Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова, С.В. Шерегов

СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2016

УДК 517(076.5)
ББК 22.161.1я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 19.02.2016 г.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова;** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **С.В. Шерегов**

Р е ц е н з е н т ы :
заведующий кафедрой математики и информационных технологий УО «ВГТУ», доктор технических наук *А.А. Джежора;*
доцент кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова,
кандидат физико-математических наук *С.А. Шлапаков*

Сурин, Т.Л.

С90 Сборник практических заданий по математическому анализу. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова, С.В. Шерегов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – 52 с.

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика», «Программное обеспечение информационных технологий». Предлагаемое учебное издание содержит разбор наиболее типичных примеров, демонстрирующих применение на практике результатов теории, вопросы по теоретическому материалу, задания для аудиторной, домашней и самостоятельной работы.

УДК 517(076.5)
ББК 22.161.1я73

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов математического факультета, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика».

Основное назначение задачника-практикума – помочь студентам математических специальностей в освоении курса математического анализа. По этой дисциплине существует ряд хороших задачников, список которых приведен в конце пособия. Однако, из-за слишком большого объема в них зачастую трудно ориентироваться и выбрать нужный материал для подготовки к экзамену. Кроме того, имеющиеся сборники задач не дают возможности индивидуализировать процесс обучения, поскольку не содержат достаточного количества однотипных задач.

Сборник заданий охватывает вопросы математического анализа, относящиеся к «Дифференциальному и интегральному исчислению функций нескольких переменных» и является продолжением аналогичных пособий по «Введению в анализ», «Дифференциальному исчислению функции одной переменной» и «Интегральному исчислению функции одной переменной». Весь материал разбит на 11 параграфов, что в среднем соответствует количеству часов, предусмотренных учебной программой на проведение практических занятий по данной теме. Каждый параграф состоит из 3 пунктов. В пункте I – «Контрольные вопросы и задания» – содержатся вопросы по теоретическому материалу. Цель этого раздела – помочь студенту самостоятельно разобраться в теоретическом материале, выделить наиболее важные места, без которых невозможно осмысленное решение задач. В пункте II – «Примеры решения задач» – разобраны наиболее типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. Эти два пункта студенты должны разобрать самостоятельно при подготовке к практическому занятию по данной теме. В пункте III – «Задачи и упражнения для практических занятий» – приведены задания для аудиторной и домашней работы.

Материал, приведенный в данном издании, соответствует учебным программам по математическому анализу по вышеперечисленным специальностям. Сборник может также быть использовано для проведения практических занятий по дисциплине «Математика» для студентов математического факультета, обучающихся по специальности «Программное обеспечение информационных технологий».

Учебное издание может быть полезно для студентов других специальностей, изучающих высшую математику.

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение функции n переменных.
2. Что называется областью определения функции n переменных?
3. Дайте определение поверхности уровня (линии уровня). О каких свойствах функции можно судить по поверхностям уровня?
4. Сформулируйте определение предела функции в точке.
5. Дайте определение повторного предела функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
6. Всегда ли предел функции в точке совпадает с повторным пределом? Приведите пример, когда эти пределы не совпадают. Сформулируйте условия, при выполнении которых двойной предел функции равен повторному.
7. Дайте определение непрерывности функции в точке.
8. Сформулируйте теорему об арифметических действиях над непрерывными функциями.
9. Сформулируйте понятие сложной функции и теорему о непрерывности сложной функции.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти и изобразить область определения функции $z = \dfrac{\ln(xy)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

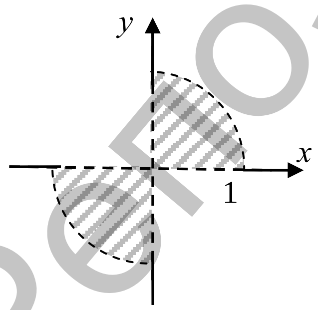

Рис. 1.

Решение. Область определения функции $z = f(x, y)$ представляет собой множество точек плоскости, в которых аналитическое выражение, задающее функцию, имеет смысл. В нашем случае областью определения данной функции будет множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} xy > 0, \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases}$.

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x^2 + y^2 < 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x < 0, \\ y < 0, \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Первая система определяет часть круга $x^2 + y^2 < 1$ с центром в начале координат и радиусом $r = 1$, лежащего в первой четверти, а вторая система – часть круга $x^2 + y^2 < 1$, лежащего в третьей четверти (окружность и координатные оси $x = 0, y = 0$ не входят в область определения (рис. 1).

***Пример* 2.** Найти множество линий уровня функции $u = \sqrt{\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1}}$. Определить линию уровня функции, проходящую через точку M (1, 1).

Решение. Линиями уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $f(x, y) = c$, где c произвольное действительное число. Уравнения $f(x, y) = c$ обычно определяют некоторое семейство линий на плоскости.

Для нахождения линий уровня функции нужно для любого $c \in R$ найти множество точек плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению $\sqrt{\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1}} = c$.

Если $c < 0$, то множество линий уровня есть пустое множество.

Если $c = 0$, то получим $\begin{cases} 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0, \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$

Получаем ось Ox, за исключением двух точек $(1, 0)$ и $(-1, 0)$.

Пусть $c > 0$. Преобразуем уравнение:

$$\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} = c^2; \qquad x^2 + y^2 - \frac{2}{c^2} y = 1,$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{c^2} \right)^2 = 1 + \frac{1}{c^4}. \tag{1}$$

Получим окружности радиуса $\sqrt{1 + \dfrac{1}{c^4}}$ с центром в точке $(0, \dfrac{1}{c^2})$.

Определим линию, проходящую через точку M (1, 1). Для этого координаты точки подставим в уравнение (1) и найдем значение параметра c: $1 + \left(1 - \dfrac{1}{c^2}\right)^2 = 1 + \dfrac{1}{c^4}$ или $\dfrac{2}{c^2} = 1$.

Учитывая что $c > 0$, получим $c = \sqrt{2}$. Тогда линия уровня, проходящая через точку M (1, 1) является окружностью

$$x^2+\left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

***Пример* 3.** Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$.

Решение. Так как для всех точек (x, y) при $x^2+y^2\neq 0$ справедливо неравенство $0\le\left|\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{1}{2}y^2$, то, переходя в этом неравенстве к пределу, когда x и y стремятся к 0, получаем $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}=0$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти и изобразить область определения функции:

1) $z=\sqrt{x^2+y^2-4y}$; 2) $z=\ln(y^2-4x+8)$;

3) $z=\ln(4+xy)$; 4) $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$;

5) $z=\arcsin(x-y)$; 6) $z=\sqrt{\sin(x+y)}$;

7) $z=\ln(-x-y)$; 8) $z=\ln(y+\dfrac{4}{x})$;

9) $z=\ln x-\ln\sin y$; 10) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+4x+y^2}{x^2-4x+y^2}}$;

11) $z=\sqrt{x^2-y^2}$; 12) $z=\dfrac{1}{\ln\frac{x}{y}}$.

2. Найти и изобразить линии уровня функции:

1) $z=xy$; 2) $z=(x-y)^2$; 3) $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$;

4) $z=\min(x;y)$; 5) $z=\sqrt{36-4x^2-9y^2}$; 6) $z=x^2y+x$.

3. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\cos\dfrac{1}{y-x}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$.

4. Вычислите повторные пределы: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ если:

1) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; 2) $z=x+y\sin\dfrac{1}{x}$;

3) $z=\dfrac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$; 4) $z=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}$.

5. Найдите точки разрыва следующих функций:

1) $z=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$; 2) $z=\ln(9-x^2-y^2)$;

3) $u=\dfrac{1}{2x^2+3y^2-z^2}$; 4) $z=\dfrac{1}{\cos^2 x-\cos^2 y}$.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Что такое частное (полное) приращение функции?
2. Запишите частные приращения функции $z=xy^2$ в точке $(1,2)$. Найдите полное приращение функции в этой точке.
3. Дайте определение частной производной функции: а) двух переменных; б) n переменных.
4. Какая функция называется дифференцируемой?
5. Докажите, что дифференцируемая в некоторой точке функция непрерывна в этой точке.
6. Сформулируйте теорему о связи между дифференцируемостью и существованием частных производных.
7. Сформулируйте теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции.
8. Что называется дифференциалом функции $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в данной точке?
9. Что понимают под инвариантностью формы первого дифференциала?

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти частные производные первого порядка от функции $z=\operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}$ в точке $(1,2)$.

Решение. Найдем сначала все частные производные заданной функции в произвольной точке $M(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Подставляем в полученные выражения $x = 1$ и $y = 2$, найдём

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = f'_x(1, 2) = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5}; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = f'_y(1, 2) = -\frac{1}{1+4} = -\frac{1}{5}.$$

***Пример* 2.** Найти полный дифференциал функции $u = xe^{y^2+z^2}$ в точке $M_0(1,\ 1,\ 1)$.

Решение. Полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ находится по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz, \tag{2}$$

где значения частных производных функции вычисляются в точке M_0.

Находим частные производные функции $u = xe^{y^2+z^2}$, их значения в точке M_0 и подставляем в формулу (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{y^2+z^2}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = e^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xye^{y^2+z^2}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 2e^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xze^{y^2+z^2}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 2e^2.$$

Получаем $$du = e^2dx + 2e^2dy + 2e^2dz.$$

***Пример* 3.** Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить: *а*) $(0{,}98)^{1{,}03}$; *б*) $\sin 28^\circ tg 46^\circ$.

Решение. *а*) Искомое число есть значение функции $z = x^y$ в точке $M\ (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, где $x_0 = 1, y_0 = 1$ – координаты точки M_0, $\Delta x = -0{,}02$, $\Delta y = 0{,}03$.

Учитывая, что $\Delta z = z\,(M) - z\,(M_0) \approx dz(M_0)$, получим формулу, для нахождения приближенного значения функции $z = x^y$ в точке M

$$z(M) \approx z(M_0) + dz(M_0). \qquad (3)$$

Найдём значение функции $z\ (M_0)$ и $d\,z\,(M_0)$

$z\,(M_0) = 1,$

$dz(M) = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\,\Delta y,$

$dz(M_0) = \dfrac{\partial z\,(M_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}\Delta y = 1\cdot(-0{,}02) + 0\cdot 0{,}03 = -0{,}02.$

Подставляем полученные значения в формулу (3)

$$0{,}98^{1{,}03} \approx z + dz = 1 - 0{,}02 \approx 0{,}98.$$

б) Искомое число есть значение функции $z = \sin x\,\mathrm{tg}\,y$ в точке $M\ (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, где $x_0 = 30^\circ$, $y_0 = 45^\circ$ – координаты точки M_0, $\Delta x = -2^\circ = -\dfrac{\pi}{90} \approx -0{,}04$, $\Delta y = 1^\circ \approx 0{,}02$.

Тогда $z\,(M_0) = \sin 30^\circ\ tg 45^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta y = \cos x\ tgy\ \Delta x + \frac{\sin x}{\cos^2 y}\Delta y,$$

$$dz\,(M_0) = \frac{\partial z\,(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z\,(M_0)}{\partial x}\Delta y =$$

$$= \cos 30^\circ\ tg 45^\circ\ (-0{,}04) + \frac{\sin 30^\circ}{\cos^2 45^\circ} 0{,}02\ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot(-0{,}04) + \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\cdot 0{,}02 \approx 1{,}73\,(-0{,}02) + 0{,}02 = -0{,}0146.$$

Подставляем полученные значения в формулу (3)

$$\sin 28^\circ tg 46^\circ \approx z + dz \approx \frac{1}{2} - 0{,}0146 = 0{,}5 - 0{,}0146 = 0{,}4854.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти частные производные и полные дифференциалы заданных функций:

1) $u = 3xy^2 + 4y + 5x^3 z + 2$; 2) $u = \dfrac{x}{y}e^{xyz} + 1$;

3) $z = \sin^2(4x^3 + xy)$; 4) $z = arcctg\,\dfrac{y}{x}$;

5) $z = \ln tg\,\dfrac{y}{x}$; 6) $u = x^{y^z}$;

7) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{x}$; 8) $z = \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2. Найти полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

1) $u = \cos(3x + 4y + 5z)$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{6}, 0, 0\right)$;

2) $u = e^{xyz} + 1$, $M_0(1, 1, 1)$;

3) $u = z^2 \sin \dfrac{x}{y}$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{3}, 1, 1\right)$;

4) $u = \dfrac{\ln(1 + y^2 + z^2)}{x}$, $M_0(2, 1, 1)$;

5) $u = z \operatorname{arctg}(xy)$, $M_0(1, \sqrt{3}, 2)$;

6) $u = \dfrac{y}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1, 1, 1)$.

3. Показать, что функция $z = x^y y^x$ удовлетворяет уравнению $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x + y + \ln z)z$.

4. Доказать, что функция $z = f(x, y)(x^2 - y^2)$, где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет соотношению $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - y^2)(y f'_x - x f'_x)$.

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

1) $\sqrt{1{,}97^2 + 1{,}01^2}$; 2) $\sin 59^\circ tg 46^\circ$;

3) $(1{,}08)^{2{,}03}$; 4) $\ln(\sqrt[4]{1{,}03} + \sqrt{0{,}99} - 1)$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте понятие сложной функции. Сформулируйте теорему о дифференцируемости сложной функции.

2. Пусть $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $x_1=\varphi_1(u,v)$, $x_2=\varphi_2(u,v)$, $\ldots$, $x_n=\varphi_n(u,v)$. Как найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$?

3. Пусть $z=f(x,y)$, $x=\varphi(t)$, $y=\chi(t)$. Чему равна производная $\frac{dz}{dt}$?

4. Пусть $z=f(t,x,y)$, $x=\varphi(t)$, $y=\chi(t)$. Как найти $\frac{dz}{dt}$?

5. Что понимается под инвариантностью формы первого дифференциала?

6. Дайте понятие неявной функции. Сформулируйте теорему о существовании и дифференцируемости неявной функции заданной уравнением $F(x,y)=0$ ($F(u,x_1x_2\ldots,x_n)=0$).

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ функции $z=\sin(x^3+y)$, если $x=u+\ln v$, $y=\sqrt{u^2+v^2}$.

Решение. Частные производные сложной функции $z=f(x,y)$, где $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Пользуясь этими формулами, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial u}=3x^2\cos(x^3+y)+\cos(x^3+y)\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}=$$

$$=(3(u+\ln v)^2+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}})\cos((u+\ln v)^3+\sqrt{u^2+v^2});$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=3x^2\cos(x^3+y)\frac{1}{v}+\cos(x^3+y)\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}=$$

$$=(\frac{3(u+\ln v)^2}{v}+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}})\cos((u+\ln v)^3+\sqrt{u^2+v^2}).$$

***Пример* 2.** Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=f(x,y)$ в точке (0, 0, 1), заданной неявно уравнением $x^2+y^2+z^2+1=\sqrt{x+2y+4z}$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+1-\sqrt{x+2y+4z..}.$$

Эта функция:

1) непрерывна в своей области определения и дифференцируема в окрестности точки (0, 0, 1);

2) $F_z^{'}=2z-\dfrac{2}{\sqrt{x+2y+4z}}$; $F_z^{'}(0,0,1)=1\neq 0$;

3) $F(0,0,1)=0$.

Выполняются все условия теоремы о существовании функции $z=f(x,y)$ заданной неявно и её дифференцируемости. Производные этой функции можно найти по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y^{'}}{F_z^{'}}. \tag{4}$$

$$F_x^{'}=2x-\frac{1}{2\sqrt{x+2y+4z}},\quad F_x^{'}(0,0,1)=-\frac{1}{4},$$

$$F_y^{'}=2y-\frac{1}{\sqrt{x+2y+4z}},\quad F_y^{'}(0,0,1)=-\frac{1}{2}.$$

Тогда, применяя формулы (4), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|(0,0,1)=-\frac{1}{4};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|(0,0,1)=-\frac{1}{2}.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z=f(x,y),\ x=\varphi(t),\ y=\chi(t)$:

1) $z=\ln xy,\ x=\cos^2 u,\ y=u^2+v^2$;

2) $z=x^2+y^2,\ x=tguv,\ y=\sin uv$;

3) $z=tg\dfrac{x}{y}, x=\sqrt{u^2+v^2}, y=\sqrt{uv}$;

4) $z=\sin xy,\ x=\arcsin(u+v),\ y=arctg(u+v)$.

2. Найти полную производную $\dfrac{dz}{dt}$ сложной функции:

1) $z=\operatorname{arctg}(x^2+y^2),\ x=e^t,\ y=2-e^{2t}$;

2) $z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, $x=\sin 2t$, $y=tg^2 t$;

3) $z=\ln(e^t+e^x)$, $x=t^3$;

4) $z=tg(2t-3x^2+y)$, $x=\frac{1}{t}$, $y=\sqrt{t}$.

3. Пусть $f\ (x,y)$ – произвольная дифференцируемая функция. Проверьте, что функция $z=f(x,y)$ удовлетворяет соответствующему уравнению:

1) $z=f(x^2+y^2)$, $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$;

2) $z=yf(x^2-y^2)$, $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz$;

3) $z=\sin x+f(\sin y-\sin x)$, $\frac{\partial z}{\partial y}\cos x+\frac{\partial z}{\partial x}\cos y=\cos x\cos y$.

4. Найти в указанной точке $M_0(x_0,y_0)$ частные производные функции $u(x,y)$, заданной неявно уравнением:

1) $e^u-xyu-2=0$, $M_0(1,0)$;

2) $x\cos y+y\cos u+u\cos x=1$, $M_0(0,1,0)$;

3) $u^2\ln(u+x)=xy$, $M_0(1,1,u_0)$, где u_0 – корень уравнения $u^2\ln(1+u)=1$.

5. Найти полный дифференциал функции $z=f(x,y)$, заданной неявно:

1) $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$; 2) $x^3+2y^3+z^3-3xyz+2y-3=0$;

3) $z-x=yctg(z-x)$.

ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение производной по заданному направлению. Приведите формулу, по которой может быть найдена производная по заданному направлению.

2. Дайте определение градиента функции. Как связана производная по направлению вектора $\bar{l}$ с градиентом в данной точке?

3. Каков физический смысл градиента?

4. Найдите производную функции $u = |\vec{r}\,|$ в точке $O\,(0,\,0,\,0)$ ($\vec{r} = x\vec{i} + y\,\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус вектор точки $M\,(x,\,y,\,z)$) по направлению: а) оси OX; б) оси OY; в) вектора $\bar{l} = (1, 1, 1)$.

5. Найдите градиент функции $u = |\,\vec{r}\,|$ в точке O (0, 0, 0).

II. *Примеры решения задач*

Пример 1. Найти: *а*) производную функции $u = xyz$ в точке $M(1, 1, 1)$ по направлению вектора $\bar{l} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$, *б*) направление наибольшего роста функции $u = xyz$.

Решение. *а*) Для нахождения производной функции $u = xyz$ по направлению вектора $\bar{l}$ воспользуемся формулой

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (5)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – координаты единичного вектора $\bar{e}$, сонаправленного вектору $\bar{l}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy, \quad \frac{\partial u(M)}{\partial x} = \frac{\partial u(M)}{\partial y} = \frac{\partial u(M)}{\partial z} = 1.$$

Найдем $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Так как $|\vec{l}\,| = \sqrt{1+4+4} = 3$, то $\bar{e} = \dfrac{\bar{l}}{|\vec{l}\,|} = \dfrac{1}{3}(\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k})$. Следовательно, $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma = \dfrac{2}{3}$.

Подставляя значения частных производных и координаты вектора $\bar{e}$ в формулу (5), получим $\dfrac{\partial u}{\partial l} = 1\cdot\dfrac{1}{3} + 1\cdot(-\dfrac{2}{3}) + 1\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

б) Направление наибольшего роста функции $u = xyz$ в точке M совпадает с направлением градиента функции u в этой точке. Величина наибольшего роста функции равна модулю вектора grad u (M).

$$\operatorname{grad} u\,(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

$$|\operatorname{grad} u\,(M)\,| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти и нарисовать линии уровня функции $u = u\,(x, y)$. Вычислить и изобразить на чертеже градиент этой функции в точках A и B если:

1) $u = xy$, $A(1,1)$, $B(1,-1)$; 2) $u = (x-y)^2$, $A(-1,1)$, $B(1,1)$;

3) $u = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$, $A(1,1)$, $B(2,0)$; 4) $u = \min(x, y)$, $A(2,1)$, $B(1,2)$.

2. Найти производную функции $u = x^2 + 3y^2 - 6x + 2y$ в начале координат по направлению, идущему из начала в точку $M(3, 4)$.

3. Найти производную функции $u = xy^3 + z^2 - 2xyz$ в точке $M(0, 1, 2)$ в направлении, образующем с осями координат углы 60^0, 45^0, 60^0 соответственно.

4. Найти производную функции $u = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0(3, 4)$ в направлении, перпендикулярном к линии уровня функции u, проходящей через эту точку.

5. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M(x, y, z)$ по направлению радиус-вектора $\vec{r}$ (x, y, z) этой точки.

6. Найти производную функции u в точке $M(x, y, z)$ по направлению единичного вектора $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$:

1) $u = |\vec{r}\,|$; 2) $u = \dfrac{1}{|\vec{r}\,|}$;

3) $u = f(|\vec{r}\,|)$; 4) $u = (\bar{a}, \bar{r})$, $\bar{a} = \overline{\text{const}}$.

7. Найти градиент функции u в точке M:

1) $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $M(0, 1)$;

2) $u = x^3 y^2 z$, $M(1, 2, 3)$;

3) $u = (x-1)(y-2)(z-3)$, $M(2, 3, 4)$;

4) $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$, $M(0, 0, 0)$.

8. В каких точках $\text{grad}\,(x + y^2 + 18z^3 - 3xyz)$:

а) перпендикулярен оси OZ;

б) параллелен оси OY;

в) равен нулю.

6. Найти угол между $\text{grad}\, u\,(M_1)$ и $\text{grad}\, u\,(M_2)$, если:

1) $u = (x+y)\, e^{x+y}$, $M_1(0, 0)$, $M_2(-1, 1)$;

2) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y+z}$, $M_1(1,1,0)$, $M_2(-1,0,1)$.

10. Найдите градиент функции $u = u(x,y)$, если функция $u(x,y)$ определяется неявно уравнением:

1) $u^3 - 3xyu = a^2$; 2) $x + y + u = e^u$.

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Какие существуют производные второго порядка от функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$? Дайте определение производной $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

2. В каком случае частная производная второго порядка называется смешанной?

3. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных для функции $z = f(x,y)$.

4. Дайте определение частной производной n-ого порядка функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}$.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти частные производные второго порядка функции $z = \cos\dfrac{y}{x}$.

Решение. Найдём частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}.$$

Найдём частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)'_x = -\frac{2y}{x^3}\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cos\frac{y}{x} =$$

$$= -\frac{y}{x^3}\left(2\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)'_y = -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{x^2}\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\cos\frac{y}{x}.$$

***Пример* 2.** Найти $d^2 z$ для функции $z = x^2 y^3$.

Решение. Формула для нахождения дифференциала второго порядка функции имеет вид

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Найдём все частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2.$$

Тогда $d^2 z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dxdy + 6x^2 y dy^2$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$, если:

1) $z = e^{\frac{y}{x}}$;
2) $z = x^2 e^y$;
3) $z = \sin(x^2 + y)$;
4) $z = x^y$.

2. Вычислить частные производные второго функции $z = f(x, y)$ в заданной точке M_0:

1) $z = \dfrac{xy^2}{x+y}$, $M_0(1, 0)$;
2) $z = \ln(x + y^y)$, $M_0(0, 1)$;
3) $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$, $M_0(0, 0)$;
4) $z = (x+y)^{xy}$, $M_0(1, 0)$;
5) $z = x^{y^z}$, $M_0(e, 1, 1)$.

3. Выяснить, существуют ли в точке $M_0(0,0)$ частные производные второго порядка функции $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \text{ если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \text{ если } x^2+y^2=0.\end{cases}$

4. Найдите частные производные указанного порядка:

1) $z=\sin(xy)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$; 2) $z=e^{xyz}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial z}$;

3) $z=\sqrt{xy^2z^3}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial z}$; 4) $z=\sin 2x\cos 3y$, $\dfrac{\partial^5 z}{\partial x^2\partial y^3}$.

5. Убедиться, что функция удовлетворяет заданному уравнению:

1) $z=e^x(x\cos y-y\sin y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

2) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$;

3) $u=\dfrac{1}{2a\sqrt{12t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

4) $z=\dfrac{1}{x}(\varphi(x-y)+\chi(x+y))$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2\dfrac{\partial z}{\partial x})=x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

6. Найти второй дифференциал функции $f(x,y)$ в указанной точке:

1) $u=x^2+y^3+2xy^2$, $(1,1)$; 2) $u=\sin(y+2yz)$, $(0,0,0)$;

3) $u=e^{y\ln x}$, $(2,1)$; 4) $u=\operatorname{arctg}(x^2-2y)$, $(1,0)$.

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА.
КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ
И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Запишите формулу Тейлора для функции нескольких переменных.

2. Приведите различные формы записи остаточного члена формулы Тейлора.

3. Запишите формулы для нахождения векторов нормалей и уравнений касательных к поверхностям, заданным различными способами.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Написать формулу Тейлора для функции $f(x,y) = \ln(x - 2y)$ до второго порядка включительно в окрестности точки (1, 0).

Решение. Формула Тейлора имеет вид

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + d f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + o(\rho^n),$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Функция $f(x,y)$ в точке M_0 (1, 0) равна нулю. Найдем все частные производные до второго порядка включительно:

$$f'_x(M_0) = 1, \qquad f'_y(M_0) = -2,$$

$$f''_{xx}(M_0) = -1, \quad f''_{xy}(M_0) = 2, \quad f''_{yy}(M_0) = -4.$$

Найдем дифференциалы первого и второго порядка в точке M_0, учитывая, что $dx = (x - x_0)$, $dy = (y - y_0)$:

$$d(M_0) = f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dx = (x - 1) - 2y;$$

$$d^2(M_0) = f''_{xx}(M_0)dx^2 + 2f''_{xy}(M_0)dxdy + f''_{yy}(M_0)dy^2 =$$

$$= -(x-1)^2 + 4y(x-1) - 4y^2 .$$

Согласно приведенной выше формуле при $n = 2$ получаем

$$f(x,y) = x - 1 - 2y + \frac{1}{2!}\left(-(x-1)^2 + 4y(x-1) - 4y^2\right) + o(\rho^2) =$$

$$= x - 2y - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2y(x-1) - 2y^2 + o(\rho^2) .$$

***Пример* 2.** Найти направляющие косинусы вектора нормали и записать уравнение касательной плоскости к следующим поверхностям:

а) $z = x^2 + 2y^2$ в точке M_0 (1, 0, 1);

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ в точке $M_0(\sqrt{3}, 2, 3)$.

Решение. *а*) Направляющими косинусами вектора нормали к поверхности называют координаты единичного вектора нормали.

Так как поверхность $z = x^2 + 2y^2$ задана явно, то вектор нормали к данной поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет координаты $\vec{N} = \left(z'_x(M_0),\ z'_y(M_0), -1\right)$.

В нашем случае: $z'_x(M_0) = 2x\big|_{x=1} = 2$, $z'_y(M_0) = 4y\big|_{y=0} = 0$, т.е. $\overrightarrow{N} = (2,\ 0, -1)$. Длина вектора $\overrightarrow{N}$ равна $\sqrt{5}$, тогда единичный вектор нормали $\vec{n} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности, имеет вид

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка касания, A, B, C – координаты вектора нормали $\overrightarrow{N}$ к поверхности в точке M_0.

Подставив найденные значения в формулу, получим

$$2(x - 1) - (z - 1) = 0 \quad \text{или} \quad 2x - z - 1 = 0.$$

б) Так как поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ задана неявно, то вектор нормали к данной поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет координаты

$$\overrightarrow{N} = \left(F'_x(M_0),\ F'_y(M_0),\ F'_z(M_0)\right),$$

где

$$F\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16, \qquad F'_x(M_0) = 2x\big|_{x=\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

$$F'_y(M_0) = 2y\big|_{y=2} = 4,\ \ F'_z(M_0) = 2z\big|_{z=3} = 6,$$

т.е. $\overrightarrow{N} = \left(2\sqrt{3},\ 4,\ 6\right)$. Длина вектора $\overrightarrow{N}$ равна 8, тогда единичный вектор нормали: $\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4},\ \cos\beta = \frac{1}{2},\ \cos\gamma = \frac{3}{4}.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_0 имеет вид $2\sqrt{3}\,(x - \sqrt{3}) + 4(y - 2) + 6(z - 3) = 0$. Раскрывая скобки, получим $2\sqrt{3}\,x + 4y + 6z - 32 = 0$.

III. ***Задачи и упражнения для практических занятий***

1. Разложить по формуле Тейлора функцию $f\,(x, y)$ в окрестности заданной точки M_0:

1) $f\,(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, $M_0\,(2, 1)$;

2) $f\,(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y$, $M_0\,(1, -2)$;

3) $f(x, y) = x^3 + 3xy - 2y^3$, M_0 (2, 1).

2. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x, y, z)$ в окрестности заданной точки M_0:

1) $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$, M_0 (1, 1, −2);

2) $f(x, y, z) = xyz$, M_0 (1, 2, 3);

3) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^3 - 3z^2$, M_0 (0, 1, 2).

3. Выписать члены до второго порядка включительно формулы Тейлора для функции $f(x, y)$ в окрестности заданной точки M_0:

1) $f(x, y) = \sqrt{(x+2y)}$, M_0 (2, 1);

2) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, M_0 (1, 1);

3) $f(x, y) = \sin x \sin y$, M_0 (0, 0).

4. Найти направляющие косинусы вектора нормали и записать уравнение касательной плоскости к следующим поверхностям в указанной точке M_0:

1) $z = x^2 + y^2$ в точке M_0 (1, –2, 5);

2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ в точке M_0 (1, 1, $\sqrt{2}$);

3) $z = e^{x\cos y}$ в точке M_0 (1, 0, e);

4) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{8} = 4$ в точке M_0 (4, 3, 4);

5) $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ в точке M_0 ($R\cos\alpha$, $R\sin\alpha$, R);

6) $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13$ в точке M_0 (2, 1, –1).

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НАИМЕНЬШЕЕ И НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Дайте определение локального экстремума функции.
2. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции.
3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции двух переменных.
4. Какая квадратичная форма называется: а) положительно определенной; б) отрицательно определенной; в) знакоопределенной; г) знакопеременной?

5. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

6. Как найти наибольшие и наименьшие значения функции в замкнутой области?

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** *а*) Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 - xy^2 + y^2$;

б) Найти наибольшее и наименьшее значение данной функции в области D, ограниченной линиями: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Решение. *а*) Введем следующие обозначения:

$$a_{11} = f''_{xx}\Big|_{M_0},\ a_{12} = f''_{xy}\Big|_{M_0},\ a_{21} = f''_{yx}\Big|_{M_0}, a_{22} = f''_{yy}\Big|_{M_0}.$$

Для того, чтобы исследовать функцию $z = f(x, y)$ на экстремум необходимо:

1) Найти критические точки, т.е. точки в которых производные f'_x и f'_y равны нулю;

2) в критических точках проверить достаточное условие экстремума функции:

– если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума (точка M_0 будет точкой максимума при $a_{11} < 0$ и точкой минимума при $a_{11} > 0$);

– если $\Delta < 0$, то точка M_0 не является точкой экстремума, если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Исследуем на экстремум функцию $z = 2x^2 - xy^2 + y^2$.

Найдем производные функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy + 2y.$$

Тогда критические точки функции можно найти из системы уравнений $\begin{cases} 4x - y^2 = 0, \\ -2xy + 2y = 0. \end{cases}$

Получим три точки $M_0(0, 0)$, $M_1(1, 2)$, $M_2(1, -2)$.

В каждой из этих точек проверим достаточные условия экстремума. Вычислим производные второго порядка

$$a_{11} = f''_{xx} = (4x - y^2)'_x = 4, \qquad a_{12} = f''_{xy} = (4x - y^2)'_y = -2y = a_{21},$$

$$a_{22} = f''_{yy} = (-2xy + 2y)'_y = -2x + 2.$$

Построим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2y \\ -2y & -2x+2 \end{vmatrix}$.

Рассмотрим точку $M_0(0, 0)$: $\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $a_{11} = 4 > 0$, следовательно, точка $M_0(0, 0)$ является точкой минимума.

Рассмотрим точку $M_1(1, 2)$: $\Delta(M_1) = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$, следовательно, точка $M_1(1, 2)$ не является точкой экстремума.

Рассмотрим точку $M_2(1, -2)$: $\Delta(M_2) = -16 < 0$ следовательно, точка $M_2(1, -2)$ не является точкой экстремума.

б) Найдем наибольшее и наименьшее значение функции в области D, ограниченной линиями: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Функция $z = f(x, y)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения либо в критической точке функции, лежащей внутри области D, либо на границе области D.

Внутри области D лежит одна критическая точка функции $z = 2x^2 - xy^2 + y^2$ – точка $M_1(1, 2)$. Найдем значение функции в этой точке: $z(M_1) = 2$.

Исследуем данную функцию на границе области.

На прямой $x = 0$ функция имеет вид

$$z(0, y) = y^2 = \varphi(y),\ y \in [0, 6].$$

Это функция одной переменной y. Найдем значения этой функции в критических точках и на концах отрезка $[0, 6]$. $f'(y) = 2y = 0$. Критическая точка функции $\varphi(y)$: $y = 0$. Эта точка совпадает с одним из концов отрезка. Найдем значения функции на концах отрезка: $\varphi(0) = z(0, 0) = 0$; $\varphi(6) = z(0, 6) = 36$.

На прямой $y = 0$ функция имеет вид

$$y(x, 0) = 2x^2 = \psi(x), \quad x \in [0, 6].$$

$\psi'(x) = 4x = 0$, при $x = 0$. Находим значение функции $\psi(x)$ в точках $x = 0$ и $x = 6$: $\psi(0) = z(0, 0) = 0$, $\psi(6) = z(6, 0) = 72$.

Рассмотрим прямую $x + y = 6$ или $y = 6 - x$. На этой прямой функция $z(x, y)$ имеет вид

$$z(x, 6-x) = 2x^2 - x(6-x)^2 + (6-x)^2 =$$

$$= -x^3 + 15x^2 - 48x + 36 = \lambda(x), \quad x \in [0, 6].$$

$\lambda'(x) = -3x^2 + 30x - 48 = 0$ при $x_1 = 2$, $x_2 = 8$. Точка $x_2 = 8$ не принадлежит отрезку [0, 6]. Найдем значения функции $\lambda(x)$ в точках $x = 2,\ x = 0,\ x = 6$:

$$\lambda(0) = z(0,6) = 36,\ \lambda(2) = z(2,4) = -8,\ \lambda(6) = z(0,6) = 72.$$

Сравним все полученные значения функции $z(x, y)$. Очевидно, что наименьше значение функция достигает в точке (2, 4) и $z_{\text{наимен.}} = -8$; наибольшего значения функция достигает в точке (6, 0) и $z_{\text{наиб.}} = 72$.

***Пример* 2.** Найти точки экстремума функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

Решение. Для функции трех и большего числа переменных необходимые условия экстремума функции аналогичны необходимым условиям экстремума функции двух переменных: частные производные функции в точках подозрительных на экстремум равны нулю.

Достаточные условия также аналогичны. Сформулируем эти условия для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$. Обозначим

$$a_{11} = f''_{xx}\Big|_{M_0},\ a_{12} = f''_{xy}\Big|_{M_0},\ a_{13} = f''_{xz}\Big|_{M_0},$$

$$a_{21} = f''_{yx}\Big|_{M_0},\ a_{22} = f''_{yy}\Big|_{M_0},\ a_{23} = f''_{yz}\Big|_{M_0},$$

$$a_{31} = f''_{zx}\Big|_{M_0},\ a_{32} = f''_{zy}\Big|_{M_0},\ a_{33} = f''_{zz}\Big|_{M_0}.$$

$$\Delta_1 = a_{11},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Точка M_0 является точкой минимума функции, если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$;

точка M_0 является точкой максимума функции, если $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$;

если $\Delta_2 < 0$, то точка M_0 не является точкой экстремума.

Найдем критические точки функции $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

$$f'_x = 2x - y + 1,\quad f'_y = 2y - x,\quad f'_z = 2z - 2.$$

Решением системы $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ -x + 2y = 0, \\ 2z - 2 = 0. \end{cases}$

является точка $M\ (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ – критическая точка функции.

Определим, является ли точка M точкой экстремума:

$$a_{11} = f''_{xx}\big|_M = 2,\ \ a_{12} = f''_{xy}\big|_M = -1,\ a_{13} = f''_{xz}\big|_M = 0,$$

$$a_{21} = f''_{yx}\big|_M = -1,\ \ a_{22} = f''_{yy}\big|_M = 2,\ a_{23} = f''_{yz}\big|_M = 0,$$

$$a_{31} = f''_{zx}\big|_M = 0,\ \ a_{32} = f''_{zy}\big|_M = 0,\ a_{33} = f''_{zz}\big|_M = 2,$$

тогда $\quad \Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 6 > 0.$

Следовательно, точка M – точка минимума функции.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

I. Найти точки локального экстремума следующих функций двух переменных:

1) $z = 3x + y - xy$; 2) $z = 15x + x^2 - xy - 2y^2$;

3) $z = x^2 + 2xy - x - 8y$; 4) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$;

5) $z = 5x^2 - 3xy - y^2$; 6) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$;

7) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$; 8) $z = x^2\, y(2 - x - y)$.

2. Найти точки локального экстремума следующих функций трех переменных:

1) $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$; 2) $u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$;

3) $u = \frac{xyz}{16} - x - y - 2z$; 4) $u = \frac{256}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2$.

3. Найти наибольшее M и наименьшие m значения функции z на заданном множестве:

1) $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$; $\quad D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$;

2) $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$; $\quad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$;

3) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$; $\quad D: x = 0, y = 0, x + y = -3$;

4) $z = x^2 - 4xy - y^2 - 6x - 2y$; $\quad D: y = x,\ x = 2, y = 0$;

5) $z = x^3 - 6y^2 - 6xy$; $\quad D: y = 0, y = x, x = 2$;

6) $z = x^3 + y^3 - 3xy$; $\quad D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$;

7) $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$; $D: x = 0, x = 2, x + y - 1 = 0$.

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Введите понятие двойного интеграла.
2. В чем состоит геометрический и физический смысл двойного интеграла?
3. Сформулируйте основные свойства двойного интеграла.
4. Что такое повторный интеграл?
5. Как свести двойной интеграл к повторному в случае различного задания областей?
6. Введите понятие криволинейных координат на плоскости.
7. Запишите формулы для якобиана перехода от декартовых координат к криволинейным. Чему равен якобиан перехода к полярным координатам?
8. Запишите формулу перехода от декартовых координат к криволинейным в двойном интеграле.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла или суммы повторных интегралов с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D ограничена следующими линиями: $y = (x-2)^2$, $y = x$.

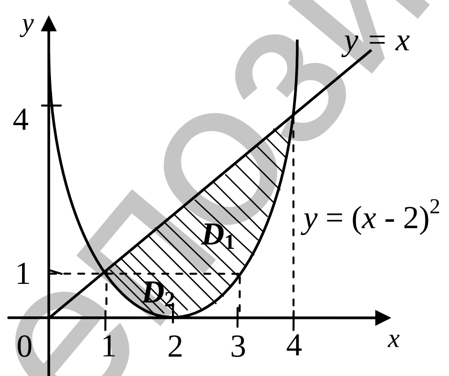

Рис. 2.

Решение. Кривые $y = (x-2)^2$ и $y = x$ пересекаются в точках $M_1(1,1)$ и $M_2(4,4)$. Область D изображена на рисунке 2. Она заключена между прямыми $x = 1$ и $x = 4$. Снизу область ограничена кривой $y = (x-2)^2$, сверху — прямой $y = x$.

Следовательно, двойной интеграл можно представить в виде повторного с внешним интегрированием по x

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_1^4 dx \int\limits_{(x-2)^2}^{x} f(x,y)dy.$$

Рассмотрим внешнее интегрирование по y. Разобьем область D прямой $y=1$, на две области D_1 и D_2. Область D_1 ограничена снизу и сверху прямыми $y=0$ и $y=1$ соответственно, слева — кривой $x=2-\sqrt{y}$, справа — кривой $x=2+\sqrt{y}$. Область D_2 ограничена снизу прямой $y=1$, сверху - прямой $y=4$, слева прямой $x=y$, справа прямой $x=2+\sqrt{y}$. Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int\limits_1^4 dy\int\limits_y^{2+\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

***Пример* 2.** Найти $\iint\limits_D x^2y\,dxdy$, если область D ограничена линиями: $y^2+(x-1)^2=1,\ (y\geq 0),\ y=0$.

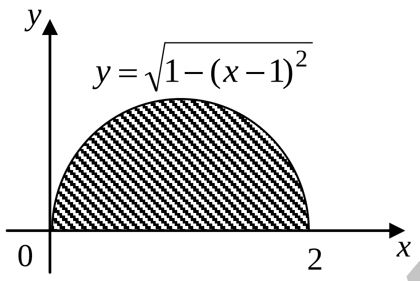

Рис. 3.

Решение. **1 способ.** Область D изображена на рисунке 3. Она ограничена слева и справа прямыми $x=0$ и $x=2$ соответственно; снизу — прямой $y=0$, сверху — полуокружностью $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$. Поэтому двойной интеграл может быть найден с помощью повторного интеграла с внешним интегрированием по x

$$\iint\limits_D x^2y\,dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} x^2y\,dy=\int\limits_0^2 x^2\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2(1-(x-1)^2)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2(2x^3-x^4)dx=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{2x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^2=\frac{4}{5}.$$

2 способ. Этот же интеграл можно найти с помощью перехода к полярным координатам: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$.

Если функции

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \end{cases} \quad \text{где } (u,v)\in(G), \qquad (6)$$

задающие взаимно однозначное отображение области (G) плоскости Ouv в область (D) плоскости Oxy, имеют непрерывные производные в области (G), и якобиан системы (6)

$$I = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \qquad (7)$$

не равен нулю в области (G), то для двойного интеграла от функции $f(x, y)$ по области (D) справедлива **формула замены переменных**

$$\iint\limits_{(D)} f\ (x,\ y)dxdy\ = \iint\limits_{(G)} f\ (\varphi(u,v), \psi(u,v))|I|dudv. \qquad (8)$$

В случае полярных координат, $I = \rho$ и формула (8) имеет вид

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)dxdy = \iint\limits_{G} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\cdot\rho\ d\rho d\varphi.$$

Чтобы расставить пределы интегрирования в области G изменения переменных ρ и φ, запишем уравнение полуокружности в полярных координатах. Для этого подставим полярные координаты в уравнение $y^2 + (x-1)^2 = 1$. Получим $\rho^2\sin^2\varphi + (\rho\cos\varphi - 1)^2 = 1$,

или $\rho = 2\cos\varphi$. Следовательно, $0 \le \rho \le 2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G} \rho^4\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi\, d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \rho^4 d\rho)\ d\varphi =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\cdot\sin\varphi \left.\frac{\rho^5}{5}\right|_{0}^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{32}{5}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{32}{5}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi\, d\cos\varphi = -\frac{32}{5}\left.\frac{\cos^8\varphi}{8}\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{5}\frac{1}{8} = \frac{4}{5}.$$

***Пример* 3.** Найти $\iint\limits_{D}\sqrt{4 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, если область D ограничена линиями $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1$.

Решение. Для нахождения этого двойного интеграла, введем обобщенные полярные координаты: $x = a\rho\cos\varphi,\ \ y = b\rho\sin\varphi$. Найдем якобиан преобразования

$$I(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi\end{vmatrix} = ab\rho.$$

Найдем уравнения границ области G, в которую переходит область D при данном преобразовании:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2,$$

следовательно, это уравнение равносильно уравнению $\rho^2=1$ или $\rho=1$. Аналогично, уравнение $\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$ равносильно уравнению $\rho=2$.

Итак, область D, ограниченная эллипсами, с помощью перехода к обобщенным полярным координатам отображается в область G, задаваемую неравенствами: $1\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi$.

Подынтегральная функция примет вид $\sqrt{4-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}=\sqrt{4-\rho^2}$.

По формуле (3) находим

$$\iint\limits_D\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = ab\iint\limits_G\sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,d\rho d\varphi = ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2\sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= ab\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\int_1^2\left(4-\rho^2\right)^{1/2}d(4-\rho^2)\right)d\varphi = -\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\left(\frac{(4-\rho^2)^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_1^2 d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}ab\int_0^{2\pi}\left(0-3\sqrt{3}\right)d\varphi = 2\sqrt{3}\pi ab.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями:

1) $0\le x\le 2,\ \ 1\le y\le 3;$	2) $y=x^2,\ \ y=0,\ \ x=1;$
3) $x^2+y^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0;$	4) $y=x^2,\ \ y=1;$
5) $y=x,\ xy=1,\ y=2;$	6) $y=x,\ xy=1,\ \ y=0,\ \ x=2;$

7) $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = 0,\ \ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$;

8) $1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$;

9) $1 \le x^2 + y^2 \le 4$;

10) область D – параллелограмм $ABCD$, где $A\,(1, 1)$, $B\,(2, 2)$, $C\,(4, 2)$, $D\,(3, 1)$.

2. Изменить пределы интегрирования в повторном интеграле, предварительно сделав чертеж:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 f(x, y)dy$;

2) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$;

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} f(x, y)dy$;

4) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{3-2x} f(x, y)dy$;

5) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{e^x} f(x, y)dy$;

6) $\int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_{\sin x}^{\cos x} f(x, y)dy$;

7) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y)dx$;

8) $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dx \int\limits_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dy$;

9) $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\arccos y} f(x, y)dx$;

10) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_y^{2+y} f(x, y)dy$.

3. Найти следующие двойные интегралы:

1) $\iint\limits_D \left(x^2 + 2xy + 3y^2\right)dxdy$, где область D – прямоугольник $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2)$;

2) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^2}$, где область D – прямоугольник $(3 \le x \le 4,$ $1 \le y \le 2)$;

3) $\iint\limits_D y\cos xy\, dxdy$, где область D – прямоугольник $(\dfrac{1}{2} \le x \le 1,$ $\pi \le y \le 3\pi)$;

4) $\iint\limits_D (2x - 3xy + y^2)\, dxdy$, где область D – треугольник с вершинами О (0, 0), А (1, 1), В (2, 0);

5) $\iint\limits_D (x + 2y)^3 dxdy$, где область D ограничена прямыми $y = 2x$, $y = 4 - 2x$, $y = 0$;

6) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, где область D ограничена линиями $y = x,\ x = 2,\ xy = 1$;

7) $\iint\limits_D y\cos(x+y)dxdy$, где область D ограничена прямыми: $y=\frac{\pi}{x},\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=0$;

8) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$, где область D ограничена линиями $y = x,\ x = y^2$;

9) $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где область D ограничена линиями $y = \ln x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = e$;

10) $\iint\limits_D xdxdy$, где область D задана неравенствами $x+y\ge 2$, $x^2+(y-1)^2\le 1$;

11) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sin x}$, где область D ограничена линиями $x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{3\pi}{4}$, $y=\cos x,\ y=0$;

12) $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$, где область D ограничена линиями $y=\frac{x^2}{2}$, $x=y$;

4. Перейдя к полярным координатам, найти двойной интеграл:

1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где область $D-$ часть круга $x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$;

2) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy,$ где область $D-$ кольцо $1\le x^2+y^2\le 2$;

3) $\iint\limits_D arctg\,\frac{x}{y}dxdy$, где область $D-$ часть кольца $1\le x^2+y^2\le 9$, $y\ge x,\ \ y\le\sqrt{3}x$;

4) $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy,$ где область $D-$ кольцо $1\le x^2+y^2\le e^2$;

5) $\iint\limits_D \sqrt{a^2+x^2+y^2}dxdy$, где область $D-$ окружность $x^2+y^2-ax=0$;

6) $\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right) dxdy$, где область D ограничена дугой эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$ ($x \ge 0, y \ge 0$) и координатными осями;

7) $\iint\limits_D \frac{x^2+4y^2}{1-x^2-4y^2} dxdy$, где область D ограничена эллипсом $x^2+4y^2 = 1$;

8) $\iint\limits_D xy\, dxdy$, где область D ограничена линией $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$;

9) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\, dxdy$, где область D ограничена линией $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2,\ x \ge 0, y \ge 0$.

ПРИМЕНЕНИЕ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Запишите формулы для нахождения площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла в декартовых и полярных координатах.
2. Запишите формулу для нахождения объема тела с помощью двойных интегралов.
3. Запишите формулу для нахождения площади поверхности с помощью двойного интеграла.
4. Запишите формулы для нахождения массы, координат центра тяжести, статических моментов и моментов инерции плоской пластины.

I. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$y = \cos x,\ y = \sin x,\ x = 0,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$$

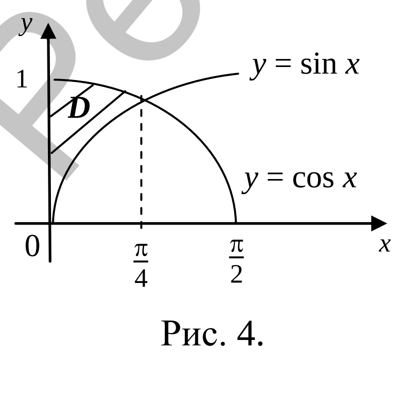

Рис. 4.

Решение. Область D изображена на рисунке 4. Площадь плоской области находится по формуле: $S = \iint\limits_D dxdy$.

Следовательно,

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\int_{\sin x}^{\cos x}dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx==(\sin x\ +\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1.$$

Замечание. Площадь плоской фигуры D в полярной системе координат вычисляется по формуле:

$$S=\iint_W \rho d\rho d\varphi\,.$$

Пример **2.** Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $y=x^2$ и плоскостями $x+y+z=2$, $z=0$.

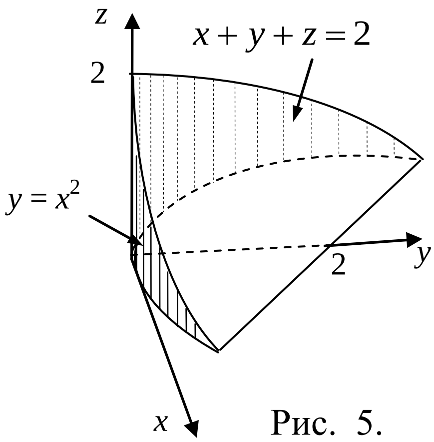

Рис. 5.

Решение. Данное тело (рис. 5) представляет вертикальный цилиндр $y=x^2$, который сверху ограничен частью плоскости $z=2-x-y$, а снизу – частью плоскости *Oxy*.

Объем этого тела находится по формуле

$$V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\,,$$

где $f(x,y)=\ 2-x-y$, D – проекция тела на плоскость *Oxy*, т.е. часть плоскости, ограниченная параболой $y=x^2$ и прямой $y=2-x$. Точки пересечения параболы и прямой находим из уравнения $x^2=2-x$. Следовательно,

$$V=\int_{-2}^{1}dx\int_{x^2}^{2-x}(2-x-y)dy=\int_{-2}^{1}\left[(2-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2-x}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)dx=\frac{81}{20}.$$

Пример **3.** Найти площадь части параболоида $z=x^2+y^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$.

Решение. Если поверхность Φ задана явно уравнением $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, то площадь поверхности можно найти по формуле

$$S=\iint_D\sqrt{z_x'^{\,2}+z_y'^{\,2}+1}\,dxdy\,.$$

Следовательно, площадь части параболоида находится с помощью двойного интеграла $S=\iint_D\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy$, где D – круг $x^2+y^2\le a^2$.

$$S = \iint_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy = \left|\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \end{matrix}\right| =$$

$$= \iint_G \sqrt{4r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi + 1}\cdot r\,drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\cdot\sqrt{4r^2+1}\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{4r^2+1}\,dr^2 = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (4r^2+1)^{\frac{1}{2}}\,d(4r^2+1) =$$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} (4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\,d\varphi = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{(4a^2+1)^3}-1\right).$$

***Пример* 4.** Найти статические моменты и координаты центра тяжести плоской пластины, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и координатными осями. Плотность фигуры в каждой точке пропорциональна произведению координат этой точки.

Решение. Пусть $M\ (x,\ y)$ - произвольная точка, принадлежащая области, изображенной на рисунке 6. Тогда плотность фигуры в произвольной точке $\rho\,(x, y) = kxy$, где k – коэффициент пропорциональности.

Статические моменты M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy находятся по формулам

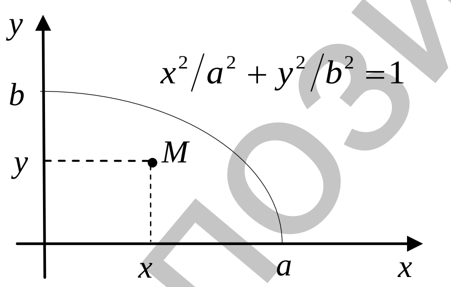

Рис.6.

$$M_x = \iint_D y\cdot\rho(x,\ y)dxdy,$$

$$M_y = \iint_D x\cdot\rho(x,\ y)dxdy.$$

Координаты центра тяжести пластины определяются по формулам

$$x_0 = \frac{M_y}{m},\ y_0 = \frac{M_x}{m},$$

где $m = \iint_D \rho(x,\ y)dxdy$ – масса пластины D.

Найдем статический момент пластины относительно оси Ox:

$$M_x = \iint_D y\cdot kxydxdy = k\int_0^b dy \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} xy^2dx = k\int_0^b y^2\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{ka^2}{2b^2}\int_0^b y^2(b^2-y^2)dy = \frac{ka^2}{2b^2}\cdot(b^2\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{5})\Big|_0^b = \frac{kb^3a^2}{15}.$$

Аналогично находим статический момент относительно оси Oy:

$$M_y = \iint_D x\cdot kxydxdy = k\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x^2ydy = \frac{kb^2a^3}{15}.$$

Найдем массу данной пластины:

$$m = \iint_D kxydxdy = k\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xydy = k\int_0^a x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$= \frac{kb^2}{2a^2}\int_0^a x(a^2-x^2)dy = \frac{kb^2}{2a^2}\cdot(a^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4})\Big|_0^a = \frac{kb^2a^2}{8}.$$

Тогда получим координаты центра тяжести

$$x_0 = \frac{M_y}{m} = \frac{8a}{15},\quad y_0 = \frac{M_x}{m} = \frac{8b}{15}.$$

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Найти площади плоских областей, ограниченных следующими линиями:

1) $y = x^3,\ y = x$;
2) $y^2 = x+2,\ y = x$;
3) $y = \sin x,\ y = x,\ y = \frac{\pi}{2}$;
4) $y = \sin x,\ y = \cos x,\ \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$;
5) $y = |\lg x|,\ y = 0,\ \frac{1}{100} \le x \le 100$;
6) $y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;
7) $y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = 1,\ x = 1$;
8) $\rho = 1 - \cos\varphi$;
9) $\rho = 1 + \sin\varphi$;
10) $\rho = a\cos 2\varphi$;
11) $\rho = a\sin^2\varphi$.

2. Перейдя к полярным координатам, найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$;
2) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$;
3) $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$;
4) $(x^2+y^2)^3 = (x^2+y^2)^2 + 4a^2x^2y^2$;

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $y = \sqrt{x}$, $x + y + z = 6$, $z = 0$, $y = 0$;

2) $y^2 = x$, $y + z = 2$, $z = 0$;

3) z = xy, $x + y = 1$, $z = 0$;

3) $x + y = 1$, $y = 1 - x^2$, $z = 1$, $z = 0$;

4) $x^2 + y^2 = 4$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$;

5) $z = 1 - (x^2 + y^2)$, $z = 0$;

6) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

7) $z = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$;

8) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 - Rx \le 0$, $z \ge 0$.

4. Найти площадь указанных частей данных поверхностей:

1) части конуса $z^2 = x^2 + y^2$, вырезанного цилиндром $z^2 = 2py$;

2) части гиперболического параболоида $z = xy$, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$;

3) части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$;

4) части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = Rx$.

5. Найти координаты центра масс однородной пластинки, занимающей область D и ограниченной данными линиями:

1) $ay = x^2, y = 2$ $(a > 0)$. (Ответ: C (0,6/5).).

2) $y^2 = ax, y = x$. (Ответ: C (2a/5, a/2).)

3) $y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4$. (Ответ: C (2/5, 0).)

4) $y^2 = x^2 - x^4$.(Ответ: C (3π/16, 0).))

6. Решить задачи.

1) Найти момент инерции треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 2,\ x = 2,\ y = 2$ относительно оси Ox $(\rho(x, y) = 1)$. (Ответ: 4.)

2) Найти момент инерции треугольника с вершинами в точках $A(0, 2a)$, $B(a, 0)$, $C(a,a)$ относительно оси Oy $(\rho(x, y) = 1)$. (Ответ: $a^4/4$.)

3) Найти момент инерции эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно координатных осей $(\gamma(x, y) = 1)$.(Ответ: $(I_x = 8ab^3/9, I_y = \pi a^3 b/4)$.

4) Найти момент инерции относительно оси Oy однородной пластины, ограниченной линиями $y = a + x^2 / a, y = 2x, x = 0.$

(Ответ: $a^4/30$.)

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Введите понятие тройного интеграла.
2. В чем состоит геометрический и физический смысл тройного интеграла?
3. Сформулируйте основные свойства тройного интеграла.
4. Как свести тройной интеграл к повторному в случае различного задания областей?
5. Ведите понятие криволинейных координат в пространстве. Что такое сферические и цилиндрические координаты?
6. Запишите формулы для перехода в тройном интеграле от декартовых координат к сферическим и цилиндрическим. Чему равен якобиан перехода к этим координатам?

II. *Примеры решения задач*

Пример 1. Найти интеграл: $I = \iiint\limits_V x\,dxdydz$, где область (V) – тетраэдр, ограниченный плоскостью $3x + 2y + 2z = 6$ и координатными плоскостями (рис.7).

Решение. $I = \iiint\limits_V xdxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{3-y-\frac{3}{2}x} xdz$, где D – проекция области (V) на плоскость Oxy, т.е. треугольник, ограниченный прямой $3x + 2y = 6$ и координатными осями (рис. 8).

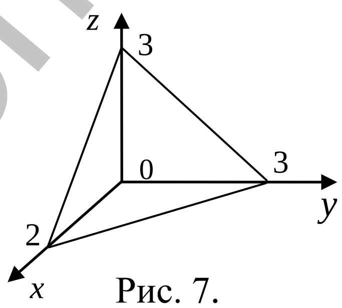

Рис. 7.

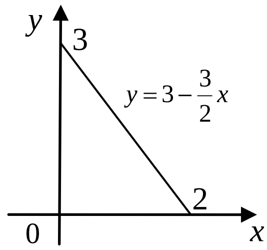

Рис. 8.

$$I = \iint\limits_D xz\Big|_0^{3-y-\frac{3}{2}x} dxdy = \iint\limits_D x\,(3 - y - \frac{3}{2}x)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} x\cdot(3-y-\frac{3}{2}x)dy = \int\limits_0^2 (3xy - \frac{y^2}{2}x - \frac{3}{2}x^2 y)\Big|_0^{3-\frac{3}{2}x} dx =$$

$$= \frac{9}{8}\int\limits_0^2 (4x-4x^2+x^3)dx = \frac{9}{8}(4\frac{x^2}{2}-4\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4})\Big|_0^2 = \frac{3}{2}.$$

***Пример* 2.** Найти интеграл $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, где область V − область, лежащая внутри сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ и верхней части конуса $z^2=x^2+y^2$ (рис. 9).

Решение. Перейдем к сферическим координатам: $x=\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\theta$. Якобиан перехода $I=\rho^2\sin\theta$.

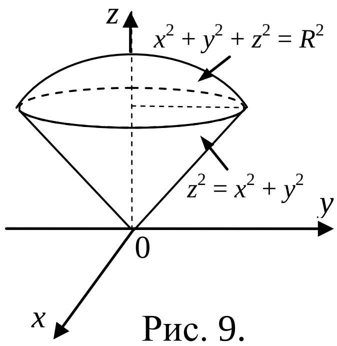

Рис. 9.

Преобразуем подынтегральную функцию. Так как

$$x^2+y^2+z^2 =$$

$$\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta = \rho^2,$$

то $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho$.

Уравнения сферы и конуса в сферических координатах имеют вид $\rho=R$ и $\operatorname{tg}\theta=1$ или $\theta=\frac{\pi}{4}$ соответственно. Тогда переменные ρ, φ и θ изменяются в следующих пределах:

$$0\le\rho\le R,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}.$$

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint\limits_U p\cdot p^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^R p^3dp = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,d\theta\cdot\int\limits_0^R p^3dp =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R = (1-\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{R^4\pi}{2}.$$

***Пример* 3.** Найти $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $x^2+y^2=1$, $y+z=1$, $z=0$ (рис. 10).

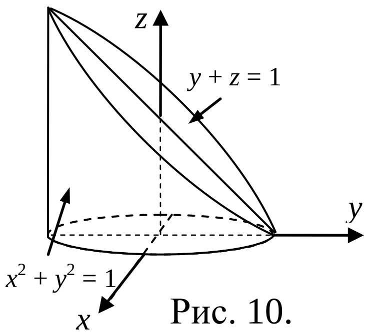

Рис. 10.

Решение. Перейдем в интеграле к цилиндрическим координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, $dxdydz = \rho\, d\rho d\varphi dz$.

Уравнение цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ в цилиндрических координатах имеет вид $\rho = 1$, уравнение плоскости $y + z = 1$: $z = 1 - \rho\sin\varphi$. Следовательно, $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le 1 - \rho\sin\varphi$. Подынтегральная функция задается следующим образом: $x^2 + y^2 = \rho^2$. Тогда

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho\sin\varphi} \rho^3 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 z\Big|_0^{1-\rho\sin\varphi} d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3(1 - \rho\sin\varphi)d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5}\sin\varphi\right)\Big|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\sin\varphi\right)d\varphi = \left(\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{5}\cos\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

II. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$, если область V ограничена указанными поверхностями. Начертить область интегрирования.

1) $V: y = x, x = 0, z = 0, z = 1;$
2) $V: z = x + x, x = 0, y = 0, z = 1;$
3) $V: x + y + z = 3, y = 2x, x = 0, z = 0;$
4) $V: x + y + 2z = 4, x + y + z = 4, x = 0, y = 0;$
5) $V: z = x^2 + y^2, z = 1;$
6) $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x = 0, y = 0, z = 0;$
7) $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1, y^2 = x^2 + z^2, \ y \ge 0;$
8) $V: x = 6 - y^2 - z^2, x^2 = y^2 + z^2.$

2. Вычислить данные тройные интегралы.

1) $\iiint_V (2x^2 + 3y + z)dxdydz, \ V: 2 \le x \le 3, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 4;$
2) $\iiint_V xyz\, dxdydz, V: 0 \le x \le 3, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 2;$

3) $\iiint\limits_V (x+y)dxdydz, V: x+y+z=1,\ y=x,\ z=0,\ y=0;$

4) $\iiint\limits_V x\,dxdydz, V: z=xy,\ x+y=1,\ z=0;$

5) $\iiint\limits_V y\cos(z+x)\,dxdydz, V: y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ x+z=\frac{\pi}{4};$

6) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2}, V: x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

3. Перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам, найти тройные интегралы

1) $\iiint\limits_V e^{x^2+y^2}dxdydz$, V – область, ограниченная цилиндром $x^2+y^2=a^2$ и плоскостями $z=0, z=1;$

2) $\iiint\limits_V x^2dxdydz$, V – область, ограниченная цилиндром $x^2+y^2=a^2$ и плоскостями $z=0, z=1,\ y=x, y=\sqrt{3}x;$

3) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, V – область, ограниченная конусом $z^2=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1;$

4) $\iiint\limits_V \frac{1}{z^2}\,dxdydz$, V – область, ограниченная сферой $x^2+y^2+z^2\le 4$ и цилиндром $x^2+y^2=2x$, $z\ge 0$;

5) $\iiint\limits_V \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, V – область, ограниченная неравенствами $x^2+y^2+z^2\le R,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$;

6) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$. V – кольцевая область, ограниченная сферами: $x^2+y^2+z^2=r^2, x^2+y^2+z^2=R^2$;

7) $\iiint\limits_V z\,dxdydz,$, V – область, ограниченная сферой $x^2+y^2+z^2\le R,$ и конусом $z^2=x^2+y^2,\ z\ge 0;$

8) $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, V – область, ограниченная поверхностями: $2az=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2+z^2=3a^2;$

9) $\iiint\limits_V z^3dxdydz$, V – область, ограниченная эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ и координатными плоскостями $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$.

ПРИМЕНЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Запишите формулу для нахождения объема тела с помощью тройного интеграла.
2. Запишите формулы для нахождения массы, координат центра тяжести, статических моментов и моментов инерции тел с помощью тройных интегралов.

II. *Примеры решения задач*

***Пример* 1.** Найти объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $x^2 + z^2 = 1$, $y = 3 - x$, $z = 0$, $y = 0$ $(z \geq 0)$ (рис. 11).

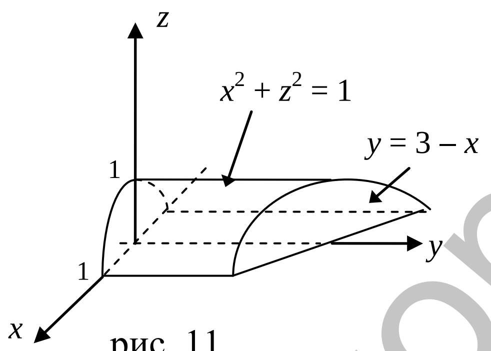

рис. 11.

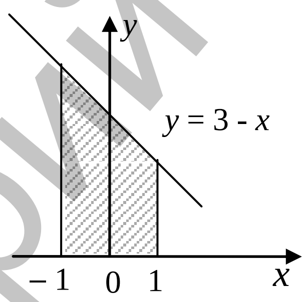

рис. 12.

Решение. Объем тела находится по формуле

$$V = \iiint\limits_V dxdydz\,.$$

Проекция тела на плоскость XOY – это область (D), ограниченная прямыми $y = 0$, $y = 3 - x$, $x = \pm 1$. (рис.12).

Пределы интегрирования для переменной z определяются неравенством $0 \leq z \leq 1 - x^2$, тогда

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x^2} dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{3-x} dy \int\limits_0^{1-x^2} dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{3-x} (1 - x^2) dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2) y)\Big|_0^{3-x} dx = \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)(3 - x) dx = \int\limits_{-1}^{1} (3 - x - 3x^2 + x^3) dx =$$

$$= (3x - \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{4})\Big|_{-1}^{1} = 3 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} - (-3 - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4}) = 4$$

***Пример* 2.** Найти момент инерции прямого круглого однородного конуса относительно его оси. Конус имеет радиус основания R, высоту H и общую массу m .

Решение. Момент инерции тела V с плотностью $\gamma(x,y,z)$ относительно оси Oz выражается формулой:

$$I_z = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)(x^2+y^2)dxdydz.$$

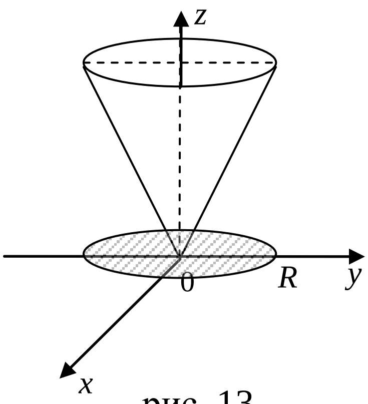

рис. 13.

Проведем координатные оси так, чтобы начало координат совпадало с вершиной конуса, а ось Oz совпадала с осью конуса (рис. 13). Тогда данное тело ограничено поверхностями

$$z^2 = \frac{H^2}{R^2}(x^2+y^2), \quad z = H.$$

Поскольку конус является однородным, то плотность $\gamma\ (x,y,z)\ = \gamma_0$. Следовательно,

$$I_z = \gamma_0 \iiint\limits_u (x^2+y^2)dxdydz,$$

где $\gamma_0 = \dfrac{m}{V}$.

Перейдем к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r$. Тогда уравнение конуса $z = x^2 + y^2$ в цилиндрической системе координат имеет вид $z = r^2$ и новые переменные изменяются в пределах $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $r\dfrac{H}{R} \le z \le H$.

Тогда момент инерции равен

$$I_z = \frac{m}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr \int_{r\frac{H}{R}}^{H} dz = \frac{m}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 z\Big|_{r\frac{H}{R}}^{H} dr =$$

$$= \frac{m}{V}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (r^3 H - \frac{r^4 H}{R})dr = \frac{m}{V} H \int_0^{2\pi} d\varphi (\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5R})\Big|_0^R =$$

$$= \frac{m}{V} H \int_0^{2\pi} (\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{5})d\varphi = \frac{mHR^4}{20V}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{mHR^4\pi}{10V}.$$

Так как обьем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, то $I_z = \dfrac{mHR^4\pi}{10V} = \dfrac{3mHR^4\pi}{10\pi R^2 H} = \dfrac{3mR^2}{10}$.

III. *Задачи и упражнения для практических занятий*

1. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

1) $z = 4 - y^2, z = y^2 + 2, \ x = -1, \ x = 2$;

2) $z = xy, x + y + z = 1, \ z = 0$;

3) $x^2 + y^2 = 1, \ \ x + y + z = 2, \ z = 0$;

4) $x^2 + y^2 = 4, \ z = 4 - x - y, \ z \geq 0$;

5) $z = x^2 + y^2, y = x, y = \sqrt{3}x, z = 0$;

6) $x^2 + y^2 = 1, \ z = x^2 + y^2, \ \ z = 0$;

7) $z = y^2, x + y = 2, \ x + y = 2, \ x = 0, z = 0$;

8) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$;

9) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = x^2 + y^2$;

10) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 4y$.

2. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного указанными поверхностями.

1) $x + y + z = 4, x = 0, y = 0, z = 0$;

2) $z = \dfrac{y^2}{2}, 2x + 3y - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$;

3) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, \ x + z = 6, z = 0$;

4) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$.

3. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного плоскостями $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{2} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ относительно плоскости *Oxy*.

4. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного плоскостями $2x + 3y + 4y = 12, x = 0, y = 0, z = 0$ относительно плоскости *Oxy*.

5. Тело ограничено двумя концентрическими сферическими поверхностями, радиусы которых равны r и R ($r < R$). Плотность материала в каждой точке обратно пропорциональна центра сфер. Найти массу тела.

6. Найти массу тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4\,(z > 0)$, если плотность в каждой точке равна сумме квадратов координат.

7. Плотность шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$ в любой его точке равна квадрату расстояния от этой точки до начала координат. Найти координаты центра тяжести шара и статический момент относительно плоскости $z = 0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти и изобразить область определения функции $z = f(x, y)$**:**

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$;
2. $z = \dfrac{2}{x^2 - y^2}$;
3. $z = \ln(4 + xy)$;
4. $z = \arcsin(x - y)$;
5. $z = \ln(y + \dfrac{4}{x})$:
6. $z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$;
7. $z = \operatorname{tg} \pi(x + y)$;
8. $z = \arccos(x + y)$;
9. $z = \dfrac{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$;
10. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;
11. $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$;
12. $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$;
13. $z = \sqrt{\sin(x + y)}$:
14. $z = \dfrac{1}{\sin(x + y)}$;
15. $z = \dfrac{1}{\ln \frac{x}{y}}$;
16. $z = \dfrac{1}{x + y}$;
17. $z = \ln(-x - y)$;
18. $z = ctg \dfrac{\pi x}{y}$;
19. $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$;
20. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$.

2. Найти: *а*) первый и второй дифференциалы функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

1. $u = \cos(3x + 4y + 5z)$, $M_0(\dfrac{\pi}{6}, 0, 0)$,
2. $u = e^{xyz} + 1$, $M_0(1,1,1)$,
3. $u = z^2 \sin \dfrac{x}{y}$, $M_0(\dfrac{\pi}{3}, 1, 1)$,
4. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M_0(2,1,1)$,
5. $u = z \cdot \operatorname{arctg} xy$, $M_0(1, \sqrt{3}, 2)$,

6. $u=\dfrac{y}{1+x^2+y^2+z^2}$, $M_0(1,1,1)$,

7. $u=(x^2+y^2+z^2+\dfrac{1}{4})^5$, $M_0(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$,

8. $u=xy\,\mathrm{tg}(\dfrac{\pi}{4}+z)$, $M_0(1,1,0)$,

9. $u=2^{3x+4y+5z}$, $M_0(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5})$,

10. $u=x^y+y^z$, $M_0(1,e,2)$,

11. $u=xyz\,e^{x+y+z}$, $M_0(1,1,1)$,

12. $u=x^{yz}$, $M_0(1,\dfrac{1}{2},2)$,

13. $u=z\arcsin(2x+3y+4z)$, $M_0(0,0,\dfrac{1}{5})$,

14. $u=\ln(x^2+y^2+z^2+3)$, $M_0(1,1,1)$,

15. $u=-\dfrac{2x^2}{\sqrt{y^2+z^2}}$, $M_0(1,3,4)$,

16. $u=z\cdot\mathrm{sh}(x+y)$, $M_0(1,1,1)$,

17. $u=\mathrm{ch}(x+y^2+z^3)$, $M_0(0,1,-1)$,

18. $u=\mathrm{tg}(2x+3y+4z)$, $M_0(0,\dfrac{\pi}{12},0)$,

19. $u=xz+e^{yz}+y$, $M_0(1,1,0)$,

20. $u=z^2e-\sqrt[3]{x+2y}$, $M_0(4,2,2)$,

3. Найти: *а*) полную производную $\dfrac{dz}{dt}$ или частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции; *б*) частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции, заданной неявно:

1. *a*) $z=\mathrm{arctg}\,(x^2+y^2)$, *где* $x=e^t$, $y=2-e^{2t}$;
   b) $x^2+y^2+z^2-xy-zx-yz=1$;
2. *a*) $z=\ln yx$, *где* $x=\cos^2 u$, $y=u^2+v^2$;
   b) $x\cos z+z\sin y=0$;
3. *a*) $z=x^2+y^2$, *где* $x=\mathrm{tg}\,uv$, $y=\sin uv$;
   b) $e^z-xyz=2$;
4. *a*) $z=\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{y}$, *где* $x=\sqrt{u^2+v^2}$, $y=\sqrt{uv}$;
   b) $x^3+xyz+y^3+z^3=0$;
5. *a*) $z=e^{y-2x-1}$, *где* $x=\cos t$, $y=\sin t$;
   b) $x^2+y^2+z^2=\sin x$;

6. a) $z=\sin xy$, *где* $x=\arcsin(u+v)$, $y=\operatorname{arctg}(u+v)$;
b) $z^2=\operatorname{tg} xyz$;

7. a) $z=e^{-(x^2+y^2)}$, *где* $x=u\cdot\operatorname{tg} v$, $y=v\cdot tg\, u$;
b) $z^2=xy-x^2+y^2$;

8. a) $z=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}$, *где* $x=\sin 2t$, $y=\operatorname{tg}^2 t$;
b) $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{x}}=0$;

9. a) $z=\arcsin(x+y)$, *где* $x=\frac{u}{v}$, $y=\frac{v}{u}$;
b) $3x^2-2y^2+5z^2=xyz$;

10. a) $z=\sqrt{x^2+y^2-5}$, *где* $x=\ln uv$, $y=e^{uv}$;
b) $x+y+z+2=\sin z$;

11. a) $z=\cos(x+2y)$, *где* $x=\ln(v+u^2)$, $y=\ln(u+v^2)$;
b) $x+y+z-e^{-(x+y+z)}=0$;

12. a) $u=\ln(e^{-x}+e^{y})$, *где* $x=t^2$, $y=t^3$;
b) $\cos xyz+x+y+z=0$;

13. a) $z=\frac{y}{x}$, *где* $x=\ln uv$, $y=uv$;
b) $\sqrt{x^2+y^2}+z^2-3z=4$;

14. a) $z=\arcsin(x+2y)$, *где* $x=t^2-1$, $y=\frac{1}{2}\sin(\frac{t^2}{2}+1)-\frac{1}{2}t^2$;
b) $z^3+3x^2z=2xy$;

15. a) $z=xy$, *где* $x=\sin 3uv$, $y=\cos(3uv+1)$;
b) $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$;

16. a) $z=\frac{e^x+1}{y}$, *где* $x=\ln(2t+1)$, $y=\frac{4t+1}{t^2}$;
b) $z\ln(x+z)-\frac{4t+1}{t^2}=0$;

17. a) $u=\cos(x+y+z)$, *где* $y=3x+1$, $z=tgx$;
b) $x^2+2xy^2-7z^3+3y+1=0$;

18. a) $z=ctg\,2x-y$, *где* $x=\sin t$, $y=2\sin t-arctg\,\frac{t^2}{2}$;
b) $\frac{x}{z}=\ln\frac{x}{y}$;

19. a) $u=xy+yz+xz$, *где* $y=tgx$, $z=\cos^2 x$;
b) $5(x^2+y^2+z^2)-2(xy+xz+yz)=0$;

20. a) $z=y+\ln x$, *где* $x=\frac{e^{t^2}}{t+1}$, $y=\ln(t+1)$;

b) $z^3 - 3xyz = a^3$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x, y)$ и найти ее наибольшее и наименьшее значение в области D.

1. $z = 3x + y - xy$, $D: y = x, y = 4, x = 0;$
2. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$, $D: y = -x, x = -5, y = -2;$
3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2;$
4. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$, $D: x + y + 1 = 0, x = 0, y = 0;$
5. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1;$
6. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0;$
7. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$, $D: y - x = 3, x = 0, y = 0;$
8. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0;$
9. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6;$
10. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$, $D: x = 0, y = 0, x + y = -3;$
11. $z = x^2 - 4xy - y^2 - 6x - 2y$, $D: y = x, x = 2, y = 0;$
12. $z = x^2 y(2 - x - y)$, $D: x = 0, y = 0, x + y = 6;$
13. $z = x^3 + 6y^2 - 6xy$, $D: y = 0, y = x, x = 2;$
14. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: x = 0, y = 0, x = 2, y = 2;$
15. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0;$
16. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$, $D: x + y = \pm 1, y - x = \pm 1;$
17. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0;$
18. $z = x^2 y - x - y$, $D: x = 0, y = 0, y = 6 - x;$
19. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$, $D: 4y^2 + 9x^2 = 36, y \ge 0;$
20. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$

5. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями. Сделать чертеж.

1. $D: y = x, y = \sin x, x = \dfrac{\pi}{2};$
2. $D: y = 2x, y = x, y = 1 - x;$
3. $D: y = \sqrt{x}, y = \dfrac{x}{2};$
4. $D: x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x};$
5. $D: y = \cos x, \dfrac{\pi}{2} y + x = \dfrac{\pi}{2};$
6. $D: y = 2^x, y = 2^{-x}, x = 1;$
7. $D: y = \sin x, y = \dfrac{2x}{\pi};$
8. $D: y = 1 - x, y = x - 1, x = 0;$
9. $D: y = 1 - x^2, y = x - 1;$
10. $D: \arcsin x, y = \dfrac{\pi}{2} x, где (x \ge 0);$
11. $D: x + y = 1, x + y = 2,$
12. $D: y = tgx, y = ctgx;$

$0 \le x \le 1;$ $\qquad$ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}, y = 0;$

13. $D: y = 2\lg x, y = \lg x, x = 10;$ $\qquad$ 14. $D: y = x^2, y = 1 - x^2;$

15. $D: y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x}, x = 2, y = 0;$ $\qquad$ 16. $D: y = 2^x, y = 4^x, x = 1;$

17. $D: y = 16x^2, y = 1 - 9x^2;$ $\qquad$ 18. $D: y = \frac{4}{x}, y = 5 - x;$

19. $D: y = |\ln x|, y = 1;$ $\qquad$ 20. $D: x + y = 1, 3x + 2y = 6, x = 0.$

6. Найти двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ от заданной функции $f(x,y)$, если область D ограничена указанными линиями (в нечетных вариантах перейти к полярным координатам). Сделать чертеж.

1. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2);$ $\qquad$ $D: 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x \le y \le x\sqrt{3};$
2. $f(x,y) = xy;$ $\qquad$ $D: y = \cos x, y = \sin x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, y = 0;$
3. $f(x,y) = x^2 + y^2;$ $\qquad$ $D: x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 4;$
4. $f(x,y) = x + y;$ $\qquad$ $D: y^2 = 2x, x + y = 4;$
5. $f(x,y) = xy;$ $\qquad$ $D: (x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy;$
6. $f(x,y) = x\cos y;$ $\qquad$ $D: y = x, y = x^2;$
7. $f(x,y) = n - 2x - 3y;$ $\qquad$ $D: 1 \le x^2 + y^2 \le 16, x \ge 0, y \ge 0;$
8. $f(x,y) = \sqrt{x + x^2};$ $\qquad$ $D: x = 1 - y^2, x = 0;$
9. $f(x,y) = \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}};$ $\qquad$ $D: x^2 + y^2 = 1;\ x\frac{\sqrt{3}}{3} \le y \le x\sqrt{3};$
10. $f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2};$ $\qquad$ D: *треугольник* ABC, *где* $A(1,2), B(2,1), C(3,4);$
11. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2};$ $\qquad$ $D: x^2 + y^2 = Ry;$
12. $f(x,y) = y;$ $\qquad$ $D: y = \operatorname{tg} x, y = x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4};$
13. $f(x,y) = \frac{\cos\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2};$ $\qquad$ $D: \frac{\pi}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2;$
14. $f(x,y) = (x + y)^2;$ $\qquad$ $D: y = e^{-x}, y = e^x, y = 1;$
15. $f(x,y) = x^2 + y^2;$ $\qquad$ $D: (x^2 + y^2)^2 = 8xy;$
16. $f(x,y) = x\sqrt{1 + y^2};$ $\qquad$ $D: y = x^2, y = \sqrt[3]{x^2};$
17. $f(x,y) = x^2 + y^2;$ $\qquad$ $D: (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, y = 0, (x \ge 0, y \ge 0);$
18. $f(x,y) = \frac{1}{xy^2};$ $\qquad$ $D: y = \ln x, y = -\ln x, y = 1;$
19. $f(x,y) = x^2 - y^2;$ $\qquad$ $D: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2);$
20. $f(x,y) = x^3y;$ $\qquad$ $D: x^2 + y^2 = 1, y = x, y = 0.$

7. Найти площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями (в четных вариантах перейти к полярным координатам). Сделать чертеж.

1. $D: y = x^2, y = x;$
2. $D: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2);$
3. $D: y^2 = x + 2, y = x;$
4. $D: \rho = \sin 2\varphi;$
5. $D: y = x^2 + 1, y = x, y \geq 0;$
6. $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq x\sqrt{3};$
7. $D: x + y = 1, x + y = 2, x = 0, y = 0;$
8. $D: (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy;$
9. $D: -x^2 + 1, y = -2x^2 + 1, y = 0;$
10. $D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 2x;$
11. $D: x = y^2 + 4y, x = y + 4;$
12. $D: (x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 (4x^2 + 3y^2);$
13. $D: y = x^3, y = 2x^3, y = 1;$
14. $D: \rho = a \sin^2 \varphi;$
15. $D: y = e^x, y = e^{-x}, y = e;$
16. $D: (x^2 + y^2)^3 = 4axy(x^2 - y^2);$
17. $D: y = x^2, xy = 1, y = 2, x = 0;$
18. $D: (x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2;$
19. $D: x^2 = 3y, y^2 = 3x;$
20. $D: (x^2 + y^2)^2 = a^2(4x^2 + 3y^2).$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т. Основы математического анализа. – Ч. 2. – М.: Наука, 1980.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – Т. 2. – М.: Наука, 1979.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Т. 2. – М.: Наука, 1990.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – Т. 2. – М.: Наука, 1989.

Дополнительная литература

5. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике. – Мінск: Навука і тэхніка, 1991.
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. – М.: Высшая школа, 1986.
7. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Физматгиз, 2001.
8. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2010.

Учебное издание

СУРИН Татьяна Леонидовна
ИВАНОВА Жанна Викторовна
ШЕРЕГОВ Сергей Викторович

СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Л.Р. Жигунова*

Подписано в печать . .2016. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,52. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.