева.*

Лемма 5. *Если H – неприводимая подгруппа группы $GL(3,3)$, то $H \in \{Z_2 \times S_4, Z_{13}, A_4, S_4, Z_{26}, Z_2 \times A_4, Z_2 \times ([Z_{13}]Z_3), [Z_{13}]Z_3\}$. Здесь Z_n – циклическая группа порядка n, запись $G = [A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A.*

Доказательство. Используя вычисления в системе компьютерной алгебры GAP, получим заключение леммы.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{B} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначаются через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Лемма 6. *Пусть G – группа нечетного порядка, у которой небициклические силовские подгруппы имеют порядок 3^3. Тогда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, удовлетворяющая условиям леммы, но не принадлежащая $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Очевидно, что всякая фактор-группа наследует условия леммы. Тогда $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга $F = F(G)$. Так как G разрешима, то $F = C_G(F)$. Кроме того, $|F| = p^n$. Так как $F \leq P$, где P – силовская p-подгруппа. Тогда $|F| \leq p^2$ или $|F| = 3^3$.

Если $|F| = p$, то G/F циклическая и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Противоречие. Если $|F| = p^2$, то G/F изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2,p)$. По лемме 2 G/F циклическая и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Противоречие.

Если $|F| = 3^3$, то $F = P$ и G/F изоморфна неприводимой $3'$-подгруппе полной линейной группы $GL(3,3)$. По лемме 5 G/F изоморфна циклической группе Z_{13} и поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Противоречие. Значит, предположение о группе G неверное. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Лемма 7 [5, лемма 2.8]. *Пусть G – p-разрешимая группа с бициклической силовской p-подгруппой. Тогда* $l_p^a(G) \le 2$*, если* $p > 2$*, и* $l_p^a(G) \le 3$*, если p = 2.*

Лемма 8 [8, теорема 3.1]. *Пусть G – p-разрешимая группа,* G_p *– силовская p-подгруппа порядка* p^n*. Если p = 2, то* $l_p^a(G) \le 1 + \frac{n}{2}$.

Лемма 9 [9, теорема 1]. *Производная длина группы G порядка* p^n *не превышает* $\delta(n)+1$.

Лемма 10. *Пусть разрешимая группа G имеет свободный от n-ых степеней порядок, n – натуральное число. Тогда производная длина группы G не превышает* $\rho(n)+\delta(n)+1$.

Доказательство. Покажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(n)}$. По индукции можно считать, что $\Phi(G)=1$ и подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Кроме того, $C_G(F)=F$ и F – элементарная абелева подгруппа порядка p^k, $1 \le k \le n$. Поэтому фактор-группа G/F изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F)$. Поскольку $\mathrm{Aut}(F)$ изоморфна группе $GL(k,p)$ и неприводимая группа вполне приводима, то из определения функции $\rho(n)$ получаем, что $\rho(k) \le \rho(n)$ и $G/F \in \mathfrak{A}^{\rho(n)}$. Значит, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(n)}$. Так как F – нильпотентная группа, то F является прямым произведением своих силовских подгрупп F_p. Тогда $d(F) \le max\{d(F_p) \mid p \in \pi(F)\}$. Из леммы 9 следует, что $d(F) \le \delta(n)+1$. Тогда производная длина группы G не превышает $\rho(n)+\delta(n)+1$.

Лемма 11 [1, лемма 3]. *Если G – π-разрешимая группа, то* $l_\pi^a(G) \le l_\pi(G)d(G_\pi)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть G_π – π-холлова подгруппа группы G и N – произвольная нормальная подгруппа группы G. Тогда $G_\pi N/N$ – π-холлова подгруппа группы G/N. Так как $G_\pi N/N \cong G_\pi / G_\pi \cap N$, то порядок π-холловой подгруппы $G_\pi N/N$ свободен от кубов. Значит, условие теоремы наследуют все фактор-группы.

Пусть порядок π-холловой подгруппы свободен от кубов и $2 \notin \pi$.

1. *Группа G p-замкнута.*

По лемме 1 в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N, $O_{\pi'}(G)=1$, $F(G)=O_p(G)=F(O_\pi(G))$, $O_{p'}(G)=1$ и $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.

Так как в группе G все силовские p-подгруппы G_p свободны от кубов, то G_p абелевы для всех $p \in \pi$. Поэтому $l_p(G) \le 1$ для всех $p \in \pi$. Следовательно из того, что $F(G) \subseteq G_p$, вытекает $F(G)=G_p$ и $C_G(G_p)=G_p$. Значит, группа G p-замкнута, а следовательно, p-замкнута и π-холлова подгруппа G_π.

2. G_π / G_p *– абелева*.

Из условия теоремы следует, что порядок подгруппы G_p не превышает p^2. Если подгруппа G_p циклическая, то фактор-группа G/G_p изоморфна подгруппе группы автоморфизмов группы G_p. По лемме 4 фактор-группа G/G_p абелева. Значит, G_π/G_p также абелева. Тогда подгруппа G_p является элементарной абелевой порядка p^2. Очевидно, что $\Phi(G_p)=1$ по лемме 3.25 [7]. Из результата Бэра следует, что $\Phi(G)=\Phi(G)\cap G_p=\Phi(G_p)$ и, аналогично, $\Phi(G_\pi)=\Phi(G_\pi)\cap G_p=\Phi(G_p)$. Тогда $\Phi(G_\pi)=1$. Легко показать, что $F(G_\pi)=G_p$. Действительно, пусть $F(G_\pi)=F_p \times F_{p'}$. Так как подгруппа $F_{p'}$ нормальна в группе G_π, то $F_{p'} \subseteq C_{G_\pi}(G_p) \subseteq C_G(G_p)=G_p$. Противоречие. Значит, $F(G_\pi)$ – p-группа и $F(G_\pi)=G_p$. Таким образом, $F(G_\pi)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы G_π. Возможны варианты: либо $F(G_\pi)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G_π, либо прямые сомножители N_1 и N_2 будут минимальными нормальными подгруппами порядка p. В первом случае фактор-группа G_π/G_p изоморфна неприводимой подгруппе нечетного порядка группы $GL(2,p)$. По лемме 2 G_π/G_p абелева. Во втором случае

$$G_\pi/G_p = G_\pi/C_{G_\pi}(G_p) = G_\pi/C_{G_\pi}(N_1)\cap C_{G_\pi}(N_1) \cong\le G_\pi/C_{G_\pi}(N_1)\times G_\pi/C_{G_\pi}(N_1).$$

Фактор-группы $G_\pi/C_{G_\pi}(N_i)$ абелевы, как подгруппы группы автоморфизмов циклической группы. Поэтому G_π/G_p абелева.

3. $l_\pi^a(G) \le 2$.

Так как G_π/G_p абелева, а значит, $l_\pi^a(G/G_p) \le 1$. Поскольку G_p абелева и $d(G_p)=1$, то $l_\pi^a(G) \le l_\pi^a(G/G_p)+d(G_p) \le 1+1=2$.

Пусть $\pi = \pi_1 \cup \{2\}$. Из леммы 3 следует, что $l_\pi^a(G) \le l_{\pi_1}^a(G) + l_2^a(G)$. Так как G_2 абелева, то $l_2^a(G) \le 1$. Из п. 3 следует, что $l_{\pi_1}^a(G) \le 2$. Поэтому $l_\pi^a(G) \le 2+1=3$.

Пусть порядок π-холловой подгруппы свободен от квадратов. Повторяя доказательство п. 1 получим, что группа G p-замкнута, $p \in \pi$ и $C_G(G_p) = G_p$. Из условия теоремы следует, что порядок подгруппы G_p равен p. Тогда фактор-группа G/G_p – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p. Очевидно, что в этом случае группа G будет разрешимой, производная длина группы G не превышает 2, а следовательно, $l_\pi^a(G) \le 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Пусть $\pi = \pi_1 \cup \{2\}$. Из леммы 3 вытекает, что $l_\pi^a(G) \le l_{\pi_1}^a(G) + l_2^a(G)$. Из леммы 6 следует, что $G_{\pi_1} \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Тогда $K = (G_{\pi_1})' \in \mathfrak{N}$. Ввиду того, что условие теоремы наследуют все фактор-группы, из леммы 1 вытекает, что $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$ и $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$, где $p \in \pi_1$. Очевидно, что K – p-группа. Так как $G_{\pi_1}/K = (G_{\pi_1})_p (G_{\pi_1})_{p'}/K = ((G_{\pi_1})_p/K)((G_{\pi_1})_{p'}K/K)$, то $(G_{\pi_1})_{p'}K/K$ – абелева подгруппа группы G_{π_1}/K. Значит, $(G_{\pi_1})_{p'}$ абелева. Тогда $l_{\pi_1}^a(G) \le l_{\pi_1 \setminus \{p\}}^a(G) + l_p^a(G) \le 1 + l_p^a(G)$. Так как силовская подгруппа G_p, $p \in \pi_1$, либо бициклическая, либо порядка 3^3, то $l_p^a(G) \le 2$. Таким образом, $l_{\pi_1}^a(G) \le 3$. Так как силовская подгруппа G_2 либо бициклическая, либо порядка 2^3, 2^4, 2^5, то по лемме 7 и лемме 8 $l_2^a(G) \le 3$. Таким образом, $l_\pi^a(G) \le 3+3=6$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Из леммы 11 вытекает, что $l_\pi^a(G) \le l_\pi(G) d(G_\pi)$. По [10, теорема 1] $l_\pi(G) \le 2d(G_\pi)$. Тогда $l_\pi^a(G) \le 2(d(G_\pi))^2$. Поэтому из леммы 10 следует, что $l_\pi^a(G) \le 2(\rho(n) + \delta(n) + 1)^2$.

Заключение. Таким образом, в данной статье получены оценки производной π-длины π-разрешимой группы G порядок π-холловой подгруппы которой свободен от n-ых степеней как в случае произвольного n, так и вслучае малых его значений. Так, например, производная π-длина π-разрешимой группы, у которой порядок π-холловой подгруппы свободен от кубов, не превышает 3. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях конечных частично разрешимых групп с заданными свойствами некоторых силовских подрупп.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф17М-063).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Грицук, Д.В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
2. Монахов, В.С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.
3. Монахов, В.С. Конечные группы, силовские подгруппы которых либо циклические, либо порядка p^2 / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2008. – Т. 47, № 2. – С. 139–145.
4. Monakhov, V.S. On derived π-length of a finite π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V.S. Monakhov, D.V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, № 2. – P. 233–241.
5. Грицук, Д.В. О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1(15). – С. 61–66.
6. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
7. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.
8. Грицук, Д.В. Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы / Д.В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3(20). – С. 58–60.
9. Mann, A. The derived length of p-groups / A. Mann // Journal of Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 263–267.
10. Черников, Н.С. О π-длине конечных π-разрешимыхгрупп / Н.С. Черников, А.П. Петравчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: Труды Института математики АН Украины. – Киев, 1993. – С. 393–405.

R E F E R E N C E S

1. Gritsuk D.V., Monakhov V.S., Shpyrko O.A. *Vestnik BGU*, [Journal of BSU], Series 1, 2012, 3, pp. 90–95.
2. Monakhov V.S. *Algebra i logika* [Algebra and Logics], 2004, 43(4), pp. 411–424.
3. Monakhov V.S., Trofimuk A.A. *Izvestiya Gomelskogo gosuniversiteta im. F. Skorini* [Proceedings of F. Skorina Gomel State University], 2008, 47(2), pp. 139–145
4. Monakhov V.S. On derived π-length of a finite π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V.S. Monakhov, D.V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, № 2. – P. 233–241.
5. Gritsuk D.V., Monakhov V.S., Shpyrko O.A. *Problemi fiziki, matematiki i tekhniki* [Problems of Physics, Mathematics and Technology], 2013, 1(14), pp. 61–66.
6. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
7. Monakhov V.S. *Vvedeniye v teoriyu konechnykh grupp i ikh kjlassov* [Introduction to the Theory of Finite Groups and their Classes], Minsk, Vysheishaya shkola, 2006.
8. Gritsuk D.V. *Problemi fiziki, matematiki i tekhniki* [Problems of Physics, Mathematics and Technology], 2014, 3(20), pp. 58–60.
9. Mann, A. The derived length of p-groups / A. Mann // Journal of Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 263–267.
10. Chernikov N.S., Petravchuk A.P. *Beskonechniye gruppi i primykayushchiye algebraicheskiye strukturi: Trudi Instituta matematiki AN Ukraini* [Infinite Groups and Adjoining Algebraic Structures: Proceedings of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Ukraine], 1993, pp. 393–405.

Поступила в редакцию 13.09.2017

Адрес для корреспонденции: e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com – Трофимук А.А.