Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

С.М. Бородич, Т.В. Кавитова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задания для самостоятельной работы

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2016

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
Б83

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 24.12.2015 г.

Авторы: старшие преподаватели кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **С.М. Бородич, Т.В. Кавитова**

Научный редактор:
доцент кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова,
кандидат физико-математических наук *Т.Л. Сурин*

Рецензент:
доцент кафедры математики и информационных технологий УО «ВГТУ»,
кандидат физико-математических наук *В.С. Денисов*

Бородич, С.М.

Б83 Теория вероятностей : задания для самостоятельной работы / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – 52 с.

Настоящее учебное издание может использоваться для организации самостоятельной работы студентов, а также при проведении практических занятий. Оно содержит контрольные вопросы и задания, демонстрационные примеры, помогающие лучше усвоить основные понятия и методы теории вероятностей, а также перечень базовых задач и задач более сложного уровня для самостоятельной работы.

Предназначается для студентов, обучающихся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная информатика» дневной формы обучения.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методы теории вероятностей находят весьма широкое применение в различных приложениях, с которыми нередко сталкиваются в своей дальнейшей профессиональной деятельности выпускники математического факультета.

Издание призвано помочь студентам овладеть основами теории вероятностей в такой степени, чтобы они могли не только осознанно применять полученные знания в процессе обучения и работы, но и, по мере необходимости, углублять и расширять их путём дальнейшего самообразования.

Данное учебное издание охватывает основные разделы теории вероятностей, предусмотренные учебной программой: «Случайные события и их вероятности», «Случайные величины», «Предельные теоремы теории вероятностей». В каждом пункте по всем изучаемым разделам приводятся контрольные вопросы и задания, разобранные примеры, а также перечень задач разных уровней сложности, предназначенных для самостоятельной работы. В конце издания приведены ответы, что позволит контролировать правильность выполнения заданий. В качестве источника необходимого теоретического материала рекомендуется использовать методическое издание [1] этих же авторов.

Предлагаемое издание методологически подходит для организации самостоятельной работы и будет полезным прежде всего студентам математического факультета, обучающимся по специальностям «Математика и информатика», «Прикладная информатика».

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. Случайные события. Пространство элементарных событий. Операции над случайными событиями

I. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое *случайное событие*?
2. Какие события называются *несовместными*?
3. Что такое *пространство элементарных событий (элементарных исходов)*?
4. Какое элементарное событие называется *благоприятствующим* событию A?
5. Дайте определения *суммы, разности* и *произведения* событий.
6. Какое событие называется *противоположным* событию A?
7. Приведите основные свойства операций над событиями.

II. Примеры решения задач

Пример 1. По каналу связи последовательно передано 3 знака. Вследствие воздействия помех некоторые знаки могли исказиться. Рассматриваются события:

A – правильно принят только первый знак;

B – правильно принят только один знак;

C – правильно принят, по крайней мере, один знак;

D – правильно принято не меньше двух знаков.

Описать пространство элементарных событий Ω. Описать события A, B, C, D. Среди этих событий найти пары несовместных.

Решение. Элементарное событие можно представить в виде упорядоченной тройки чисел (a_1, a_2, a_3), где $a_i = 0$, если i-й знак принят неправильно, или $a_i = 1$, если i-й знак принят правильно $(i = 1, 2, 3)$. Тогда пространство элементарных событий

$$\Omega = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}.$$

События A, B, C и D представляются в виде подмножеств множества Ω, состоящих из элементарных исходов, благоприятствующих этим событиям:

$$A = \{(1, 0, 0)\},\ B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

$$C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\},$$

$$D = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}.$$

События будут несовместными в том и только в том случае, если они не имеют общего благоприятствующего им элементарного исхода. Таким образом, несовместными являются только следующие пары событий: *A* и *D*, *B* и *D*.

Пример 2. Электрическая цепь, представленная на рисунке 1, содержит четыре независимо работающих элемента. Событие A_i состоит в том, что элемент с номером i вышел из строя $(i = 1, 2, 3, 4)$. Написать выражения для событий *A* и $\overline{A}$, если *A* означает разрыв цепи.

Решение. Цепь представляет собой последовательное соединение элемента 1 и блока, содержащего элементы 2, 3 и 4. Пусть событие *B* – выход из строя этого блока. Разрыв цепи произойдёт тогда и только тогда, когда наступит хотя бы одно из двух событий: A_1 или *B*, т.е.

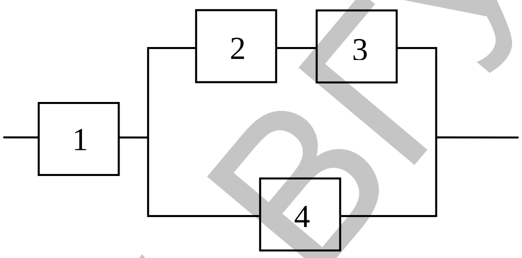

Рис. 1

$$A = A_1 + B.$$

Событие *B* наступит в том и только в том случае, если выйдут из строя элемент 4 и хотя бы один из двух последовательно соединённых элементов 2 или 3. Поэтому $B = (A_2 + A_3)A_4$. Таким образом,

$$A = A_1 + (A_2 + A_3)A_4.$$

Выражение для события $\overline{A}$ найдём из полученного выражения для события *A*, используя свойства операций над событиями:

$$\overline{A} = \overline{A_1 + (A_2 + A_3)A_4} = \overline{A_1}\,\overline{(A_2 + A_3)A_4} =$$
$$= \overline{A_1}(\overline{A_2 + A_3} + \overline{A_4}) = \overline{A_1}(\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_4}).$$

Здесь были использованы следующие свойства операций над событиями: $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

III. Задачи для самостоятельного решения

1. Монета подбрасывается до первого появления герба. Наблюдаемый результат – общее число подбрасываний. Описать пространство элементарных событий Ω и события:

A – герб выпал при четвёртом подбрасывании;

B – герб выпал не ранее, чем при четвёртом подбрасывании;

C – герб выпал не позднее, чем при третьем подбрасывании.

Среди указанных событий найти пары несовместных.

2. Игральная кость (кубик) подбрасывается два раза. Рассматриваются события:

A – оба раза выпало число очков, кратное 3;

B – сумма выпавших очков кратна 5;

C – оба раза выпало число очков, меньшее 3;

D – выпало одинаковое число очков.

Описать пространство элементарных событий Ω. Описать события A, B, C, D. Среди этих событий найти пары несовместных.

3. Бросают три монеты. События: A – только на одной монете из трёх появился герб, B – хотя бы на одной монете появился герб. Что означают события: а) $A+B$; б) AB; в) $\overline{A}$; г) $\overline{B}$; д) $B-A$?

4. Два игрока играют в шахматы. Событие A – выиграл первый игрок, событие B – выиграл второй игрок. Что означают события

а) $\overline{A}\,\overline{B}$; б) $\overline{A}B$; в) $\overline{B}-A$; г) $\overline{A}-\overline{B}$?

5. Событие A означает выигрыш по билету лотереи, событие B – выигрыш телевизора по билету той же лотереи. Что означают события

а) $\overline{AB}$; б) $\overline{A+B}$; в) $A-B$; г) $A-\overline{B}$?

6. Из урны, в которой находится 2 белых и 3 чёрных шара, наудачу извлекают 3 шара. Рассматриваются события:

A – хотя бы один из вынутых шаров – чёрный;

B – вынули не менее двух чёрных шаров;

C – вынули не более одного белого шара;

D – хотя бы один из вынутых шаров – белый.

Описать пространство элементарных событий Ω. Описать события A, B, C, D, DC, $D-C$, $\overline{C}$, $\overline{B}C$.

7. Произведено 3 выстрела из орудия по цели. Событие A_i – попадание в цель при i-м выстреле. Написать выражения для следующих событий:

A – произойдёт ровно одно попадание;

B – произойдёт хотя бы одно попадание;

C – произойдёт хотя бы один промах;

D – произойдёт не менее двух попаданий;

E – попадание произойдёт только на третьем выстреле.

8. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трёх блоков второго типа. Событие A_i – исправлен i-й блок первого типа $(i=1, 2)$, событие B_k – исправлен k-й блок второго типа $(k=1, 2, 3)$. Прибор работает, если исправлен хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Событие C – прибор работает. Выразить событие C через события A_i и B_k.

9. Электрическая цепь составлена по схеме, приведённой на рисунке 2. Событие A_i – элемент с номером i вышел из строя $(i=1, 2, 3, 4)$. Написать выражения для событий A и $\overline{A}$, если A означает разрыв цепи.

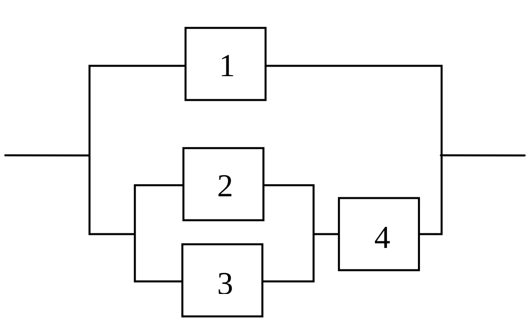

Рис. 2

10. Электрическая цепь составлена по схеме, приведённой на рисунке 3. Событие A_i – элемент с номером i вышел из строя $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Написать выражения для событий A и $\overline{A}$, если A означает разрыв цепи.

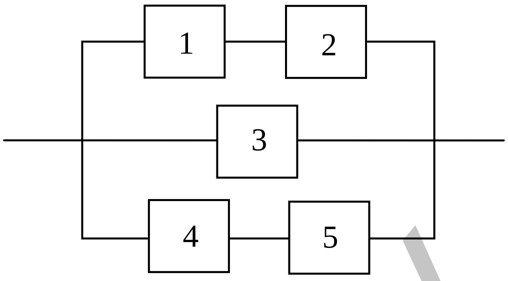

Рис. 3

1.2. Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность

I. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте *классическое определение вероятности*. При каких условиях оно используется?

2. Дайте определения *сочетания* и *размещения* из n элементов по m и *перестановки* из n элементов. По каким формулам находятся числа сочетаний, размещений и перестановок?

3. Сформулируйте комбинаторный *принцип умножения*.

4. В каком случае вероятность можно задать *геометрически*? Объясните суть *геометрического определения вероятности*.

II. Примеры решения задач

Пример 1. В урне находится 6 белых и 8 чёрных шаров. Из неё случайным образом извлекают 5 шаров. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся белыми, а 2 – чёрными?

Решение. Элементарным событием опыта является выбор любой пятёрки шаров из 14 имеющихся (порядок извлечения шаров не важен). Очевидно, что число элементарных событий конечно и все они равновозможны. Следовательно, классическое определение вероятности применимо.

Пусть A – событие, состоящее в том, что 3 шара из вынутых будут белыми, а 2 – чёрными. По формуле классической вероятности искомая вероятность

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $|\Omega|$ – число всех элементарных событий, $|A|$ – число элементарных событий, благоприятствующих событию A. Число всех элементарных событий опыта равно числу сочетаний из 14 элементов по 5:

$$|\Omega| = C_{14}^{5} = \frac{14!}{5!9!} = 2002.$$

Число элементарных событий, благоприятствующих событию A, найдём, используя комбинаторный принцип умножения. Событие A состоит в выборе трёх белых шаров и двух чёрных. Из 6 белых шаров 3 шара можно выбрать C_6^3 способами, а из 8 чёрных шаров 2 шара – C_8^2 способами. Поэтому

$$|A| = C_6^3 C_8^2 = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{8!}{2!6!} = 20 \cdot 28 = 560.$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{560}{2002} = \frac{40}{143}.$$

Пример 2. Два лица M и N условились встретиться в определённом месте между 10 и 11 часами утра, причём договорились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым наудачу в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

Решение. Примем 10 часов утра за начало отсчёта времени. Элементарное событие в нашей задаче – приход лиц M и N в условленное место в моменты времени x и y соответственно ($0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$). Представим его точкой с координатами (x, y) в декартовой системе координат на плоскости. Тогда пространство элементарных событий представится в виде квадрата

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

(см. рис. 4). Число элементарных событий бесконечно. Условие их равновозможности заключено в фразе «момент прихода на встречу выбирается каждым наудачу в пределах указанного часа». Таким образом, можно применить геометрическое определение вероятности.

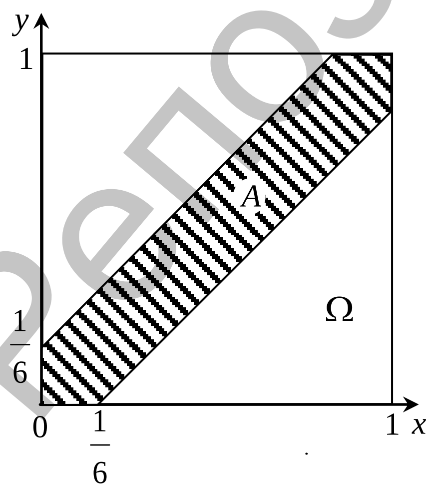

Рис. 4

Событие A – встреча состоится – произойдёт, если моменты прихода M и N отличаются по абсолютной величине не более чем на 10 минут, т.е. на $\frac{1}{6}$ часа. Поэтому событие A представимо в следующем виде:

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega : |x - y| \le \frac{1}{6}\right\} =$$

$$= \left\{(x, y) : x - \frac{1}{6} \le y \le x + \frac{1}{6}\right\}$$

(на рис. 4 эта область заштрихована).

Площадь квадрата, представляющего пространство элементарных событий, $S(\Omega)=1$. Находим площадь области, представляющей событие A:

$$S(A)=1-2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6}\right)^2=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}.$$

Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{11}{36}.$$

III. Задачи для самостоятельного решения

11. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

12. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

A – все пассажиры выйдут на четвертом этаже;

B – все пассажиры выйдут на одном и том же этаже;

C – все пассажиры выйдут на разных этажах.

13. На шахматную доску случайным образом ставят две ладьи: белую и чёрную. Какова вероятность того, что ладьи не бьют друг друга?

14. Восемь человек садятся за круглый стол в произвольном порядке. Какова вероятность того, что два определённых лица будут сидеть рядом?

15. Пять мужчин и десять женщин случайным образом по трое рассаживаются за 5 столиков. Какова вероятность того, что за каждым столиком окажется мужчина?

16. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0, 1, 2, случайно выбирается одна. Найти вероятности событий:

A – последовательность начинается с 0;

B – последовательность содержит ровно $m+2$ нуля, причём 2 из них находятся на концах последовательности;

C – последовательность содержит ровно m единиц.

17. Из промежутка [0,2] наугад выбирается два числа. Какова вероятность, что их произведение больше 2?

18. Значения параметров a и b выбирают наугад из отрезка $[-1,1]$. Найти вероятности следующих событий:

A – корни уравнения $x^2+2ax+b=0$ действительные;

B – корни уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ положительные.

19. В окружности радиуса R проводятся хорды, параллельные заданному направлению. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более R, если равновозможны любые положения точек пересечения хорды с диаметром, перпендикулярным выбранному направлению?

20. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придётся ожидать освобождения причала, если время стоянки одного парохода – 1 час, а другого – 2 часа.

21. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a случайным образом бросают монету радиуса $r < \frac{a}{2}$. Найти вероятность того, что монета попадёт целиком внутрь одного квадрата.

1.3. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Независимые события

I. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение *условной вероятности*.

2. Как можно найти условную вероятность в классической вероятностной модели?

2. Сформулируйте теорему умножения вероятностей (для двух и для n событий).

2. Какие два события называют *независимыми*?

3. Какие n событий называют *независимыми в совокупности*?

II. Примеры решения задач

Пример 1. Игральная кость подбрасывается два раза. Рассматриваются события:

A – оба раза выпало число очков, меньшее 4;

B – оба раза выпало число очков, кратное 3;

C – оба раза выпало нечётное число очков.

Найти условные вероятности $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(B|C)$. Являются ли независимыми события A и B, A и C, B и C? Являются ли независимыми в совокупности события A, B и C?

Решение. Согласно определению условной вероятности

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)}, \quad P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)}.$$

Элементарное событие в нашей задаче представим упорядоченной парой чисел (i, j), где i – цифра, выпавшая при первом подбрасывании, j – цифра, выпавшая при втором подбрасывании. Тогда пространство элементарных событий

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = \overline{1, 6}\}.$$

Отсюда следует, что число всех элементарных событий $|\Omega| = 36$. Очевидно, что все элементарные исходы являются равновозможными. Следовательно, для вычисления вероятностей событий можно применить классическое определение вероятности.

Представим события *A*, *B*, *C*, *AB* и *AC* в виде множеств благоприятствующих им элементарных исходов:

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\},$$
$$B = \{(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)\},$$
$$C = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\},$$
$$AB = \{(3,3)\},$$
$$AC = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\},$$
$$BC = \{(3,3)\}.$$

Для каждого из этих событий находим число благоприятствующих ему элементарных исходов:

$$|A| = 9, \quad |B| = 4, \quad |C| = 9, \quad |AB| = 1, \quad |AC| = 4, \quad |BC| = 1.$$

По формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4},$$

$$P(AB) = \frac{|AB|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}, \quad P(AC) = \frac{|AC|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(BC) = \frac{|BC|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}.$$

Следовательно,

$$P(A\,|\,B) = \frac{1/36}{1/9} = \frac{1}{4}, \quad P(A\,|\,C) = \frac{1/9}{1/4} = \frac{4}{9}, \quad P(B\,|\,C) = \frac{1/36}{1/4} = \frac{1}{9}.$$

Проверяем независимость событий *A* и *B*:

$$P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36} = P(AB).$$

Значит, события *A* и *B* независимы. Далее проверяем независимость событий *A* и *C*:

$$P(A)P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \neq P(AC).$$

Следовательно, события *A* и *C* независимыми не являются. Наконец, проверяем независимость событий *B* и *C*:

$$P(B)P(C) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{36} = P(BC).$$

Таким образом, события *B* и *C* независимы.

События *A*, *B* и *C* не являются независимыми в совокупности, так как для этого необходимо (но не достаточно!), чтобы все три события были попарно независимы.

Пример 2. В коробке находится 4 белых, 3 синих и 2 чёрных шара. Наудачу последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что первый шар будет белым, второй – синим, третий – чёрным?

Решение. Введём следующие события: A_1 – первым извлекли белый шар, A_2 – вторым – синий, A_3 – третьим – чёрный. Тогда событие *A*, вероятность которого требуется найти, представится в виде

$$A = A_1 A_2 A_3 .$$

По теореме умножения вероятностей

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) .$$

Применяя классическое определение вероятности, последовательно находим:

$$P(A_1) = \frac{4}{9},$$

т.к. первоначально в урне находится 9 шаров, из них 4 – белые;

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{8},$$

т.к. после первого извлечения в урне остаётся 8 шаров, из них 3 – синие;

$$P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{2}{7},$$

т.к. два шара (белый и синий) уже вынуты, а из оставшихся в урне – 2 чёрные. Следовательно,

$$P(A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21} .$$

III. Задачи для самостоятельного решения

22. Из урны, содержащей 3 белых и 7 чёрных шаров, наудачу и без возвращения извлекаются два шара. Рассматриваются события:

A – первый шар белый;

B – второй шар белый;

C – по крайней мере один из вынутых шаров белый.

Найти условные вероятности $P(B \mid A)$, $P(A \mid B)$, $P(A \mid C)$. Являются ли независимыми события *A* и *B*, *A* и *C*, *B* и *C*? Являются ли независимыми в совокупности события *A*, *B* и *C*?

23. Одновременно бросают две игральных кости – белую и чёрную. Рассматриваются события: A – на белой кости выпало более двух очков; B – в сумме выпало более двух очков; C – в сумме выпало менее десяти очков. Вычислить условные вероятности $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A|C)$, $P(C|A)$, $P(B|C)$, $P(C|B)$. Являются ли независимыми события A и B, A и C, B и C? Являются ли независимыми в совокупности события A, B и C?

24. Из колоды в 36 карт наугад берут одну. Рассматриваются события: A – вынут туз; B – вынута пиковая карта. Являются ли события A и B независимыми?

25. На плоскость бросают правильный тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, зелёный, синий цвета, а в раскраске четвёртой грани присутствуют все эти три цвета. Рассматриваются события: A – тетраэдр упадёт на грань, содержащую красный цвет; B – зелёный цвет; C – синий цвет. Являются ли события A, B и C попарно независимыми? Являются ли они независимыми в совокупности?

26. На шахматную доску случайным образом ставят две ладьи: белую и чёрную. Рассматриваются события: A – ладьи попали на клетки разного цвета; B – ладьи бьют друг друга. Вычислить условную вероятность $P(B|A)$.

27. В первом ящике 2 белых и 10 чёрных шаров, во втором – 3 белых и 9 чёрных шаров, в третьем – 6 белых и 6 чёрных шаров. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые.

28. Каждая буква слова «МАТЕМАТИКА» написана на отдельной карточке. Карточки перемешали и из них наугад последовательно извлекли и выложили слева направо четыре карточки. Найти вероятность того, что получилось слово «ТЕМА».

29. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей играные от неиграных не отличают. Какова вероятность того, что после трёх игр в коробке не останется неиграных мячей?

30. Из урны, содержащей 6 белых и 4 чёрных шара, наудачу и последовательно извлекают по одному шару до появления чёрного шара. Найти вероятность того, что придётся производить четвёртое извлечение, если выборка производится: а) с возвращением; б) без возвращения.

31. Из колоды в 52 карты вынимают наудачу сразу две карты. Одну из них смотрят – она оказалась дамой; после этого две вынутые карты перемешивают и одну из них берут наугад. Найти вероятность того, что она окажется тузом.

1.4. Теорема сложения вероятностей

I. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для несовместных событий.

2. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для двух и для трёх совместных событий.

3. Как можно вычислить вероятность суммы любого числа совместных событий, не пользуясь теоремой сложения вероятностей?

II. Примеры решения задач

Пример 1. По каналу связи передаются три сообщения. Каждое из них независимо от других может исказиться с вероятностью $0{,}2$. Найти вероятность события A – ровно одно сообщение передано без искажений.

Решение. Пусть событие A_i – i-е сообщение передано без искажений $(i=1,2,3)$. Тогда событие $\overline{A}_i$ означает, что i-е сообщение искажено. По условию $P(\overline{A}_i)=0{,}2$. Следовательно, $P(A_i)=1-0{,}2=0{,}8$. Событие A можно представить следующим образом:

$$A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Так как слагаемые $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ – попарно несовместные события, то на основании теоремы сложения вероятностей получаем

$$P(A)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3).$$

Поскольку события A_1, A_2, A_3 независимы в совокупности, то

$$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=0{,}8\cdot0{,}2\cdot0{,}2=0{,}032,$$

$$P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)=0{,}2\cdot0{,}8\cdot0{,}2=0{,}032,$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}8=0{,}032.$$

Таким образом, искомая вероятность

$$P(A)=0{,}032+0{,}032+0{,}032=0{,}096.$$

Пример 2. На 100 выпущенных лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Найти вероятность выигрыша хотя бы по одному из приобретённых билетов, если приобретено: а) 2 билета; б) 4 билета.

Решение. а) Введём события: A_1 – выигрыш по первому билету, A_2 – выигрыш по второму билету. Тогда событие A_1+A_2 означает выигрыш хотя бы по одному из двух билетов. Так как A_1 и A_2 являются совместными событиями, то по теореме сложения вероятностей

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2).$$

Находим

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{5}{100} = 0{,}05.$$

Для вычисления вероятности $P(A_1A_2)$ используем теорему умножения вероятностей:

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{20} \cdot \frac{4}{99} = \frac{1}{495}.$$

Таким образом,

$$P(A_1 + A_2) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{495} = \frac{97}{990} \approx 0{,}098.$$

б) Пусть событие A_i – выигрыш по i-му билету $(i = 1, 2, 3, 4)$. Поскольку $P(C) = 1 - P(\overline{C})$ для любого события C, то

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4).$$

Вероятность $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)$ находим с помощью теоремы умножения вероятностей:

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_4 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) =$$
$$= \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \approx 0{,}812.$$

Искомая вероятность

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \approx 1 - 0{,}812 = 0{,}188.$$

III. Задачи для самостоятельного решения

32. В первой урне находится 2 белых и 3 чёрных шара, а во второй – 4 белых и 2 чёрных. Из каждой урны наугад извлекается по одному шару. Найти вероятность того, что вынутые шары будут одного и того же цвета.

33. При приёмке партии из 80 изделий, среди которых 6 бракованных, проверяется 40 наудачу выбранных изделий. Определить вероятность того, что партия будет принята, если условиями приёма допускается не более двух бракованных изделий среди проверенных.

34. Три орудия ведут огонь по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле из первого орудия равна $0{,}5$, из второго – $0{,}6$ и из третьего – $0{,}7$. Зная, что каждое орудие стреляет один раз, найти вероятность поражения цели, если для этого достаточно двух попаданий.

35. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента K_1 или одновременный выход из строя двух элементов – K_2 и K_3. Элементы K_1, K_2, K_3 могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}3$ соответственно. Какова вероятность разрыва цепи?

36. Два стрелка делают по одному выстрелу по одной и той же мишени, а затем каждый из стрелков стреляет ещё раз, если при первом сделанном им выстреле он промахнулся. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна $0{,}7$, а для второго – $0{,}8$. Найти вероятность того, что мишень будет поражена дважды.

37. Два игрока поочерёдно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у кого первым выпадет 6 очков. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

38. Происходит воздушный бой между истребителем и бомбардировщиком. Стрельбу начинает истребитель: он даёт очередь по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью $0{,}2$. Если бомбардировщик этой очередью не сбит, он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью $0{,}3$. Если истребитель не сбит, то он снова стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью $0{,}4$. Найти вероятности следующих исходов боя:

A – сбит бомбардировщик;

B – сбит истребитель;

C – ни один из самолётов не сбит.

39. Рабочий обслуживает четыре станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна $0{,}92$, для второго – такая вероятность равна $0{,}9$, для третьего – $0{,}85$ и для четвёртого – $0{,}8$. Какова вероятность того, что в течение часа хотя бы один станок не потребует внимания рабочего?

40. Среди билетов денежно-вещевой лотереи половина выигрышных. Сколько лотерейных билетов нужно купить, чтобы с вероятностью, не меньшей $0{,}999$, быть уверенным в выигрыше хотя бы по одному билету?

1.5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

I. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое *полная группа событий*?

2. Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?

3. Напишите формулу полной вероятности.

4. Напишите формулу Байеса.

II. Примеры решения задач

Пример 1. В сборочный цех поступают однотипные детали с трёх поточных линий. Производительности этих линий относятся как $5:3:2$. Вероятность брака для первой линии составляет $0{,}01$, для второй линии – $0{,}02$, для третьей линии – $0{,}03$. Найти вероятность, что наугад взятая деталь бракована.

Решение. Пусть событие A – взятая деталь бракована. Рассмотрим следующие события (гипотезы): H_1 – деталь изготовлена на первой линии, H_2 – на второй и H_3 – на третьей. Очевидно, события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу. Находим их вероятности:

$$P(H_1)=\frac{5}{5+3+2}=0{,}5,\quad P(H_2)=\frac{3}{5+3+2}=0{,}3,\quad P(H_3)=\frac{2}{5+3+2}=0{,}2.$$

Согласно условию задачи

$$P(A\,|\,H_1)=0{,}01,\quad P(A\,|\,H_2)=0{,}02,\quad P(A\,|\,H_3)=0{,}03.$$

Применяя формулу полной вероятности, находим искомую вероятность:

$$P(A)=P(H_1)P(A\,|\,H_1)+P(H_2)P(A\,|\,H_2)+P(H_3)P(A\,|\,H_3)=$$
$$=0{,}5\cdot 0{,}01+0{,}3\cdot 0{,}02+0{,}2\cdot 0{,}03=0{,}017.$$

Пример 2. Страховая компания разделяет клиентов по трём классам риска: 1-й класс – малый риск, 2-й класс – средний, 3-й класс – большой риск. Среди всех клиентов компании 50% – первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность наступления страхового случая для первого класса риска равна $0{,}01$, для второго – $0{,}03$, для третьего – $0{,}08$. Какова вероятность того, что клиент N, получивший вознаграждение за период страхования, относится к группе малого риска?

Решение. Пусть событие A означает, что клиент N получил вознаграждение. Рассмотрим события (гипотезы): H_1 – клиент N относится к первому классу риска, H_2 – ко второму, H_3 – к третьему. События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу. Необходимо определить условную вероятность $P(H_1\,|\,A)$. Из условия задачи известны вероятности гипотез

$$P(H_1)=0{,}5,\quad P(H_2)=0{,}3,\quad P(H_3)=0{,}2,$$

а также условные вероятности

$$P(A\,|\,H_1)=0{,}01,\quad P(A\,|\,H_2)=0{,}03,\quad P(A\,|\,H_3)=0{,}08.$$

Искомую вероятность вычисляем по формуле Байеса:

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{P(H_1)P(A\,|\,H_1)}{P(H_1)P(A\,|\,H_1)+P(H_2)P(A\,|\,H_2)+P(H_3)P(A\,|\,H_3)}=$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}01}{0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 + 0{,}2 \cdot 0{,}08} = \frac{1}{6}.$$

III. Задачи для самостоятельного решения

41. Имеются две урны. В первой урне 2 белых и 3 чёрных шара, во второй – 3 белых и 5 чёрных. Из первой и второй урн, не глядя, берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из неё наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

42. В первой урне находится 3 белых шара и 2 чёрных, во второй – 4 белых и 4 чёрных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

43. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются ещё два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

44. В ящик, содержащий 8 исправных изделий, добавлено 2 изделия, взятых со склада. Известно, что доля бракованных изделий на складе равна 5%. Найти вероятность того, что взятое наудачу из пополненного ящика изделие не будет бракованным.

45. Орудийная батарея состоит из четырёх орудий: два орудия попадают в цель при одном выстреле с вероятностью $0{,}6$, а два других – с вероятностью $0{,}7$. Для поражения цели достаточно двух попаданий, а при одном попадании вероятность поражения цели равна $0{,}8$. Какое-то орудие выстрелило дважды. Найти вероятность поражения цели.

46. В торговую фирму поступили телевизоры от трёх поставщиков в отношении $1:4:5$. Практика показала, что телевизоры, поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков не потребуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98, 88 и 92% случаев.

1) Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор, не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

2) Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

47. В урне лежит шар неизвестного цвета – с равной вероятностью белый или чёрный. В урну опускается один белый шар и после тщательного перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

48. Три стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,5, для третьего – 0,4. В результате произведённых выстрелов в мишени оказались две пробоины. Найти вероятность того, что в мишень попали второй и третий стрелки.

49. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно и 1 – плохо. Отлично подготовленный студент может ответить на все 25 вопросов программы, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

1.6. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли

I. Контрольные вопросы и задания

1. Что называют *схемой Бернулли*?

2. Приведите примеры задач, решаемых в рамках схемы Бернулли.

3. Напишите формулу Бернулли.

4. Как в схеме Бернулли найти вероятность того, что событие A наступит не менее k_1 и не более k_2 раз?

5. Как найти наивероятнейшее число появлений события A в n независимых испытаниях?

II. Примеры решения задач

Пример 1. Что вероятнее выиграть у равносильного противника: а) три партии из четырёх или пять партий из восьми?; б) не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми? Ничейный исход партии исключён.

Решение. Так как противники равносильные, то $p = q = \dfrac{1}{2}$. Воспользуемся формулой Бернулли.

а) Вероятность выиграть три партии из четырёх

$$P_4(3) = C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}.$$

Вероятность выиграть пять партий из восьми

$$P_8(5)=C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{32}.$$

Поскольку $\frac{1}{4}>\frac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырёх.

б) Вероятность выиграть не менее трёх партий из четырёх

$$P_4(3\le k\le 4)=P_4(3)+P_4(4)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}.$$

Вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми

$$P_8(5\le k\le 8)=P_8(5)+P_8(6)+P_8(7)+P_8(8)=$$

$$=C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1+C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0=$$

$$=\frac{7}{32}+\frac{7}{64}+\frac{1}{32}+\frac{1}{256}=\frac{93}{256}.$$

Так как $\frac{5}{16}<\frac{93}{256}$, то вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми.

Пример 2. При автоматической наводке орудия вероятность попадания по быстродвижущейся цели равна 0,9. Найти наивероятнейшее число попаданий при 50 выстрелах.

Решение. Здесь $n=50$, $p=0{,}9$, $q=1-p=0{,}1$. Наивероятнейшее число попаданий k должно удовлетворять двойному неравенству

$$np-q\le k\le np+p.$$

В нашем случае

$$50\cdot 0{,}9-0{,}1\le k\le 50\cdot 0{,}9+0{,}9,$$

т.е. $44{,}9\le k\le 45{,}9$. Следовательно, $k=45$.

III. Задачи для самостоятельного решения

50. Известно, что 5% изделий, изготовляемых заводом, являются нестандартными. Проверено семь изделий. Какова вероятность того, что нестандартными окажутся: а) два изделия? б) хотя бы два изделия?

51. Вероятность поражения движущейся цели при каждом выстреле равна 0,4. Цель будет уничтожена при попадании в неё не менее двух раз. Найти вероятность того, что цель уничтожена, если в неё произведено пять независимых выстрелов.

52. Производятся испытания прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью 0,1. После первого выхода из строя прибор ремонтируется; после второго – признаётся негодным.

Найти вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя точно при шестом испытании.

53. В каждой из восьми урн имеется 10 белых и 5 чёрных шаров. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару. Что вероятнее: появление двух чёрных шаров и шести белых или трёх чёрных и пяти белых?

54. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,3. Сколько должно быть произведено независимых выстрелов, чтобы вероятность по меньшей мере одного попадания в десятку была больше 0,9?

55. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность выдержать испытание для каждого элемента составляет 0,9. Найти наивероятнейшее число выдержавших испытание элементов и его вероятность.

56. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,1. Найти наивероятнейшее число заключённых договоров после 25 визитов.

57. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7?

58. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений очков, кратных 3, равнялось 5?

1.7. Асимптотическая формула Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа

I. Контрольные вопросы и задания

1. Напишите асимптотическую формулу Пуассона. В каких случаях она применяется?

2. Какая функция используется в локальной теореме Муавра – Лапласа? Какими свойствами она обладает? Как находить её значения? Нарисуйте график этой функции.

3. Дайте формулировку локальной теоремы Муавра – Лапласа. В каком случае применяется эта теорема?

4. Сформулируйте интегральную теорему Муавра – Лапласа. Когда она применяется?

5. Приведите основные свойства функции Лапласа. Как находить значения этой функции?

II. Примеры решения задач

Пример 1. Известно, что процент брака для некоторой детали равен $0{,}5\%$. Контролёр проверяет 1000 деталей. Какова вероятность обнаружить ровно 3 бракованные детали?

Решение. Имеем $n = 1000$ испытаний, проводимых по схеме Бернулли. В каждом испытании событие A – проверяемая деталь бракованная – может произойти с вероятностью $p = 0{,}005$. Поскольку вероятность p мала $(p < 0{,}1)$, число испытаний n велико и

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}005 = 5 < 10,$$

то для нахождения искомой вероятности мы можем воспользоваться асимптотической формулой Пуассона:

$$P_{1000}(3) = \frac{5^3}{3!} e^{-5} \approx 0{,}14.$$

Пример 2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 400 выстрелах произойдёт ровно 300 попаданий.

Решение. Здесь $n = 400$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$, $k = 300$. Поскольку велики и число испытаний n, и вероятности успеха p и неудачи q в одном испытании (выполнено условие $npq = 64 \geq 20$), то можно воспользоваться локальной теоремой Муавра – Лапласа. Согласно этой теореме, вероятность k успехов в n испытаниях

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (функция Гаусса). Вычисляем:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 8, \qquad \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{8} = -2{,}5.$$

Пользуясь таблицей значений функции Гаусса, находим

$$\varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}5) \approx 0{,}0175.$$

Таким образом,

$$P_{400}(300) \approx \frac{0{,}0175}{8} \approx 0{,}0022.$$

Пример 3. Найти вероятность того, что при 600 бросаниях игральной кости выпадет от 90 до 120 шестёрок.

Решение. Здесь $n = 600$, $k_1 = 90$, $k_2 = 120$, $p = \dfrac{1}{6}$, $q = 1 - p = \dfrac{5}{6}$.

Воспользуемся интегральной теоремой Муавра – Лапласа. Согласно этой теореме, вероятность того, что число успехов в n испытаниях заключено в пределах от k_1 до k_2, находится по формуле

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (нормированная функция Лапласа). Вычисляем:

$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 600 \cdot 1/6}{\sqrt{600 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx -1{,}10, \qquad \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{120 - 600 \cdot 1/6}{\sqrt{600 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx 2{,}19.$$

Пользуясь таблицей значений функции $\Phi_0(x)$, находим

$$\Phi_0(-1{,}10) = -\Phi_0(1{,}10) \approx -0{,}3643, \qquad \Phi_0(2{,}19) \approx 0{,}4857.$$

Таким образом,

$$P_{600}(90 \le k \le 120) \approx 0{,}4857 + 0{,}3643 = 0{,}85.$$

III. Задачи для самостоятельного решения

59. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью $\frac{1}{200}$. Найти вероятность того, что среди 200 соединений произойдёт:

а) ровно одно неправильное соединение;

б) не более двух неправильных соединений;

в) не менее трёх неправильных соединений.

60. Прядильщица обслуживает 200 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одного часа равна 0,02. Какова вероятность того, что в течение одного часа произойдёт обрыв нити: а) на пяти веретенах? б) более чем на двух веретенах?

61. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,01. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью, не меньшей чем 0,95?

62. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорождённых окажется 50 мальчиков.

63. Монета подбрасывается 10000 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 5000 раз.

64. Вероятность изделию некоторого производства оказаться бракованным равна 0,005. Чему равна вероятность того, что из 10000 наудачу взятых изделий бракованных окажется ровно 40?

65. Передается закодированное сообщение из 1100 символов. Вероятность ошибки при декодировании каждого символа составляет 0,01. Считая декодирование каждого символа независимым от декодирования других, найти вероятность того, что число ошибок в принятом сообщении не превышает 20.

66. Страховая компания заключила 40000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года равна 0,02. Найти вероятность того, что таких случаев будет не более 870.

67. Отдел технического контроля проверяет 900 изделий на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из проверенных изделий: а) 800 стандартных; б) не менее 800 стандартных.

68. При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 80% продукции высшего сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число изделий высшего сорта заключено между 760 и 830?

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Дискретные случайные величины

I. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое *случайная величина*?

2. Дайте определение *функции распределения* случайной величины. Какими свойствами обладает эта функция?

3. Какую случайную величину называют *дискретной*?

4. Что называют *законом распределения* дискретной случайной величины? Что называют её *рядом распределения*?

5. По какой формуле вычисляется функция распределения дискретной случайной величины? Как выглядит график этой функции?

6. Дайте определение *математического ожидания* дискретной случайной величины. Приведите его основные свойства.

7. Дайте определение *дисперсии* случайной величины. Какими свойствами она обладает? По каким формулам можно вычислять дисперсию дискретной случайной величины?

8. Что называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины?

9. Дайте определения основных дискретных распределений – *биномиального, распределения Пуассона, геометрического*.

II. Примеры решения задач

Пример 1. В урне находится 4 белых и 6 чёрных шаров. Случайным образом из неё извлекается 3 шара. Пусть случайная величина X – количество белых шаров среди трёх вынутых. Требуется: 1) построить ряд распределения и функцию распределения $F(x)$ случайной величины X; 2) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ и вероятность события $\{X>1\}$.

Решение. 1) Случайная величина X может принимать следующие значения: $0, 1, 2, 3$. Найдём вероятности этих значений, используя классическое определение вероятности:

$$P(X=0)=\frac{C_4^0C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1\cdot 20}{120}=\frac{1}{6},\quad P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{4\cdot 15}{120}=\frac{1}{2},$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{6\cdot 6}{120}=\frac{3}{10},\quad P(X=3)=\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{4\cdot 1}{120}=\frac{1}{30}.$$

Запишем ряд распределения случайной величины X:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/6	1/2	3/10	1/30

(Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=1.$)

Найдём функцию распределения. Так как $F(x)=\sum\limits_{i:x_i<x} p_i$, то:

при $x\le 0$ $\quad F(x)=0$;

при $0<x\le 1$ $\quad F(x)=\frac{1}{6}$;

при $1<x\le 2$ $\quad F(x)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$;

при $2<x\le 3$ $\quad F(x)=\frac{2}{3}+\frac{3}{10}=\frac{29}{30}$;

при $x>3$ $\quad F(x)=\frac{29}{30}+\frac{1}{30}=1.$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 1/6 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 2/3 & \text{при } 1<x\le 2,\\ 29/30 & \text{при } 2<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

2) Найдём математическое ожидание:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i p_i=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{30}=1{,}2.$$

Вычислим дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - M^2(X) =$$

$$= 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{30} - (1{,}2)^2 = 0{,}56,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}748.$$

Найдём вероятность события $\{X > 1\}$:

$$P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Дан перечень возможных значений случайной величины *X*: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а также известны математические ожидания этой величины и её квадрата: $M(X) = 0{,}1$, $M(X^2) = 0{,}9$. Построить ряд распределения случайной величины *X*.

Решение. Пусть p_1, p_2, p_3 – вероятности значений x_1, x_2, x_3 соответственно. Тогда

$$M(X) = -1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = -p_1 + p_3,$$

$$M(X^2) = (-1)^2 \cdot p_1 + 0^2 \cdot p_2 + 1^2 \cdot p_3 = p_1 + p_3.$$

Принимая во внимание условие задачи и то, что $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -p_1 + p_3 = 0{,}1, \\ p_1 + p_3 = 0{,}9, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы: $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}1$, $p_3 = 0{,}5$. Таким образом, ряд распределения случайной величины *X* имеет следующий вид:

x_i	-1	0	1
p_i	0,4	0,1	0,5

III. Задачи для самостоятельного решения

69. Стрелок, имея 5 патронов, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Пусть случайная величина *X* – число использованных патронов. Построить ряд распределения и функцию распределения $F(x)$ случайной величины *X*. Найти вероятность $P(2 < X < 5)$.

70. Дана функция распределения дискретной случайной величины *X*:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 0{,}44 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0{,}76 & \text{при } 1<x\le 2,\\ 0{,}88 & \text{при } 2<x\le 3,\\ 0{,}96 & \text{при } 3<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Построить ряд распределения этой случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

71. Дискретная случайная величина *X* имеет следующий закон распределения:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	c	$4c$	$9c$	$16c$	$25c$

Найти: 1) постоянную *c*; 2) математическое ожидание $M(X)$; 3) дисперсию $D(X)$; 4) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$; 5) вероятность $P(|X-2|\le 1)$.

72. Функция распределения дискретной случайной величины *X* имеет следующий вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ 0{,}3 & \text{при } 2<x\le 3,\\ 0{,}5 & \text{при } 3<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Вычислить вероятности $P(X\ge 3{,}5)$ и $P(|X|<2{,}5)$.

73. В одной студенческой группе обучается 25 студентов, среди которых 6 отличников. По жребию отобрано три студента. Пусть случайная величина *X* – число отличников среди отобранных студентов. Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

74. В урне 9 шаров, из них 4 белых. Наудачу последовательно, без возвращения извлекаются шары до первого появления белого шара. Случайная величина *X* – число извлечённых шаров. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

75. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7, для второго – 0,75, для третьего – 0,8, для четвёртого – 0,9. Пусть случайная величина *X* – число станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа. Построить ряд распределения случайной величины *X*. Найти математическое ожидание $M(X)$

и дисперсию $D(X)$.

76. Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. Рассматривается случайная величина X – число появлений события A в трёх опытах. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X. Найти: 1) вероятности событий $\{X < 2\}$, $\{1 \le X < 3\}$, $\{1 < X \le 3\}$; 2) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

77. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения. Вероятность принятия меньшего из них равна 0,8. Найти функцию распределения случайной величины X, если известны математическое ожидание $M(X) = 3{,}2$ и дисперсия $D(X) = 0{,}16$.

2.2. Непрерывные случайные величины

I. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте строгое определение *непрерывной* случайной величины. Что такое *плотность распределения (плотность вероятности)*?

2. Приведите свойства плотности распределения. Как с помощью плотности найти вероятность попадания значения непрерывной случайной величины в заданный интервал числовой оси? Как эту же вероятность найти с помощью функции распределения?

3. Чем различаются графики функций распределения дискретной и непрерывной случайных величин?

4. Дайте определение *математического ожидания* непрерывной случайной величины. Приведите его основные свойства.

5. Дайте определения основных непрерывных распределений – *равномерного*, *нормального*, *показательного*. Чему равны математические ожидания и дисперсии случайных величин, имеющих эти распределения?

II. Примеры решения задач

Пример 1. Непрерывная случайная величина X имеет плотность

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{x}} & \text{при } x \in [1, 4], \\ 0 & \text{при } x \notin [1, 4]. \end{cases}$$

Найти: 1) постоянную a; 2) функцию распределения $F(x)$ случайной величины X; 3) математическое ожидание $M(X)$; 4) дисперсию $D(X)$; 5) вероятность события $\{2{,}25 \le X \le 5\}$.

Решение. 1) Постоянную a найдём из условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$:

$$1 = \int\limits_1^4 \frac{a}{\sqrt{x}}\,dx = 2a\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$$

2) Так как $p(x) = 0$ при $x \notin [1, 4]$, то $P(1 \le X \le 4) = 1$ и, следовательно, $F(x) = 0$ при $x < 1$ и $F(x) = 1$ при $x > 4$. Для случая $1 \le x \le 4$ имеем

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int\limits_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{t}\Big|_1^x = \sqrt{x} - 1.$$

Таким образом, функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ \sqrt{x} - 1 & \text{при } 1 \le x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

3) Найдём математическое ожидание:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \int\limits_1^4 \frac{x}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4 = \frac{7}{3}.$$

4) Найдём дисперсию:

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx = \int\limits_1^4 \frac{x^2}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}\Bigg|_1^4 = \frac{31}{5},$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{31}{5} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{34}{45}.$$

5) Так как X – непрерывная случайная величина, то

$$P(2{,}25 \le X \le 5) = P(2{,}25 \le X < 5) = F(5) - F(2{,}25) = 1 - (\sqrt{2{,}25} - 1) = 0{,}5.$$

Заметим, что эту вероятность можно было найти и по-другому, вычислив интеграл $\int\limits_{2,25}^{5} p(x)dx$.

Пример 2. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина X, распределённая по показательному закону, причём среднее время ремонта составляет 15 дней. Найти плотность распределения, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней.

Решение. Как известно, для случайной величины X, распределённой по показательному закону с параметром λ, математическое ожидание $M(X) = \frac{1}{\lambda}$. По условию задачи $M(X) = 15$. Отсюда находим, что $\lambda = \frac{1}{15}$. Следовательно, плотность и функция распределения случайной величины X имеют вид:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{15}x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределённой по показательному закону, совпадает с её математическим ожиданием. Поэтому $\sigma(X) = 15$.

Искомую вероятность $P(X \geq 20)$ находим с помощью функции распределения:

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - F(20) = 1 - (1 - e^{-\frac{20}{15}}) = e^{-\frac{4}{3}} \approx 0{,}264.$$

Пример 3. Производится измерение без систематических ошибок диаметра вала. Случайные ошибки измерения X подчиняются нормальному распределению со стандартным отклонением 10 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

Решение. Определим параметры m и σ нормального распределения, которому подчиняется случайная величина X (случайная ошибка измерения). Отсутствие систематических ошибок измерения означает, что $m = 0$. «Стандартное отклонение» – это другое название для среднего квадратического отклонения, часто используемое на практике. Поэтому $\sigma = 10$.

Для искомой вероятности попадания в симметричный относительно m интервал используем формулу

$$P(|X - m| < \varepsilon) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

(Φ_0 – нормированная функция Лапласа). В нашем случае $\varepsilon = 15$. Поэтому имеем

$$P(|X - 0| < 15) = 2\Phi_0\left(\frac{15}{10}\right) = 2\Phi_0(1{,}5).$$

По таблице находим $\Phi_0(1{,}5) \approx 0{,}4332$. Таким образом,

$$P(|X| < 15) \approx 0{,}8664.$$

III. Задачи для самостоятельного решения

78. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ ax^3 & \text{при } 0<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти коэффициент a и плотность распределения случайной величины X.

79. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x & \text{при } 0<x<3,\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } x\ge 3.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

80. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$p(x)=\begin{cases}x & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 2-x & \text{при } 1<x\le 2,\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } x>2.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины и вероятность события $\{0{,}5\le X\le 1\}$.

81. Плотность распределения $p(x)$ случайной величины X определяется формулой $p(x)=ae^{-|x|}$. Определить: а) коэффициент a; б) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

82. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x)=\frac{a}{1+x^2}.$$

Требуется: а) найти коэффициент a и функцию распределения $F(x)$; б) найти вероятность события $\{X>\sqrt{3}\}$; в) определить математическое ожидание $M(X)$.

83. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{x^2}{4} & \text{при } 0<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность события $\{X\ge 1\}$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

84. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (0 \le t < \infty).$$

Найти вероятность безотказной работы аппаратуры в течение промежутка времени $(0, T)$.

85. Случайная величина *X* распределена нормально. Среднее квадратическое отклонение этой величины $\sigma = 2$, а математическое ожидание $m = 6$. Найти вероятности событий:

а) $\{4 < X < 7\}$; б) $\{|X - m| < 0{,}3\}$.

86. Станок-автомат изготовляет шарики для подшипников, причём контролируется их диаметр *X*. Считая *X* нормально распределённой случайной величиной с математическим ожиданием 10 мм и средним квадратическим отклонением 0,1 мм, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,9973 будет заключён диаметр изготовленного шарика.

87. Точку бросают наудачу внутрь шара радиуса *R*. Вероятность её попадания в любую область, расположенную внутри шара, пропорциональна объёму этой области. Рассматривается случайная величина *X* – расстояние от точки до центра шара. Найти функцию распределения, плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.3. Двумерные случайные величины

I. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое *двумерная случайная величина*?

2. Какая двумерная случайная величина называется *дискретной*?

3. Что называют *законом распределения* дискретной двумерной случайной величины? Каким образом можно его задать?

4. Как одномерные законы распределения компонент дискретной двумерной случайной величины выражаются через вероятности их совместных значений?

5. Дайте определение *функции распределения двумерной случайной величины*. Приведите её свойства.

6. Дайте определение *непрерывной* двумерной случайной величины. Что такое *совместная плотность распределения*?

7. Перечислите основные свойства совместной плотности распределения. Как одномерные плотности компонент непрерывной двумерной случайной величины выражаются через совместную плотность?

8. Что такое *условный закон распределения*?

9. Какие случайные величины называются *независимыми*? Как проверить независимость двух случайных величин?

10. Что называют *коэффициентом корреляции* случайных величин? Что характеризует эта величина?

II. Примеры решения задач

Пример 1. Распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задано таблицей

$x_i \backslash y_j$	2	4	6
–1	0,08	0,12	0,20
1	0,12	0,18	0,30

Найти одномерные законы распределения компонент X и Y. Проверить, являются ли случайные величины X и Y независимыми. Построить функцию распределения двумерной случайной величины (X, Y).

Решение. Складывая вероятности по строкам и по столбцам в таблице совместного распределения, получаем соответственно законы распределения случайных величин X и Y:

x_i	–1	1
p_i	0,4	0,6

y_j	2	4	6
p_j	0,2	0,3	0,5

(Контроль: $0{,}4 + 0{,}6 = 1$; $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}5 = 1$.)

Случайные величины X и Y будут независимыми в том и только том случае, если для каждой пары значений (x_i, y_j) выполняется равенство

$$P(X = x_i, y = y_j) = P(X = x_i)P(X = y_j). \qquad (*)$$

Например, для пары значений $(-1, 2)$ имеем

$$P(X = -1)P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8 = P(X = -1, Y = 2).$$

Легко убедиться в том, что равенство $(*)$ будет выполняться и для остальных пяти пар значений (x_i, y_j). Следовательно, случайные величины X и Y являются независимыми.

Построим функцию распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y). Так как случайные величины X и Y независимы, то

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \qquad (**)$$

где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ – функции распределения случайных величин X и Y соответственно. Находим $F_X(x)$ и $F_Y(y)$:

$$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{i:x_i < x} P(X = x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ 0{,}4 & \text{при } -1 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \sum_{j:y_j < y} P(Y = y_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \le 2, \\ 0{,}2 & \text{при } 2 < y \le 4, \\ 0{,}5 & \text{при } 4 < y \le 6, \\ 1 & \text{при } y > 6. \end{cases}$$

Находим значения функции $F(x, y)$ по формуле (**) и сводим их в таблицу:

$x \backslash y$	$y \le 2$	$2 < y \le 4$	$4 < y \le 6$	$y > 6$
$x \le -1$	0	0	0	0
$-1 < x \le 1$	0	0,08	0,2	0,4
$x > 1$	0	0,2	0,5	1

Пример 2. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} axy & \text{при } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x, y): x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 2\}$. Найти:

а) постоянную a;

б) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область $G = \{(x, y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$;

в) одномерные плотности распределения $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ случайных величин X и Y соответственно.

Определить, зависимы ли случайные величины X и Y.

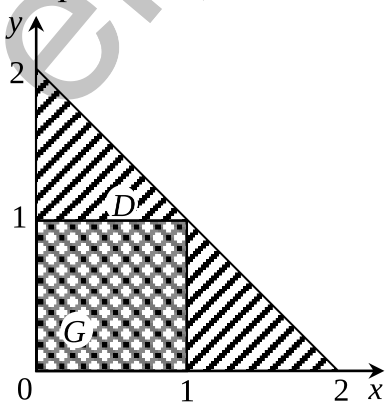

Рис. 5

Решение. а) Область D представляет собой треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$ и $y = 2 - x$ (см. рис. 5). Постоянную a найдём из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Вычисляем интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} axy\,dy =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^2 xy^2\Big|_0^{2-x} dx = \frac{a}{2}\int_0^2 x(2-x)^2\,dx = \frac{a}{2}\int_0^2 (4x-4x^2+x^3)\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\left(2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}a\,.$$

Таким образом, должно выполняться равенство $\frac{2}{3}a = 1$, откуда находим $a = \frac{3}{2}$.

б) Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область G найдем по формуле

$$P((X,Y)\in G) = \iint_G p(x,y)\,dx\,dy\,.$$

В нашем случае область G – квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$ и $y=1$ (на рис. 5 имеет двойную штриховку). Очевидно, $G\subset D$, и поэтому $p(x,y)=\frac{3}{2}xy$ при $(x,y)\in G$. Таким образом,

$$P((X,Y)\in G) = \iint_G \frac{3}{2}xy\,dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 dx\int_0^1 xy\,dy = \frac{3}{4}\int_0^1 xy^2\Big|_0^1 dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^1 x\,dx = \frac{3}{8}x^2\Big|_0^1 = \frac{3}{8}.$$

в) Найдем одномерную плотность $p_X(x)$ случайной величины X по формуле

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy\,.$$

Заметим, что в нашей задаче совместная плотность $p(x,y)=0$ при $x\notin[0,2]$ и $y\in\mathbf{R}$. Поэтому $p_X(x)=0$ при $x\notin[0,2]$. При $x\in[0,2]$ имеем:

$$p_X(x) = \int_0^{2-x} \frac{3}{2}xy\,dy = \frac{3}{4}xy^2\Big|_0^{2-x} = \frac{3}{4}x(2-x)^2\,.$$

Таким образом,

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(x-2)^2 & \text{при } x\in[0,2], \\ 0 & \text{при } x\notin[0,2]. \end{cases}$$

Аналогично рассуждая, найдём одномерную плотность $p_Y(y)$ случайной величины Y:

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}y(y-2)^2 & \text{при } y\in[0,2],\\ 0 & \text{при } y\notin[0,2].\end{cases}$$

Легко заметить, что $p(x,y)\not\equiv p_X(x)p_Y(y)$. Следовательно, случайные величины X и Y зависимы.

III. Задачи для самостоятельного решения

88. Бросаются две одинаковые игральные кости. Рассматриваются случайные величины: X – индикатор чётности суммы выпавших очков (т.е. $X=1$, если эта сумма чётна, и $X=0$ в противном случае), Y – индикатор чётности произведения выпавших очков ($Y=1$, если это произведение чётно, и $Y=0$ в противном случае). Найти закон распределения двумерной случайной величины (X,Y) и одномерные законы распределения компонент X и Y. Построить функцию распределения двумерной случайной величины (X,Y).

89. Распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задано таблицей

x_i \ y_j	10	20	30	40
0,5	0,05	0,12	0,08	0,04
2,5	0,09	0,30	0,11	0,21

Требуется:

а) построить ряды распределения случайных величин X и Y;

б) найти значения функции распределения $F(x,y)$ двумерной случайной величины (X,Y) в точках $(2{,}5;25)$ и $(9;11)$, а также вероятность события $\{2\le X<9,\ 10\le Y<30\}$;

в) проверить, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

90. Функция распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид, определяемый таблицей

x \ y	$y\le 1$	$1<y\le 3$	$3<y\le 5$	$y>5$
$x\le 2$	0	0	0	0
$2<x\le 4$	0	0,25	0,3	0,4
$x>4$	0	0,4	0,75	1

Найти закон распределения двумерной случайной величины (X,Y).

91. Распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задано таблицей

$x_i \backslash y_j$	1	2	3
1	0,05	0,1	0,05
2	0,15	0,2	0,1
3	0,1	0,2	0,05

Найти:

а) условный закон распределения случайной величины X при условии $Y=2$;

б) коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

92. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет следующий вид:

$$p(x,y)=\begin{cases} c(x+y) & \text{при } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти постоянную c, вычислить вероятность события $\{X+Y<1\}$ и коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

93. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно в области $G=\{(x,y):-1\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$. Получить выражения для плотности распределения $p(x,y)$, функции распределения $F(x,y)$ двумерной случайной величины (X,Y) и установить, зависимы или нет компоненты X и Y.

94. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно в квадрате со стороной a и диагоналями, лежащими на осях координат. Установить, зависимы или нет компоненты X и Y.

95. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно в треугольнике с вершинами в точках $(0;0)$, $(2;0)$, $(0;1)$. Найти плотности и условные плотности распределения компонент X и Y. Установить, зависимы или нет эти случайные величины.

96. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид

$$p(x,y)=\begin{cases} cxy^2 & \text{при } (x,y)\in D, \\ 0 & \text{при } (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где D – прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$. Найти: а) постоянную c; б) функцию распределения двумерной случайной величины (X,Y).

97. Известна функция распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y):

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y} & \text{при } x\ge 0, y\ge 0,\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти совместную плотность распределения двумерной случайной величины (X,Y) и вероятность её попадания в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1,\ x=2,\ y=3,\ y=5$.

2.4. Функции случайных величин

I. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определения *функций одной* и *нескольких случайных величин*.

2. Как найти закон распределения функции дискретной случайной величины?

3. Как найти плотность распределения функции непрерывной случайной величины?

4. Приведите формулы, по которым можно вычислить математическое ожидание и дисперсию функций одной и нескольких случайных величин.

II. Примеры решения задач

Пример 1. Распределение дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задано таблицей

x_i \ y_j	–1	0	1
–1	0,07	0,10	0,13
1	0,20	0,23	0,27

Найти ряд распределения случайной величины $Z=X^2+Y^2-1$.

Решение. Составим сначала таблицу, первая строка которой содержит значения случайной величины *Z*, найденные для всех пар значений (x_i, y_j), а нижняя – соответствующие этим парам вероятности:

z_i	1	0	1	1	0	1
p_i	0,07	0,10	0,13	0,20	0,23	0,27

Объединяя теперь столбцы с одинаковыми значениями z_i (вероятности при этом складываются), получаем окончательно ряд распределения случайной величины *Z*:

z_i	0	1
p_i	0,33	0,67

Пример 2. Случайная величина *X* распределена нормально с параметрами $m=0$, $\sigma=1$. Найти плотность распределения случайной величины $Y=X^2$.

Решение. Найдём сначала функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины *Y*. По определению функции распределения

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(X^2<y).$$

Поскольку $X^2\ge 0$, то $F_Y(y)=0$ при $y\le 0$, и значит, $p_Y(y)=F_Y'(y)=0$ при $y\le 0$. При $y>0$ имеем

$$F_Y(y)=P(|X|<\sqrt{y})=P(-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}).$$

Так как случайная величина *X* распределена нормально с параметрами $m=0$, $\sigma=1$, то из полученного равенства вытекает

$$F_Y(y)=\Phi_0(\sqrt{y})-\Phi_0(-\sqrt{y})=2\Phi_0(\sqrt{y})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{y}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Отсюда получаем выражение для плотности распределения случайной величины *Y* при $y>0$:

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}.$$

Таким образом, искомая плотность

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}} & \text{при } y>0,\\ 0 & \text{при } y\le 0.\end{cases}$$

Пример 3. Случайная величина *X* имеет показательный закон распределения с параметром $\lambda=3$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=e^X$.

Решение. Согласно условию плотность распределения случайной величины *X* имеет вид

$$p_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x} & \text{при } x\ge 0,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Находим математическое ожидание случайной величины *Y*:

$$M(Y)=M(e^X)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^x p_X(x)\,dx=\int_0^{+\infty}e^x 3e^{-3x}dx=1{,}5.$$

Вычисляем дисперсию

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2x}p_X(x)\,dx-(1{,}5)^2=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{2x}3e^{-3x}dx-2{,}25=0{,}75.$$

III. Задачи для самостоятельного решения

98. Шесть раз бросается правильная монета. Случайная величина X – модуль разности числа появлений герба и числа появлений цифры в данном эксперименте. Найти закон распределения этой случайной величины.

99. Распределение дискретной двумерной случайной величины (X,Y) задано таблицей

x_i \ y_j	10	12	14
1	0,08	0,02	0,10
2	0,32	0,08	0,40

Найти ряд распределения случайной величины $Z=(Y-12)/X$.

100. Дискретная двумерная случайная величина (X,Y) распределена по закону, представленному таблицей

x_i \ y_j	–1	0	1
0	0,1	0,2	0,1
1	0,2	0,3	0,1

Найти функцию распределения случайной величины $Z=XY$.

101. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0;3]$. Найти функцию распределения случайной величины $Y=X^2+1$.

102. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром λ. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины Y, если: а) $Y=\sqrt{X}$; б) $Y=X^2$.

103. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно в круге радиуса R с центром в начале координат. Найти плотность распределения случайной величины $Z=\dfrac{X}{Y}$.

104. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0;1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=4X^3$.

105. На отрезке длиной a наудачу выбираются две точки; случайная величина Z – расстояние между ними. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z.

106. Закон распределения вероятностей дискретной двумерной случайной величины (X, Y) представлен таблицей

$x_i \backslash y_j$	0,5	1	2
1	0,1	0,4	0,2
2	0,2	0	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$Z = \log_2(Y/X).$$

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1. Неравенства Маркова и Чебышева. Закон больших чисел

I. Контрольные вопросы и задания

1. Приведите неравенства Маркова и Чебышева.
2. Что такое *закон больших чисел*? Сформулируйте теорему Чебышева. Приведите доказательство этой теоремы.
3. Сформулируйте и докажите теорему Бернулли.

II. Примеры решения задач

Пример 1. Суточный расход воды в типовом девятиэтажном доме составляет в среднем 1200 м^3. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход воды в доме не превысит 3000 м^3.

Решение. Пусть случайная величина X – суточный расход воды в доме. По условию $M(X) = 1200$. Так как случайная величина $X > 0$, то применим неравенство Маркова

$$P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Имеем

$$P(X \leq 3000) \geq P(X < 3000) \geq 1 - \frac{1200}{3000} = 0{,}6,$$

т.е. вероятность интересующего нас события не менее 0,6.

Пример 2. Среднее квадратическое отклонение каждой из 2500 независимых случайных величин не превосходит 3. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий не превзойдёт 0,3.

Решение. Воспользуемся неравенством, которое получается при доказательстве теоремы Чебышева:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{C}{n\varepsilon^2},$$

где константа C такова, что $D(X_i)\le C$ $(i=1,2,\ldots,n)$. В нашем случае $D(X_i)=\sigma^2(X_i)\le 9$, и следовательно, можно положить $C=9$. Учитывая то, что замена строгого неравенства под знаком вероятности на нестрогое может лишь увеличить эту вероятность, получаем

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|\le 0{,}3\right)\ge 1-\frac{9}{2500\cdot 0{,}09}=0{,}96,$$

т.е. вероятность рассматриваемого события не менее 0,96.

III. Задачи для самостоятельного решения

107. По многолетним наблюдениям, средняя скорость ветра в некотором пункте равна 16 км/ч. Оценить вероятность того, что в случайный момент времени скорость ветра в этом пункте превысит 80 км/ч.

108. Оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не менее чем на 3σ, где σ – среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

109. Выяснить, применима ли теорема Чебышева к последовательности независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, если X_n имеет следующее распределение:

x_{ni}	$-5n$	0	$5n$
p_{ni}	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

110. Глубина моря измеряется прибором, не имеющем систематической ошибки. Среднее квадратическое отклонение измерений не превосходит 15 м. Сколько нужно сделать независимых измерений, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от a (глубины моря) по модулю менее чем на 5 м?

111. Вероятность наличия опечатки на одной странице рукописи $p=0{,}2$. Оценить вероятность того, что в рукописи, содержащей 400 страниц, частость (относительная частота) появления опечатки отличается от p по модулю менее чем на 0,05.

3.2. Центральная предельная теорема

I. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте центральную предельную теорему для независимых одинаково распределённых случайных величин.

2. Сформулируйте и докажите следствие центральной предельной теоремы – интегральную теорему Муавра – Лапласа.

II. Примеры решения задач

Пример 1. Случайная величина *X* является средним арифметическим 3200 независимых одинаково распределённых случайных величин: $X = \frac{1}{3200}\sum_{n=1}^{3200} X_i$, причём $M(X_i) = 3$, $D(X_i) = 2$, $i = \overline{1,3200}$. Найти вероятность того, что случайная величина *X* попадёт в интервал $(2{,}925; 3{,}075)$.

Решение. Случайная величина *X* имеет математическое ожидание $M(X) = \frac{1}{3200}\sum_{i=1}^{3200} M(X_i) = 3$ и дисперсию $D(X) = \frac{1}{3200^2}\sum_{i=1}^{3200} D(X_i) = \frac{1}{1600}$. В силу центральной предельной теоремы

$$P(2{,}925 < X < 3{,}075) = P\left((2{,}925 - 3)\cdot 40 < \frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}} < (3{,}075 - 3)\cdot 40\right) =$$

$$= P\left(-3 < \frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}} < 3\right) \approx \Phi_0(3) - \Phi_0(-3) = 2\Phi_0(3) \approx 0{,}9973.$$

Пример 2. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью $p \ge 0{,}975$ сумма выпавших очков была не менее 4500?

Решение. Пусть случайная величина X_i – количество очков, выпавшее при *i*-м бросании кости. Эта случайная величина принимает значения $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ с одинаковыми вероятностями $p_k = \frac{1}{6}$. Найдём её математическое ожидание и дисперсию:

$$m = M(X_i) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}5,$$

$$\sigma^2 = D(X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - (3{,}5)^2 = \frac{35}{12}.$$

Пусть случайная величина S_n – сумма очков после *n* подбрасываний кости. Очевидно, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Нам нужно найти такое n, чтобы выполнялось неравенство $P(S_n \ge 4500) \ge 0{,}975$. Применяя центральную предельную теорему, получаем

$$P(S_n \ge 4500) = P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \ge \frac{4500 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{4500 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0{,}5 - \Phi_0\left(\frac{4500 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Таким образом, имеем

$$0{,}5 - \Phi_0\left(\frac{4500 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \ge 0{,}975 \iff \Phi_0\left(\frac{nm - 4500}{\sigma\sqrt{n}}\right) \ge 0{,}475.$$

Из таблицы находим, что $\Phi_0(1{,}96) = 0{,}475$. Следовательно,

$$\frac{nm - 4500}{\sigma\sqrt{n}} \ge 1{,}96 \iff nm - 4500 \ge 1{,}96\sigma\sqrt{n} \iff$$

$$\iff 3{,}5n - 1{,}96\sqrt{35/12}\sqrt{n} - 4500 \ge 0.$$

Это квадратное относительно $\sqrt{n}$ неравенство. Решив его, получим $\sqrt{n} \ge 36{,}34$. Отсюда следует, что $n \ge 1321$.

III. Задачи для самостоятельного решения

112. Складывается 10^3 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-3}. Предполагая, что ошибки от округления независимы и равномерно распределены в интервале $(-0{,}5 \cdot 10^{-3}; 0{,}5 \cdot 10^{3})$, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,998 заключена суммарная ошибка.

113. Время ожидания автобуса пассажиром имеет показательное распределение со средним значением 9 минут. Найти число поездок, для которого суммарное время ожидания автобуса превысит 3 часа с вероятностью не более 0,2.

114. Независимые случайные величины X_i $(i = \overline{1, 100})$ распределены равномерно на отрезке $[0; 1]$. Написать приближенное выражение для плотности распределения случайной величины $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$, а также вероятность того, что $55 < Y < 70$.

115. Определить, сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью не менее 0,99 можно было утверждать, что относительная частота выпадения пятёрки будет находиться в пределах от $1/6 - 0{,}05$ до $1/6 + 0{,}05$?

ОТВЕТЫ

1. $\Omega=\{1,2,\ldots\}$; $A=\{4\}$; $B=\{4,5,\ldots\}$; $C=\{1,2,3\}$. Пары несовместных событий: *A* и *C*, *B* и *C*. **2.** $\Omega=\{(k,m):k,m=\overline{1,6}\}$; $A=\{(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)\}$; $B=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(4,6),(6,4),(5,5)\}$; $C=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$; $D=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$. Пары несовместных событий: *A* и *B*, *A* и *C*, *B* и *C*. **3.** а) *B*; б) *A*; в) герб выпал на 2-х или на 3-х монетах или вообще не выпал ни на одной монете; г) герб не выпал ни на одной монете; д) герб выпал на 2-х или на 3-х монетах. **4.** а) ничья; б) *B*; в) ничья; г) *B*. **5.** а) не выигран телевизор; б) нет выигрыша; в) есть выигрыш, но выигран не телевизор; г) *B*. **6.** $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ (элементарное событие ω_i – в выборке *i* чёрных шаров); $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}=\Omega$; $B=\{\omega_2,\omega_3\}$; $C=\{\omega_2,\omega_3\}$; $D=\{\omega_1,\omega_2\}$; $DC=$ $=\{\omega_2\}$; $D-C=\{\omega_1\}$; $\overline{C}=\{\omega_1\}$; $\overline{B}C=\varnothing$. **7.** $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+$ $+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$; $B=A_1+A_2+A_3$; $C=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$; $D=A_1A_2+A_2A_3+$ $+A_1A_3$; $E=\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. **8.** $C=(A_1+A_2)(B_1B_2+B_2B_3+B_1B_3)$. **9.** $A=$ $=A_1(A_2A_3+A_4)$; $\overline{A}=\overline{A}_1+(\overline{A}_2+\overline{A}_3)\overline{A}_4$. **10.** $A=(A_1+A_2)A_3(A_4+A_5)$; $\overline{A}=\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_3+\overline{A}_4\overline{A}_5$. **11.** 0,5. **12.** $P(A)=\frac{1}{216}$; $P(B)=\frac{1}{36}$; $P(C)=\frac{5}{54}$. **13.** $\frac{7}{9}$. **14.** $\frac{2}{7}$. **15.** $\frac{81}{1001}$. **16.** $\frac{1}{3}$; $\frac{2^{n-m-2}C_{n-2}^m}{3^n}$ $(0\le m\le n-2)$; $\frac{2^{n-m}C_n^m}{3^n}$ $(0\le m\le n)$. **17.** $\frac{1-\ln 2}{2}\approx 0{,}153$. **18.** $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{12}$. **19.** $1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}134$. **20.** $\frac{139}{1152}$. **21.** $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$. **22.** $P(B\,|\,A)=\frac{2}{9}$, $P(A\,|\,B)=\frac{2}{9}$, $P(A\,|\,C)=\frac{9}{16}$. Все пары – зависимые события. Нет. **23.** $P(A\,|\,B)=\frac{2}{3}$, $P(B\,|\,A)=\frac{1}{2}$, $P(A\,|\,C)=\frac{3}{5}$, $P(C\,|\,A)=\frac{3}{4}$, $P(B\,|\,C)=\frac{7}{15}$, $P(C\,|\,B)=\frac{7}{9}$. *A* и *B* независимы; *A* и *C*, *B* и *C* зависимы. Нет. **24.** Да. **25.** Да. Нет. **26.** $\frac{1}{4}$. **27.** $\frac{1}{48}$. **28.** $\frac{1}{420}$. **29.** $\frac{5}{1764}$. **30.** а) $\frac{27}{125}$; б) $\frac{1}{6}$. **31.** $\frac{2}{51}$. **32.** $\frac{7}{15}$. **33.** $\approx 0{,}337$. **34.** $0{,}65$. **35.** $0{,}154$. **36.** $0{,}8736$. **37.** $\frac{6}{11}$, $\frac{5}{11}$. **38.** $0{,}424$; $0{,}24$; $0{,}336$. **39.** $0{,}99976$. **40.** $n\ge 10$. **41.** $\frac{31}{80}$. **42.** $0{,}52$. **43.** $0{,}445$. **44.** $0{,}99$.

45. 0,785. **46.** 1) 0,91. 2) От второго. **47.** $\frac{2}{3}$. **48.** $\frac{4}{19}$. **49.** а) $\approx 0{,}58$; б) $\approx 0{,}002$. **50.** а) 0,041; б) 0,044. **51.** 0,663. **52.** 0,0328. **53.** Данные события равновероятны. **54.** $n \ge 7$. **55.** 14; 0,343. **56.** 2. **57.** 22 или 23. **58.** $14 \le n \le 17$. **59.** $\approx 0{,}3679$; $\approx 0{,}9197$; $\approx 0{,}0803$. **60.** а) $\approx 0{,}154$; б) $\approx 0{,}763$. **61.** $n \ge 300$. **62.** $\approx 0{,}0782$. **63.** $\approx 0{,}0080$. **64.** $\approx 0{,}0021$. **65.** $\approx 0{,}9963$. **66.** $\approx 0{,}9938$. **67.** а) $\approx 0{,}024$; б) $\approx 0{,}8665$. **68.** $\approx 0{,}9903$.

69.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,7	0,21	0,063	0,0189	0,0081

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0{,}7 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}91 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 0{,}973 & \text{при } 3 < x \le 4, \\ 0{,}9919 & \text{при } 4 < x \le 5, \\ 1 & \text{при } x > 5; \end{cases} \qquad P(2 < X < 5) = 0{,}0819.$$

70.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,44	0,32	0,12	0,08	0,04

$M(X) = 0{,}96$, $D(X) = 1{,}2384$.

71. 1) $c = \frac{1}{55}$; 2) $M(X) = \frac{45}{11}$; 3) $D(X) = \frac{644}{605}$; 4) $\sigma(X) \approx 1{,}032$; 5) $P(|X-2| \le 1) = \frac{14}{55}$. **72.** $P(X \ge 3{,}5) = 0{,}5$, $P(|X| < 2{,}5) = 0{,}3$.

73. $M(X) = 0{,}721$, $D(X) \approx 0{,}503$. **74.** $M(X) = 1$, $\sigma(X) \approx 1{,}154$.

75.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,378

$M(X) = 3{,}15$, $D(X) = 0{,}6475$.

76.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 0{,}216 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0{,}648 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}936 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

1) $P(X < 2) = 0{,}648$, $P(1 \le X < 3) = 0{,}72$, $P(1 < X \le 3) = 0{,}352$;

2) $M(X) = 1{,}2$, $D(X) = 0{,}72$, $\sigma(X) \approx 0{,}849$.

77. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 3,\\ 0{,}8 & \text{при } 3<x\le 4,\\ 1 & \text{при } x>4.\end{cases}$ **78.** $a=\dfrac{1}{8}$; $p(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2 & \text{при } 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } x>2.\end{cases}$

79. $M(X)=2$; $D(X)=0{,}5$; $\sigma(X)\approx 0{,}707$.

80. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{2} & \text{при } 0<x\le 1,\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-2 & \text{при } 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2;\end{cases}$ $P(0{,}5\le X\le 1)=\dfrac{3}{8}$.

81. а) $a=\dfrac{1}{2}$; б) $M(X)=0$, $D(x)=2$. **82.** а) $a=\dfrac{1}{\pi}$, $F(x)=$ $=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}arctg\,x$; б) $P(X>\sqrt{3})=\dfrac{1}{6}$; в) $M(X)=0$. **83.** $P(X\ge 1)=0{,}75$; $M(X)=\dfrac{4}{3}$; $D(X)=\dfrac{2}{9}$. **84.** $\dfrac{1}{e}$. **85.** а) $P(4<X<7)\approx 0{,}5328$; б) $P(|X-m|<0{,}3)\approx 0{,}1192$. **86.** $(9{,}7;10{,}3)$.

87. $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^3}{R^3} & \text{при } 0<x\le R,\\ 1 & \text{при } x>R;\end{cases}$ $p(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{R^3} & \text{при } 0<x\le R,\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } x>R;\end{cases}$

$M(X)=\dfrac{3}{4}R$; $D(X)=\dfrac{3}{80}R^2$.

88.

x_i \ y_j	0	1
0	0	0,5
1	0,25	0,25

x_i	0	1
p_i	0,5	0,5

y_j	0	1
p_j	0,25	0,75

$F(x,y)$:

x \ y	$y\le 0$	$0<y\le 1$	$y>1$
$x\le 0$	0	0	0
$0<x\le 1$	0	0	0,5
$x>1$	0	0,25	1

89. а)

x_i	0,5	2,5
p_i	0,29	0,71

y_j	10	20	30	40
p_j	0,14	0,42	0,19	0,25

б) $F(2{,}5;\,25)=0{,}17$, $F(9;11)=0{,}14$, $P(2\le X<9,\ 10\le Y<30)=0{,}5$; в) нет.

90.

$x_i \backslash y_j$	1	3	5
2	0,25	0,05	0,1
4	0,15	0,3	0,15

91.

x_i	1	2	3
$P(X=x_i \mid Y=2)$	0,2	0,4	0,4

$r_{XY}\approx 0{,}0688$.

92. $c=1$; $P(X+Y<1)=\dfrac{1}{3}$; $r_{XY}=-\dfrac{1}{11}$.

93. $p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & \text{при } -1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2,\\ 0 & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1 \text{ или } y\le 1,\\ \dfrac{1}{3}(x+1)(y-1) & \text{при } -1<x\le 2,\ 1<y\le 2,\\ \dfrac{1}{3}(x+1) & \text{при } -1<x\le 2,\ y>2,\\ y-1 & \text{при } x>2,\ 1<y\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2,\ y>2;\end{cases}$$

компоненты независимы.

94. Зависимы.

95. $p_X(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2} & \text{при } x\in[0,\,2],\\ 0 & \text{при } x\notin[0,\,2];\end{cases}$ $p_Y(y)=\begin{cases}2-2y & \text{при } y\in[0,1],\\ 0 & \text{при } y\notin[0,1];\end{cases}$

$$p_X(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y} & \text{при } 0<x<2-2y,\\ 0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } x\ge 2-2y,\end{cases}\qquad \text{где } 0\le y<1;$$

$$p_Y(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-x} & \text{при } 0<y<1-\dfrac{x}{2},\\ 0 & \text{при } y\le 0 \text{ или } y\ge 1-\dfrac{x}{2},\end{cases}\qquad \text{где } 0\le x<2.$$

Зависимы.

96. а) $c=\dfrac{3}{4}$; б) $F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0,\\ \dfrac{x^2y^3}{8} & \text{при } 0<x\le 1,\ 0\le y\le 2,\\ x^2 & \text{при } 0<x\le 1,\ y>2,\\ \dfrac{y^3}{8} & \text{при } x>1,\ 0<y\le 2,\\ 1 & \text{при } x>1,\ y>2.\end{cases}$

97. $p(x,y)=\begin{cases}2^{-x-y}\ln^2 2 & \text{при } x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0 & \text{при } x<0 \text{ или } y<0;\end{cases}$

$P(1\le X\le 2,\ 3\le Y\le 5)=\dfrac{3}{128}$.

98.

x_i	0	2	4	6
p_i	5/16	15/32	3/16	1/32

99.

z_i	–2	–1	0	1	2
p_i	0,08	0,32	0,10	0,40	0,10

100. $F_Z(z)=\begin{cases}0 & \text{при } z\le -1,\\ 0{,}2 & \text{при } -1<z\le 0,\\ 0{,}9 & \text{при } 0<z\le 1,\\ 1 & \text{при } z>1.\end{cases}$ **101.** $F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\le 1,\\ \dfrac{\sqrt{y-1}}{3} & \text{при } 1<x\le 10,\\ 1 & \text{при } x>10.\end{cases}$

102. а) $p_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\le 0,\\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2} & \text{при } y>0;\end{cases}$ б) $p_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\le 0,\\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{y}}e^{-\lambda\sqrt{y}} & \text{при } y>0.\end{cases}$

103. $p_Z(z)=\dfrac{1}{\pi(1+z^2)}$. **104.** $M(Y)=1$, $D(Y)=9/7$. **105.** $M(Z)=a/3$, $D(Z)=a^2/18$. **106.** $M(Z)=0{,}2$, $D(Z)=1{,}16$. **107.** $p\le 0{,}2$. **108.** $p\le\dfrac{1}{9}$. **109.** Да. **110.** $n\ge 90$. **111.** $p\ge 0{,}84$. **112.** (–0,0283; 0,0283). **113.** $n\ge 36$.

114. $p_Y(y)\approx\dfrac{3}{5\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{3(y-50)^2}{50}}$; $P(55<Y<70)\approx 0{,}04$. **115.** $n\ge 368$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородич, С.М. Теория вероятностей и математическая статистика : методические рекомендации / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2015. – 51 с.

2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 404 с.

4. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.

5. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / А.В. Печинкин [и др.]; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с.

Учебное издание

БОРОДИЧ Сергей Митрофанович

КАВИТОВА Татьяна Валерьевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задания для самостоятельной работы

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Л.Р. Жигунова*

Подписано в печать . .2016. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 1,56. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.