```
template<> template<>
bool Common<Dfa0Traits>::next<q0>(char ch) {
 switch(ch) {
 case 'e': return read<q0>();
 case 'a': case 'c': case 'f': return read<q1>();
 default: return read<q2>();
 }
}
template<> template<>
bool Common<Dfa0Traits>::next<q1>(char ch)
{
 switch(ch) {
 default: return read<q0>();
 case 'a': return read<q1>();
 case 'e': case 'f': return read<q2>();
 }
}
template<> template<>
bool Common<Dfa0Traits>::next<q2>(char ch)
{
 switch(ch) {
 case 'b': case 'c': case 'd': return read<q0>();
 default: return read<q1>();
 case 'f': return read<q2>();
 }
}
template<> template<>
bool Common<Dfa0Traits>::check<q2>() { return true; }
}
```

Для использования полученной реализации конечного автомата необходимо сначала создать объект класса `Common<Dfa0Traits>`, передав параметром конструктору поток входных символов, а затем вызвать метод `read<q0>` этого объекта, где `q0` – значение соответствующее стартовому состоянию конечного автомата.

**Заключение.** Для каждого используемого набора аргументов шаблона функции компилятором будет создаваться фрагмент кода, размещаемого по отдельному диапазону адресов. Следовательно, значение счетчика команд при выполнении результирующего кода будет определять значение шаблонного параметра, обозначающего текущее состояние конечного автомата.


1. Фридл, Дж. Регулярные выражения / Дж. Фридл. – СПб : «Питер», 2001. – 352 с.
2. Компиляторы: принципы, технологии и инструментарий / А. В. Ахо, М. С. Лам, Р. Сети, Дж. Д. Ульман. – 2-е изд. : Пер. с англ. – М. : ООО «И. Д. Вильямс», 2008. – 1184 с.


## ПРИМЕНЕНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ФОРМУЛ ПРИБЛИЖЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ


*Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, А.М. Воронов*
*Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*


Как известно, получение точного аналитического выражения корней алгебраического уравнения пятой и более высоких степеней через его коэффициенты является невозможным (теорема Абеля) [1, с. 103]. Численные алгоритмы решения алгебраических уравнений в своем большинстве являются итерационными, поэтому они не всегда удобны для применения на практике, поэтому актуальным является получение прямых алгоритмов нахождения приближенного решения алгебраического уравнения, выраженного через коэффициенты исходного уравнения.

До настоящего времени подобных алгоритмов существует достаточно мало. Среди них следует выделить, например, алгоритм Бернулли нахождения наибольшего по модулю решения алгебраического уравнения и «$r/\varphi$-алгоритм», предлагаемый В.И. Шмойловым [2]. Последний алгоритм позволяет получать приближенное решение в виде цепной дроби, что не всегда удобно для использования на практике. В связи с этим, в настоящей работе была поставлена цель – разработать новый прямой алгоритм нахождения корня алгебраического уравнения через его коэффициенты.

**Материал и методы.** Материалом исследования являются прямые алгоритмы приближенного нахождения корней данных уравнений. Методы исследования – методы математического анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2015.

**Результаты и их обсуждение**. В теории разложения функций комплексного аргумента в степенные ряды возникает следующая теорема, которая играет важную роль в построении некоторых алгоритмов приближенного нахождения решения алгебраических уравнений [3].

**Теорема.** Пусть $f(x)$ – многочлен комплексного аргумента степени $n$, и пусть разложение функции $\frac{1}{f(x)}$ в ряд Тейлора имеет вид (1):

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \qquad (1)$$

Тогда если $f(x)$ имеет только один минимальный по модулю корень, например, $|x_1| < |x_2| \le |x_3| \le \ldots \le |x_n|$, то в минимальной по модулю точке $x_1$ расхождения ряда (1) предел отношения соседних слагаемых ряда (1) стремится к единице с увеличением их порядкового номера, то есть справедливо выражение (2):

$$\lim_{m\to\infty} \frac{c_m x^m}{c_{m+1} x^{m+1}} = 1. \qquad (2)$$

Следствием из данной теоремы является тот факт, что если $x_*$ является минимальным по модулю корнем алгебраического уравнения $f(x) = 0$, учитывая (2), для некоторого $m$-го слагаемого ряда (1) можно приближенно считать

$$\frac{c_m}{c_{m+1} x_*} \approx 1,$$

следовательно,

$$x_* \approx \frac{c_m}{c_{m+1}}. \qquad (3)$$

Таким образом, если для фиксированного $m$ выразить коэффициенты $c_m$ и $c_{m+1}$ ряда (1) через коэффициенты исходного многочлена $f(x)$, то после подстановки их в (3) можно получить приближенно минимальный по модулю корень алгебраического уравнения $f(x) = 0$.

Проиллюстрируем сказанное на примере алгебраического уравнения седьмой степени. Пусть

$$f(x) = x^7 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g.$$

Разложим функцию $\frac{1}{f(x)}$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{f(x)} \approx \frac{1}{g} - \frac{f}{g^2}x + \left(\frac{f^2}{g^3} - \frac{e}{g^2}\right)x^2 + \left(\frac{\left(eg - f^2\right)f}{g^4} + \frac{fe}{g^3} - \frac{d}{g^2}\right)x^3 + \left(\frac{\left(dg^2 - 2efg + f^3\right)f}{g^5} + \right.$$

$$+\frac{\left(eg-f^2\right)e}{g^4}+\frac{fd}{g^3}-\frac{c}{g^2}\Bigg)x^4+\Bigg(\frac{\left(dg^2-2efg+f^3\right)e}{g^5}+\frac{\left(eg-f^2\right)d}{g^4}+\frac{fc}{g^3}-\frac{b}{g^2}+ \tag{4}$$

$$\frac{\left(cg^3-2dfg^2-e^2g^2+3ef^2g-f^4\right)f}{g^6}\Bigg)x^5+\Bigg(\frac{fb}{g^3}-\frac{a}{g^2}+\frac{\left(cg^3-2dfg^2-e^2g^2+3ef^2g-f^4\right)e}{g^6}+$$

$$\frac{\left(dg^2-2efg+f^3\right)d}{g^5}+\frac{\left(bg^4-2cfg^3-2deg^3+3df^2g^2+3e^2fg^2-4ef^3g+f^5\right)f}{g^7}\Bigg)x^6+\ldots .$$

Сравнивая выражения (4) и (1), с учетом (3), находим:

$$x_*\approx\frac{c_3}{c_4}=\frac{\left(dg^2-2efg+f^3\right)g}{cg^3-2dfg^2-e^2g^2+3ef^2g-f^4}; \tag{5}$$

$$x_*\approx\frac{c_4}{c_5}=\frac{\left(cg^3-2dfg^2-e^2g^2+3ef^2g-f^4\right)g}{bg^4-2cfg^3-2deg^3+3df^2g^2+3e^2fg^2-4ef^3g+f^5}; \tag{6}$$

$$\begin{gathered}x_*\approx\frac{c_5}{c_6}=g\left(bg^4-2cfg^3-2deg^3+3df^2g^2+3e^2fg^2-4ef^3g+f^5\right)/\big(ag^5-2bfg^4-\\-2ceg^4+3cf^2g^3-d^2g^4+6defg^3-4df^3g^2+e^3g^3-6e^2f^2g^2+5ef^4g-f^6\big);\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}x_*\approx\frac{c_6}{c_7}=-g\big(ag^5-2bfg^4-2ceg^4+3cf^2g^3-d^2g^4+6defg^3-4df^3g^2+e^3g^3-\\-6e^2f^2g^2+5ef^4g-f^6\big)/\big(2afg^5+2beg^5-3bf^2g^4+2cdg^5-6cefg^4+4cf^3g^3-\\-3d^2fg^4-3de^2g^4+12def^2g^3-5df^4g^2+4e^3fg^3-10e^2f^3g^2+6ef^5g-f^7-g^6\big).\end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, формулы (5) – (8) позволяют найти приближенное значение наименьшего по модулю корня алгебраического уравнения седьмой степени.

Рассмотрим применение данных формул на конкретном числовом примере. Пусть

$$f(x)=x^7-4x^6+313x^5-1508x^4-16862x^3-17832x^2+467544x+906048=$$

$$=(x+2)(x-6)(x-8)\left(x-11\sqrt{3}i\right)\left(x+11\sqrt{3}i\right)\left(x+4+\sqrt{10}i\right)\left(x+4-\sqrt{10}i\right).$$

Тогда подстановка коэффициентов многочлена в формулы (5) –(8) дает соответственно приближенные значения корня

$$x_{*3/4}\approx-2{,}00235;$$
$$x_{*4/5}\approx-2{,}01545;$$
$$x_{*5/6}\approx-2{,}00123;$$
$$x_{*6/7}\approx-2{,}00112.$$

**Заключение**. В ходе выполнения работы предложен новый алгоритм для получения формул приближенного нахождения наименьшего по модулю корня алгебраического уравнения седьмой степени через его коэффициенты. Главным их достоинством являются быстрота вычислений и удобство использования на практике. Основным ограничением на применение формул (5) – (7) является наличие только одного минимального по модулю корня уравнения.


1. Alekseev, V.B. Abel’s Theorem in Problems and Solutions / V.B. Alekseev. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 285 p.
2. Шмойлов, В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи r/φ-алгоритма / В.И. Шмойлов. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.
3. Трубников, Ю.В. Роль расходящихся степенных рядов в некоторых алгоритмах приближенного аналитического решения алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, А.М. Воронов // Веснік Віцебскага дзярж. ўніверсітэта. – 2017. – № 4(97). – С. 29–33.