Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

**Н.Н. Воробьев, С.Н. Воробьев,
М.И. Наумик**

АЛГЕБРА:
группы, кольца, поля. Комплексные числа

Методические рекомендации

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2016*

УДК 512(075.8)
ББК 22.14я73
В75

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 24.12.2015 г.

Авторы: профессор кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, доцент **Н.Н. Воробьев;** доценты кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **С.Н. Воробьев, М.И. Наумик**

Научный редактор:
заведующий кафедрой алгебры и методики преподавания математики
ВГУ имени П.М. Машерова,
доктор физико-математических наук, профессор *Н.Т. Воробьев*

Рецензент:
профессор кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук,
профессор *Ю.В. Трубников*

Воробьев, Н.Н.

В75 Алгебра: группы, кольца, поля. Комплексные числа : методические рекомендации / Н.Н. Воробьев, С.Н. Воробьев, М.И. Наумик. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – 56 с.

Предлагаемое издание предназначено для первоначального изучения основ теорий групп, колец, полей. В начале каждого параграфа даются основные теоретические сведения (определения, формулировки некоторых теорем). Затем приведены подробно разобранные решения ряда задач. В заключение читателю предложены задачи для самостоятельного решения (их всего в издании около четырехсот) и контрольные вопросы.

Адресовано студентам физико-математических специальностей и может успешно использоваться для проведения практических и самостоятельных (контрольных) работ по дисциплинам «Введение в математику», «Алгебра», «Алгебра и теория чисел» и «Геометрия и алгебра».

УДК 512(075.8)
ББК 22.14я73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Что может быть естественнее и привычнее для человека, чем понятие симметрии? Мы с самого рождения вольно или невольно ищем в окружающих предметах симметрию, и чем симметричнее предмет, тем совершеннее он нам кажется. Древние греки считали шар идеальной фигурой именно из-за того, что у шара очень много симметрий. Взгляните на любую известную картину, и вы увидите там явную ось (а иногда и не одну) симметрии. Любое музыкальное произведение развивается по циклу, постоянно возвращаясь к исходной теме, т.е. и там тоже есть симметрия. Таким образом, именно симметрия определяет, насколько совершенным кажется нам тот или иной объект. Понятие группы отражает фундаментальное свойство вещей – симметрию и потому связано с такими понятиями, как целесообразность, соразмерность, оптимальность, совершенство, красота; тем самым, теория групп, как наука, изучающая симметрии, может без преувеличения называться наукой о совершенстве.

Стихийно группы применял еще в 1771 году Ж. Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736–1813). Систематическое изучение групп, в основном конечных, относится к началу XIX века. Теория Галуа использует группы для описания симметрии корней многочлена. Это были группы подстановок корней алгебраических уравнений, или, как их теперь называют, группы Галуа. Именно Эварист Галуа (Évariste Galois, 1811–1832) в 1830 году заметил связь старинной проблемы о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах с вопросами о строении их групп. Современная алгебра как раз берет начало с теории Галуа.

Современное абстрактное понятие группы было предложено в 1882 году Вальтером фон Диком (Walther von Dyck, 1856–1934).

Определение 1. *Группой* называется множество элементов произвольной природы G, на котором задана бинарная алгебраическая операция “$*$”, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1.°Операция “$*$” определена на G, т.е.

$$(\forall a, b \in G)\ \ (a*b \in G)$$

2.°Операция “$*$” ассоциативна, т. е.

$$(\forall a, b, c \in G)\ \ (a*(b*c) = (a*b)*c)$$

3. Существует нейтральный элемент в G, т.е.

$$(\forall a \in G)\ \ (\exists\, e \in G)(a*e = e*a = a)$$

4. Существует симметричный элемент в G, т.е.

$$(\forall a \in G)\ \ (\exists a' \in G)(a*a' = a'*a = e).$$

Группы имеют многочисленные приложения как в самой математике (в геометрии, теории функций, теории дифференциальных уравнений и др.), так и за ее пределами (в кристаллографии, классической и квантовой механике, теории элементарных частиц, химии, биологии и т.д.). Применение теории групп в физике связано прежде всего с тем фактом, что различные физические системы, такие, как кристаллы или атом водорода, обладают симметриями, которые можно смоделировать группами симметрий. В химии группы используются для классификации кристаллических решеток и симметрий молекул.

Отметим, наконец, что группа является центральным понятием в общей алгебре, так как многие важные алгебраические структуры, такие, как кольца, поля, векторные пространства, являются группами с расширенным набором операций и аксиом. Например, *кольца* могут быть рассмотрены как абелевы группы (относительно сложения) с введенной на них второй операцией – умножением.

С понятием кольца сталкиваются еще в средней школе: впервые – овладевая действиями сложения и умножения чисел, затем – обучаясь действиям с многочленами (полиномами). И в том и в другом случае общими оказываются определенные правила (аксиомы), которым подчиняются эти операции. Для изучения именно этих общих свойств операций сложения и умножения (чисел, многочленов или элементов иной природы) как таковых, в их внутренней связи между собой, безотносительно к природе элементов, над которыми они производятся, и было введено в алгебре понятие кольца. Примерно до середины XIX века были известны лишь отдельные примеры колец: числовые кольца, т.е. подкольца поля комплексных чисел, появившиеся в связи с потребностями теории алгебраических уравнений; кольца вычетов целых чисел – в теории чисел. Общего понятия кольца не существовало. Первые примеры некоммутативных колец (это – тело кватернионов) встречаются в 1843–1844 гг. в работах У.Р. Гамильтона (William Rowan Hamilton, 1805–1865) и Г. Грассмана (Hermann Günther Grassmann, 1809–1877). После 1870 года в работах Р. Дедекинда (Richard Dedekind, 1831–1916) встречается общее понятие (ассоциативного) кольца, хотя кольцо у него называлось не кольцом, а порядком. Термин “кольцо” был введен Д. Гильбертом (David Hilbert, 1862–1943) позднее.

Зарождение теории полей (в рамках теории алгебраических уравнений) относится к 30-м гг. XIX века. Галуа был первым математиком, связавшим теорию групп с теорией полей и разработавшим теорию, ныне называемую теорией Галуа. Концепции поля появляются в работах Л. Кронекера (Leopold Kronecker, 1823–1891) и Р. Дедекинда. Р. Дедекинд ввел понятие поля, которое он первоначально называл “рациональной областью”. Теория Р. Дедекинда опубликована в примечаниях и дополнениях к “Теории чисел” П. Дирихле (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859). В них Р. Дедекинд существенно дополнил и развил теорию чисел, теорию идеалов и теорию конечных полей. Термин “поле” впервые появился в издании этой книги в 1871 году.

Определение 2. *Поле* – это коммутативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент имеет обратный относительно умножения.

Из определения 2 следует, что над элементами поля все четыре рациональные операции (сложение, вычитание, умножение и деление на ненулевые элементы) могут проводиться так же, как над обычными числами, и что для полей остаются в силе все правила элементарной алгебры. Множество всех *комплексных чисел* (т.е. всех чисел вида $a + bi$, где a и b – действительные числа и $i^2 = -1$) дает пример поля.

Теория полей сыграла выдающуюся роль при доказательстве неразрешимости трех знаменитых проблем древности: удвоения куба, квадратуры круга и трисекции угла.

В наше время роль теории групп (колец, полей) еще более возросла. В связи с всеобщей информатизацией период доминирования непрерывной математики в значительной мере сменился периодом преобладания дискретной математики. В результате расширились и приложения теории групп (колец, полей): комбинаторика, теория конечных геометрий, теория графов, теория кодирования, теория сложности вычислений, криптография и т.д. Последний яркий пример применения теории групп – модная ныне теория “monstrous moonshine” (фантазии на тему монстра). Оказалось, что свойства самой большой из простых конечных спорадических групп, так называемого “Монстра” (или “Дружественного гиганта”), непостижимым образом связаны как с традиционными областями чистой математики (алгебры Ли, модулярные функции), так и с некоторыми самыми современными направлениями теоретической физики (теория вершинных операторов).

Предлагаемые методические рекомендации предназначены для первоначального изучения основ теорий групп, колец, полей. В первую очередь издание адресовано студентам физико-математических специальностей университета и может быть использовано для организации их самостоятельной работы. Одни студенты могут использовать методические рекомендации для предварительного ознакомления с материалом лекционного курса, другие – при подготовке к практическим занятиям по определенной теме. Они могут быть использованы и при обобщающем повторении, например, перед курсовым или государственным экзаменом. Издание не является задачником, хотя в некоторой степени может его заменить. Его основу составляют некоторые, на наш взгляд, наиболее важные именно с практической точки зрения темы традиционных курсов “Введение в математику”, “Алгебра”, “Алгебра и теория чисел” и “Геометрия и алгебра”.

Весь материал разбивается на разделы и подразделы. Каждый раздел начинается обзором основных понятий и тесно связанных с ними результатов, что по существу представляет собой не разбавленное деталями доказательств концентрированное изложение теории. Подробные обоснования приведенных утверждений, как правило, опущены – их можно получить самостоятельно или, в случае затруднений, прибегнуть к рекомендуемой литературе. Далее рассматриваются достаточно детальные решения наиболее типичных задач. Каждый раздел завершают упражнения для самостоятельного решения. Как правило, задачи естественным образом объединены в группы по возрастанию степени сложности. Поэтому расположение задачи содержит некоторую информацию о методе ее решения. Отметим, что в настоящих методических рекомендациях приведен лишь самый необходимый минимум упражнений, которых начинающему читателю, конечно, недостаточно. Имеется в виду, что читатель использует соответствующие разделы многократно изданных и легко доступных задачников Л.Я. Окунева [28, 29], И.В. Проскурякова [30], Д.К. Фаддеева и И.С. Соминского [35], Л.Б. Шнепермана [36, 37].

В заключение отметим, что математические методы, используемые в криптографии, невозможно успешно освоить без знания таких алгебраических структур, как группы, кольца и поля. Поэтому знание и умение работать с этими объектами является необходимым условием для подготовки специалистов в области защиты информации[1].

[1] На обложке изображены две изоморфные группы: $\langle G, \circ\rangle$ h $\langle G', *\rangle$.

1 ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ

1.1 Группы

1.1.1 Определение. *Бинарной алгебраической операцией* на множестве A называется отображение прямого произведения $A \times A$ в A.

Если f: $A \times A \to A$ – бинарная алгебраическая операция на A, то каждой упорядоченной паре (a, b) элементов из A соответствует однозначно определенный элемент $c = f((a, b))$. Бинарную алгебраическую операцию на A обозначают следующими символами: $+$, $\cdot$, $\oplus$, $\circ$, $\otimes$, $*$ и т.д. Вместо f условимся писать $\circ$. Поэтому вместо $c = f((a, b))$ будем писать $c = a \circ b$.

Пусть на множестве A определена бинарная алгебраическая операция (умножение), т.е. $ab \in A$ для всех $a, b \in A$.

1.1.2 Определение.

1. Если $a(bc) = (ab)c$ для всех $a, b, c \in A$, то операцию называют *ассоциативной.*

2. Если $ab = ba$ для всех $a, b \in A$, то операцию называют *коммутативной*.

3. Если элемент $e \in A$ и $ae = ea = a$ для всех $a \in A$, то e называется *единичным элементом* или просто *единицей*.

4. *Обратным* к элементу $a \in A$ называется такой элемент $a^{-1} \in A$, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

5. *Полугруппой* называется непустое множество S с бинарной алгебраической операцией (умножением), которая удовлетворяет следующим двум требованиям: бинарная алгебраическая операция определена на S, т.е. $ab \in S$ для всех $a, b \in S$; бинарная алгебраическая операция ассоциативна, т.е. $a(bc) = (ab)c$ для любых $a, b \in S$.

1.1.3 Теорема. *В полугруппе может быть не более одного единичного элемента. Если в полугруппе имеется единичный элемент, то каждый элемент обладает не более чем одним обратным.*

1.1.4 Теорема. *В полугруппе результат применения операции к нескольким элементам не зависит от способа распределения скобок.*

1.1.5 Определение. Две полугруппы S_1 и S_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f: $S_1 \to S_2$, при котором $f(ab) = f(a)\, f(b)$ для любых $a, b \in S_1$.

1.1.6 Определение. *Группой* называется непустое множество G с бинарной алгебраической операцией “$\circ$”, которая удовлетворяет следующим требованиям:

1) операция определена, т.е. $a \circ b \in G$ для любых $a, b \in G$.

2) операция ассоциативна, т.е. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для любых $a, b, c \in G$.

3) существует нейтральный элемент, т.е. такой элемент $e \in G$, что $a \circ e = e \circ a = a$ для всех $a \in G$.

4) каждый элемент обладает симметричным, т.е. для любого $a \in G$ существует такой элемент $a^{-1} \in G$, что $a \circ a^{-1} = a^{-1}a = e$.

В случае операции умножения нейтральный элемент называют единичным, а симметричный – обратным.

Если задана операция сложения, то нейтральный элемент называют нулевым, а симметричный противоположным.

1.1.7 Определение. *Полугруппа* с единицей, в которой каждый элемент обладает обратным, называется *группой*.

Группу с коммутативной операцией называют *коммутативной* (или *абелевой*). Если G – конечное множество, которое является группой, то G называют конечной группой, а число $|a|$ элементов в G – порядком *группы* G.

1.1.8 Теорема. 1. *В группе имеется единственный нейтральный элемент, и для каждого элемента существует единственный симметричный*.

2. *Если* a, b *– элементы группы* G, *то* $(a^{-1})^{-1} = a$ и $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

1.1.9 Теорема. 1. *Если* a *– элемент группы* G *и* $s \in \mathbf{Z}$, *то* $(a^s)^{-1}=(a^{-1})^s=a^{-s}$.

2. *Для любых чисел* s, t *и любого* $a \in G$ *справедливы равенства* $a^s a^t = a^{s+t}$, $(a^s)^t = a^{st}$.

3. *В группе* G *уравнения* $ax = b$ *и* $yc = d$ *имеют единственные решения* $x = a^{-1}b$, $y = dc^{-1}$.

Дадим определение группы, эквивалентное данному.

1.1.10 Определение. *Группой* называется непустое множество G с бинарной алгебраической операцией (умножением), удовлетворяющей следующим требованиям:

1) операция определена на G;

2) операция ассоциативна;

3) уравнения $ax = b$, $ya = b$ имеют решения для любых элементов $a, b \in G$.

1.1.11 Определение. Две группы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f группы G_1 на группу G_2, при котором $f(ab) = f(a)\,f(b)$ для любых $a, b \in G_1$.

Приведем примеры числовых групп.

1.1.12 Пример.

1. Множества **Z**, **Q**, **R** с операцией сложения – абелевы группы. Все требования определения группы проверяются без труда.

2. Множество $\{-1, 1\}$ с умножением – конечная абелева группа порядка 2.

Приведем примеры групп перестановок.

1.1.13 Определение. Пусть $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Взаимно однозначное отображение множества A на себя называется *перестановкой степени* n.

Совокупность всех перестановок степени n обозначается через S_n. Перестановку $\tau \in S_n$ удобно изобразить таблицей из двух строк:
$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) \ldots & \tau(n) \end{pmatrix}$ или $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ a_1 & a_2 \ldots & a_n \end{pmatrix}$, где $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = A$, τ: $1 \to a_1$, $2 \to a_2$, …, $n \to a_n$.

1.1.14 Определение. *Произведение* $\sigma\tau$ двух *перестановок* σ и τ находится как произведение отображений: $\sigma\tau(k) = \sigma(\tau(k))$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

1.1.15 Пример. Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$,

$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Очевидно, $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

1.1.16 Теорема. 1. *Произведение двух перестановок вновь есть перестановка, т.е.* $\tau\sigma \in S_n$ *для всех* $\tau, \sigma \in S_n$.

2. *Умножение перестановок ассоциативно, т.е.* $\sigma(\tau\delta) = (\sigma\tau)\delta$ *для всех* $\sigma, \tau, \delta \in S_n$.

3. *Существует тождественная перестановка, т.е. такая перестановка* $\varepsilon \in S_n$, *что* $\tau\varepsilon = \varepsilon\tau = \tau$ *для всех* $\tau \in S_n$.

4. *Каждая перестановка обладает обратной перестановкой, т.е. для любой перестановки* $\tau \in S_n$ *существует такая перестановка* $\tau^{-1} \in S_n$, *что* $\tau\tau^{-1} = \tau^{-1}\tau = \varepsilon$.

5. $|S_n| = n!$

1.1.17 Пример. Пусть $A = \{1, 2, .., n\}$ и S_n – совокупность всех перестановок степени n. Множество S_n с операцией умножения образует конечную группу порядка n!

Примеры групп функций.

1.1.18 Пример. Четыре функции, определенные на множестве $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$ с операцией умножения образуют группу. Составим *таблицу Кэли* умножения этих функций

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

1.1.19 Пример. Доказать, что множество чисел $A=\{a+bi\sqrt{3}\mid a,b\in \mathbf{Z}\}$ является аддитивной группой.

Решение. Сложение – алгебраическая операция на A; если $a+bi\sqrt{3}\in A$ и $c+di\sqrt{3}\in A$, то $(a+bi\sqrt{3})+(c+di\sqrt{3})=(a+c)+(b+d)i\sqrt{3}\in A$.

Сложение любых чисел ассоциативно, и, в частности, из A. Нейтральный элемент $0=0+0i\sqrt{3}\in A$.

Если $a+bi\sqrt{3}\in A$, то $(-a)+(-bi)\sqrt{3}\in A$. Таким образом, в A выполняются все аксиомы группы.

1.1.20 Определение. Непустое подмножество H элементов группы G называется *подгруппой*, если H – группа относительно той же операции, которая определена на G.

Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G, а $H < G$, что H – собственная подгруппа группы G, т.е. $H\leq G$ и $H\neq G$.

1.1.21 Теорема. *Непустое подмножество H элементов группы G будет подгруппой тогда и только тогда, когда $h_1 h_2 \in H$* и *$h^{-1}\in H$ для всех $h_1 h_2 \in H$.*

1.1.22 Пример 1. $\mathbf{Z} \leq \mathbf{Q} \leq \mathbf{R}$, где $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ – адитивные группы.

2. $\{-1, 1\} \leq \mathbf{Q}^* \leq \mathbf{R}^*$, где $\{-1,1\}$, $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\backslash\{0\}$ – мультипликативные группы.

1.2 Кольца

1.2.1 Определение. Непустое множество K с двумя бинарными алгебраическими операциями (сложением и умножением) называется *кольцом*, если выполняются следующие условия:

1) множество K с операцией сложения является абелевой группой;

2) умножение определено на K и ассоциативно;

3) операция умножение связана с операцией сложения законами дистрибутивности: $(a + b) = ac + bc$, $a(b + c) = ab + bc$ для любых $a, b, c \in K$.

Если в кольце K умножение коммутативно, т.е. $ab = ba$ для любых $a, b \in K$, то K называется *коммутативным кольцом*.

Если в K существует элемент e такой, что $xe = ex = x$ для всех $x \in K$, то e называют *единицей кольца K*, а само кольцо K – *кольцом с единицей*.

Очевидно, что относительно операций сложения и умножения чисел множества $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ являются кольцами.

1.2.2 Определение. *Делителями нуля* кольца K называют такие ненулевые элементы $a, b \in K$, что $ab = 0$.

1.2.3 Определение. Коммутативное кольцо с единицей, не содержащее делителей нуля, называется *целостным кольцом* (или *областью целостности*).

Кольцо **Z** целых чисел является целостным кольцом.

1.2.4 Определение. Элемент a кольца K с единицей называется *обратимым элементом*, или *делителем единицы*, если существует элемент $b \in K$, для которого $ab = e$.

1.2.5 Определение. Непустое подмножество L элементов кольца K называют *подкольцом*, если L само является кольцом относительно операций сложения и умножения, определенных в K.

1.2.6 Теорема. *Непустое подмножество L элементов кольца K является его подкольцом тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) $a + b \in L$ *для любых* $a, b \in L$;

2) $-a \in L$ *для любого* $a \in L$;

3) $ab \in L$ *для любых* $a, b \in L$.

Отметим, что условия 1) и 2) могут быть заменены одним условием $a - b \in L$ для всех $a, b \in L$.

Всякое кольцо содержит нулевое подкольцо, т.е. подкольцо, состоящее из одного нулевого элемента 0. Само кольцо является своим подкольцом.

1.2.7 Определение. Два кольца K_1 и K_2 называют *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f кольца K_1 на кольцо K_2, при котором для любых $a, b \in K_1$ выполняются равенства: $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$.

1.3 Поля

1.3.1 Определение. Непустое множество P с двумя бинарными алгебраическими операциями (сложением и умножением) называется *полем*, если выполняются следующие условия:

1) множество P с операцией сложения является абелевой группой;

2) множество всех ненулевых элементов $P^* = P\backslash\{0\}$ с операцией умножения также является абелевой группой;

3) операция сложения связана с операцией умножения законами дистрибутивности: $a(b + c) = ab + ac$ для любых $a, b, c \in P$.

Другими словами, *полем* называется коммутативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

Нулевой и единичный элементы поля принято обозначать через 0 и 1 соответственно.

Поскольку множество $P^* = P \backslash\{0\}$ всех ненулевых элементов поля с операцией умножения является абелевой группой, то любое поле P содержит не менее двух элементов, оно всегда содержит элементы 0 и 1, причем в любом поле $0 \neq 1$. Поле не может содержать делителей нуля, поэтому каждое поле является областью целостности.

Пусть P – некоторое поле, 0, 1 – нулевой и единичный элементы поля P. При $n \in \mathbf{N}$ запись $n \cdot 1$ означает сумму

$$\underbrace{1+\ldots+1}_{n\ раз}.$$

Возможны две ситуации.

Для любого натурального n всегда $n \cdot 1 \neq 0$. В этом случае говорят, что поле P имеет *характеристику нуль*.

Для некоторого натурального n выполняется равенство $n \cdot 1 = 0$. Наименьшее n с этим свойством называют характеристикой поля P.

Через char P обозначают характеристику поля P.

1.3.2 Теорема. 1. *Если* char $P = 0$, *то* $na \neq 0$ *для любых* $a \in P^*$, $n \in \mathbf{N}$.

2. *Если* char $P = p \neq 0$, *то* p *– простое число, и* $pa = 0$ *для всех* $a \in P$.

Непустое подмножество A поля P называется *подполем*, если A само является полем относительно операций сложения и умножения, определенных в P.

Очевидно, что $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ – бесконечные поля характеристики нуль, причем $\mathbf{Q}$ – подполе поля $\mathbf{R}$.

1.3.3 Определение. Два поля P_1 и P_2 называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное отображение f поля P_1 на поле P_2, при котором для любых $a, b \in P_1$ выполняются равенства: $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$.

1.3.4 Определение. Изоморфизм поля P на поле P называется *автоморфизмом*.

1.3.5 Пример. Будет ли множество $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ с обычными операциями сложения и умножения действительных чисел кольцом, полем?

Решение. Покажем, прежде всего, что на множестве $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ сложение и умножение определены:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2},$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$$

для любых чисел $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

Проверим выполнение условий определения кольца и поля. Ассоциативность сложения во множестве $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ следует из ассоциативности сложения во множестве $\mathbf{R}$ всех действительных чисел. Нулевым элементом во множестве $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ будет число $0 + 0\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Элементом, противоположным элементу $a + b\sqrt{2}$, во множестве $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ будет элемент $-a - b\sqrt{2}$. Коммутативность сложения во множестве $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ следует из коммутативности сложения во множестве $\mathbf{R}$ всех действительных чисел. Ассоциативность умножения во множестве $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ следует из ассоциативности умножения во множестве **R** всех действительных чисел. Коммутативность умножения и выполнение законов дистрибутивности также следуют из выполнения соответствующих свойств во множестве **R** всех действительных чисел. Тем самым доказано, что множество $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ является кольцом.

Единичным элементом во множестве $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ является число $1+0\sqrt{2}$, поскольку $(a+b\sqrt{2})(1+0\sqrt{2}) = a+b\sqrt{2}$ для любого элемента $a+b\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Пусть $a+b\sqrt{2} \in \mathbf{Q}^*(\sqrt{2})$. Это означает, что $a^2 + b^2 \neq 0$, т.е. a и b одновременно не равны нулю.

Пусть $x+y\sqrt{2}$ является элементом, обратным для $a+b\sqrt{2}$. Тогда

$$(a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2}) = 1+0\sqrt{2},$$

откуда

$$x+y\sqrt{2} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{b}{2b^2-a^2}\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}),$$

так как $= \dfrac{a}{a^2-2b^2}, \dfrac{b}{2b^2-a^2} \in \mathbf{Q}$, $a^2 - 2b^2 \neq 0$. Таким образом, каждый ненулевой элемент $a+b\sqrt{2}$ имеет обратный $\dfrac{a}{a^2-2b^2} + \dfrac{b}{2b^2-a^2}\sqrt{2}$.

Ответ: множество $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ является полем.

1.3.6 Пример. Является ли кольцом (полем) относительно обычных операций сложения и умножения множество $A = \{a+b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$?

Решение. Пусть $a+b\sqrt{3} \in A$ и $c+d\sqrt{3} \in A$. Тогда,

$$(a+b\sqrt{3}) + (c+d\sqrt{3}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{3} \in A,$$

$$(a+b\sqrt{3})\cdot(c+d\sqrt{3}) = (ac+3bd) + (ad+bc)\sqrt{3} \in A.$$

Таким образом, сложение и умножение – алгебраические операции на A. Эти операции коммутативны, ассоциативны и связаны законом дистрибутивности, так как этим свойствам удовлетворяют любые числа. Ноль принадлежит множеству A: $0 = 0+0\sqrt{3} \in A$. Вместе с каждым числом $a+b\sqrt{3}$ множеству A принадлежит и противоположное число: $(a+b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in A$.

Итак, A – кольцо. Это кольцо содержит единицу, так как $1 = 1+0\sqrt{3} \in A$ и $a+b\sqrt{3} \neq 0$, тогда $\dfrac{1}{a+b\sqrt{3}} = \dfrac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2} = \dfrac{a}{a^2-3b^2} + \dfrac{-b^2}{a^2-3b^2}\sqrt{3} \in A$, т.е. вместе с каждым числом, не равным нулю, множеству A принадлежит и обратное число.

Следовательно, A – поле. Ясно, что $A = \mathbf{Q}(\sqrt{3})$.

Ответ: A является кольцом и полем.

1.4 Задачи

Будет ли множество S с операцией $*$ полугруппой? Существует ли во множестве S нейтральный элемент?

1. $S = \mathbf{N}$, $a*b = 2(a + b)$, $a, b \in \mathbf{N}$.

2. $S = \mathbf{Z}$, $a*b = a - b + 1$, $a, b \in \mathbf{Z}$.

3. $S = \mathbf{Q}$, $a*b = 2a + b$, $a, b \in \mathbf{Q}$.

4. $S = \mathbf{R}$, $a*b = 4ab$, $a, b \in \mathbf{R}$.

5. $S = \mathbf{N}$, $a*b = a^b$, $a, b \in \mathbf{N}$.

6. $S = \mathbf{Z}$, $a*b = a + b - 2$, $a, b \in \mathbf{Z}$.

7. $S = \mathbf{Q}$, $a*b = 3(a + b)$, $a, b \in \mathbf{Q}$.

8. $S = \mathbf{R}$, $a*b = \dfrac{a+b}{3}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

9. $S = \mathbf{N}$, $a*b=\sqrt{ab}$, $a, b \in \mathbf{N}$.

10. $S = \mathbf{Z}$, $a*b = -(a + b)$, $a, b \in \mathbf{Z}$.

11. $S = \mathbf{Q}$, $a*b = (a + b)^2$, $a, b \in \mathbf{Q}$.

12. $S = \mathbf{R}$, $a*b = -2ab$, $a, b \in \mathbf{R}$.

13. $S = \mathbf{N}$, $a*b = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbf{N}$.

14. $S = \mathbf{Z}$, $a*b= a+b^2$, $a, b \in \mathbf{Z}$.

15. $S = \mathbf{Q}$, $a*b = \dfrac{ab}{2}$, $a, b \in \mathbf{Q}$.

Будет ли множество G с указанной операцией $*$ группой? Операция $*$ коммутативна или нет?

16. $G = \mathbf{Q}^*$, $a*b = 5ab$, $a, b \in G$.

17. $G = \{-1,1\}$, $a*b = ab$, $a, b \in G$.

18. $G = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $a*b = a+b$, $a, b \in G$.

19. $G = \{2k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $a*b = ab$, $a, b \in G$.

20. $G=\left\{\frac{m}{2^{k-1}}\middle|\, m\in\mathbf{Z}, k\in\mathbf{N}\right\}$, $a*b = a + b$, $a, b \in G$.

21. $G=\left\{\frac{m}{2^{k-1}}\middle|\, m\in\mathbf{Z}^*, k\in\mathbf{N}\right\}$, $a*b = ab$, $a, b \in G$.

22. $G=\left\{c + d\sqrt{3}\,\middle|\, c, d\in\mathbf{Z}\right\}$, $a*b = a + b$, $a, b \in G$.

23. $G = \mathbf{Q}^*$, $a*b= 3ab$, $a, b \in G$.

24. $G = \left\{c + d\sqrt{3}\,\middle|\, c, d\in\mathbf{Q}, c\neq 0\right\}$, $a*b = ab$, $a, b \in G$.

25. $G = \mathbf{Z}^2 = \{(a, b) \mid a, d \in \mathbf{Z}\}$ $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b), (c, d) \in G$.

26. $G = \{(a,b) \mid a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}\}$, $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$, $(a, b), (c, d) \in G$.

27. $G = \mathbf{Q}^*$, $a*b = -2ab$, $a, b \in G$.

28. $G = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $a{*}b = a + b$, $a, b \in G$.

29. $G = \{c - d\sqrt{2} \mid c, d \in \mathbf{Z}\}$, $a{*}b = a + b$, $a, b \in G$.

30. $G = \{c - d\sqrt{2} \mid c \in \mathbf{Q}^*, d \in \mathbf{Q}\}$, $a{*}b = ab$, $a, b \in G$.

Является ли следующее множество адитивной или мультипликативной группой?

31. $G = \left\{ \frac{a}{2^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{N} \right\}$.

32. $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$.

33. $G = \{a + b\sqrt{3} \mid a \in \mathbf{Q}^*, b \in \mathbf{Q}\}$.

34. $G = \left\{ \frac{a}{3^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{N} \right\}$.

35. $G = \{2k - 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

36. $G = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

37. $G = \left\{ \frac{a}{3^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}^*,\ k \in \mathbf{N} \right\}$.

38. $G = \{a - b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$.

39. $G = \left\{ -\frac{a}{3^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}^*,\ k \in \mathbf{N} \right\}$.

40. $G = \{-a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$.

41. $G = \{2k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

42. $G = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

43. $G = \{-a + b\sqrt{3} \mid a \in \mathbf{Q}^*, b \in \mathbf{Q}\}$.

44. $G = \left\{ 2k + 1 \;\middle|\; k \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\}$.

45. $G = \left\{ 2k - 1 \;\middle|\; k \in R \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$.

Будет ли множество G с указанными операциями сложения и умножения кольцом?

46. $K = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

47. $K = \{(a, b) \mid a \in \mathbf{R})\}$, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

48. $K = \left\{ \frac{a}{2^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \right\}$, сложение и умножение действительных чисел.

49. $K = \mathbf{R}$, сложение действительных чисел, умножение: $a{*}b = 2ab$.

50. $K = \{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

51. $K = \{\, a - b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

52. $K = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Q})\}$, $(a, b) + (c, d) = (a, d)$, $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

53. $K = \left\{ \dfrac{a}{3^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \right\}$, сложение и умножение действительных чисел.

54. $K = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$, $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$, $(a, 0)(\, b, 0) = (ab, 0)$.

55. $K = \left\{ -\dfrac{a}{4^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \right\}$, сложение и умножение действительных чисел.

56. $K = \{\, a - b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

57. $K = \{\, a - b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

58. $K = \{(0, b) \mid b \in \mathbf{R}\}$, $(0, a) + (0, b) = (0, a + b)$, $(0, a)(0, b) = (0, ab)$.

59. $K = \left\{ \dfrac{a}{5^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \right\}$, сложение и умножение действительных чисел.

60. $K = \left\{ \dfrac{a}{2^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \right\}$, сложение и умножение действительных чисел.

Является ли множество P с указанными операциями полем?

61. $P = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

62. $P = \left\{ \dfrac{a}{2^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \right\}$, сложение и умножение действительных чисел.

63. $P = \mathbf{R}$, сложение действительных чисел, умножение: $a * b = 2ab$.

64. $P = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

65. $P = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$, $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$, $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$.

66. $P = \{(0, b) \mid b \in \mathbf{R}\}$, $(0, a) + (0, b) = (0, a + b)$, $(0, a)(0, b) = (0, ab)$.

67. $P = \mathbf{Q}$, сложение рациональных чисел, умножение: $a * b = -3ab$.

68. $P = \{\, a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

69. $P = \left\{ \dfrac{a}{4^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \right\}$, сложение и умножение действительных чисел.

70. $P = \{\, a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

71. $P = \left\{ \frac{a}{3^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \right\}$, сложение и умножение действительных чисел.

72. $P = \left\{ \frac{a}{5^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \right\}$, сложение и умножение действительных чисел.

73. $P = \left\{ -\frac{a}{2^{k-1}} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \right\}$, сложение и умножение действительных чисел.

74. $P = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$, $(a, b) + (c, d) = (a, d)$, $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

75. $P = \{\, a - b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$, сложение и умножение действительных чисел.

1.5 Дополнительные задачи

1.5.1 Группы

Выяснить, будут ли указанные множества полугруппами относительно операции $\circ$:

76. $\mathbf{N}$, $a \circ b = ab$;

77. $\mathbf{Z}$, $a \circ b = a + b$;

78. $\mathbf{Q}^{+}$, $a \circ b = \frac{a}{b}$;

79. $\mathbf{N}$, $a \circ b = a^{b}$;

80. $\mathbf{Z}$, $a \circ b = a - b$;

81. $\mathbf{N}$, $a \circ b = a$.

Определить, будут ли следующие множества группами относительно операции $\circ$:

82. $\mathbf{Z}$, $a \circ b = a + b$;

83. $\mathbf{Q}$, $a \circ b = a + b$;

84. $\mathbf{R}^{*}$, $a \circ b = a + b$;

85. $\mathbf{Z}$, $a \circ b = ab$;

86. $\mathbf{Q}^{+}$, $a \circ b = ab$;

87. $\mathbf{R}^{*}$, $a \circ b = ab$.

88. Доказать, что множество $\mathbf{Q}_p$ является группой относительно сложения чисел, а множества $\mathbf{C}^{n}$ и $\mathbf{C}^{p^\infty}$ – группы относительно умножения чисел, где $\mathbf{C}^{n}$ – множество корней из 1 степени n; $\mathbf{C}^{p^\infty}$ – множество корней из 1 степени p^k для всех $k \in \mathbf{N}$.

89. Доказать, что совокупность всех взаимно однозначных отображений непустого множества M на себя с операцией суперпозиции является группой. Будет ли группой относительно суперпозиции совокупность всех взаимно однозначных отображений множества M в себя?

90. Доказать, что множество матриц порядка n с элементами из $\mathbf{Z}$ и определителями, равными 1, образует группу относительно умножения матриц. Будет ли группой множество всех невырожденных матриц порядка n с элементами из $\mathbf{Z}$ относительно умножения матриц?

Определить, являются ли следующие множества группами относительно умножения чисел (№ 91–93):

91. Множество ненулевых чисел вида $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b;

92. Множество ненулевых чисел вида $a + b\sqrt{2}$ с рациональными a и b;

93. Множество ненулевых чисел вида $a + b\sqrt[3]{2}$ с целыми a и b?

94. Доказать, что множество ненулевых чисел вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ с рациональными a, b и c является группой относительно умножения чисел. Найти в этой группе элемент, обратный к числу $1 - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}$.

95. Пусть G и H – группы. На декартовом произведении $G \times H$ введем новую операцию умножение равенством $(g_1, h_1)\circ(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$.

Доказать, что множество $G \times H$ с операцией $\circ$ является группой.

96. На группе G рассмотрим операцию $x\circ y = xay$, a – это фиксированный элемент из G. Доказать, что множество G с операцией $\circ$ является группой. Всегда ли G будет группой относительно операции $x\circ y = xay$?

97. На множестве $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ введем операцию умножения равенством

$$(a, b)\circ(c, d) = (a + c, (-1)^d b + d).$$

Доказать, что множество $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ является группой относительно введенной операции. Будет ли эта группа абелевой?

1.5.2 Кольца и поля

Какие из следующих числовых множеств являются кольцами относительно сложения и умножения чисел (№ 98–105):

98. $\mathbf{Z}$;

99. $\mathbf{Q}$;

100. $\mathbf{R}$;

101. $\mathbf{C}$;

102. $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{Q}_p$ множество дробей вида $\dfrac{m}{p^k}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

103. Множество чисто мнимых комплексных чисел;

104. Множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b;

105. Множество чисел вида $a + b\sqrt[3]{2}$ с целыми a и b.

106. Доказать, что множество всех матриц порядка n над полем F является кольцом относительно сложения и умножения матриц.

107. Доказать, что множество всех многочленов над полем F от одной переменной является кольцом относительно сложения и умножения многочленов.

108. Пусть T – множество всех подмножеств некоторого множества M. Доказать, что M является кольцом относительно операций симметрической разности и пересечения (напомним, что симметрическая разность Δ определяется равенством $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$), $A, B \in T$.

109. Доказать, что множество чисел вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ с целыми a, b и c является кольцом относительно сложения и умножения чисел.

110. Доказать, что множество всех векторов трехмерного пространства с операциями сложения и векторного умножения является кольцом.

111. Пусть K – некоторое ассоциативное кольцо. Доказать, что множество K с прежней операцией сложения и новой операцией умножения: $x \circ y = xy - yx$ является кольцом, удовлетворяющим следующим тождествам:

$$x \circ x = 0;\ x \circ (y \circ z) + z \circ (x \circ y) + y \circ (z \circ x) = 0.$$

112. Пусть K – некоторое ассоциативное кольцо. Доказать, что множество K с прежней операцией сложения и новой операцией умножения: $x \circ y = xy + yx$ является коммутативным кольцом.

113. Пусть $T(x)$ – множество всех непрерывных функций действительного аргумента. Определим на $T(x)$ операции сложения и умножения равенствами: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Доказать, что $T(x)$ с введенными операциями является ассоциативным коммутативным кольцом с единицей.

114. Рассмотрим множество эндоморфизмов абелевой группы A. Суммой эндоморфизмов φ и ψ называется отображение, определенное равенством $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$.

Доказать, что множество всех эндоморфизмов является кольцом относительно введенной операции сложения и операции суперпозиции.

115. Пусть R и S – кольца. На прямом произведении множеств $R \times S$ введем операции сложения и умножения: $(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$, $(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2)$. Доказать, что множество $R \times S$ с введенными операциями является кольцом.

116. Какие кольца из задач 98–105 будут полями?

117. Доказать, что кольцо вычетов $\mathbf{Z}_n$ будет полем тогда и только тогда, когда n – простое число.

Доказать, что следующие множества являются полями относительно сложения и умножения:

118. Множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$ с рациональными a и b;

119. Множество чисел вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ с рациональными a, b и c.

Доказать, что следующие множества матриц являются полями относительно сложения и умножения матриц:

120. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbf{R}$;

121. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbf{Q}$;

122. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbf{Q}$.

123. Пусть K – множество матриц над $\mathbf{C}$ вида $\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$, где $\overline{w}$ – число, сопряженное w. Доказать, что K – подкольцо кольца всех матриц второго порядка над $\mathbf{C}$.

124. Пусть F – некоторое поле и q – элемент поля F, не являющийся квадратом элемента из F, то есть $q \neq x^2$ для любого $x \in F$. На множестве $F \times F$ введем операции $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$, $(x, y)\cdot(u, v) = (xu + qyv, xv + yu)$. Доказать, что $F \times F$ является полем относительно введенных операций. Это поля называется *квадратичным расширением поля F*.

125. Доказать, что в квадратичном расширении (см. задачу 124) поля $\mathbf{Z}_p$ содержится p^2 элементов.

Пусть K – произвольное кольцо. Но множестве $M = \{(a,n) \mid a \in K, n \in \mathbf{Z}\}$ определим сумму и произведение равенствами $(a, n) + (b, m) = (a + b, n + m)$, $(a, n)\cdot(b, m) = (ab + ma + nb, nm)$. Показать, что:

126. M является кольцом с единицей;

127. M содержит подкольцо, изоморфное кольцу K.

1.6 Контрольные вопросы

1. Группа. Примеры групп. Подгруппа. Примеры подгрупп.
2. Простейшик свойства групп.
3. Гомоморфизм и изоморфизм групп.
4. Кольцо. Примеры колец. Подкольцо. Пример подколец.
5. Простейшие свойства колец.
6. Гомоморфизм и изоморфизм колец.
7. Поле. Примеры полей. Подполе. Примеры подполей.
8. Простейшие свойства полей.

2 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

2.1 Поле комплексных чисел

В упорядоченном поле квадрат любого ненулевого элемента положителен. Следовательно в поле действительных чисел квадрат любого действительного числа отличен от -1.

Поставим следующую задачу: расширить поле **R** так, чтобы в новом поле имело решение уравнение

$$x^2 + 1 = 0.$$

Рассмотрим множество упорядоченных пар (a, b) действительных чисел $\mathbf{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$. Две пары (a_1, b_1), (a_2, b_2) считаются равными, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Введем операции сложения и умножения:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)\,(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

2.1.1 Теорема. *Множество* **C** *с операциями сложения и умножения является полем с нулевым элементом* $(0, 0)$ *и единичным элементом* $(1, 0)$.

Построенное поле **C** называется полем *комплексных чисел,* а элементы поля **C** *комплексными числами.*

Пары $(a, 0)$, где $a \in \mathbf{R}$ складываются и умножаются как действительные числа: $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$

$(a, 0)\,(b, 0) = (ab, 0)$

Отображение $f : a \to (a, 0)$, $a \in \mathbf{R}$ является изоморфизмом поля **R** и поля **C** $f(\mathbf{R}) = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{C}$. Это позволит отождествить пару $(a, 0)$ с действительным числом a, т.е. положить $(a, 0) = a$. Поле **R** действительных чисел становиться частью поля **C** комплексных чисел.

Пару $(0, 1)$ обозначим через i и назовем *мнимой единицей*.

Так как $bi = (b, 0)\,(0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1,\ b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b)$, то $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$.

Кроме того, $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1; 0) = -1$.

Запись $a + bi$ называется *алгебраической формой комплексного числа* (a, b), число a – его *действительной частью*, а bi – *мнимой часть*. Сложение и умножение в алгебраической форме записывается так:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

В частности при умножении комплексных чисел раскрываются скобки и i^2 заменяется на -1.

Итак, с операциями сложения и умножения множество $\mathbf{C} = \{(a + bi) \mid a, b \in \mathbf{R},\ i^2 = -1\}$ является полем, $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$ и в **C** уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение $x = i$.

2.1.2 Определение. *Числовым полем* называется любое подполе поля комплексных чисел.

2.1.3 Пример. Сложить числа $(3 + 5i) + (-3 + 4i)$.

Решение. При сложении комплексных чисел их действительные части и коэффициенты при мнимых частях складываются: $(3 + 5i) + (-3 + 4i) =$ $= (3 - 3) + (5 + 4)i = 0 + 9i = 9i$.

Ответ: $9i$.

2.1.4 Пример. Перемножить $(3 + 2i) \cdot (4 - 5i)$.

Решение. Для того, чтобы перемножить два комплексных числа, надо перемножить их как двучлены и затем заменить i^2 на –1:

$$(3 + 2i)(4 - 5i) = 12 - 15i + 8i - 10i^2 = 12 - 7i + 10 = 22 - 7i.$$

Ответ: $22 - 7i$.

2.1.5 Пример. Возвести в степень $(2 - i)^4$.

Решение. Можно воспользоваться формулой бинома Ньютона:

$$(2 - i)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot i + 6 \cdot 2^2 \cdot (-i)^2 + (i)^4 = 16 - 32i - 24 + 8i + 1 = -7 - 24i.$$

Проще дважды возвести в квадрат

$$(2 - i)^4 = ((2 - i)^2)^2 = (4 - 4i - 1)^2 = (3 - 4i)^2 = 9 - 24i + 16i^2 =$$
$$= 9 - 24i + 16 = 7 - 24i.$$

Ответ: $7 - 24i$.

2.2 Сопряженные комплексные числа

Если $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbf{R}$, то число $a - bi$ обозначается через $\bar{z}$.

2.2.1 Определение. Комплексные числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются *сопряженными*.

2.2.2 Определение. Изоморфное отображение поля на себя называется *автоморфизмом поля*.

2.2.3 Теорема. *Если z_1 и z_2 – любые комплексные числа, то*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
2. $\overline{-z_1} = -\bar{z}_1$;
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
4. $\bar{\bar{z}}_1 = z_1$;
5. $z_1 = \bar{z}_1$, тогда и только тогда, когда $z \in \mathbf{R}$;
6. если $z = a + bi$, то $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

2.2.4 Следствие. *Отображение поля комплексных чисел* **C** *в себя, ставящие в соответствие любому комплексному числу z сопряженное число $\bar{z}$, является автоморфизмом поля* **C**, *оставляющим на месте действительные числа.*

2.2.5 Пример. Разделить $(6 - 5i) : (3 - 2i)$.

Решение. Для вычисления частного умножим делимое и делитель на число, сопряженное делителю:

$$\frac{6-5i}{3-2i}=\frac{(6-5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{18+12i-15i-10i^2}{9-4i^2}=\frac{28-3i}{9+4}=\frac{28}{13}-\frac{3}{13}i.$$

Ответ: $\frac{28}{13}-\frac{3}{13}i.$

2.2.6 Пример. Найти действительные x, y решения уравнения $(2-3i)x+(3+2i)y=2-5i$.

Решение. Преобразуем левую часть и используем условие равенства комплексных чисел: $(2-3i)x+(3+2i)y=(2x+3y)+(-3x+2y)i$. Поэтому получаем систему

$$\begin{cases}2x+3y=2\\ -3x+2y=-5.\end{cases}$$

Решая эту систему получим решение $x=\frac{19}{13}$, $y=-\frac{4}{13}$.

Ответ: $x=\frac{19}{13}$, $y=-\frac{4}{13}$.

2.2.7 Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(2+i)x-(3+i)y=i\\ (3+i)x+(2-i)y=i,\end{cases}$$

где x и y – комплексные числа.

Решение. Найдем y из второго уравнения $y=\frac{i-(3+i)x}{2-i}$. Полученный y подставим в первое уравнение $(2+i)x-(3+i)\cdot\frac{i-(3+i)x}{2-i}=i.$

Имеем $(2+i)(2-i)x-(3+i)i+(3+i)^2x=i(2-i)$, т.е.

$$5x-3i+1+(9+6i-1)x=2i+1,$$

$$5x-3i+1+8x+6ix=2i+1, \text{ или } x(13+6i)=5i$$

$$x=\frac{5i}{13+6i}=\frac{5i\,(13-6i)}{(13+6i)(13-6i)}=\frac{65i+30}{169+36}=\frac{30+65i}{205}=\frac{6}{41}+\frac{13i}{41}$$

$$y=\frac{i-(3+i)\frac{6+13i}{41}}{2-i}=\frac{41i-(3+i)(6+13i)}{41(2-i)}=\frac{41i-18-39i-6i+13}{41(2-i)}=$$

$$=\frac{-5-4i}{41(2-i)}=\frac{(-5-4i)(2+i)}{41(2-i)(2+i)}=\frac{-10-5i-8i+4}{41\cdot5}=-\frac{6}{205}-\frac{13i}{205}.$$

Ответ: $x=\frac{6}{41}+\frac{13i}{41}$; $y=-\frac{6}{205}-\frac{13i}{205}$.

2.3 Модуль комплексного числа

2.3.1 Определение. *Модулем* комплексного числа $a + bi$ $(a, b \in \mathbf{R})$ называется арифметический квадратный корень из числа $a^2 + b^2$, т.е. число $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$.

Модуль комплексного числа $z = a + bi$ обозначается через $|z|$ или $|a+bi|$. Таким образом, согласно определению, $|z|^2 = a^2 + b^2$.

2.3.2 Теорема. *Для любых комплексных* чисел z_1 и z_2

1. $|z_1|^2 = \bar{z}_1 z_1$;
2. $|z_1| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $z_1 = 0$;
3. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
4. $|z_1^{-1}| = |z|^{-1}$ при $z_1 \neq 0$;
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
6. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$;
7. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

2.4 Извлечение квадратного корня из комплексного числа

Пусть требуется извлечь квадратный корень из комплексного числа $z = a + bi$. Положим $x + yi = \sqrt{a+bi}$. Возведем обе части этого равенства в квадрат: $x^2 - y^2 + 2\,xyi = a + bi$. Приравнивая действительные и мнимые части, получаем:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Решаем эту систему в действительных числах.

2.4.1 Пример. Вычислить $\sqrt{7+4i}$.

Решение. Пусть $x + yi = \sqrt{7+4i}$.

Возведем обе части этого равенства в квадрат $x^2 - y^2 + 2\,xyi = 7 + 4i$.

Получаем

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Решаем эту систему. Из второго уравнения $y = \dfrac{4}{2x} = \dfrac{2}{x}$.

Подставим в первое уравнение $y=\dfrac{2}{x}$ получим $x^2-\dfrac{4}{x^2}=7$, т.е. $x^4-7x^2-4=0$, $x^2=a$, $x^4=a$, $x^2-7a-4=0$, $a_1=\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}$, $a_2=\dfrac{7-\sqrt{65}}{2}$, $a_2<0$ – не подходит.

$x^2=\dfrac{\sqrt{65}+7}{2}$, т.е. $x_1=\sqrt{\dfrac{\sqrt{65}+7}{2}}=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{65}+14}}{2}$, $x_2=-\dfrac{\sqrt{2\sqrt{65}+14}}{2}$.

Находим

$$y_1=\frac{2}{\dfrac{\sqrt{2\sqrt{65}+14}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{2\sqrt{65}+14}}=\frac{4\sqrt{2\sqrt{65}-14}}{\sqrt{4\cdot 65-196}}=\frac{4\sqrt{2\sqrt{65}-14}}{8}=\frac{\sqrt{2\sqrt{65}-14}}{2}$$

$$y_2=-\frac{\sqrt{2\sqrt{65}-14}}{2}.$$

Ответ: $\sqrt{7+4i}=\pm\left(\dfrac{\sqrt{2\sqrt{65}+14}}{2}+\dfrac{\sqrt{2\sqrt{65}-14}}{2}i\right)$.

2.5 Решение квадратных уравнений в поле C

Пусть $az^2+bz+c=0$ – квадратное уравнение над полем комплексных чисел, т.е. $a, b, c \in$ **C**. Повторяя вывод формулы корней квадратного уравнения с действительными коэффициентами, который известен из школьного курса математики, для квадратного уравнения с комплексными коэффициентами получаем следующую формулу:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

2.5.1 Пример. Решить в поле комплексных чисел уравнение $z^2+(6+i)z+5+5i=0$.

Решение. $z_{1,2}=\dfrac{-6-i\pm\sqrt{(6+i)^2-4\cdot 1(5+5i)}}{2}=\dfrac{-6-i\pm\sqrt{15-8i}}{2}$.

Вычтем $\sqrt{15–8i}=x+yi$. Получим систему

$\begin{cases} x^2-y^2=15\\ 2xy=-8.\end{cases}$ Из второго уравнения находим $y=-\dfrac{4}{x}$.

Подставляем $y=-\dfrac{4}{x}$ в первое уравнение. Получаем $x^2-\dfrac{16}{x^2}=15$, т.е. $x^4-15x^2-16=0$. Пусть $x^2=a$, $a^2-15a-16=0$.

$a_{1,2}=\dfrac{15\pm\sqrt{225+64}}{2}=\dfrac{15\pm\sqrt{289}}{2}=\dfrac{15\pm 17}{2}$, $a_1=16$, $a_2=-1<0$. Находим x.

$x^2 = 16$, $x_1 = 4$; $x_2 = -4$. Тогда $y_1 = -1$; $y_2 = 1$. Имеем $\sqrt{15-8i} = \pm(4-i)$.

Получаем $z_{1,2} = \dfrac{-6-i\pm(4-i)}{2}$; $z_1 = \dfrac{-2-2i}{2} = -1-i$;

$z_2 = \dfrac{-6-i-(4-i)}{2} = -5$.

Ответ: $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -5$.

2.5.2 Пример. Решить уравнение $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + 2 - 2i = 0$.

Решение. По формуле корней квадратного уравнения

$$z_{1,2} = \frac{5-i\pm\sqrt{(5-i)^2-4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)} = \frac{5-i\pm\sqrt{-2i}}{4+2i}.$$

Находим $\sqrt{-2i} = \pm(1-i)$.

Получаем $z_1 = \dfrac{5-i+(1-i)}{4+2i} = \dfrac{6-2i}{4+2i} = 1-i$;

$z_2 = \dfrac{5-i-(1-i)}{4+2i} = \dfrac{4}{4+2i} = \dfrac{2}{2+i} = \dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i$.

Ответ: $z = 1 - i$, $z^2 = \dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i$.

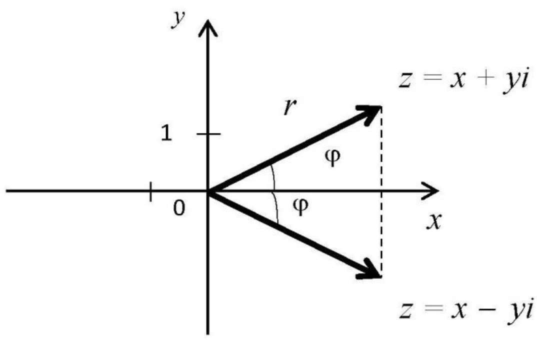
2.6 Тригонометрическая форма комплексного числа

Комплексное число $z = a + bi$ задается двумя действительными числами a и b, поэтому естественно изображать комплексные числа точками на плоскости.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат и будем изображать комплексное число $z = a + bi$ точками на плоскости с координатами (a, b).

Координатная плоскость, точки которой изображает комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Действительные числа изображаются точками оси абсцисс называется действительной осью. Точки оси ординат изображают чисто мнимые числа, т.е. числа вида bi, где $b \in \mathbf{R}$, поэтому ось ординат называется мнимой осью.



Положение точки $z = x + yi$ на плоскости определяется ее полярными координатами r и φ, где r – расстояние от начала координат до z а φ – угол между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на точку z. Полярные координата точки $z = x + yi$ определяют по известным формулам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, поэтому $z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Запись $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ называют тригонометрической формой комплексного числа z. Число r называют *модулем* комплексного числа z и обозначают через $|z|$. Ясно, что $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

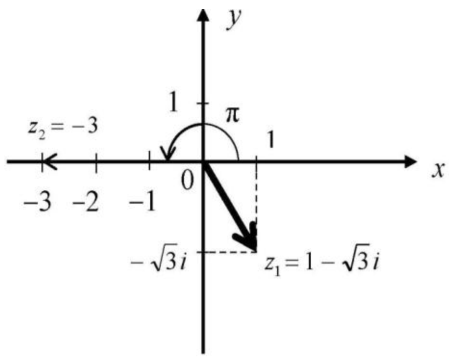
Угол φ называют *аргументом* комплексного числа z и обозначают через $\arg z$. Для аргумента φ комплексного числа $z = x + yi$ имеем равенство

$$\varphi = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, \text{ если } x > 0,\ y > 0 \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, \text{ если } x < 0,\ y \geq 0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, \text{ если } x < 0,\ y < 0 \\ +\dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0, y < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} +\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ если } x^2 + y^2 \neq 0,\ \ y \geq 0, \\ -\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ если } x^2 + y^2 \neq 0,\ \ y < 0, \\ 0, \text{ если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

2.6.1 Пример. Представить в тригонометрической форме числа $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = -3$, $z_3 = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - \sin\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Решение. Изобразим числа z_1 и z_2 на плоскости



Для $z_1=1-\sqrt{3}i$ имеем $|z|_1=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, $\varphi=-\frac{\pi}{3}$ Значит, $z_1=1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Для $z_2=-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Комплексное число $z_3=-3\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ записано не в тригонометрической форме, так как отрицательное число –3 нельзя считать модулем z_3.

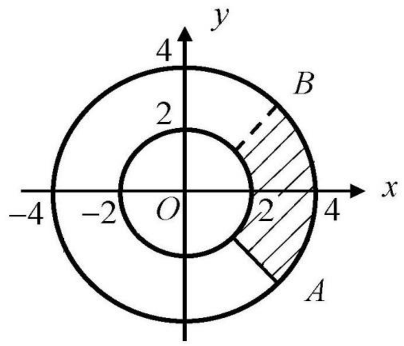
Кроме того, коэффициент при i равен $-\sin\frac{\pi}{5}$, а в тригонометрической форме мнимая часть должна быть записана так: $\sin\varphi$. Представим число z_3 в виде $z_3=3\left(-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$. Отсюда заключим, что аргументом комплексного числа z_3 является такой угол φ, для которого $\cos\varphi=-\cos\frac{\pi}{5}$, а $\sin\varphi=\sin\frac{\pi}{5}$. Этот угол легко найти: $\varphi=\pi-\frac{\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}$. Итак, искомое представление в тригонометрической форме: $z_3=3\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$.

Ответ: $z_1=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $z_2=3(\cos\pi+i\sin\pi)$, $z_3=3\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$.

2.6.2 Пример. Изобразите на плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2\le |z|\le 4 \\ -\frac{\pi}{4}\le \arg z<\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Решение.



Точки, изображающие решения первого неравенства, лежат между окружностями радиусов 2 и 4 с центром в начале координат, включая сами окружности. Точки, изображающие решение второго неравенства, лежат между лучами *OA* и *OB*, луч *OA* включая, а луч *OB* не включая.

2.7 Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

2.7.1 Теорема. 1. *При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаться, а аргументы складываются:*

$$z_1 \cdot z_2 .= |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

2. *При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

3. $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos(-\arg z_1) + i\sin(-\arg z_2)).$

2.7.2 Теорема. *Пусть n – целое число. Тогда*

$$(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n\,(\cos(n\varphi) + i\sin n\varphi)) \quad (*)$$

Формула (*) называется *формулой Муавра*. Формулу Муавра можно использовать для выражения синусов и косинусов кратных углов через синусы и косинусы угла φ. Например, при $n = 3$ имеем

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = -\sin^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

2.7.3 Пример. Вычислить $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$, $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$ и z_1^{-1}, если $z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$, $z_2 = -3$, $z_3 = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Решение. Смотри пример 2.6.1 из предыдущего пункта.

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2\cdot 3\cdot 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{4\pi}{5}\right)\right)=$$

$$=18\left(\cos\frac{22\pi}{15}+i\sin\frac{22\pi}{15}\right),$$

$$\frac{z_1\cdot z_2}{z_3}=\frac{2\cdot 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)\right)}{3\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)}=\frac{6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{3\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)}=$$

$$=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{5}\right)\right)=2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{15}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{15}\right)\right).$$

$$z_1^{-1}=\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Ответ: $z_1\cdot z_2\cdot z_3=18\left(\cos\dfrac{22\pi}{15}+i\sin\dfrac{22\pi}{15}\right)$;

$\dfrac{z_1\cdot z_2}{z_3}=2\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{15}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{15}\right)\right)$; $\quad z_1^{-1}=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2.7.4 Пример. Вычислить $(z_1\, z_2)^{30}$, $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}-i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Решение. Имеем $z_1=\sqrt{5}-i=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$,

$z_2=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}-i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)=3\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

Тогда

$$(z_1z_2)^{30}=(2\cdot 3)^{30}\cdot\left(\cos 30\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin 30\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{5}\right)\right)=$$

$$=6^{30}\left(\cos\left(30\cdot\frac{19\pi}{30}\right)+i\sin\left(30\cdot\frac{19\pi}{30}\right)\right)=6^{30}(\cos 19\pi+i\sin 19\pi)=$$

$$=6^{30}(\cos\pi+i\sin\pi)=-6^{30}.$$

Ответ: -6^{30}.

2.7.5 Пример.

Вычислить $A = \dfrac{3(\cos 20^\circ - i\sin 20^\circ)\cdot 2(\cos 230^\circ - i\sin 130^\circ)}{-\sin 210^\circ - i\cos 210^\circ}$.

Решение. Используя формулы приведения и свойства тригонометрических функций, преобразуем комплексные числа к тригонометрической форме:

$$A = \frac{3(\cos(-20^\circ) + i\sin(-20^\circ)\cdot 2(\cos 230^\circ - i\sin(360^\circ - 130^\circ))}{-\sin(270^\circ - 60^\circ) - i\cos(270^\circ - 60^\circ)} =$$

$$= \frac{3(\cos(-20^\circ) + i\sin(-20^\circ))\cdot 2(\cos 230^\circ + i\sin 230^\circ)}{\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ}.$$

Теперь применим правила умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме, вычислим

$$A = \frac{3\cdot 2(\cos(-20^\circ + 230^\circ) + i\sin(-20^\circ + 230^\circ))}{\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ} = \frac{6(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ)}{\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ} =$$

$$= 6(\cos(210^\circ - 60^\circ) + i\sin(210^\circ - 60^\circ)) = 6(\cos 150^\circ + \sin 150^\circ) =$$

$$= 6(\cos(180^\circ - 30^\circ) + i\sin(180^\circ - 30^\circ) = 6(-\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) =$$

$$= 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -3\sqrt{3} + 3i.$$

Ответ: $A = -3\sqrt{3} + 3i$.

2.7.6 Пример. Доказать: $\cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Обозначим: $z = \cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$, $A = \cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7}$, $B = \sin\dfrac{\pi}{7} + \sin\dfrac{3\pi}{7} + \sin\dfrac{5\pi}{7}$.

Тогда

$$A + Bi = \left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}\right) + \left(\cos\frac{5\pi}{7} + i\sin\frac{5\pi}{7}\right) = z + z^3 + z^5.$$

Получим сумму членов геометрической прогрессии. Применяя формулу, получим: $A + Bi = \dfrac{z - z^7}{1 - z^2}$, $z^3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

Отсюда

$$A+Bi=\frac{z+1}{1-z^2}=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{\left(1-\cos\frac{\pi}{7}\right)-i\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2\sin^2\frac{\pi}{14}-i2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}}=$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{14}\left(\sin\frac{\pi}{14}-i\cos\frac{\pi}{14}\right)}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{14}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{14}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{14}\right)\right)}=$$

$$=\frac{\cos 0+i\sin 0}{2\sin\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{11\pi}{7}-i\sin\frac{11\pi}{7}\right)}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{14}}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{11}{7}\pi\right)\right).$$

Таким образом,

$$A=\frac{\cos\left(-\frac{11\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{14}}=\frac{\cos\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{14}}=\frac{\cos\frac{3\pi}{7}}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}\right)}=\frac{\cos\frac{3\pi}{7}}{2\cos\frac{3\pi}{7}}=\frac{1}{2}.$$

2.8 Извлечение корня из комплексного числа

Пусть $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. *Корнем n-й степени* из комплексного числа z называется такое комплексное число c, что $c^n = z$. Корень n-й степени обозначается через $\sqrt[n]{z}$. Таким образом, если $c=\sqrt[n]{z}$, то $c^n = z$.

2.8.1 Теорема. *Пусть z – комплексное число и n – натуральное число, $n > 1$. В поле комплексных чисел корень $\sqrt[n]{z}$ при $z = 0$ имеет единственное значение $z = 0$, а при $z \neq 0$ – n различных значений. Если $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq 0$, то эти значения находятся по формуле*

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\ 2,\ \ldots,n-1. \quad (**)$$

2.8.2 Пример. Вычислим $\sqrt[3]{-2}$.

Решение. Число –2 в тригонометрической форме записывается так: $-2 = 2(\cos\pi + \sin\pi)$. По формуле (**) имеем:

$$C_k=\sqrt[3]{-2}=\sqrt[3]{2(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right),\ k=0,\ 1,\ 2.$$

$$C_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}+i\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2};$$

$$C_1=\sqrt[3]{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt[3]{2};$$

$$C_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}-i\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{2}.$$

Ответ: $C_0=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}+i\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$; $C_1=-\sqrt[3]{2}$; $C_2=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}-i\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{2}$.

2.8.3 Пример. Вычислить $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$.

Решение. Для извлечения корня из комплексного числа используем формулу (**). Поскольку $n=4$, то

$$z_k=\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right).$$

Полагая $k=0,1,2,3$ получим

$$z_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{2}}{2};$$

$$z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2};$$

$$z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt[4]{2}}{2};$$

$$z_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}-i\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}.$$

2.8.4 Пример.
Вычислить:

а) $\sqrt[4]{\frac{1-i}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$;

б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^4$

Решение. а) Обозначим числитель через α_1, а знаменатель через α_2 и найдем тригонометрическую форму чисел α_1, и α_2. Пусть $\alpha_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$.

Тогда $r_1=\sqrt{2}$, $\cos\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $\varphi_1=\frac{7}{4}\pi$, и поэтому $\alpha_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right).$

Пусть $\alpha_1 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда, $r_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2,$

$$\cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}},\ \sin\varphi_2 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}.$$

Следовательно, $\varphi_2 = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$, и поэтому $\alpha_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + +i\sin\frac{\pi}{12}\right).$

Найдем число, стоящее под знаком корня.

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right).$$

Теперь имеем

$$\sqrt[4]{\frac{\alpha_1}{\alpha_1}} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\frac{5}{3}\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{5}{3}\pi + 2\pi k}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\left(\cos\frac{(6k+5)\pi}{12} + i\sin\frac{(6k+5)\pi}{12}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

б) Смотрите начало примера (а). Имеем

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\left(\cos\frac{20}{3}\pi + i\sin\frac{20}{3}\pi\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\left(\cos\frac{(6k+5)\pi}{12} + i\sin\frac{(6k+5)\pi}{12}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$

б) $\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$

2.9 Корни из единицы

Мультипликативная группа G называется *циклической*, если в ней имеется такой элемент a, что каждый элемент $b \in G$ является степенью элемента a, т.е. существует целое число k, что $b = a^k$. Этот элемент a называется *порождающим элементом* группы G. Для циклической группы G применяют обозначение $G = <a>$. Заметим, что циклическая группа может иметь несколько порождающих.

2.9.1 Теорема. *Для любого натурального числа* n *справедливы следующие утверждения:*

1) *в поле комплексных чисел имеется точно* n *различных корней n-й степени из 1, которые находятся по формуле*

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$

2) *для любого целого числа* m *выполняется равенство* $\varepsilon_1^m = \varepsilon_r$, *где* r *– остаток от деления* m *на* n*;*
3) *комплексные корни* n*-й степени из единицы образуют мультипликативную циклическую группу* $<\varepsilon_1>$ *порядка* n *с порождающим элементом* ε_1.

Корень n-й степени из единицы называется *примитивным* (или *первообразным*), если он не является корнем из единицы никакой меньшей степени. Итак, ε_m – примитивный корень степени n из единицы, если $\varepsilon_m^n = 1$ и $\varepsilon_m^{n^k} \neq 1$ для всех $0 < k < n$.

2.9.2 Теорема. *Корень* ε_m n-й *степени из единицы будет примитивным тогда и только тогда, когда* m и n *взаимно просты. В частности,* ε_1 *и* ε_{n-1} *– примитивные корни n-й степени из единицы.*

2.9.3 Пример. Вычислить $\sqrt[n]{1}$ при $n \leq 4$.

Решение. При $n = 2$ имеем два корня $\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = -1$. Множество $\{-1; 1\}$ с умножением является циклической группой $<-1>$ порядка 2.

При $n = 3$ имеем три корня:

$$\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Множество $\left\{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$ с умножением является циклической группой $\left\langle -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ порядка 3.

При $n=4$ имеем четыре корня:

$\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=i,$

$\varepsilon_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1,\ \varepsilon_3=\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}=-i.$

Множество $\{i, -1, -i, 1\}$ с умножением является циклической группой $<i>$ порядка 4.

2.10 Задачи

Найдите x, y, считая их действительными, если

128. $x-8i+(y-3)i=1,$

129. $\frac{5x+2xi-3y-3yi}{3+4i}=2;$

130. $(3+i)x-2(1+4i)y=-2-4i;$

131. $\frac{ix-4i-y+1}{1+i}=5+2i;$

132. $\frac{2y+4i}{2x+y}-\frac{y}{x-i}=0;$

133. $\frac{3i}{x-y-i}=\frac{x+y}{-1-i};$

134. $y-5i+(x-3)i=1+2i;$

135. $\frac{4x+2xi-5y-5yi}{3+2i}=3;$

136. $\frac{iy-3i-x+1}{1+i}=3+2i;$

137. $(2+i)x-3(1+3i)y=-3+4i;$

138. $\frac{2x+4i}{2y+x}-\frac{x}{y-i}=0;$

139. $\frac{3i}{x+y-i}=\frac{x-y}{-1-i};$

140. $y-3i+(x-1)i=5-7i;$

141. $2i+x+(y+3)i=3-4i;$

142. $3i-x+(y-2)i=3-4i+x.$

Вычислить

143. $i^{411};$

144. i^{4n+1};

145. i^{4n+2};

146. i^{4n+3};

147. i^{4n+4};

148. $(-2+2i)^2+(-1+i)^3$;

149. $\dfrac{(1+i)^3-1}{(1-i)^3+1}$;

150. $\dfrac{(1+2i)^3+(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}$;

151. $\dfrac{(3-4i)(2-i)}{2+i}-\dfrac{(3+4i)(2+i)}{2-i}$;

152. $\dfrac{(1+i)^3-(1-i)^3}{(1+i)^2+(1-i)^2}$;

153. $\dfrac{(-2+2i)^3}{(-1+i)^3}+2i-5$;

154. $\left(1+\dfrac{1+i}{2}\right)^2\cdot\left(1+\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^2\right)$;

155. $\dfrac{(2+3i)(3-i)}{(1-i)^2}-\dfrac{(1-i)(1+i)}{(2-3i)^2}$;

156. $\dfrac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)^2}+\dfrac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)^2}$;

157. $\dfrac{(1-i)(1+i)}{2+3i}-\dfrac{(2-5i)(1-2i)}{3-i}$.

Решить уравнения относительно z, если z – комплексное число.

158. $\bar{z}=-z$;

159. $\bar{z}=z$;

160. $\bar{z}=-4z$;

161. $\bar{z}=2-z$;

162. $z^2+\bar{z}=0$;

163. $z^2=\bar{z}$;

164. $\overline{z-2}=-z+2$;

165. $\bar{z}-3=-z+i$;

166. $\overline{z-3}=-z+1;$

167. $\overline{z+1}=z-i;$

168. $z+2=\bar{z}-i;$

169. $\overline{z-2}=\bar{i}+4;$

170. $\bar{z}-3=2\bar{z}+i;$

171. $\overline{z-1}=2z+1;$

172. $\bar{z}+1=3\bar{z}-1.$

Найдите z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

173.	$z_1 = 1 + 2i;$	$z_2 = -1 - 2i;$
174.	$z_1 = 1 - 3i;$	$z_2 = 2 + i;$
175.	$z_1 = 3 + i;$	$z_2 = 2 - 3i;$
176.	$z_1 = 2 + i;$	$z_2 = 3 - 2i;$
177.	$z_1 = 3 + i;$	$z_2 = 3 - 2i;$
178.	$z_1 = 1 - 3i;$	$z_2 = 2 + 3i;$
179.	$z_1 = 2 + 3i;$	$z_2 = 2 - i;$
180.	$z_1 = 4 + 3i;$	$z_2 = 1 - 3i;$
181.	$z_1 = 2 + i;$	$z_2 = 3 + 2i;$
182.	$z_1 = -3 - i;$	$z_2 = 3 - i;$
183.	$z_1 = 3 + i;$	$z_2 = 5 - 2i;$
184.	$z_1 = 3 + 4i;$	$z_2 = 5 - i;$
185.	$z_1 = 3 - 5i;$	$z_2 = 3 - 2i;$
186.	$z_1 = -3 + 5i;$	$z_2 = -3 + 2i;$
187.	$z_1 = 5 - 3i;$	$z_2 = 3 + i.$

Вычислить:

188. $\sqrt{5+12i};$

189. $\sqrt{5-12i};$

190. $\sqrt{-5+12i};$

191. $\sqrt{-5-12i};$

192. $\sqrt{1+\sqrt{3}i};$

193. $\sqrt{24+10i};$

194. $\sqrt{24-10i};$

195. $\sqrt{-24+10i}$;

196. $\sqrt{-24-10i}$;

197. $\sqrt{8+6i}$;

198. $\sqrt{-8-6i}$;

199. $\sqrt{-8+6i}$;

200. $\sqrt{8-6i}$;

201. $\sqrt{7+6i}$;

202. $\sqrt{-7+6i}$.

Решить уравнения:

203. $x-(2+i)+7i-1=0$, $\quad x^2-4x+5=0$,

204. $x^2-(3-2i)x+5-5i=0$, $\quad x^2-3x+4=0$,

205. $x^2-(5-3i)x+2-6i=0$, $\quad 2x^2-3x+5=0$,

206. $x^2-(2i-7)x+13-i=0$, $\quad x^2+3x+6=0$,

207. $x^2-(1+i)x+6+3i=0$, $\quad 3x^2-2x+3=0$,

208. $x^2-5x+4+10i=0$, $\quad -2x^2+x-1=0$,

209. $(1-i)x^2+(5-i)x+4+2i=0$, $\quad -x^2+2x-2=0$,

210. $(3+i)x^2+(1-i)x-6i=0$, $\quad x^2+x+2=0$,

211. $x^2-(7+i)x+16+11i=0$, $\quad 3x^2-2x+4=0$,

212. $x^2-(3+2i)x+5i+5=0$, $\quad -2x^2+3x-2=0$,

213. $x^2+(5i-1)x-8-i=0$, $\quad 3x^2+5x+3=0$,

214. $x^2+(4i-3)x-7-i=0$, $\quad 2x^2-4x+5=0$,

215. $x^2-(3-3i)x+6-2i=0$, $\quad x^2-2x+5=0$,

216. $x^2-(5-6i)x+1-13i=0$, $\quad x^2+3x+5=0$,

217. $x^2-3x+11-3i=0$, $\quad x^2+5x+7=0$.

Изобразите на плоскости и запишите в тригонометрической форме числа z_1 и z_2:

218. $z_1=1-i$, $\quad z_2=-2i$.

219. $z_1=3i$, $\quad z_2=-1+i\sqrt{3}$.

220. $z_1=2+2i$, $\quad z_2=-3$.

221. $z_1=-\sqrt{3}+i$, $\quad z_2=-i$.

222. $z_1=-\sqrt{12}-2i$, $\quad z_2=2i$.

223. $z_1=-4$, $\quad z_2=1+i$.

224. $z_1=1$, $\quad z_2=-\sqrt{12}+2i$.

225. $z_1=1+i$, $\quad z_2=-i$.

226. $z_1 = -1 - i,$ $z_2 = 6i.$

227. $z_1 = 1 + i\sqrt{3},$ $z_2 = -2.$

228. $z_1 = 3i,$ $z_2 = -\sqrt{3} - i.$

229. $z_1 = -2 - i\sqrt{12},$ $z_2 = -1.$

230. $z_1 = 2,$ $z_2 = -1 - i\sqrt{3}.$

231. $z_1 = \sqrt{12} + 2i,$ $z_2 = -6i.$

232. $z_1 = 5i,$ $z_2 = -\sqrt{3} - i.$

Вычислите:

233. $5(\cos 350° - i\sin(-10°)) \cdot 2(\cos 80° - i\sin 280°).$

234. $3(\cos 50° - i\sin 670°)) \cdot 4(\cos 290° - i\sin 70°).$

235. $\dfrac{2(\cos 220° + i\sin 140°)}{\sin 40° - i\cos 220°}.$

236. $3(\cos 230° - i\sin 130°) \cdot 4(\sin 50° + i\cos(-50°)).$

237. $\dfrac{2(\cos(-13\pi/7) + i\sin(-6\pi/7))}{6(\cos(-13\pi/7) - i\sin(-6\pi/7))}.$

238. $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} - i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right) \cdot \left(\cos\dfrac{7\pi}{4} - i\cos\dfrac{3\pi}{4}\right).$

239. $\dfrac{5(\cos 49° - i\sin 229°)}{3(\cos 41° - i\cos 49°)}.$

240. $3(\cos 340° - i\sin 20°) \cdot 2(-\sin 70° - i\sin 160°).$

241. $\dfrac{2(\cos 430° + i\cos 160°)}{5(\cos 110° - i\sin 250°)}.$

242. $5\left(-\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right).$

243. $\dfrac{6(\cos 42° + i\sin 222°)}{5(\sin 42° - i\sin 132°)}.$

244. $\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) \cdot 3\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} - i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right).$

245. $\dfrac{3(-\sin 20° + i\sin 110°)}{\cos(-220°) - i\sin 140°}.$

246. $7(-\sin 40° - i\sin 130°) \cdot 3(\cos 40° - i\sin 320°).$

247. $\dfrac{3(\cos 190° - i\sin 170°)}{-\sin 40° + i\sin 50°)}.$

Изобразите на плоскости множество комплексных чисел, удовлетворяющих системе неравенств.

248. $\begin{cases} 2 \le |z| \le 4 \\ \dfrac{\pi}{2} \le \arg\left(\dfrac{z}{1+i}\right) \le \pi. \end{cases}$

249. $\begin{cases} 1 < \left|\dfrac{z}{1+i\sqrt{3}}\right| < 2 \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

250. $\begin{cases} 1 \le |z| \le 3 \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg\left(\dfrac{z}{1-i}\right) \le \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

251. $\begin{cases} 1 \le \left|\dfrac{z}{\sqrt{12}-2i}\right| \le 2 \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi . \end{cases}$

252. $\begin{cases} 2 \le |z| + 1 \le 3 \\ \dfrac{\pi}{3} \le \arg\left(\dfrac{z}{1-i\sqrt{3}}\right) \le \dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}$

253. $\begin{cases} 2 < \left|\dfrac{z}{-1-i\sqrt{3}}\right| < 3 \\ \dfrac{\pi}{3} \le \arg z - \dfrac{\pi}{6} \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

254. $\begin{cases} 3 \le |z| \le 5 \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg\left(\dfrac{z}{-1-i}\right) \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

255. $\begin{cases} 1 \le \left|\dfrac{z}{2-i\sqrt{12}}\right| \le 3 \\ -\dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

256. $\begin{cases} 1 \le \left|\dfrac{z}{1+\sqrt{3}}\right| \le 3 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

257. $\begin{cases} 1 < |z| < 5 \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg\left(\dfrac{z}{\sqrt{12}-2i}\right) \le \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

258. $\begin{cases} 2 < \left|\dfrac{z}{-1-i\sqrt{3}}\right| < 3 \\ -\dfrac{\pi}{3} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

259. $\begin{cases} 2 \le |z| \le 6 \\ \dfrac{\pi}{2} < \arg\left(\dfrac{z}{1-i\sqrt{3}}\right) < \pi. \end{cases}$

260. $\begin{cases} 1 \le \left|\dfrac{z}{\sqrt{3}-i}\right| \le 4 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

261. $\begin{cases} 2 < |z| < 3 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg\left(\dfrac{z}{1-i}\right) \le \pi. \end{cases}$

262. $\begin{cases} 2 \le \left|\dfrac{z}{\sqrt{3}-i}\right| \le 4 \\ -\dfrac{\pi}{3} < \arg\left(\dfrac{z}{2-i\sqrt{12}}\right) < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Вычислите:

263. $(-1-i\sqrt{3})^{30}$, $\sqrt[5]{-\sqrt{12}+2i}$, $\sqrt[3]{-8}$.

264. $(1-i)^{40}$, $\sqrt[4]{-\sqrt{12}-2i}$, $\sqrt[4]{-16}$.

265. $(-\sqrt{3}+i)^{36}$, $\sqrt[6]{-2-i\sqrt{12}}$, $\sqrt[4]{i}$.

266. $(-1-i)^{24}$, $\sqrt[5]{1-i\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{-1}$.

267. $(-1+i\sqrt{3})^{30}$, $\sqrt[4]{-16-16i}$, $\sqrt[3]{-2}$.

268. $(-\sqrt{3}-i)^{42}$, $\sqrt[5]{-2+i\sqrt{12}}$, $\sqrt[3]{3i}$.

269. $(1-i)^{24}$, $\sqrt[6]{-1-i\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{-2i}$.

270. $\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{36}$, $\sqrt[4]{-\sqrt{12}+2i}$, $\sqrt[5]{-4}$.

271. $(-\sqrt{12}+2i)^{48}$, $\sqrt[5]{3-i3\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{-81}$.

272. $(-4-4i)^{20}$, $\sqrt[6]{-\sqrt{12}+2i}$, $\sqrt[3]{-8i}$.

273. $(-1-i\sqrt{3})^{54}$, $\sqrt[4]{-5+5i}$, $\sqrt[6]{64}$.

274. $(\sqrt{12}+2i)^{48}$, $\sqrt[5]{1-i}$, $\sqrt[4]{-4}$.

275. $(-1+i)^{28}$, $\sqrt[6]{\sqrt{3}-i}$, $\sqrt[3]{8i}$.

276. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i\right)^{30}$, $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}$, $\sqrt[6]{-1}$.

277. $(2-i\sqrt{12})^{36}$, $\sqrt[5]{3-3i}$, $\sqrt[4]{-9}$.

Вычислить:

278. а) $\sqrt[6]{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$, б) $\left(\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{5}$;

279. а) $\sqrt[9]{\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}}$, б) $\left(\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$;

280. а) $\sqrt[4]{\frac{1+i}{-\sqrt{3}-i}}$, б) $\left(\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right)^{7}$;

281. а) $\sqrt[5]{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$, б) $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{6}$;

282. а) $\sqrt[4]{\frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}}$, б) $\left(\frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{3}$;

283. а) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}}$, б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{9}$;

284. а) $\sqrt[7]{\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}}$, б) $\left(\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{4}$;

285. а) $\sqrt[5]{\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}}$, б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^{8}$;

286. а) $\sqrt[4]{\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}}$, б) $\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{11}$;

287. а) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}}$, б) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{8}$.

288. а) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; б) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4$.

289. а) $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}$; б) $\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^8$.

290. а) $\sqrt[6]{\dfrac{-\sqrt{3}+i}{-2-2i}}$; б) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^4$.

291. а) $\sqrt[8]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}}$; б) $\left(\dfrac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^8$.

292. а) $\sqrt[6]{\dfrac{-128}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}$; б) $\left(\dfrac{1+i}{i+\sqrt{3}}\right)^7$.

293. а) $\sqrt[5]{\dfrac{(-\sqrt{12}+2i)^2}{16i^{117}}}$. б) $\left(\dfrac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6$.

2.11 Дополнительные задачи

294.

I) Внимательно изучите аксиоматическое определение поля комплексных чисел. Какой существенный “дефект” поля действительных чисел приводит к необходимости построения поля комплексных чисел?

II) Изучите доказательство теоремы о существовании поля комплексных чисел. Используются ли при его построении какие-либо свойства действительных чисел, которые в других полях не выполняются?

III) Пусть теперь F – такое поле, в котором квадрат любого элемента отличен от –1. Используя доказательство теоремы о существовании поля комплексных чисел, постройте поле K, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $F < K$;

б) в поле K существует такой элемент i, такой, что $i^2 = -1$;

с) любой элемент из поля K можно представить в виде $a + bi$, где $a, b \in F$.

IV) Поле, построенное в задании III, называют комплексным расширением поля F. Приведите примеры комплексных расширений полей.

V) Убедитесь, что в комплексном расширении поля F действия с элементами производятся по тем же формальным правилам, что и в поле комплексных чисел. Как естественно определить алгебраическую форму элемента комплексного расширения поля? Будут ли элементы комплексного расширения единственным образом записываться в алгебраической форме?

VI*) В поле комплексных чисел любое квадратное уравнение имеет корни. Верно ли это утверждение в произвольном комплексном расширении поля?

295. В этом задании мы получим формулу для извлечения квадратных корней из комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, и обсудим некоторые ее применения. Знак $\sqrt{\ }$ в этом задании, как обычно, будет обозначать арифметический квадратный корень из действительного числа.

I) Пусть имеется комплексное число $a + bi$, где $a, b \in \mathbf{R}$, а число $x + yi$, $x, y \in \mathbf{R}$, является квадратным корнем из $a + bi$. Составьте систему уравнений, решив которую, можно найти x и y.

II) При выполнении задания I задача извлечения квадратных корней из произвольного комплексного числа была сведена к решению во множестве действительных чисел системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Убедитесь, что ее решения удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 = \sqrt{a^2 + b^2} + a; \\ 2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a, \end{cases}$$

решив которую, получим:

$$x = \sigma_1 \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}; \quad y = \sigma_2 \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}},$$

здесь $\sigma_1, \sigma_2 \in \{1, -1\}$. (Проверьте, что выражения, стоящие под знаком корня, неотрицательны!) Все ли полученные пары значений x и y (их четыре) удовлетворяют исходной системе?

III) Проверьте, что все четыре пары значений x и y, полученные в задании II, удовлетворяют условию $x^2 - y^2 = a$ и равенству $\sigma_1\sigma_2\sqrt{b^2} = b$. (т.е. $\sigma_1\sigma_2|b| = b$). Выведите отсюда равенства, связывающие σ_1 и σ_2 (в предположении, что $b \neq 0$).

IV) Ответ на вопрос, сформулированный в задании III, можно представить в следующем виде: если $b > 0$, то $\sigma_1\sigma_2 = 1$; если $b < 0$, то $\sigma_1\sigma_2 = -1$. Используя функцию sgn, получите более простое условие, связывающее σ_1 и σ_2.

V) Ответ на вопрос из задания IV может быть представлен в виде $\sigma_2 = \sigma_1 \operatorname{sgn} b$. Используя это равенство, напишите окончательное выражение для квадратного корня из комплексного числа $a + bi$.

VI) Убедитесь, что полученные формулы для извлечения корня квадратного из комплексного числа, записанного в алгебраической форме, верны для случая $b = 0$.

VII) Вы научились извлекать квадратные корни из комплексных чисел в алгебраической форме. Обобщите полученные результаты (корни каких степеней из комплексных чисел можно извлекать, пользуясь алгебраической формой комплексного числа?).

VIII) Сформулируйте результат, полученный в задании VII, по-другому. (Какие двучленные уравнения можно решить, используя результаты задания VII?)

IX*) Из школьного курса математики известны так называемые табличные значения тригонометрических функций. Эти числа получаются из целых чисел с помощью четырех арифметических действий и операции извлечения арифметического корня (для краткости будем говорить, что данное число представлено в виде радикального выражения). Далее вы узнаете, что "почти все" действительные числа нельзя представить в таком виде. Используя задания V–VIII и формулу для извлечения корней из комплексных чисел в тригонометрической форме, сформулируйте и обоснуйте утверждения, которые дадут достаточные признаки для представления некоторых значений тригонометрических функций в виде радикальных выражений. Докажите, используя известные тригонометрические тождества и формулы Кардано, что, например, $\sin\dfrac{\pi}{5}, \sin\dfrac{\pi}{20}, \sin\dfrac{\pi}{60}$ можно представить в виде радикальных выражений. Выведите следствия из этих утверждений.

296. В этом задании *n* обозначает произвольное натуральное число, большее 1.

I) Напишите все корни четвертой степени из единицы. Вычислите последовательно первые четыре натуральные степени этих чисел. На какие группы *естественным* образом разделились эти числа?

Проделайте аналогичные вычисления для корней шестой степени из единицы (возводя полученные числа в шестую степень). Разделите эти числа на две группы по тому же признаку, что и для корней четвертой степени.

II) Число ε называется первообразным корнем *n-й степени* из 1 в том и только в том случае, когда любой корень *n-й* степени из 1 является некоторой натуральной степенью этого числа. Сформулируйте это утверждение на другом языке, используя понятие "множество".

III) Для любого ли натурального числа *n* существуют первообразные корни *n*-й степени из 1?

IV) Докажите, что число $\cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ является первообразным корнем степени n из числа 1.

V*) Найдите *критерий,* согласно которому корень *n*-й степени из 1 (записанный стандартным образом в тригонометрической форме) является первообразным корнем *n*-й степени.

VI) Докажите, что число $\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$ является первообразным корнем *n-й* степени тогда и только тогда, когда числа k и n взаимно просты.

VII) Какое число из множества $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ кроме 1 взаимно просто с n? Выведите из этого *следствие.*

VIII) Для любого $n > 1$ число 1 является одним из корней n-й степени из 1, но первообразным корнем оно не будет, поэтому количество первообразных корней по крайней мере на единицу меньше общего количества корней. Существуют ли такие числа n, для которых количество первообразных корней n-й степени равно $n-1$?

IX) Сформулируйте утверждение, полученное в задании VIII, подругому.

X) Сформулируйте утверждение о том, что числа ε_1 и ε_{n-1} являются первообразными корнями n-й степени на геометрическом языке.

XI) Для $n = 3$ числа ε_1 и ε_2 являются первообразными корнями третьей степени. Пользуясь II, сформулируйте это утверждение подругому. Учтите, что ε_1 и ε_2 – это в точности множество мнимых корней третьей степени из 1, и получите еще одну формулировку исходного утверждения (в дальнейшем мы будем часто ею пользоваться).

XII) Число –1 является корнем четвертой степени из 1, но оно является и корнем второй степени из 1. Найдите условие, при котором корень n-й степени из 1 является корнем из единицы степени, меньшей n.

XIII) Используя XII, установите, первообразным корнем какой степени является число $\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$.

XIV) Используя I и XIII, найдите новый критерий, характеризующий первообразные корни.

XV) Пусть ε – первообразный корень n-й степени.

а) Найдите наименьшее натуральное число s, удовлетворяющее условию $\varepsilon^S=1$.

б) Пусть s и t – натуральные числа. Найдите критерий справедливости равенства $\varepsilon^S=\varepsilon^t$.

в) Докажите, что числа $\varepsilon^0,\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^{n-1}$ – попарно различны, а любая другая целая степень ε совпадает с одним из этих чисел.

г) Найдите наименьшее натуральное k, удовлетворяющее условию $(\varepsilon^s)^k=1$, $(s\in\mathbf{Z})$.

XVI) По определению, всякий корень n-й степени из 1 является некоторой степенью первообразного корня ε этой же степени.

Найдите *критерий*, которому должно удовлетворять натуральное число k, для того, чтобы число ε^k также являлось первообразным корнем этой степени.

297. Договоримся изображать комплексные числа точками координатной плоскости. Дайте геометрическую интерпретацию для следующих отображений:

а) $z \mapsto \bar{z}$;

б) $z \mapsto z(\cos\varphi + i\sin\varphi), \varphi \in \mathbf{R}$;

в) $z \mapsto rz, r \in \mathbf{R}^{+}$;

г) $z \mapsto -z$;

д) $z \mapsto z+u, u \in \mathbf{C}$;

е) $z \mapsto \dfrac{1}{\bar{z}} (z \neq 0)$.

298. В этом задании n обозначает натуральное число, большее 1.

В заданиях I–III дополните соответствующее предложение так, чтобы получилось истинное высказывание:

I) Если комплексные числа изображать точками комплексной плоскости, то корни n-й степени из 1 изображаются …;

II) Если комплексные числа изображать точками комплексной плоскости, то числа $\cos\dfrac{\varphi + 2\pi m}{n} + i\sin\dfrac{2\pi m}{n}, m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, изображаются …;

III) Если комплексные числа изображать точками комплексной плоскости, то комплексные числа вида $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi m}{n} + i\sin\dfrac{2\pi m}{n}, m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right)$, изображаются …. Как по-другому назвать числа, о которых шла речь в этом задании?

IV) Изменится ли ваш ответ в заданиях II и III, если m будет произвольным целым числом?

V) Пусть ε – первообразный корень n-й степени. Изобразим его вектором, отложенным от начала координат, и рассмотрим первые n целых неотрицательных степеней этого числа. Как будут расположены направленные отрезки, изображающие полученные числа?

VI*) Пусть ε_k – стандартное обозначение одного из корней n-й степени из 1. Рассмотрим множество всех его натуральных степеней. Где будут располагаться концы векторов, изображающих эти числа?

299.

I) Пусть $z = \cos x + i\sin x$. Двумя способами (используя бином Ньютона и формулу Муавра) возведите это число в третью степень и сравните полученные результаты. Выразите $\cos 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$. Проведите аналогичные вычисления, возводя число z в четвертую степень. Проанализируйте ваши рассуждения. Какая общая схема намечается в проведенных вами вычислениях?

II*) Представьте $\cos mx$ и $\sin mx$ в виде многочленов от $\cos x$ и $\sin x$.

III) Проанализируйте полученные формулы для косинуса кратного аргумента. В правых частях полученных формул фигурируют лишь выражения, являющиеся четными степенями sin *x*. Выведите из этого *следствие.*

IV) Пусть $z = \cos x + i\sin x$, тогда $\bar{z} = \cos x + i\sin x$. Отсюда $\cos x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $\sin x = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$. Возведите обе части полученных равенств в четвертую степень с помощью бинома Ньютона, воспользуйтесь формулой Муавра, тождеством $z\bar{z} = 1$ и выразите $\cos^4 x$ и $\sin^4 x$ в виде многочлена от синуса и косинуса аргументов, кратных *x*.

V) Проанализируйте решение предыдущей задачи и полученные результаты. Метод решения какой *общей задачи* вы можете предложить?

VI) Еще раз проанализируйте решение задания: IV. Какие полезные равенства, фигурирующие в нем и облегчающие вычисления, можно выделить?

VII) Докажите, что если $z = \cos x + i \sin x$, то для любого натурального *n* справедливы равенства $z^n + z^{-n} = 2\cos nx$ и $z^n + z^{-n} = 2i\sin nx$.

VIII*) Представьте $\sin^n x$ и $\cos^n x$ ($n \in \mathbf{N}$) в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций, аргументы которых кратны *x*.

300.

I) Комплексные числа позволяют легко получать *красивые* тождества, связанные с биномиальными коэффициентами. По формуле бинома Ньютона имеем: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n$ и, положив $x = 1$, получим: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$; при $x = -1$ получим: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)C_n^n = 0$. Сформулируйте данные утверждения, не используя математической символики. Самостоятельно получите новые тождества.

II) Вычислите суммы:

а) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$

б) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$

в) $C_n^0 - \dfrac{1}{3}C_n^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 C_n^4 - \ldots$

г) $C_n^1 - \dfrac{1}{3}C_n^3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 C_n^5 - \ldots$

301. В этом задании *n* обозначает натуральное число, большее 1.

I) Найдите сумму всех корней *n*-й степени из 1.

II) Дайте геометрическую интерпретацию результата, полученного в задании I.

III) Найдите “элементарное” (без использования комплексных чисел) доказательство утверждения II.

IV) Найдите сумму чисел $\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$, где $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

V) Найдите другое доказательство предыдущего утверждения, используя геометрическую интерпретацию комплексных чисел.

VI) Обобщите последний результат.

VII) Запишите корни n-й степени из 1 в стандартной форме и выведите *следствия* из I.

VIII) Специализируйте последние результаты (напишите несколько верных равенств, зафиксировав *n)*.

IX) Выполнив задание VIII, можно получить верное равенство: $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0.$ Воспользовавшись простейшими тригонометрическими формулами и преобразовав $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}$ и $\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}$ в произведение, получим, $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$. Проделайте для равенства при $n = 7$ и сравните эти равенства. Какая *гипотеза* у вас возникает?

X) Докажите, что для любого $k \in \mathbf{N}$ справедливо равенство

$$\cos\frac{\pi}{2k+1}+\cos\frac{3\pi}{2k+1}+\ldots+\cos\frac{(2k-1)\pi}{2k+1}=\frac{1}{2}.$$

XI) Докажите, что для любого $k \in \mathbf{N}$ верно равенство

$$\sin\frac{\pi}{2k+1}+\sin\frac{3\pi}{2k+1}+\ldots+\sin\frac{(2k-1)\pi}{2k+1}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(2k+1)}.$$

XII) Представьте в виде произведения выражения: $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos kx$ и $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx$.

XIII) Изучите полученный в задании XII результат и найдите «элементарное» (не использующее теории комплексных чисел) решение предыдущей задачи (это пример задачи олимпиадного характера для ваших будущих учеников).

XIV) Проанализировав решение задания XII, составьте тригонометрическую сумму, которую можно преобразовать, пользуясь той же идеей.

XV) Найдите сумму $1+C_n^1\cos x+\ldots+C_n^n\cos nx$.

302. В результате выполнения задания 299 получается, что существуют многочлены n-й степени $T_n[z]$ и $U_n[z]$ такие, что $\cos nx = T_n(\cos x)$, а $\sin nx = \sin x \cdot U_{n-1}(\cos x)$ Многочлены $T_n[z]$ и $U_n[z]$ называются *многочленами Чебышева* первого и второго рода соответственно.

I) Найдите многочлены $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$, $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, такие, что для $n = 0, 1, 2$ верны равенства $T_n(\cos x) = \cos nx$; и $\sin x \cdot U_{n-1}(\cos x) = \sin nx$;. Попробуйте самостоятельно найти рекуррентную зависимость в последовательностях $T_n(x)$ и $U_n(x)$.

II) Докажите, что многочлены Чебышева удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ и $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$ для любого $n \geq 1$.

III) Исследуя соотношения, задающие многочлены Чебышева, попробуйте найти старший коэффициент многочлена $T_n(x)$.

IV) Докажите, что старший коэффициент многочлена $T_n(x)$ равен 2^{n-1}.

V*) Вспомните, как определялись многочлены Чебышева, и найдите оценку для значений $T_n(x)$ при $|x| \leq 1$.

VI) Известно, что композиция функций – некоммутативная операция. Тем не менее для многочленов Чебышева справедливо $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$. Проверьте это равенство.

303.

I) Известно, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо неравенство $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Это неравенство является другой формулировкой классического геометрического неравенства. Какого?

II) Неравенство из утверждения I обращается в верное равенство, если одно из чисел равно нулю. Обратитесь к геометрической иллюстрации комплексных чисел и попробуйте найти необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять ненулевые комплексные числа z_1 и z_2, так чтобы выполнялось равенство $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

III) Докажите, что для ненулевых комплексных чисел z_1 и z_2, равенство $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ справедливо тогда и только тогда, когда $\arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

IV) Дайте другую формулировку утверждения III, обратившись к геометрической интерпретации комплексных чисел.

V) Выведите следствие из утверждения III, считая, что числа z_1 и z_2 являются действительными.

VI) Сформулируйте утверждение V, не используя математической символики.

VII) Напомним еще одно неравенство, справедливое для любых пар комплексных чисел z_1 и z_2: $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Так же как и в задании II, получим, что оно обращается в верное равенство, если по крайней мере одно из чисел z_1 или z_2 равно нулю. Какому условию должны удовлетворять ненулевые числа z_1 и z_2, для которых $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$?

VIII) Докажите, что для любых ненулевых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$ тогда и только тогда, когда $\arg z_1 - \arg z_2 = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

IX) Сформулируйте задания, аналогичные V и VI, и выполните их.

304.

I) Напомним, что *числовым полем* называется любое подполе поля комплексных чисел. Какие комплексные числа являются элементами любого числового поля?

II) Докажите, что если F – произвольное числовое поле, то числа 0 и 1 принадлежат F.

III) Если F – произвольное числовое поле, то какие числа кроме 0 и 1 обязаны быть элементами F?

IV) Пусть F – произвольное числовое поле. Докажите справедливость включений: а) $\mathbf{N} \subset F$; б) $\mathbf{Z} \subset F$; в) $\mathbf{Q} \subset F$.

V) Множество **Q** с естественными операциями является полем. Сформулируйте на другом языке результат, полученный в задании IV в.

VI) Итак, поле рациональных чисел является наименьшим числовым полем, т.е. содержится в любом числовом поле. В то же время в поле комплексных чисел разрешимо уравнение $x^2 = -1$. Существуют ли числовые поля кроме **C**, которые содержат в качестве подполя поле действительных чисел и число i?

VII) Докажите, что если K – числовое поле, такое, что $\mathbf{R} \subset K$, $i \in K$, то $K = \mathbf{C}$.

VIII) Сформулируйте утверждение VII**,** не используя математической символики.

2.12 Контрольные вопросы

1. Поле комплексных чисел.
2. Алгебраическая форма комплексного числа.
3. Модуль комплексного числа.
4. Сопряженные комплексные числа.
5. Извлечение квадратного корня из комплексного числа.
6. Решение квадратного уравнения в поле C.
7. Тригонометрическая форма комплексного числа.
8. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме.
9. Формула Муавра.
10. Извлечение корня из комплексного числа.
11. Корни из единицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Апатенок Р.Ф. [и др.]. Элементы алгебры и аналитическая геометрия. – Минск: Вышэйшая школа, 1986.
2. Бахтурин Ю.А. Основные структуры современной алгебры. – М.: Наука, 1990.
3. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. – М.: Наука, 2000.
4. Богопольский О.В. Введение в теорию групп. – М.; Ижевск: НПЦ “Институт компьютерных исследований”, 2002. – 148 с.
5. Бурдун А.А. [и др.]. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. – Минск: Университетское, 1986.
6. Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С. Алгебра. – М.: Просвещение, 1981.
7. Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С. Группы, кольца, поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения: учебное пособие для студентов-заочников. – М.: Просвещение, 1978.
8. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: Факториал Пресс, 2001.
9. Глухов М.М., Солодовников А.С. Задачник-практикум по высшей алгебре. – М.: Просвещение, 1976.
10. Дадаян А.А., Дударенко В.А. Алгебра и геометрия. – Минск, 1989.
11. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
12. Контрольные работы по алгебре: учебно-методическое пособие / сост. Н.Н. Воробьев. – Витебск: Изд-во УО “ВГУ им. П.М. Машерова”, 2004. – 115 с.
13. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 2000.
14. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 1979.
15. Куликов Л.Я. [и др.]. Сборник задач по алгебре и теории чисел. – М.: Просвещение, 1993.
16. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Высшая школа, 1965.
17. Лельчук М.П [и др.]. Практические задания по алгебре и теории чисел. – Минск: Вышэйшая школа, 1986.
18. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел: учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов: в 2 ч. – М.: Просвещение, 1978.
19. Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия: в двух частях. – Минск, 2001.
20. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учеб. пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
21. Монахов В.С., Бузланов А.В. Алгебра и теория чисел: практикум: учеб. пособие: в 2 ч. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2007. – Ч. 1. – 264 с.
22. Нечаев В.А. Задачник-практикум по алгебре. Группы. Кольца. Поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения: учебное пособие для студентов-заочников II курса физико-математических

факультетов педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1983.
23. Окунев Л.Я. Основы современной алгебры. – М.: Учпедгиз, 1941. – 204 с.
24. Окунев Л.Я. Целые комплексные числа. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Наркомпроса РСФСР, 1941. – 56 с.
25. Окунев Л.Я. Целые комплексные числа: учебное пособие. – М.: Вузовская книга, 2014. – 60 с. – (Библиотека «Вузовской книги». Научно-популярная серия).
26. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Высшая школа, 1966.
27. Окунев Л.Я. Высшая алгебра: учебник. – 3-е изд. стериотип. – М.: Лань, 2014. – 336 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) (Классическая учебная литература по математике) (Лучшие классические учебники).
28. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Просвещение, 1964.
29. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре: учеб. пособие. – М.: Лань, 2009. – 184 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) (Классические задачники и практикумы) (Классическая учебная литература по математике).
30. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974.
31. Радьков А.М., Чеботаревский Б.Д. Алгебра и теория чисел. – Минск, 1992.
32. Сборник задач по алгебре: учебное пособие / под ред. А.И. Кострикина. – М.: Факториал, 1995.
33. Солодовников А.С., Родина М.А. Задачник-практикум по алгебре. – М.: Просвещение, 1985.
34. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1984.
35. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 1999.
36. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. – Минск: Вышэйшая школа, 1982.
37. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. – Минск: Дизайн ПРО, 2000.

Учебное издание

ВОРОБЬЕВ Николай Николаевич
ВОРОБЬЕВ Сергей Николаевич
НАУМИК Михаил Иванович

АЛГЕБРА: ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Т.Е. Сафранкова*

Подписано в печать .2016. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,57. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.