РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ОБРАЗОВАНИИ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССАХ

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ФИТТИНГОВЫХ ФУНКТОРОВ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ПОКРЫВАЮЩИХ ПОДГРУПП

Е.А. Витько
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Основная цель настоящей работы – описание нового свойства фиттинговых функторов.

В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Пусть $\mathfrak{U}$ – класс конечных групп, который одновременно является S-замкнутым и N_0-замкнутым. Все рассматриваемые в работе группы – это группы из класса $\mathfrak{U}$.

Напомним, что отображение f, которое каждой группе $G \in \mathfrak{U}$ ставит в соответствие некоторое непустое множество ее подгрупп $f(G)$, называется фиттинговым $\mathfrak{U}$-функтором, если выполняются следующие условия:

(i) если α: $G \to \alpha(G)$ – изоморфизм, то

$$f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\};$$

(ii) если N – нормальная подгруппа группы G, то

$$f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}.$$

Фиттингов $\mathfrak{U}$-функтор будем называть фиттинговым функтором для случая, когда $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ – класс всех конечных групп.

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – непустые классы конечных групп, f – фиттингов $\mathfrak{U}$-функтор, $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга.

Определение. Фиттингов $\mathfrak{U}$-функтор f назовем $(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$-фиттинговым функтором, если выполняется следующее условие: если $G \in \mathfrak{U}$, K – нормальная подгруппа группы G, $K \in \mathfrak{X}$, M – подгруппа группы G такая, что $K \leq M \leq G$ и $M/K \in \mathfrak{Y}$ и некоторая подгруппа $X \in f(G)$ покрывает M/K, то

$$f(M) = \{Z \cap M \mid Z \in f(G) \text{ и } Z \text{ покрывает } M/K\}.$$

Произведением фиттинговых $\mathfrak{U}$-функторов f и g называется отображение $f \circ g$, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathfrak{U}$ непустое множество подгрупп

$$(f \circ g)(G) = \{X \mid X \in f(\mathrm{Y}) \text{ для некоторой подгруппы } Y \in g(G)\}.$$

Доказана

Теорема. Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный класс групп, f – $(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$-фиттингов функтор, g – сопряженный $(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$-фиттингов функтор. Тогда произведение $f \circ g$ – $(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$-фиттингов функтор.

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

О МИНИМАЛЬНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ФУНКЦИЯХ ХАРТЛИ ПОРОЖДЕННЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н.Н. Воробьев, А.Р. Филимонова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–4].

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из $\mathfrak{F}$.

Через $\pi(G)$ обозначают множество всех различных простых делителей порядка группы G, а $\pi(\mathfrak{F})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из $\mathfrak{F}$. Символ $\mathrm{Com}(G)$ обозначает класс всех абелевых простых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы G.

Напомним, что для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$, где (1) – класс всех единичных групп, символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Полагают, $C_p(G) = G^{\mathfrak{G}_{cp}}$, где G_{cp} – класс всех таких групп, все главные p-факторы которых центральны.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f : \mathbb{P} \to \{\text{классы Фиттинга}\}. \qquad (1)$$

Функции f сопоставляют класс групп $CR(f) = (G \mid C_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(\mathrm{Com}(G)))$. Если класс Фиттинга таков, что $\mathfrak{F} = CR(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называют композиционным классом Фиттинга с композиционной функцией Хартли (H-функцией) f (см. [5]).

Напомним, что символом $c\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ обозначают наименьший композиционный класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп. В частности, $\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ – наименьший класс Фиттинга, содержащий совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех композиционных H-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $f = \bigcap_{i \in I} f_i$ является композиционной H-функцией класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, называемой *минимальной* [5]. Символом $\vee(f_i \mid i \in I)$ обозначают такую H-функцию f, что $f(a) = \mathrm{fit}(\bigcup_{i \in I} f_i(a))$ для всех $a \in \mathbb{P}$. Для произвольной совокупности композиционных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают $\vee^c(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c\mathrm{fit}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$.

Основной результат представляет следующая

Теорема. *Пусть f_i – минимальная композиционная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\vee(f_i \mid i \in I)$ – минимальная композиционная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \vee^c(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Воробьев, Н. Н. Алгебра классов конечных групп / Н. Н. Воробьев. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2012. – 322 с.
3. Скиба, А. Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Скиба, А. Н. Кратно L-композиционные формации конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
5. Ведерников, В. А. Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В. А. Ведерников, М. М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 125–144.

ЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ ХАРТЛИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Н.Т. Воробьев, Т.Б. Василевич
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все группы, рассматриваемые в данной работе, конечны. В определениях и обозначениях мы следуем [1, 2]. Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга впервые был предложен Хартли [3]. В теории классов конечных разрешимых групп известна теорема Гашюца-Фишера-Хартли о том, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Данная теорема представляет собой значительный вклад в построение неарифметической силовской теории и является обобщением фундаментальных теорем Силова и Холла. Для нахождения новых классов сопряженных инъекторов групп (в общем случае неразрешимых) применяют локальные методы исследования, предложенные Хартли [3] и Н.Т. Воробьевым, Го Вэньбинем, Янгом Нанингом [4].

Основная цель настоящей работы – дальнейшее развитие локального метода Хартли [3] и определение условий, при которых множество Хартли конечной группы локально.

Классом групп называется множество групп, которое вместе с каждой своей группой содержит все изоморфные ей группы. Класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных