



УДК 512.542.6

О некоторых классах Фиттинга и инъекторах конечных групп

В.И. Гойко

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет
имени П.О. Сухого»

Хорошо известно, что в произвольной конечной группе для произвольного класса Фиттинга $\mathcal{F}$ -инъекторов не существует. В связи с этим возникла задача нахождения и построения таких классов конечных групп $\mathcal{X}$, для которых в произвольной конечной группе $\mathcal{F}$ -инъектор существует. Так, например, Блессеногль (D. Bleszenohl) и Лауе (H. Laue) доказали, что в произвольной конечной группе существует инъектор для класса конечных квазинильпотентных групп. В работах Л.А. Шеметкова, Н.Т. Воробьева, Е.Н. Залесской, Ирансо (Iranso в соавторстве с Perez-Monazor) также доказано существование инъекторов в произвольных конечных группах для определенных видов классов конечных групп.

П. Германн построил специальный класс групп $\mathcal{N}_{\mathcal{F}, q}$ (класс конечных групп без минимальных не $\mathbf{p}$ -нильпотентных бипримарных подгрупп) и доказал, что этот класс групп является ненасыщенной формацией Фиттинга. В.И. Гойко установил существование $\mathcal{N}_{\mathcal{F}, q}$ -инъекторов в произвольных конечных группах. В данной работе устанавливаются свойства $L_p(\mathcal{N}_{\mathcal{F}, q})$ -инъекторов в конечных группах, где через $L_p(\mathcal{N}_{\mathcal{F}, q})$ обозначается класс таких конечных групп G , $\mathcal{N}_{\mathcal{F}, q}$ -инъекторы которых содержат силовскую $\mathbf{p}$ -подгруппу группы G .

Ключевые слова: класс Фиттинга, ненасыщенная формация Фиттинга, конечная группа, подгруппа, инъектор, силовская подгруппа.

About of Some Fitting Classes and Injectors of Finite Groups

U.I. Hoika

Educational establishment «Gomel State Technical Sukhoy University»

It is well known that in an arbitrary finite group for arbitrary Fitting class there are no $\mathcal{F}$ -injectors. In this connection a problem of finding and building such classes of $\mathcal{X}$ finite groups, for which in an arbitrary finite group there is $\mathcal{F}$ -injector, arose. Thus, for example, D. Bleszenohl and H. Laue proved, that in an arbitrary finite group there is injector for the class of finite quazi nil potent groups. L.A. Shemetkov, N.T. Vorobyev, E.N. Zaleskaya, Iranso with Perez-Monazor also proved existence of injectors in arbitrary finite groups for some types of finite group classes.

P. Hermann built a special class of $\mathcal{N}_{\mathcal{F}, q}$ groups (class of finite groups without minimal non $\mathbf{p}$ -nilpotent bипrimary subgroups) and proved that this class of groups is non saturated Fitting formation. V.I. Goiko proved the existence of $\mathcal{N}_{\mathcal{F}, q}$ -injectors in arbitrary finite groups. In this paper properties of $L_p(\mathcal{N}_{\mathcal{F}, q})$ -injectors of finite groups are established, where through $L_p(\mathcal{N}_{\mathcal{F}, q})$ class of such finite G groups is indicated, $\mathcal{N}_{\mathcal{F}, q}$ -injectors of which contain Sylow $\mathbf{p}$ -subgroup of G group.

Key words: Fitting class, non saturated Fitting formation, finite groups, subgroups, injector, Sylow's subgroup.

В произвольной конечной группе для произвольного класса Фиттинга конечных групп инъекторов не существует (см. [1]). Однако если в качестве класса $\mathcal{F}$ рассматривать некоторые специальные классы групп, то в произвольной конечной группе $\mathcal{F}$ -инъекторы могут существовать. Так, например, в [2]

доказано существование инъекторов в произвольной конечной группе для класса конечных квазинильпотентных групп. В других работах [3–7] также установлено существование инъекторов в произвольных конечных группах для определенных видов классов конечных групп.

В [8] Ито изучил (p, q) -группы (минимальные не p -нильпотентные группы порядка $p^m q^n$, p, q – простые, $p \neq q$; m, n – любые натуральные числа). П. Германн [9] построил класс $\mathcal{N}_{\Phi, q}$ – класс конечных групп без (p, q) -подгрупп. Там же [9] доказано, что класс $\mathcal{N}_{\Phi, q}$ есть *ненасыщенная формация Фиттинга*, замкнутая относительно подгрупп. В работе [10] доказано существование $\mathcal{N}_{\Phi, q}$ -инъекторов в произвольной конечной группе.

В данном исследовании устанавливаются свойства инъекторов в произвольных конечных группах для определенных типов классов групп $L_p(\mathcal{X})$, связанных с классами $\mathcal{N}_{\Phi, q}$ определенными соотношениями (определение класса $L_p(\mathcal{X})$ см. ниже).

Приведем некоторые определения и обозначения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Класс Фиттинга $\mathcal{F}$ – это такой непустой класс конечных групп, для которого выполняются условия: а) если $G \in \mathcal{F}$ и N – нормальная в G подгруппа, то $N \in \mathcal{F}$; б) если M и N – нормальные подгруппы в группе G и $M \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{F}$, то $MN \in \mathcal{F}$.

Подгруппа H разрешимой группы G называется *F-инъектором*, если для любой субнормальной подгруппы V группы G пересечение $H \cap V \in \mathcal{F}$ и является F -максимальной подгруппой в V (первыми ввели этот объект Фишер, Гашюц, Хартли). Подгруппа M группы G называется *F-максимальной подгруппой* в группе G , если $M \in \mathcal{F}$ и из условий $M \subseteq L \subseteq G, L \in \mathcal{F}$ всегда следует, что $M = L$. *Формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Класс конечных групп, который одновременно является формацией и классом Фиттинга, называется *формацией Фиттинга*.

Символом p всегда обозначаем простое число. $\mathcal{N}$ – класс всех конечных nilпотентных групп, $\mathcal{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп, $\mathcal{P}$ – класс всех конечных p -групп, $\mathcal{G}$ – класс всех конечных групп, G_p – силовская p -подгруппа группы G . Символом $\langle A, B, \dots, C \rangle$ обозначаем подгруппу, порожденную множествами (подгруппами) $A, B, \dots, C$.

Подгруппа H конечной группы G называется $\mathcal{N}_{\Phi, q}$ -инъектором [10], если для любой

неединичной субнормальной подгруппы V группы G пересечение $H \cap V \in \mathcal{N}_{\Phi, q}$ и является $\mathcal{N}_{\Phi, q}$ -максимальной подгруппой в группе V . Если наибольшая субнормальная подгруппа V группы G равна 1, то $\mathcal{N}_{\Phi, q}$ -инъектором группы G называется $\mathcal{N}_{\Phi, q}$ -максимальная подгруппа группы G . Класс $\mathcal{F}$ называется *Q-замкнутым*, если для любой группы $H \in \mathcal{F}$ гомоморфный образ группы H также принадлежит $\mathcal{F}$. Класс $\mathcal{F}$ называется *S-замкнутым* (S_n -замкнутым), если для любой группы $H \in \mathcal{F}$ любая ее подгруппа (любая нормальная подгруппа) также принадлежит $\mathcal{F}$. Символом *B-pne-S* обозначается тот факт, что подгруппа B группы S является p -нормально погруженной в группе S .

Говорят [1], что класс групп X *сильно вложен* в класс Y (обозначается: $X \ll Y$), если для любой конечной группы ее Y -инъектор содержит X -инъектор.

Остальные необходимые определения и обозначения см. в книге [1]. Все рассматриваемые в этой работе группы и классы групп берутся из класса $\mathcal{E}$ (класс всех конечных групп).

В дальнейшем для простоты будем пользоваться обозначением:

$X = \mathcal{N}_{\Phi, q}$, то есть символом X на протяжении данного исследования обозначаем класс $\mathcal{N}_{\Phi, q}$.

В работе [11] построен класс групп $L_p(\mathcal{X})$ следующим образом:

$$L_p(\mathcal{X}) = \{G : X\text{-инъектор группы } G \text{ содержит } G_p, p \in \pi(G)\}.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие две теоремы.

Теорема 1 [11, теорема 1]. *Справедливы утверждения:*

- 1) $L_p(\mathcal{X})$ – формация Фиттинга, замкнутая относительно подгрупп;
- 2) $X \cup S_q \subseteq XS_q \subseteq L_p(\mathcal{X}) = L_p(\mathcal{S}_q), q \neq p$;
- 3) $L_p(\mathcal{P}) = L_p(\mathcal{X})$;
- 4) следующие утверждения эквивалентны:
 - а) $X = L_p(\mathcal{X})$;
 - б) $X = XG_q, q \neq p$.
 - в) в любой конечной группе индекс ее X -инъектора имеет степень числа p ;
 - д) $L_q(\mathcal{X}) = E, q \neq p$.

Теорема 2 [11, теорема 2]. Пусть G – конечная группа, $\pi G = \langle p, q, \dots, r \rangle$, $p, q, \dots, r$ – различные простые числа, F – X -инъектор группы G , $A = \langle G_q, \dots, G_r \rangle$, $W = \langle F, A \rangle$. Тогда справедливо утверждение: W есть $L_p \langle \pi G \rangle$ -инъектор группы G тогда и только тогда, когда $FA = AF$.

Теорема 3. Пусть $\pi G = \langle p, q, \dots, r \rangle$, где $p, q, \dots, r$ – различные простые числа. Справедливо утверждение:

$X \ll L_p \langle \pi G \rangle$ тогда и только тогда, когда X -инъектор X группы G перестановочен с подгруппой $A = \langle G_q, \dots, G_r \rangle$.

Доказательство. Возьмем $L_p \langle \pi G \rangle$ -инъектор V в группе G . Пусть X перестановочен с подгруппой A . Введем обозначение: $W = \langle X, A \rangle$. В силу теоремы 2 подгруппа W есть $L_p \langle \pi G \rangle$ -инъектор группы G . Ясно, что X входит в W , т.е. X -инъектор группы G входит в $L_p \langle \pi G \rangle$ -инъектор группы G . Следовательно, $X \ll L_p \langle \pi G \rangle$.

Обратно, пусть $X \ll L_p \langle \pi G \rangle$. Последнее означает, что $X \subseteq V$. Ввиду теоремы 3 из [10] подгруппа X является X -инъектором группы V . Далее, т.к. $V \in L_p(X)$, то в силу определения класса $L_p \langle \pi G \rangle$ получаем, что $V_p \subseteq X$. Теперь с учетом включения $X \subseteq V$ получаем следующее включение: $X_p \subseteq V_p^v, v \in V$. Очевидно, что $V_p = X_p$.

Далее получим следующие соотношения:

$$V = \langle V_p, \langle V_q, \dots, V_r \rangle \rangle =$$

$$\langle X_p, \langle V_q, \dots, V_r \rangle \rangle \subseteq \langle X, A \rangle = W, \text{ где } V_q, \dots, V_r - \text{ все силовские подгруппы группы } V, \text{ кроме } V_p.$$

Теперь очевидно, что

$$V \subseteq W. \quad (1)$$

Поскольку $L_p \langle \pi G \rangle = L_p \langle \pi G \rangle$ (по теореме 1), то индекс V есть степень простого числа p (по той же теореме 1). Значит, $A \subseteq V$. Так как, кроме того, $X \subseteq V$, то $W = \langle X, A \rangle \subseteq V$. Теперь с учетом (1) получаем, что $V = W$. Значит, W есть $L_p \langle \pi G \rangle$ -инъектор в группе G . Применяя теорему 2, получаем равенство: $XA = AX$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $X = \langle p, q \rangle$, $V - X$ -инъектор в G , V - pne - G , $K = \bigvee_p^G$ – нормальное замыкание подгруппы V_p в группе G ,

$T/K = O_{p'}(G/K)$ – наибольшая нормальная p' -подгруппа в G/K ,

$$A = \langle G_q, \dots, G_r \rangle.$$

Справедливы утверждения:

(а) подгруппа T есть $L_p \langle \pi G \rangle$ -радикал группы G ;

(b) подгруппа TA есть $L_p \langle \pi G \rangle$ -инъектор группы G ;

$$(c) X \ll L_p \langle \pi G \rangle;$$

(d) $L_p \langle \pi G \rangle$ -инъектор группы G есть p -нормально погруженная подгруппа в группе G .

Доказательство. (а) Допустим, что G – простая группа. Тогда либо $K = 1$, либо $K = G$. Если $K = 1$, то $V_p = 1$. Последнее равенство противоречит условию теоремы. Пусть $K = G$. Отсюда следует, что $T = G$. Теперь из равенства $K = G$ и условия теоремы (V - pne - G) следует, что $V_p = G_p$. Значит, $G_p \subseteq V$. Следовательно, $G \in L_p(X)$. Поскольку $T = G$, то T есть $L_p(X)$ -радикал группы G . Пусть теперь G – непростая группа. Из условия V - pne - G получаем, что подгруппа V_p является p -силовской подгруппой в группе K . Ввиду равенства

$T/K = O_{p'}(G/K)$ получаем: $K \supseteq T_p$. Отсюда следует включение: $T_p \subseteq V_p$.

Так как $V_p \subseteq T$, то $V_p \subseteq T_p^t, t \in T$. Теперь из включения $T_p \subseteq V_p$

вытекает неравенство $|T_p| \leq |V_p|$, а из включения $V_p \subseteq T_p^t$ следуют соотношения

$$|V_p| \leq |T_p^t| = |T_p|. \text{ Следовательно,}$$

$$V_p = T_p. \quad (2)$$

Далее, так как $T \cap V$ есть X -инъектор группы T , то с учетом (1) получаем: $T \in L_p \langle \pi G \rangle$. Отсюда следует включение

$$T \subseteq R. \quad (3)$$

(Здесь через R обозначили $L_p \langle \pi G \rangle$ -радикал группы G).

С другой стороны, $V \cap R$ есть X -инъектор группы R , $R \in L_p \langle \mathbb{K} \rangle$. С учетом (2) получаем соотношения:

$V \cap R \supseteq R_p \supseteq T_p = V_p$. Отсюда следует включение:

$$R_p \supseteq V_p. \quad (4)$$

Теперь в силу того, что $V \cap R \triangleleft V$, получим равенство: $V_p \cap V \cap R = \mathbb{V} \cap R_p$. Значит, V_p есть p -силовская подгруппа в группе $V \cap R$. Следовательно, R_p есть p -силовская подгруппа в группе $V \cap R$ и $V_p = R_p^x$, $x \in V \cap R$. С использованием (4) можно получить следующие соотношения: $|V_p| \leq |R_p| = |R_p^x| = |V_p|$. Значит, $|R_p| = |V_p|$. Из последнего равенства и включения (4) следует равенство:

$$V_p = R_p. \quad (5)$$

Теперь очевидно, что из (5) и (3) следует утверждение: $|R:K|$ есть p' -число. Значит, фактор-группа R/K есть нормальная p' -подгруппа в фактор-группе G/K . Отсюда следует, что

$$R \subseteq T. \quad (6)$$

Следовательно, из (3) и (6) следует, что $R = T$, то есть подгруппа T есть $L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ -радикал в группе G . Пункт (а) доказан.

(b) При $G = 1$ утверждение (b) выполняется очевидно. Пусть $G \neq 1$. Если G – простая группа, то нормальное замыкание K подгруппы V_p в группе G либо равно 1, либо $K = G$. Допустим, что $K = 1$. Отсюда следует, что $V_p = 1$,

$T/1 \cong T = 1$. Значит, $O_{p'}(G/1) \cong O_{p'}(G) = 1$. Ввиду равенства $V_p = 1$ получаем включение:

$V \subseteq A^g$, $g \in G$. Без ограничения общности считаем, что $V \subseteq A$. Далее, так как V является X -инъектором группы A , то следующие равенства выполняются очевидно: $VA = AV = A$. Теперь в силу теоремы 1 получаем, что A является $L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ -инъектором группы G . Поскольку $T = 1$, то $A = TA = L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ -инъектор группы G . Пусть теперь $K = G$. Тогда с учетом условия $V\text{-}p\text{-}ne\text{-}G$ получим равенство: $V_p = G_p$. Значит, $G_p \subseteq V$. Ввиду определения класса $L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ получим включение: $G \in L_p \langle \mathbb{K} \rangle$. Поскольку при

этом $A \subseteq T = G$, то очевидно, что $TA = L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ -инъектор группы G .

Пусть теперь G – непростая группа. Возьмем произвольную (собственную) максимальную нормальную подгруппу M в группе G . Тогда $V \cap M$ – X -инъектор группы M . Поскольку $V \cap M \triangleleft V$ и V_p – p -силовская в группе V , то ввиду равенства $V \cap M \cap V_p = \mathbb{V} \cap M_p$ получим: $V_p \cap M = \mathbb{V} \cap M_p$. Далее, так как $V_p \cap M \subseteq K \cap M \triangleleft G$, то получим, что $V_p \cap M$ – p -силовская в X -инъекторе $V \cap M$ группы M и $V_p \cap M$ – p -силовская в группе $K \cap M \triangleleft M$. Возьмем S – наименьшую нормальную подгруппу в M такую, что $V_p \cap M \subseteq S$ и $S \subseteq K \cap M$. Ясно, что $S = \mathbb{V}_p^M$ – нормальное замыкание подгруппы V_p в группе M .

Далее, $\mathbb{V}_p \cap M_p^M$ – нормальное замыкание подгруппы $\mathbb{V} \cap M_p$ в группе M . Обозначим: $\mathbb{V}_p \cap M_p^M \cong D$. Рассмотрим фактор-группу

$$H/D = O_{p'}(M/D).$$

В силу индукции получим следующие два утверждения: b1) H является $L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ -радикалом в группе M , b2) $H\bar{A}$ является $L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ -инъектором в M , где $\bar{A} = \mathbb{M}_q, \dots, M_r$. Так как $H \text{ char } M$, $M \triangleleft G$, то $H \triangleleft G$ и $H \in L_p \langle \mathbb{K} \rangle$. Поскольку, кроме того, ввиду пункта (а) подгруппа T есть $L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ -радикал в группе G , то получим включение:

$$H \subseteq T. \quad (7)$$

Из (7) следует включение $H\bar{A} \subseteq T\bar{A}$. Поскольку, кроме того,

$$H\bar{A} \subseteq T\bar{A} \cap M = \bar{A} \cap M_p, \quad (8)$$

то $H\bar{A}$ – $L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ -инъектор в группе $\bar{A} \cap M_p$. Теперь видим, что из следующих соотношений $H \subseteq T \cap M \triangleleft M$, $T \cap M \in L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ и того факта, что H есть $L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ -радикал в группе M , можно получить равенство: $H = T \cap M$. Значит, в силу (8) имеем следующее равенство: $H\bar{A} = \bar{A} \cap M_p$. Поскольку $H\bar{A}$ – $L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ -инъектор в группе M , то $T\bar{A} \cap M = L_p \langle \mathbb{K} \rangle$ -инъектор в группе M .

Возьмем теперь в группе G произвольную субнормальную подгруппу N . Без ограничения общности можно считать, что $N \subseteq M$. Так как N – субнормальная подгруппа в M , то $N \cap T\bar{A}$ – $L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$ -максимальная подгруппа в N (ввиду определения инъектора). Значит, $T\bar{A}$ есть $L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$ -инъектор в группе G . Далее используем очевидное включение

$$T\bar{A} \subseteq TA. \quad (9)$$

Покажем теперь, что $TA \in L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$. В самом деле, возьмем X -инъектор B в группе TA . Тогда в силу того, что $T \triangleleft M$, получим: $B \cap T$ является X -инъектором в группе $T \in L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$. Теперь из последнего включения, на основании определения класса $L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$, следуют соотношения: $T_p \subseteq B \cap T \subseteq B$. Далее, применяя лемму 11.6 из [12], получим равенство $\langle A \rangle_p = T_p A_p$, а учитывая тот факт, что $A_p = 1$, получим равенство: $\langle A \rangle_p = T_p$. Значит, $\langle A \rangle_p \subseteq B$. Опять, используя определения класса $L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$, устанавливаем, что $TA \in L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$. Значит, с учетом (9), получим равенство: $TA = T\bar{A}$, т.е. TA есть $L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$ -инъектор в группе G .

Пункт (b) доказан.

(c) Предположим, что условие $X \ll L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$ не выполняется. Пусть G – группа минимального порядка, для которой это условие не выполняется. В силу пункта (a) подгруппа TA является F -инъектором в группе G . Так как $V \cap T$ – X -инъектор в группе $T \in L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$, то ввиду определения класса $L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$ получим: $T_p \subseteq V \cap T$. Отсюда следует, что $T_p \subseteq V_p$. Теперь ясно, что $T \subseteq \langle V, A \rangle$ и $TA \subseteq \langle V, A \rangle$. Значит, TA есть $L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$ -инъектор в группе $\langle V, A \rangle$ (в силу теоремы 3 из [10]).

Допустим, что $\langle V, A \rangle \subset G$. Ввиду индуктивных рассуждений получим включение: $V \subseteq TA$ (с применением того, что V – X -инъектор в группе $\langle V, A \rangle$ и TA – $L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$ -инъектор в группе $\langle V, A \rangle$). Последнее включение приводит к доказываемому условию.

Пусть теперь $\langle V, A \rangle = G$. По лемме 11.6 из [12] получим равенства:

$G_p = \langle A \rangle_p = V_p A_p = V_p$ (напомним, что в этом случае $A_p = 1$). Из последнего равенства следует, что p -силовская подгруппа группы G входит в X -инъектор группы G . Значит, $G \in L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$. Следовательно, группа G является X -инъектором группы G . Последнее означает, что X -инъектор V группы G входит в $L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$ -инъектор группы G . Полученное противоречие завершает доказательство пункта (c).

(d) Докажем, что $L_p\langle\bar{\cdot}\rangle$ -инъектор группы G есть p -нормально погруженная подгруппа в G .

Рассмотрим равенства:

$$\frac{|TA|}{|\mathcal{V}_p^G|} = \frac{|T| \cdot |A|}{|T \cap A| \cdot |\mathcal{V}_p^G|} = \frac{|A|}{|T \cap A|} \cdot \frac{|T|}{|\mathcal{V}_p^G|}$$

Так как $\frac{|A|}{|T \cap A|}$ является p' -числом и

$\frac{|T|}{|\mathcal{V}_p^G|}$ тоже p' -число (по условию), то $|TA : \mathcal{V}_p^G|$ есть p' -число. Отсюда получаем включение: $\mathcal{V}_p^G \not\subseteq \langle A \rangle_p = T_p A_p = T_p$.

Теперь из включения $T_p \subseteq \mathcal{V}_p^G$ следует включение: $T_p \subseteq \mathcal{V}_p^G$. Далее, так как $\mathcal{V}_p^G = V_p$, то получим соотношение:

$$T_p \subseteq V_p. \quad (10)$$

Следовательно, так как $V_p \subseteq \mathcal{V}_p^G \not\subseteq T$, то $V_p \subseteq T_p^t$, $t \in T$. Отсюда с очевидностью вытекают соотношения: $|V_p| \leq |T_p^t| = |T_p|$.

Из последнего получим неравенство:

$$|V_p| \leq |T_p|. \quad (11)$$

Теперь ясно, что из (10) и (11) следует равенство:

$$T_p = V_p.$$

Поскольку $T_p = \langle A \rangle_p$, то $V_p = \langle A \rangle_p$. Но V_p – p -силовская подгруппа в группе $\mathcal{V}_p^G$. Значит, $\langle A \rangle_p$ – p -силовская подгруппа в группе $\mathcal{V}_p^G = \mathcal{A}_p^G$. Поскольку $\mathcal{A}_p^G$ – нормальное замыкание для подгруппы $\langle A \rangle_p$

в группе G , то подгруппа TA – p -нормально погруженная в G . Пункт (d) доказан.

Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T.O. Hawkes. – Walter de Gruyter. – Berlin, 1992.
2. Bleszenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Hauptfaktoren einfach sind / D. Bleszenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – Vol. 56. – P. 516–532.
3. Шеметков, Л.А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л.А. Шеметков // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – № 1(15). – С. 5–13.
4. Shemetkov, L.A. Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3(16). – С. 186–187.
5. Vorobiev, N.T. Gaschütz's local method in the theory of Fitting classes of finite soluble groups / N.T. Vorobiev // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3(16). – С. 155–166.
6. Залесская, Е.Н. О новых классах сопряженных инъекторов конечных групп / Е.Н. Залесская // Дискретная математика. – 2004. – Т. 16. – Вып. 1. – С. 105–113.
7. Iranso, M.J. Fitting classes $\mathcal{F}$ such that all finite groups have $\mathcal{F}$ -injectors / M.J. Iranso, F. Pérez-Monazor // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 56. – P. 97–101.
8. Ito, N. Note on (L, M) -groups of finite order / N. Ito // Kodai Math. Seminar Report. – 1951. – P. 1–6.
9. Hermann, P. Groups without certain subgroups form a Fitting class / P. Hermann // Ann. Univ. sci. Budapest. Sec. math. – 1983. – Vol. 26. – P. 183–186.
10. Гойко, В.И. О существовании сопряженного класса инъекторов в конечных группах / В.И. Гойко // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52. – № 6. – С. 17–22.
11. Гойко, В.И. Инъекторы конечных групп / В.И. Гойко // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2012. – № 1(67). – С. 5–11.
12. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

Поступила в редакцию 27.06.2013. Принята в печать 21.10.2013
Адрес для корреспонденции: e-mail: stage@tut.by – Гойко В.И.