УДК 512.542

Инъекторы и подгруппы Фишера конечных групп

С.Н. Воробьев
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В настоящей работе исследуются взаимосвязи между инъекторами и подгруппами Фишера для множеств Фиттинга. Множеством Фиттинга называется непустое множество $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G, если, во-первых, из того, что $T \triangleleft \triangleleft S \in \mathfrak{F}$, выполняется $T \in \mathfrak{F}$; во-вторых, из того, что $S, T \in \mathfrak{F}$ и $S, T \triangleleft ST$ следует, что $ST \in \mathfrak{F}$; в-третьих, из того, что $S \in \mathfrak{F}$ и $x \in \mathfrak{F}$ всегда будет следовать, что $S^x \in \mathfrak{F}$. Множество Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется множеством Фишера, если из условий $L \in \mathfrak{F}$, $L \leq G$, $K \triangleleft L$, $K \leq H \leq L$ и H/K – p-группа для некоторого простого p выполняется, что $H \in \mathfrak{F}$. Основной результат работы – теорема о том, что $\mathfrak{F}$-инъектор группы G является $\mathfrak{F}$-подгруппой Фишера G тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является π-насыщенным множеством Фишера π-разрешимой группы G.

Ключевые слова: *множество Фиттинга группы G, $\mathfrak{F}$-инъектор, $\mathfrak{F}$-подгруппа Фишера.*

Injectors and Fischer Subgroups of Finite Groups

S.N. Vorobyev
Education establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

In this paper we investigate the interconnection between injectors and Fischer subgroups for Fitting sets. A non-empty set of $\mathfrak{F}$ subgroups of a group G is called a Fitting set of G if the following three conditions are satisfied: (1) if $T \triangleleft \triangleleft S \in \mathfrak{F}$, then $T \in \mathfrak{F}$; (2) $S, T \in \mathfrak{F}$ and $S, T \triangleleft ST$, then $ST \in \mathfrak{F}$; and (3) if $S \in \mathfrak{F}$ and $x \in \mathfrak{F}$, then $S^x \in \mathfrak{F}$. A Fischer set of G is a Fitting set $\mathfrak{F}$ of G which has the following property: if $K \triangleleft L \in \mathfrak{F}$, $L \leq G$, $K \leq H \leq L$ and if H/K is a nilpotent subgroup L/K, then $H \in \mathfrak{F}$. It is proved that an $\mathfrak{F}$-injector of a group G is a Fischer $\mathfrak{F}$-subgroup if and only if $\mathfrak{F}$ is π-saturated a Fischer set of π-solvable group G.

Key words: *Fitting set of group G, $\mathfrak{F}$-injector, Fischer $\mathfrak{F}$-subgroup.*

В теории конечных разрешимых групп один из основополагающих результатов был получен Гашюцем в работе [1], где доказано, что для любой насыщенной формации F в каждой конечной разрешимой группе существуют F-покрывающие подгруппы и любые две из них сопряжены. Заметим, что если формация $\mathsf{F}=\mathsf{S}_\pi$ классу всех разрешимых π-групп, и, в частности, $\mathsf{F}=\mathsf{N}_p$ классу всех p-групп, то следствиями указанного результата Гашюца являются фундаментальные теоремы: теорема Холла и теорема Силова в разрешимом случае. Напомним, что если F – формация, то подгруппу $E \in \mathsf{F}$ группы G называют F-покрывающей, если E покрывает каждый фактор из F всякой промежуточной группы между E и G, т.е. из $E \leq H \leq G$, $K \triangleleft H$ и $H/K \in \mathsf{F}$ следует $H=EK$.

Дуализируя понятие F-покрывающей подгруппы, Фишер [2] для этой цели использует понятие класса Фиттинга F и определяет в конечной разрешимой группе G подгруппу F из F, которая содержит все нормальные F-подгруппы каждой промежуточной группы между F и G. Такие подгруппы называют в настоящее время F-подгруппами Фишера (см. IX.3.1 [3]). Примечателен тот факт, что Фишером [2] было установлено существование этих подгрупп в любой конечной разрешимой группе для каждого класса Фиттинга F, а также доказана их сопряженность в случае, когда класс Фиттинга F замкнут относительно взятия подгрупп вида PN, где P – силовская p-подгруппа F-группы X и N – нормальная подгруппа X.

Вместе с тем позднее известный результат в теории классов конечных разрешимых групп был получен Гашюцом, Фишером и Хартли [4], которые показали, что для любого класса Фиттинга F в любой конечной разрешимой группе G существуют F-инъекторы и любые два из них сопряжены. При этом F-инъектором группы G называют такую подгруппу V группы G, что $V \cap N$ является максимальной из подгрупп, принадлежащих F, для всякой субнормальной подгруппы N группы G. Понятно,

что понятие F-инъектора синтезирует понятие холловой π-подгруппы и силовской p-подгруппы и поэтому следствиями теоремы Гашюца–Фишера–Хартли являются также теоремы Силова и Холла.

Можно показать, что каждый F-инъектор группы является ее F-подгруппой Фишера. Однако при исследовании взаимосвязи между F-инъекторами и F-подгруппами Фишера в работе [5] Дарком было доказано, что существуют классы Фиттинга и конечные разрешимые группы, для которых F-подгруппы Фишера не сопряжены и не являются F-инъекторами. В связи с этим актуальна задача описания таких классов Фиттинга, для которых в конечной группе (в общем случае не обязательно разрешимой) ее F-инъекторы и F-подгруппы Фишера образуют один и тот же класс сопряженных подгрупп.

Реализация аналогичной задачи для множеств Фишера частично разрешимой группы – основная цель настоящей работы. Заметим, что разрешимый случай указанной задачи исследовался Андерсеном [6] и Фельдманом [7–8].

1. Предварительные сведения. Множество групп X называют *классом групп*, если из условия $G\in\mathsf{X}$ и $H\cong G$ следует, что $H\in\mathsf{X}$, т.е. наряду с каждой группой множество X содержит и все изоморфные копии этой группы. Если группа $G\in\mathsf{X}$, то ее будем называть X-*группой*.

Определение 1.1 [2]. Класс групп X называется

(1) *формацией*, если F замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений, т.е. если $G\in\mathsf{F}$ и $N\lhd G$, то $G/N\in\mathsf{F}$, и если M и N – нормальные подгруппы группы H такие, что $H/M\in\mathsf{F}$ и $H/N\in\mathsf{F}$, то $H/M\cap N\in\mathsf{F}$;

(2) *классом Фиттинга*, если F замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных F-подгрупп.

Если F – непустая формация, то из определения следует, что в любой группе G существует наименьшая нормальная подгруппа G^{F}, фактор-группа по которой принадлежит F. Ее называют F-корадикалом группы G. В случае, когда F – непустой класс Фиттинга, из определения следует, что в любой группе G существует наибольшая нормальная подгруппа G_{F}, принадлежащая F. Такую подгруппу называют F-радикалом группы G.

Пусть F – класс групп. Тогда подгруппу M группы G называют F-*максимальной в* G, если $M\in\mathsf{F}$ и из $M\leq H\leq G$, где $H\in\mathsf{F}$, следует $M=H$.

Определение 1.2 [1]. Пусть F – класс Фиттинга. Подгруппа V группы G называется F-*инъектором* G, если $V\cap N$ – F-максимальная подгруппа N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Определение 1.3 [9]. Класс Фиттинга F называется *классом Фишера*, если из $G\in\mathsf{F}$, $K\lhd G$, $K\leq H\leq G$ и $H/K\in\mathsf{N}_p$ для некоторого простого p всегда следует, что $H\in\mathsf{F}$.

Таким образом, классы Фишера – классы Фиттинга, замкнутые относительно подгрупп вида PN, где P – силовская p-подгруппа F-группы G и N – нормальная подгруппа G. В частности, все классы Фиттинга, замкнутые относительно подгрупп, являются классами Фишера.

Через S будем обозначать класс всех разрешимых групп. Другие обозначения и определения, которые мы не приводим, можно найти в [3; 10]. В работе рассматриваются только конечные группы.

2. Множества Фиттинга и F-инъекторы. В настоящем разделе мы локализуем понятия класса Фиттинга, радикала и инъектора, определяя их аналоги в группе. Эта идея изучения групп впервые была предложена Шеметковым [11] для произвольной группы и для разрешимой группы Андерсеном [6].

Определение 2.1 [11]. Непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называется *множеством Фиттинга* G, если выполняются следующие условия:

1) если $T\lhd\lhd S\in\mathcal{F}$, то $T\in\mathcal{F}$;
2) если S, $T\in\mathcal{F}$ и S, $T\lhd ST$, то $ST\in\mathcal{F}$;
3) если $S\in\mathcal{F}$ и $x\in\mathcal{F}$, то $S^x\in\mathcal{F}$.

Таким образом, непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G является множеством Фиттинга, если $\mathcal{F}$ замкнуто относительно взятия субнормальных подгрупп, произведений нормальных $\mathcal{F}$-подгрупп и внутренних автоморфизмов групп G.

Взаимосвязь между множеством Фиттинга и классами Фиттинга раскрывает следующий

Пример 2.2. Пусть F – класс Фиттинга, G – группа, $\mathcal{F}=\{H\leq G\colon H\in\mathsf{F}\}$. По определению класса Фиттинга множество $\mathcal{F}$ является множеством Фиттинга. Такое множество называют *следом класса Фиттинга* F *в* G. Его обозначают $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}}(G)$ (см. VIII.2.2 (a) из [3]).

Итак, каждому непустому классу Фиттинга F и группе G соответствует множество Фиттинга $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}}(G)$, хотя обратное в общем случае неверно: не всякое множество Фиттинга является следом класса Фиттинга, что подтверждает пример VIII.2.2 из [3].

Хорошо известно, что на множестве всех классов Фиттинга определена операция умножения классов Фиттинга. Напомним, что если F и H –

классы Фиттинга, то их произведение $\mathsf{FH}=(G\colon G/G_{\mathsf{F}} \in \mathsf{H})$. Мы определим в дальнейшем аналог такого произведения для множества Фиттинга $\mathcal{F}$ и класса Фиттинга X.

Определение 2.3 (см. VIII.2.4 [3]). Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G. Подгруппа $G_{\mathcal{F}}$, порожденная всеми субнормальными $\mathcal{F}$-подгруппами группы G, называется *$\mathcal{F}$-радикалом группы G*.

Мы будем использовать следующее известное свойство $\mathcal{F}$-радикала группы.

Лемма 2.4 (VIII.2.4 [3]). *Если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $N \lhd \lhd G$, то $N_{\mathcal{F}}=N\cap G_{\mathcal{F}}$.*

Определение 2.5. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и X – непустой класс Фиттинга. Множество $\mathcal{F}\circ\mathsf{X}=\{S\leq G\colon S/S_{\mathcal{F}}\in\mathsf{X}\}$ назовем *произведением $\mathcal{F}$ и X*.

Теорема 2.6. *Произведение множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G и непустого класса Фиттинга X является множеством Фиттинга группы G.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}=\mathcal{F}\circ\mathsf{X}$, $S\in\mathcal{M}$ и $K\lhd\lhd S$. Тогда $S/S_{\mathcal{F}}\in\mathsf{X}$. Так как по лемме 2.4 $K_{\mathcal{F}}=K\cap S_{\mathcal{F}}$, то $K/K_{\mathcal{F}}=K_{\mathcal{F}}/K\cap S_{\mathcal{F}}\cong KS_{\mathcal{F}}/S_{\mathcal{F}}\lhd\lhd S/S_{\mathcal{F}}$. Следовательно, из того, что X – класс Фиттинга, вытекает $K/K_{\mathcal{F}}\in\mathsf{X}$ и поэтому $K\in\mathcal{M}$.

Пусть теперь $\mathcal{M}$-подгруппы S и T нормальны в ST. Покажем, что $ST\in\mathcal{M}$. По лемме 2.4 $S_{\mathcal{F}} = (ST)_{\mathcal{F}}\cap S$ и $T_{\mathcal{F}}=(ST)_{\mathcal{F}}\cap T$. Следовательно, ввиду изоморфизмов $S/S\cap(ST)_{\mathcal{F}}\cong S(ST)_{\mathcal{F}}/(ST)_{\mathcal{F}}$ и $T/T\cap(ST)_{\mathcal{F}}\cong T(ST)_{\mathcal{F}}/(ST)_{\mathcal{F}}$ получаем, что подгруппы $S(ST)_{\mathcal{F}}/(ST)_{\mathcal{F}}$ и $T(ST)_{\mathcal{F}}/(ST)_{\mathcal{F}}$ являются нормальными X-подгруппами группы $ST/(ST)_{\mathcal{F}}$. Так как X – класс Фиттинга, то их произведение $(S(ST)_{\mathcal{F}}/(ST)_{\mathcal{F}})(T(ST)_{\mathcal{F}}/(ST)_{\mathcal{F}})=ST/(ST)_{\mathcal{F}}\in\mathsf{X}$. Следовательно, $ST\in\mathcal{M}$.

Остается проверить, что $S\in\mathcal{M}$ влечет $S^x\in\mathcal{M}$. Так как $S/S_{\mathcal{F}}\in\mathsf{X}$ и X – класс Фиттинга, то $(S/S_{\mathcal{F}})^{xS_{\mathcal{F}}}\in\mathsf{X}$ для $x\in G$. Следовательно, $S^x(S^x)_{\mathcal{F}}\in\mathsf{X}$ и $S^x\in\mathcal{M}$.

Теорема доказана.

Следствие 2.7. *Если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $\mathcal{M}$ – множество всех $\mathcal{F}\circ\mathsf{S}$-подгрупп G, то $\mathcal{M}$ является множеством Фиттинга G.*

Понятие $\mathcal{F}$-инъектора группы G для множества Фиттинга $\mathcal{F}$ определяется аналогично, как и понятие F-инъектора G для класса Фиттинга F, т.е. подгруппу V группы G называют $\mathcal{F}$-инъектором G, если $V\cap N$ является $\mathcal{F}$-максимальной подгруппой G для любой субнормальной подгруппы N группы G. Заметим, что если множество Фиттинга $\mathcal{F}=\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}}(G)$, то $\mathcal{F}$-инъектор группы G – это, в точности, F-инъектор G. В связи с этим следующая лемма обобщает указанную ранее теорему Гашюца–Фишера–Хартли из [4].

Лемма 2.8 (теорема 2.4.27 [12]). *Для каждого множества Фиттинга $\mathcal{F}\circ\mathsf{S}$-группы G в G существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.*

Мы будем использовать также следующую известную характеризацию $\mathcal{F}$-инъекторов.

Лемма 2.9 (свойство 2.3 [13]). *Если T – $\mathcal{F}\circ\mathsf{S}$-подгруппа группы G и $1=T_0\lhd\ldots\lhd T_n=T$ – такой нормальный ряд группы, в котором каждый фактор T_{i+1}/T_i для $i\in\{0,1,..,n-1\}$ является либо нильпотентной группой, либо совершенной группой, то подгруппа V группы T является $\mathcal{F}$-инъектором G тогда и только тогда, когда и $V\cap T_i$ – $\mathcal{F}$-максимальная подгруппа T_i для $i\in\{0,\ldots,n\}$.*

Лемма 2.10. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга $\mathcal{F}\circ\mathsf{S}$-группы G. Если $V\leq H\leq G$ и V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то V – $\mathcal{F}$-инъектор группы H.*

Доказательство. Пусть $\{G_i\}$ – нормальный ряд группы G с такими же факторами, как и в условии леммы 2.9 и $H_i=H\cap G_i$ для $i\in\{0,1,..,n\}$. Рассмотрим нормальный ряд $1=H_0\lhd H_1\lhd\ldots\lhd H_n=H$. Ввиду изоморфизма $H_{i+1}/H_i\cong(H\cap G_{i+1})G_i/G_i$ заключаем, что каждый фактор H_{i+1}/H_i группы H удовлетворяет условиям леммы 2.9. Кроме того, $V\cap H_i=V\cap H\cap G_i=V\cap G_i$ и поэтому подгруппа $V\cap H_i$ $\mathcal{F}$-максимальна в H_i для $i\in\{0,1,..,n\}$. Следовательно, по лемме 2.9 подгруппа V – $\mathcal{F}$-инъектор H.

Лемма доказана.

Для изучения свойств $\mathcal{F}$-инъекторов во множестве Фиттинга группы мы будем использовать также следующую характеризацию $\mathcal{F}$-инъекторов, которая впервые в классе S была получена Дарком [5].

Лемма 2.11. *Пусть T – $\mathcal{F}\circ\mathsf{S}$-подгруппа группы G, $M\lhd T$ и V – такая $\mathcal{F}$-подгруппа T, что $T=MV$. Тогда подгруппа V группы T является $\mathcal{F}$-инъектором T в том и только в том случае, если $V\cap M$ – $\mathcal{F}$-инъектор M.*

Доказательство. Так как V – $\mathcal{F}$-подгруппа T и $V\cap M$ является $\mathcal{F}$-инъектором M для произвольной нормальной подгруппы M, то по определению $\mathcal{F}$-инъектора подгруппа V – $\mathcal{F}$-инъектор группы T.

Докажем обратное утверждение. Пусть $1=T_0 \lhd T_1 \ldots \lhd T_n=T$ – такой главный ряд группы T, что $T_m=M$ для некоторого m и каждый фактор T_i/T_{i-1} имеет те же свойства, что и факторы ряда из леммы 2.9. Тогда, учитывая лемму 2.9, достаточно показать, что для каждого i подгруппа $T_i \cap V$ является $\mathfrak{F}$-максимальной в G_i. Если $0 \le i \le m$, то это верно, ввиду того, что подгруппа $V \cap M$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы M. Предположим, что $m<i \le n$ и $T_i \cap V<U \le T_i$, причем $U \in \mathfrak{F}$. По условию $T=MV$. Следовательно, $T_i=M(T_i \cap V)$ и $U=(M \cap U)(T_i \cap V)$. Отсюда получаем, что $M \cap V<M \cap U \le M$. Так как $M \cap U \lhd U \in \mathfrak{F}$, то $M \cap U \in \mathfrak{F}$. Получаем противоречие с тем, что подгруппа $M \cap V$ является $\mathfrak{F}$-максимальной в M.

Лемма доказана.

Примечателен тот факт, что в общем случае, если известны F-инъекторы группы для класса Фиттинга F, то не представляется возможным их применить для описания F-инъекторов фактор-групп этой группы. Этот пробел устраним в случае $\mathfrak{F}$-инъектора группы для ее множества Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – множество Фиттинга группы G, то будем обозначать через $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$ множество всех $\mathfrak{F}$-инъекторов группы G.

Теорема 2.12. *Пусть $\mathfrak{F}$ – множество Фиттинга группы G и $K \lhd G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *множество* $\mathfrak{F}_{G/K}=\{SK/K$: SK – $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-*группа и* $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(SK)\}$ *является множеством Фиттинга группы* G/K;

2) *если* V – $\mathfrak{F}$-*инъектор группы* G, то VK/K – $\mathfrak{F}_{G/K}$-*инъектор группы* G/K.

Доказательство. Заметим, что ввиду леммы 2.8 множество $\mathfrak{F}_{G/K} \ne \varnothing$. Пусть $G/K \in \mathfrak{F}_{G/K}$ и $L/K \lhd SK/K$, где S – $\mathfrak{F}$-инъектор $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группы SK. Покажем, что $L/K \in \mathfrak{F}_{G/K}$. Так как $L \lhd SK$, то по определению $\mathfrak{F}$-инъектора подгруппа $S \cap L$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы L. Кроме того, $L=SK \cap L=(S \cap L)K$. Следовательно, $L/K=(S \cap L)K/K$ и $S \cap L$ $\mathfrak{F}$-инъектор $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группы L по теореме 2.6. Это означает, что $L/K \in \mathfrak{F}_{G/K}$.

Предположим $T_iK/K \in \mathfrak{F}_{G/K}$, причем T_i – $\mathfrak{F}$-инъектор $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группы T_iK и $T_iK \lhd (T_1K)(T_2K)$ для $i \in \{1,2\}$. Так как $T_1K \in \mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$ и $T_2K \in \mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$ и по теореме 2.6 $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$ – множество Фиттинга группы G, то $T=(T_1K)\cdot(T_2K)$ является $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группой. Следовательно, по лемме 2.8 в группе T существует $\mathfrak{F}$-инъектор W. По определению $\mathfrak{F}$-инъектора подгруппа $R_i=W \cap T_iK$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы T_iK. Учитывая сопряженность любых двух $\mathfrak{F}$-инъекторов группы T_iK, по лемме 2.8 заключаем, что подгруппы R_i и T_i сопряжены в T_iK для $i \in \{1,2\}$. Отсюда следует равенство $R_iK=T_iK$. Тогда $T=T_1K \cdot T_2K=R_1K \cdot R_2K=R_1R_2K \le WK \le T$. Следовательно, $T/K=WK/K$ и поэтому $T/K \in \mathfrak{F}_{G/K}$ и условие 2) определения множества Фиттинга для $\mathfrak{F}_{G/K}$ выполняется.

Пусть S – $\mathfrak{F}$-инъектор $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группы SK и $g \in G$. Так как по определению множества Фиттинга $\mathfrak{F}^g=\mathfrak{F}$, то S^g – $\mathfrak{F}$-инъектор $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группы S^gK. Следовательно, $S^gK/K \in \mathfrak{F}_{G/K}$ и это завершает доказательство того, что $\mathfrak{F}_{G/K}$ – множество Фиттинга группы G/K.

Докажем утверждение 2). Пусть V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G и L/K – любая субнормальная подгруппа группы G/K. По определению $\mathfrak{F}$-инъектора $V \cap L$ – $\mathfrak{F}$-инъектор группы L. Следовательно, по лемме 2.10 $V \cap L$ – $\mathfrak{F}$-инъектор группы $(V \cap L)K$. Отсюда вытекает, что подгруппа $(V \cap L)K/K$ принадлежит множеству Фиттинга $\mathfrak{F}_{G/K}$. Поэтому, чтобы показать, что такая подгруппа является $\mathfrak{F}_{G/K}$-инъектором группы G/K, достаточно выяснить $\mathfrak{F}_{G/K}$-максимальность ее в группе L/K. Предположим, что SK/K является $\mathfrak{F}_{G/K}$-подгруппой L/K, содержащей $(V \cap L)K/K$, причем S – $\mathfrak{F}$-инъектор группы SK. По лемме 2.10 подгруппа $V \cap L$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы SK. Ввиду леммы 2.8 $\mathfrak{F}$-инъекторы $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группы SK сопряжены. Следовательно, подгруппы $V \cap L$ и S сопряжены в SK и поэтому $(V \cap L)K=SK$. Таким образом, $(V \cap L)K/K=VK/K \cap L/K$ является $\mathfrak{F}_{G/K}$-максимальной подгруппой в L/K. Значит, VK/K – $\mathfrak{F}_{G/K}$-инъектор группы G/K и утверждение 2) доказано.

Теорема доказана.

3. Множества Фишера и его свойства. В теории классов конечных групп многие результаты связаны с применением частично наследственных классов Фиттинга для описания общей структуры как самих классов групп, так и канонических подгрупп. Такие исследования были впервые проведены в классе S Фишером [2] и Хартли [10]. Напомним, что, по предложению Хартли [10], класс Фиттинга F называют *классом Фишера*, если из условия $G \in \mathsf{F}$, $K \lhd G$, $K \le H \le G$ и $H/K \in \mathsf{N}_p$ для некоторого простого числа p всегда следует $H \in \mathsf{F}$. Понятно, что каждый наследственный класс Фиттинга является классом Фишера. Более того, семейство классов Фишера вклю-

чает все локальные классы Фиттинга (см. [14]). В настоящем разделе мы локализуем понятие класса Фишера, определяя множество Фишера группы.

Определение 3.1 (см. также VIII.4.3 [3]). Пусть $\mathfrak{F}$ – множество Фиттинга группы G и $L\leq G$. Тогда $\mathfrak{F}$ назовем *множеством Фишера* G, если из условий $L\in\mathfrak{F}$, $K\lhd L$, $K\leq H\leq L$ и H/K – p-группа для некоторого простого p следует $H\in\mathsf{F}$.

Очевидно, что каждое множество Фиттинга, замкнутое относительно подгрупп, является множеством Фишера. Обширность семейства множеств Фишера группы G подчеркивает тот факт, что эти множества могут быть получены как следы классов Фишера.

Напомним, что подгруппа U группы G называется p-нормально вложенной в G, если каждая силовская p-подгруппа P из U является силовской p-подгруппой ее нормального замыкания $\langle P^G\rangle$. Подгруппу называют *нормально вложенной в* G, если она p-нормально вложена для всех простых p.

Для доказательства основного результата работы мы будем использовать следующие свойства множеств Фишера, которые представляет

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– множество Фишера группы* G. *Тогда справедливы утверждения*:

1) *если* $L\leq G$, *то множество Фиттинга подгруппы* L *является множеством Фишера*;

2) *если* $K\lhd G$, *то множество Фиттинга* $\mathfrak{F}_{G/K}$ *является множеством Фишера группы* G/K;

3) *если* G – $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-*группа, то* $\mathfrak{F}$-*инъекторы* G *являются нормально вложенными подгруппами* G.

Доказательство. Утверждение 1) теоремы очевидно. Докажем утверждение 2). Пусть $SK/K\in\mathfrak{F}_{G/K}$, где SK – $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группа с $\mathfrak{F}$-инъектором S. Предположим, что $L/K\lhd SK/K$, $L/K\leq H/K\leq SK/K$ и $(H/K)/(L/K)$ – p-группа для некоторого простого p.

Докажем, что $H/K\in\mathfrak{F}_{G/K}$. Так как $H/K/L/K\cong H/L$, то H/L является p-группой. Заметим, что $H/L=(H\cap S)L/L\cong(H\cap S)/(H\cap S\cap L)=$ $=(H\cap S)/(L\cap S)$ и поэтому фактор $(H\cap S)/(S\cap L)$ является p-группой группы $S/(L\cap S)$. Так как S – $\mathfrak{F}$-инъектор SK и $\mathfrak{F}$ – множество Фишера, то из условий $S\in\mathfrak{F}$, $L\cap S\lhd S$, $L\cap S\leq H\cap S\leq S$ и $(H\cap S)/(L\cap S)$ p-группа следует $H\cap S\in\mathfrak{F}$. Теперь подгруппа $(H\cap S)\cap K=S\cap K$ – $\mathfrak{F}$-инъектор группы K и $(H\cap S)K=H$. Кроме того, H/L – p-группа и L – $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группа. Следовательно, $H\in\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$. Таким образом, выполняются все условия леммы 2.11. Значит, подгруппа $H\cap S$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы H. Это означает, что $H/K\in\mathfrak{F}_{G/K}$ и утверждение 2) доказано.

Докажем утверждение 3). Предположим, что утверждение неверно и пара $(G, \mathfrak{F})$ – контрпример с группой G наименьшего порядка. Так как G – $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группа, то по лемме 2.8 в G существует $\mathfrak{F}$-инъектор V. Пусть для некоторого простого p силовская p-группа V_p группы V такова, что V_p не является силовской p-подгруппой группы $K=\langle V_p^G\rangle$, т.е. не существует в G нормальных подгрупп, силовские p-подгруппы которых совпадают с V_p. Если $G_{\mathfrak{F}}=1$, то из того, что G является $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группой, следует разрешимость группы G и по теореме VIII.4.5 [3] $\mathfrak{F}$-инъекторы G нормально вложены в G, что невозможно.

Предположим $N=G_{\mathfrak{F}}\neq 1$. Так как $\mathfrak{F}$ – множество Фишера группы G, то по утверждению 2) данной теоремы $\mathfrak{F}_{G/K}$ – множество Фишера группы G/N. Кроме того, по утверждению 2) теоремы 2.12 заключаем, что подгруппа VN/N является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G/N. По условию $G/N\in\mathsf{S}\subseteq\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$. Таким образом, выполняются все условия индукционного предположения для группы G/N такой, что $|G/N|<|G|$. Следовательно, подгруппа VN/N является нормально вложенной в G/N. По определению $\mathfrak{F}$-инъектора $G_{\mathfrak{F}}=N\leq V$ и поэтому V/N нормально вложена в G/N. Отсюда по лемме I.7.3 из [3] подгруппа V нормально вложена в G, т.е. V_p является силовской p-подгруппой группы K. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 3).

Теорема доказана.

Определение 3.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое наследственное инъективное множество групп, т.е. каждая группа G из $\mathfrak{X}$ имеет $\mathfrak{F}$-инъекторы. Множество Фиттинга $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$ группы $G\in\mathfrak{X}$ назовем *нормально вложенным в* $\mathfrak{X}$, если для каждой подгруппы H группы G ее $\mathfrak{F}$-инъекторы нормально вложены в H.

В случае универсума S множество Фиттинга, нормально вложенное в S, назовем просто нормально вложенным.

Ввиду утверждений 1) и 3) теоремы 3.2 получаем

Следствие 3.4. *Пусть* $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$ и $\mathfrak{X}$ *– наследственное множество Фиттинга. Тогда множество Фишера* $\mathfrak{X}$-*группы* G *является нормально вложенным в* $\mathfrak{X}$.

4. $\mathfrak{F}$-подгруппы Фишера и их характеризация. В настоящем разделе, используя результаты, полученные в разделах 2–3, мы докажем основную теорему работы – критерий $\mathfrak{F}$-подгруппы Фишера из множества Фиттинга $\mathfrak{F}$ частично разрешимой группы. Дуализируя поня-

тие $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы разрешимой группы [1] (для насыщенной формации F – это то же самое, что и понятие F-проектора), Фишер в [2] для класса Фиттинга F определяет в теории классов Фиттинга подгруппу, которая в настоящее время в теории классов известна под названием F-подгруппы Фишера. Аналог этого понятия для множества Фиттинга представляет

Определение 4.1 (см. VIII.4.1 [3]). Пусть $\mathfrak{F}$ – множество Фиттинга группы G. Подгруппа F группы G называется $\mathfrak{F}$-подгруппой Фишера группы G, если выполняются следующие условия:

1) $F\in\mathfrak{F}$;

2) если L – $\mathfrak{F}$-подгруппа G, нормализуемая F, то $L\leq F$.

Основной результат работы –

Теорема 4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – множество Фиттинга $\mathfrak{X}$-группы G, нормально вложенное в наследственное множество Фиттинга $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$. Тогда подгруппа F группы G является $\mathfrak{F}$-подгруппой Фишера группы G в точности тогда, когда F является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G.*

Доказательство. Покажем, что если F является $\mathfrak{F}$-подгруппой Фишера, то F – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Докажем это утверждение индукцией по $|G|$. Если G=1, то справедливость утверждения очевидна.

Предположим, что $|G|>1$ и для всех подгрупп X таких, что $|X|<|G|$ и всех множеств Фиттинга $\mathfrak{X}$ группы X Фишера $\mathfrak{F}$-подгруппа X является $\mathfrak{F}$-инъектором X.

Заметим, что если $G_{\mathfrak{F}}$=1, то G – разрешимая группа и утверждение верно по теореме VIII.4.7 [3]. Итак, $G_{\mathfrak{F}}$ – неединичная подгруппа. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как G – $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$ группа, то по лемме 2.8 в G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Пусть V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Тогда по утверждению 2 теоремы 2.12 VN/N – $\mathfrak{F}_{G/K}$-инъектор группы G/N. Кроме того, так как по условию V нормально вложен в G, то по теореме I.7.3(b) из [3] подгруппа VN/N нормально вложена в группу G/N.

1. *Покажем, что подгруппа FN/N не является $\mathfrak{F}$-подгруппой Фишера группы G/N.* Если это не так, то по индукции FN/N – $\mathfrak{F}_{G/K}$-инъектор группы G/N и $FN/N=V_1N/N$, где $V_1=V^x$ для некоторого $x\in G$. Итак, $FN=V_1N$ для некоторого $\mathfrak{F}$-инъектора V_1 группы G. Рассмотрим две следующие возможности:

1.1) $N\leq G_{\mathfrak{F}}$.

В этом случае $F=FN=V_1N=V_1$ и мы получаем противоречие с тем, что подгруппа F не является $\mathfrak{F}$-инъектором G. Остается принять случай:

1.2) N не содержится в $G_{\mathfrak{F}}$.

Так как N не содержится в $G_{\mathfrak{F}}$ и N – минимальная нормальная подгруппа G, то $N_{\mathfrak{F}}$=1. Ввиду того, что $F\cap N\lhd F$ и $F\in\mathfrak{F}$, мы получаем $F\cap N$=1. Отсюда по лемме 2.11 следует, что подгруппа F является $\mathfrak{F}$-инъектором $\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$-группы $FN=V_1N$. Так как подгруппа V_1 является по лемме 2.10 $\mathfrak{F}$-инъектором группы V_1N, то по лемме 2.8 подгруппы F и V_1 сопряжены. Следовательно, F – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Получим противоречие с выбором группы G. Таким образом, нами показано, что FN/N не является $\mathfrak{F}_{G/N}$-подгруппой Фишера группы G/N для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G.

2. *Заключительный шаг.* Так как подгруппа $G_{\mathfrak{F}}\neq1$, то можно считать, что $N\leq G_{\mathfrak{F}}$. В этом случае $\mathfrak{F}_{G/N}=\{S/N\colon N\leq S\leq G,\ S\in\mathfrak{F}\}$ – множество Фиттинга группы G/N и F/N – $\mathfrak{F}_{G/N}$-подгруппа Фишера G/N, что противоречит утверждению 1).

Докажем обратное утверждение. Пусть $G\in\mathfrak{X}$. Тогда по лемме 2.8 в G существует $\mathfrak{F}$-инъектор V. По определению $\mathfrak{F}$-инъектора $V\in\mathfrak{F}$. Пусть $F\in\mathfrak{F}$ и $V\leq N_G(F)$. Покажем, что подгруппа V нормальна в группе VF. Действительно, пусть $x=vf$ – произвольный элемент группы VF, где $v\in V$ и $f\in F$.

Тогда $(vf)^{-1}V(vf)=f^{-1}v^{-1}Vvf=f^{-1}Vf=V$. Следовательно, $V\in\mathfrak{F}$ и $V\lhd VF$. Значит, $V\leq(VF)_{\mathfrak{F}}$. Так как $V\leq VF\leq G$, то по лемме 2.10 подгруппа V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы VF и поэтому $V\geq(VF)_{\mathfrak{F}}$. Итак, $V=(VF)_{\mathfrak{F}}$ и отсюда получаем, что $F\leq V$. Следовательно, V является $\mathfrak{F}$-подгруппой Фишера группы G.

Теорема доказана.

5. Следствия теорем 3.2. и 4.2. Приведем вначале следствия из теоремы 3.2.

Следствие 5.1. *Пусть $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}\circ\mathsf{S}$ – наследственное множество Фиттинга $\mathfrak{X}$-группы G и $\mathfrak{F}$ – множество Фиттинга группы G. Тогда $\mathfrak{F}$ – нормально вложенное в $\mathfrak{X}$ множество Фиттинга.*

Следствие 5.2. *Пусть F – класс Фиттинга, X – наследственный класс Фиттинга, $\mathsf{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathsf{FS}$ и F – класс Фишера. Тогда F – нормально вложенный в X класс Фиттинга.*

Следствие 5.3 (Андерсен [6]). *Каждое множество Фишера разрешимой группы является нормально вложенным множеством Фиттинга.*

Следствие 5.4 (Локетт [15]). *Каждый разрешимый класс Фиттинга является нормально вложенным.*

Теперь приведем следствия из теоремы 4.2.

Следствие 5.5. *Пусть* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} \circ \mathsf{S}$ *– наследственное множество Фиттинга и* $\mathfrak{F}$ *– множество Фишера* X*-группы G. Подгруппа F является* $\mathfrak{F}$*-подгруппой Фишера G в точности тогда, когда F –* $\mathfrak{F}$*-инъектор группы G.*

Следствие 5.6. *Пусть* X *– наследственный класс Фиттинга и класс Фиттинга* $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{X} \subseteq \mathsf{FS}$. *Тогда множество всех* F*-инъекторов* X*-группы G и множество всех* F*-подгрупп Фишера G совпадают.*

С учетом леммы 2.8 из теоремы 4.2 получаем

Следствие 5.7. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– множество Фишера* $\mathfrak{X}$*-группы G и* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} \circ \mathsf{S}$ *– наследственное множество Фиттинга G. Тогда G имеет единственный класс сопряженных* $\mathfrak{F}$*-подгрупп Фишера.*

Следствие 5.8 (Андерсен [6]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– множество Фишера разрешимой группы G. Подгруппа F является* $\mathfrak{F}$*-подгруппой Фишера в том и только в том случае, если F –* $\mathfrak{F}$*-инъектор группы G. Кроме того, G имеет* $\mathfrak{F}$*-подгруппы Фишера и любые две из них сопряжены.*

Следствие 5.9 (Хартли [10]). *Пусть* F *– разрешимый класс Фишера и G – разрешимая группа. Тогда* F*-подгруппы Фишера G – это в точности ее* F*-инъекторы.*

Следствие 5.10 (Фишер [2]). *В любой разрешимой группе для любого разрешимого класса Фишера* F *существуют* F*-подгруппы Фишера и любые две из них сопряжены.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Gaschütz, W. Zur Theorie der endlicher auflösbarer Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1963. – Bd. 80, № 4. – S. 300–305.
2. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer // Habilitationschrift, Universität Frankfurt (M). – 1966.
3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
4. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschűtz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
5. Dark, R. Some examples in the theory of injectors of finite soluble groups / R. Dark // Math. Z. – 1972. – Bd. 127. – S. 145–156.
6. Andersen, W. Injectors in finite solvable groups / W. Andersen // J. Algebra. – 1975. – Vol. 36, № 2. – P. 333–338.
7. Feldman, A. Conditions for which Fischer F-subgroups in finite solvable groups are F-injectors / A. Feldman // Arch. Math. – 1999. – Bd. 73. – S. 401–406.
8. Feldman, A. System-permutable Fischer subgroups are injectors / A. Feldman // Math. Proc. Royal Irish Acad. – 2001. – Vol. 101 A(1). – P. 71–74.
9. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
10. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.
11. Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // В кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.
12. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro // Mathematics and its Applications: Springer. – 2006. – Vol. 584. – 385 p.
13. Bollado Cabaliero, A. Injyectoros y cocientes. Extensiones inyectivas / A. Bollado Cabaliero, J.R. Martinez Verduch // Pub. Mat. UAB. –1984. – Vol. 28, № 2–3. – P. 51–54.
14. Воробьев, Н.Т. Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Мат. заметки. – 1992. – Т. 51. – Вып. 3. – С. 3–8.
15. Lockett, P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Vol. 131. – P. 103–115.

Поступила в редакцию 30.08.2013. Принята в печать 21.10.2013

Адрес для корреспонденции: e-mail: belarus8889@mail.ru – Воробьев С.Н.