всех абелевых простых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы G.

Напомним, что для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$, где (1) – класс всех единичных групп, символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Полагают, $C_p(G) = G^{\mathfrak{G}_{cp}}$, где $\mathfrak{G}_{cp}$ – класс всех таких групп, все главные p-факторы которых центральны.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f : \mathbb{P} \to \{\text{классы Фиттинга}\}. \quad (1)$$

Функции f сопоставляют класс групп $CR(f) = (G \mid C_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(\mathrm{Com}(G)))$. Если класс Фиттинга таков, что $\mathfrak{F} = CR(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называют композиционным классом Фиттинга с композиционной функцией Хартли (H-функцией) f (см. [5]).

Напомним, что символом $c\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ обозначают наименьший композиционный класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп. В частности, $\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ – наименьший класс Фиттинга, содержащий совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех композиционных H-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $f = \bigcap_{i \in I} f_i$ является композиционной H-функцией класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, называемой *минимальной* [5]. Символом $\vee(f_i \mid i \in I)$ обозначают такую H-функцию f, что $f(a) = \mathrm{fit}(\bigcup_{i \in I} f_i(a))$ для всех $a \in \mathbb{P}$. Для произвольной совокупности композиционных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают $\vee^c(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c\mathrm{fit}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$.

Основной результат представляет следующая

Теорема. *Пусть f_i – минимальная композиционная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\vee(f_i \mid i \in I)$ – минимальная композиционная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \vee^c(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Воробьев, Н. Н. Алгебра классов конечных групп / Н. Н. Воробьев. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2012. – 322 с.
3. Скиба, А. Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Скиба, А. Н. Кратно L-композиционные формации конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
5. Ведерников, В. А. Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В. А. Ведерников, М. М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 125–144.

ЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ ХАРТЛИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Н.Т. Воробьев, Т.Б. Василевич
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все группы, рассматриваемые в данной работе, конечны. В определениях и обозначениях мы следуем [1, 2]. Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [3]. В теории классов конечных разрешимых групп известна теорема Гашюца-Фишера-Хартли о том, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Данная теорема представляет собой значительный вклад в построение неарифметической силовской теории и является обобщением фундаментальных теорем Силова и Холла. Для нахождения новых классов сопряженных инъекторов групп (в общем случае неразрешимых) применяют локальные методы исследования, предложенные Хартли [3] и Н.Т. Воробьевым, Го Вэньбинем, Янгом Нанингом [4].

Основная цель настоящей работы – дальнейшее развитие локального метода Хартли [3] и определение условий, при которых множество Хартли конечной группы локально.

Классом групп называется множество групп, которое вместе с каждой своей группой содержит все изоморфные ей группы. Класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, называют *классом Фиттинга* [1]. При этом подгруппу $H\in\mathfrak{F}$ группы G называют *$\mathfrak{F}$-подгруппой*. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то *$\mathfrak{F}$-радикалом* $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называют наибольшую среди нормальных подгрупп группы G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то подгруппа V группы G называется:

а) *$\mathfrak{F}$-максимальной*, если $V\in\mathfrak{F}$ и $U = V$, при условии, что $V \leq U \leq G$ и $U\in\mathfrak{F}$;

б) *$\mathfrak{F}$-инъектором*, если $V\cap H$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой H для всякой субнормальной подгруппы V группы G [1].

Локализуя понятие класса Фиттинга, Шеметков [5] и в разрешимом случае Андерсон [6] определили понятие множества Фиттинга группы G. *Множеством Фиттинга группы* G называют такое непустое множество подгрупп группы G, которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп. Понятие $\mathscr{F}$-инъектора и $\mathscr{F}$-радикала группы для множества Фиттинга группы G определяется аналогично, как и для класса Фиттинга. Заметим, что *произведением* $\mathscr{F}\circ\mathfrak{H}$ множества Фиттинга группы G и класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ [4] называется множество всех таких подгрупп H группы G, что $H/H_{\mathscr{F}}\in\mathfrak{H}$, то есть

$$\mathscr{F}\circ\mathfrak{H} = \{H \leq G: H/H_{\mathscr{F}}\in\mathfrak{H}\}.$$

Введем следующие обозначения:

$\mathfrak{E}_{p'}$ – класс всех p'-групп;

$\mathfrak{N}_p$ – класс всех нильпотентных p-групп.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, а π – некоторое подмножество множества $\mathbb{P}$. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначим через π', то есть $\pi' = \mathbb{P}\setminus\pi$.

Следует отметить, что идея локализации состоит в изучении множеств Фиттинга группы G, определяемых отображениями (локальными H-функциями или функциями Хартли) множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел во множества Фиттинга группы G. Множество Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G называется *локальным* [4], если

$$\mathscr{F} = \cap_{p\in\pi} h(p)\circ(\mathfrak{N}_p\,\mathfrak{E}_{p'})$$

для некоторой H-функции h группы G.

Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, h – функция Хартли группы G и $HS(h) = \cap_{p\in\pi} h(p)\circ(\mathfrak{E}_{p'}\,\mathfrak{N}_p)$. Множество Фиттинга $\mathscr{H}$ группы G назовем *множеством Хартли группы* G, если $\mathscr{H} = HS(h)$ для некоторой H-функции h.

Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и h – H-функция множества Хартли $\mathscr{H}$ группы G. Тогда h назовем:

1) *приведенной*, если $h(p) \subseteq \mathscr{H}$ для всех $p\in\pi$;

2) *полной*, если $h(p) \subseteq h(q)\circ\mathfrak{E}_{q'}$ для всех различных p, $q\in\pi$;

3) *полной приведенной*, если h является одновременной полной и приведенной;

4) *постоянной*, если $h(p) = h(q)$ для всех различных p, $q\in\pi$.

Основной результат работы следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathscr{H}$ – множество Хартли группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) каждое множество Хартли группы G является локальным множеством Фиттинга;

2) существует локальное множество Фиттинга, которое не является множеством Хартли группы G.

В настоящей работе изучена взаимосвязь между локальными множествами Фиттинга и множествами Хартли конечной группы.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (грант Ф17М-064).

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes // Berlin–New York : Walter de Gruyter. – 1992. – P.891.
2. Guo, W. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo // Springer. – 2015. – P. 360.
3. Hartley B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. (Ser. 3). – 1969. – Vol. 19. – P. 193–207.
4. Yang Nanying. On $\mathscr{F}$-injectors of fitting set of a finite group / Nanying Yang, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217-229.
5. Шеметков, Л. А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л. А. Шеметков // Конечные группы. – 1975. – С. 207-212.
6. Anderson, W. Injectors in finite soluble groups / W. Anderson // J.Algebra. 1975. № 36. – P. 333-338.