Заключение. Созданная модель позволяет проводить обоснованный выбор конструкции и параметров датчика, определяет метрологические характеристики измерительного устройства, решать вопрос технической осуществимости поставленной задачи.

1. Конденсатор для определения анизотропии материала по диэлектрической проницаемости: пат. № 16136 Республика Беларусь, МПК G 01 R 27/26 / А. А. Джежора, А. М. Науменко; заявитель Витебский государственный технологический университет – № а 20101026 заявл. 07.07.2010, опубл. 10.04.2012. // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2012. – № 1. – С. 29.
2. Джежора, А. А. Диэлькометрия ортотропных материалов текстильной промышленности / А. А. Джежора, А. М. Науменко // Дефектоскопия – Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2011. – № 12. – С. 67–76.

САМОПОДОБНОЕ ОДНОРОДНОЕ ДВУМЕРНОЕ ЛОРЕНЦЕВО МНОГООБРАЗИЕ НЕКОММУТАТИВНОЙ ГРУППЫ ЛИ

М.Н. Подоксенов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Пусть (M,g) – риманово или лоренцево многообразие. Преобразование $f: M \to M$ называется подобием с коэффициентом e^{μ}, ($\mu = \text{const}$) если для любой точки $p \in M$ и любых векторов $X, Y \in T_pM$ выполнено $\langle f_*X, f_*Y\rangle_{f(p)} = e^{2\mu}\langle X, Y\rangle_p$. Многообразие называется самоподобным, если оно допускает однопараметрическую группу подобий.

Пусть (G,g) – это однородное многообразие группы Ли, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда преобразование $f: G \to G$ называется гомотетическим автоморфизмом, если оно является одновременно подобием и автоморфизмом группы Ли.

Цель данного исследования: найти левоинвариантнную лоренцеву метрику на связной двумерной некоммутативной группе Ли, при которой группа Ли превращается в самоподобное лоренцево многообразие. В дальнейшем эта метрика может быть расширена для трёх- и четырёхмерных групп Ли.

Материал и методы. Рассматривается двумерная некоммутативная алгебра Ли, снабжённая лоренцевым скалярным произведением. Находится её однопараметрическая группа гомотетий, являющаяся автоморфизмом алгебры Ли и с её помощью строится однопараметрическая группа гомотетий однородного лоренцева многообразия двумерной некоммутативной группы Ли. В исследовании применяются методы аналитической и дифференциальной геометрии, а также методы линейной алгебры.

Результаты и их обсуждение. Если лоренцева группа Ли является экспоненциальной, то любой её гомотетический автоморфизм порождается гомотетическим автоморфизмом её алгебры Ли (необходимые определения можно найти в [1]).

Существует единственная с точностью до изоморфизма некоммунитативная двумерная алгебра Ли $\mathcal{G}$. В подходящем базисе (E_1, E_2) коммутационные соотношения задаются одним равенством: $[E_1, E_2] = E_2$. Можно доказать, что эта алгебра Ли $\mathcal{G}$ допускает гомотетические автоморфизмы в единственном случае, года вектор E_2 изотропен. Можно выбрать базис (E_1, E_2) так, что при тех же коммутационных соотношениях матрица Грама будет иметь вид $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а однопараметрическая группа гомотетических автоморфизмов $F(t): \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ будет задаваться матрицами $\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\mu t} \end{pmatrix}$, $\mu = \text{const}$, $\mu \neq 0$.

Некоммутативную двумерную алгебру Ли $\mathcal{G}$ можно представить, как состоящую из матриц вида $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, и при этом

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Соответствующая ей связная односвязная группа Ли G может быть представлена, как группа аффинных преобразований прямой $A^+(1)$, сохраняющих ориентацию прямой, или как группа матриц вида $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_1 > 0$, с операцией умножения матриц. Введём на $\mathcal{G}$ и G координаты, сопоставив приведённым выше матрицам координаты (u_1, u_2) и (x_1, x_2) соответственно.

Единичному элементу группы соответствуют координаты $(1,0)$. Тогда групповая операция, экспоненциальное отображение $\exp: \mathcal{G} \to G$ и обратное отображение $\exp^{-1}: G \to \mathcal{G}$ задаются соответственно формулами

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 = e^{u_1}, \\ x_2 = \dfrac{u_2}{u_1}(e^{u_1} - 1), \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = \ln x_1, \\ u_2 = \dfrac{x_2}{x_1 - 1} \ln x_1, \end{cases}$$

с уточнением, что $\exp(0, u_2) = (1, u_2)$.

Нетрудно вычислить, что дифференциал экспоненты в нуле задаётся единичной матрицей. Это приводит к тому, что отображения

$$f(t) = \exp \circ F(t) \circ \exp^{-1}: G \to G$$

задаются формулами

$$\begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = e^{2\mu t} x_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Метрический тензор, как доказано в [3], задаётся матрицей

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} x_1^{-2} & 0 \\ 0 & x_1^{-2} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

Легко проверить, что преобразования $f(t), t \in \boldsymbol{R}$ образуют не только однопараметрическую группу подобий, но и автоморфизмов группы Ли тоже.

Итак, имеет место теорема.

Теорема. *На связной односвязной двумерной некоммутативной группе Ли существует левоинвариантная лоренцева метрика, при которой эта группа превращается в самоподобное многообразие. В подходящей карте все однопараметрические группы подобий, являющиеся автоморфизмами группы Ли, задаются формулами* (2) *а метрический тензор – матрицей* (3).

Произвольная однопараметрическая группа подобий рассматриваемого многообразия может быть представлена в виде $(L_g) \circ f(t) \circ (L_g)^{-1}$, $g \in G$. Если элемент g имеет координаты (g_1, g_2), то эта группа действует по правилу $(x_1, x_2) \to (x_1, e^{2\mu t} x_2 - g_2(e^{2\mu t} - 1))$.

Заметим, что общий вид метрик однородных самоподобных односвязных многообразий был описан Д. Алексеевским [2]. С.П.Гавриловым [3] были найдены геодезические всех инвариантных метрик на двумерной некоммутативной группе Ли, включая рассматриваемый в данной работе тип метрик. Результаты Д. Алексеевского были дополнены автором этой работы [4] для случая неодносвязных многообразий.

В рассматриваемой группе Ли элементы с координатами $(1, k)$, которые задают сдвиги прямой, образуют нормальную подгруппу. Также нормальную подгруппу H образуют такие элементы при $k \in \boldsymbol{Z}$. Тем самым мы можем рассмотреть группу Ли G/H, которая гомеоморфна цилиндру. В связи с тем, что метрический тензор не зависит от x_2, метрику можно перенести с помощью накрытия $G \to G/H$. Другими словами, мы можем сделать координату x_2 циклической с любым периодом. Однако, новая неодносвязная группа Ли не допускает преобразований вида (2), т.е. не подпадает под класс многообразий, рассмотренных в [4].

Возможна ситуация, когда подходящий нам базис будут составлять другие матрицы, нежели (1). Тем не менее, мы можем ввести на рассматриваемых алгебре Ли и группе Ли координаты так, что групповые операции, экспоненциальное отображение и метрический тензор будут задаваться теми же формулами, а, следовательно, и однопараметрические группы гомотетий будут задаваться те ми же формулами (3).

Заключение. В данной работе найдена лоренцева метрика на двумерной связной односвязной некоммутативной группе Ли, при которой эта группа Ли допускает однопараметрическую гомотетических автоморфизмов, и тем самым, она является самоподобным многообразием.

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой / М.Н.Подоксёнов // Вестник ВГУ – №5 – 2011,– С.10-15.
2. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds / D.Alekseevski //Ann.of Global Anal.Geom.– 1985 – V.3, No.1, С.59–84.
3. Гаврилов С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на связной двумерной неабелевой группе Ли / С.П.Гаврилов // Гравитация и теория относительности – Вып.19.– Казань: Изд-во КГУ, 1981.– С.28-44.
4. Подоксёнов М.Н. Лоренцево многообразие с однопараметрической группой гомотетий имеющей замкнутую изотропную орбиту / М.Н.Подоксёнов // Сиб. матем. журн.– т.30, №5,– С.135-137.