При доказательстве используются леммы 1, 2, позволяющие привести систему к каноническому виду и

Лемма 3. Обратная связь сохраняет свойство перестановочности матриц системы для любого вектора с.

1. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1983. –371 с.
2. Храмцов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференц. уравнения, 1985. – Т.21. – N 11.– С. 1933–1939.

КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ И ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ МАРШО-АДАМАРА

С.А. Шлапаков

Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе материалом исследования является операция дробного дифференцирования Адамара [3], которой на полуоси можно придать качественно иной вид. Эту форму представления называют дробной производной Маршо–Адамара [4]. Естественным видится дальнейшее обобщение этой конструкции. Настоящая работа и посвящена этому аспекту.

Цель данного исследования состоит в распространении дробной производной Маршо–Адамара порядка $0<\alpha<1$ на случай $\alpha>1$ с использованием конечных разностей.

Материал и методы. Материалом исследования является дробная производная Маршо [1]. В работе используются методы дифференциального и интегрального исчислений, а также методы функционального анализа.

Результаты и их обсуждение. Дробная производная по Адамару [2], в случае $0<\alpha<1$ имеет вид

$$\left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x\frac{d}{dx}\int_0^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{-\alpha} f(t)\frac{dt}{t},\quad x>0,\quad (1)$$

где $\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty x^{z-1}e^{x}dx$ – гамма-функция.

Подчинив функцию $f(x)$ определённым условиям [4], соотношение (1) можно преобразовать к виду

$$\left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{f(x)-f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}}dt.$$

Последняя формула позволяет рассматривать конструкцию вида

$$\left(\mathbf{D}_{0+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{f(x)-f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}}dt=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha+1}}\frac{dt}{t},\qquad (2)$$

называемую дробной производной Маршо-Адамара [4] порядка α, $0<\alpha<1$. Распространить формулу (2) на значения параметра $\alpha>1$ можно традиционно, положив в ней $\alpha=n+\{\alpha\}$, $n=[\alpha]$:

$$\left(\mathbf{D}_{0+}^{\alpha} f\right)(x)=\delta^n\left(\mathbf{D}_{0+}^{\{\alpha\}} f\right)(x)=\frac{\{\alpha\}}{\Gamma\left(1-\{\alpha\}\right)}\int_0^\infty\frac{\delta^n f(x)-\delta^n f(xe^{-t})}{t^{1+\{\alpha\}}}dt,\qquad (3)$$

где $\delta=x\dfrac{d}{dx}$ – так называемое δ-дифференцирование [3]. Но можно поступить иначе, перейдя в числителе в (2) от разности первого порядка к разности порядка $l>1$. Этот способ в некоторых вопросах выглядит предпочтительнее, поскольку выявляет в явном виде аналитическую зависимость $\mathbf{D}_{0+}^{\alpha} f$ от параметра α. Для этого введём величину

$$\left(\widetilde{\Delta}_h^l f\right)(x)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k f(xe^{-kh}), \qquad (4)$$

называемую конечной разностью порядка l функции $f(x)$ с растяжением h и с центром в точке x. Введём также в рассмотрение функцию параметра α

$$A_l(\alpha)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1} C_l^k k^{\alpha}, \ \alpha>0,$$

возникающая при рассмотрении конечной разности функции $f(x)=\left|\ln(x)\right|^{\alpha}$, для которой $\left(\widetilde{\Delta}_1^l f\right)(1)=-A_l(\alpha)$. Важное для нас свойство этой функции [1]:

$$A_l(\alpha)=0, \ \alpha=1, 2, \ldots, l-1. \qquad (5)$$

<u>Теорема.</u> Пусть функция $f(x)$ на полуоси $R_+=(0, \ +\infty)$ имеет непрерывные δ-производные до порядка m включительно. Тогда для значений $l\geq m$ имеет место соотношение

$$\left(\widetilde{\Delta}_h^l f\right)(x)=\frac{h^m}{(m-1)!}\int_0^1(1-u)^{m-1}\sum_{k=0}^{l}(-1)^{m-k}k^m C_l^k(\delta^m f)(xe^{-khu})\,du. \qquad (6)$$

Доказательство. В силу аналога формулы Тейлора (в ней обычные производные $f^{(j)}(x)$ заменяются на δ-производные $\left(\delta^j f\right)(x)$ соответствующего порядка) с остаточным членом в интегральной форме можно записать:

$$f(xe^{-kh})=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-kh)^i}{k!}(\delta^i f)(x)+\frac{(-kh)^m}{(m-1)!}\int_0^1(1-u)^{m-1}(\delta^m f)(xe^{-khu})\,du.$$

Поэтому для разности (4) имеем:

$$\left(\widetilde{\Delta}_h^l f\right)(x)=-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-h)^i}{i!}\delta^i f(x)A_l(i)+\frac{h^m}{(m-1)!}\int_0^1(1-u)^{m-1}\sum_{k=0}^{l}(-1)^{m-k}k^m C_l^k(\delta^m f)(xe^{-khu})\,du,$$

что и даёт (6), если учесть (5).

Возвращаясь к (2), введём в рассмотрение конструкцию вида

$$\int_0^{\infty}\frac{\left(\widetilde{\Delta}_h^l f\right)(x)}{t^{1+\alpha}}dt, \quad \alpha>0.$$

Здесь интеграл сходится на достаточно “хороших” функциях $f(x)$ при $l>\alpha$ в предположении ограниченности разности, что следует из ограниченности $\left(\delta^m f\right)(x)$. При значениях $0<\alpha<1$ будем иметь:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\left(\widetilde{\Delta}_t^l f\right)(x)}{t^{1+\alpha}}dt=\frac{f(x)}{\alpha\varepsilon^{\alpha}}+\sum_{k=1}^{l}(-1)^k C_l^k k^{\alpha}\int_{k\varepsilon}^{\infty}\frac{f(xe^{-t})}{t^{1+\alpha}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{l}(-1)^k C_l^k k^{\alpha}\int_{k\varepsilon}^{\infty}\frac{f(xe^{-t})-f(x)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Перейдя к пределу, устремив к нулю ε, получаем

$$\int_0^{\infty}\frac{\left(\widetilde{\Delta}_t^l f\right)(x)}{t^{1+\alpha}}dt=A_l(\alpha)\int_0^{\infty}\frac{f(x)-f(xe^{-t})}{t^{1+\alpha}}dt, \quad 0<\alpha<1,$$

на основании чего положим

$$\left(\mathbf{D}_{0+}^{\alpha} f\right)(x)=-\frac{1}{\Gamma(-\alpha)A_l(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{\left(\widetilde{\Delta}_t^l f\right)(x)}{t^{\alpha+1}}dt, \quad 0<\alpha<l. \qquad (7)$$

Будем называть (7) дробной производной Маршо–Адамара.

Заключение. Важность исследования свойств операторов дробного интегро-дифференцирования обусловлена их применением при отыскании ответов на разнообразные вопросы физики и механики в теории колебаний, теории теплопроводности, теории упругости. В работе получено аналитическое выражение дробной производной Маршо-Адамара через конечную разность порядка выше первого.

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. О дробном интегродифференцировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций / С.А. Шлапаков // Веснік ВДУ.–2009. Т. 53, №3.– С. 132-135.
3. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 16–17 марта 2011 г. – Витебск, 2011.– Т. 1. С. 71-73.
4. Шлапаков, С.А. Производные Маршо-Адамара дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XX (67) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 12–13 марта 2015 г. – Витебск, 2015.– Т. 1. С. 27-28.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ КРИСТАЛЛОВ TGS, ЛЕГИРОВАННЫХ РАЦЕМИЧЕСКОЙ ПРИМЕСЬЮ *D,L*-α – И *L*-α – АЛАНИНА

В.Н. Шут[1, 2], С.Е. Мозжаров[2], И.Ф. Кашевич[1]
[1]Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова
[2]Витебск, ИТА НАН Беларуси

Одно из основных направлений получения и исследования новых функциональных сегнетоэлектрических материалов связано с созданием в них статических и динамических неоднородностей, которые формируются в результате технологических процессов и путем воздействия различных физических полей. Это определяется тем, что характер и природа неоднородностей или внешних воздействий на сегнетоэлектрики могут давать широкие возможности для изменения физических характеристик уже известных материалов, и способствовать получению новых материалов с уникальным набором свойств.

Устойчивость монодоменного состояния кристаллов TGS, обеспечивающая стабильность его параметров, при использовании его в качестве мишеней пироэлектрических видиконов и чувствительных элементов приемников инфракрасного излучения достигается введением активных примесей типа внедрения (ионы металлов) и замещения (аланин и др.). Наиболее ярким примером создания униполярного состояния и стабилизации спонтанной поляризации является допирование TGS во время выращивания полярными примесями D- или L- α-аланина.

Молекулы аланина (NH_2CHCH_3COOH) изоморфны молекулам глицина (NH_2CH_2COOH) и могут замещать их в кристалле. Поскольку молекулы α–аланина несколько больше молекул глицина, замещение ими исходного глицина приводит к созданию дополнительных локальных полей механических напряжений и, вследствие пьезоэффекта, дополнительных внутренних полей смещения $\Delta E_{см}$ в местах замещения. В результате появляется определенное число необратимых диполей, и формируются большие монодоменные участки. Каждая примесь в отдельности стабилизирует поляризацию в одном направлении. Это связано со спецификой вхождения *D*,α– и *L*,α–аланина в кристаллическую решетку (*D*,α–, *L*,α– аланин – оптические изомеры α–аланина). Представляет интерес изучение свойств TGS кристаллов, выращенных из растворов, содержащих рацемическую примесь *D*,α– и *L*,α–аланина (DLATGS).

Целью работы явилось исследование закономерностей влияния неоднородного распределения рацемической примеси D,L-α–аланина на формирование внутренних полей и свойства кристаллов DLATGS.

Материал и методы. Объектом исследования служили кристаллы DLATGS, выращенные из растворов с различной концентрацией примеси (3, 7 и 25 вес.% в растворе), а также номинально чистые кристаллы TGS, полученные в аналогичных режимах роста. Кристаллы DLATGS выращивали в сегнетоэлектрической фазе при постоянной температуре скоростным методом.

Были исследованы диэлектрические и переполяризационные свойства полученных кристаллов. Для проведения исследований кристаллы DLATGS и TGS раскалывались по